

## Il problema di De Saint Venant

Il problema dell'equilibrio elastico d'un solido prismatico è stato risolto rigorosamente da De Saint Venant nelle seguenti ipotesi:

- 1) Solido elastico generato da figura piana traslante in direzione normale alla sua giacitura per descrivere con il suo baricentro una traiettoria di lunghezza molto grande rispetto alle dimensioni trasversali della sezione (trave elastica).
- 2) Materiale omogeneo e isotropo
- 3) Forze di massa nulle.
- 4) Solido sollecitato e vincolato esclusivamente in corrispondenza delle basi
- 5) Stato di tensione biassiale, vale a dire che tra le fibre longitudinali non si esercitino azioni mutue di compressione o trazione.

Per ciascuna delle sollecitazioni semplici esiste la soluzione analitica esatta

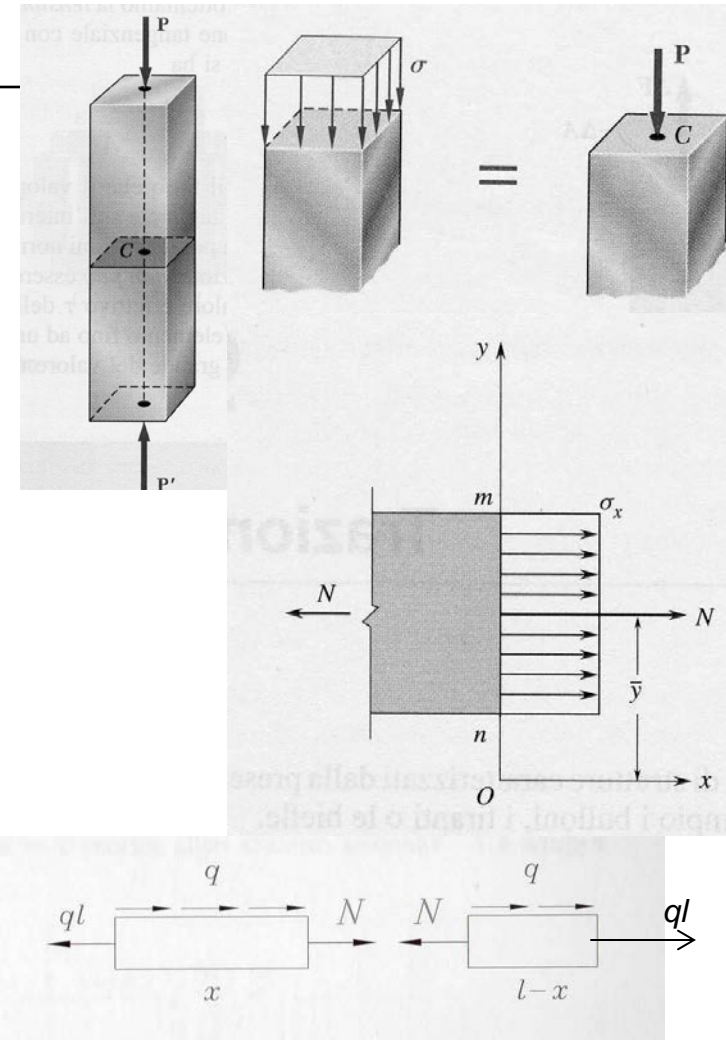
# Carico assiale

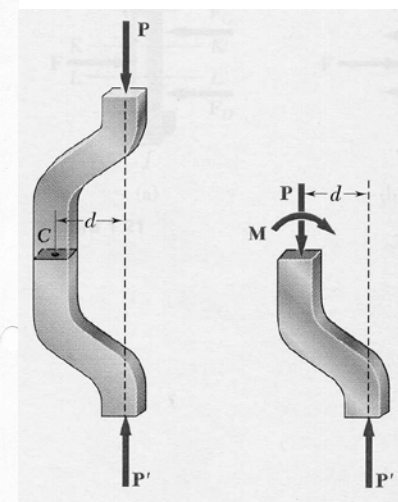
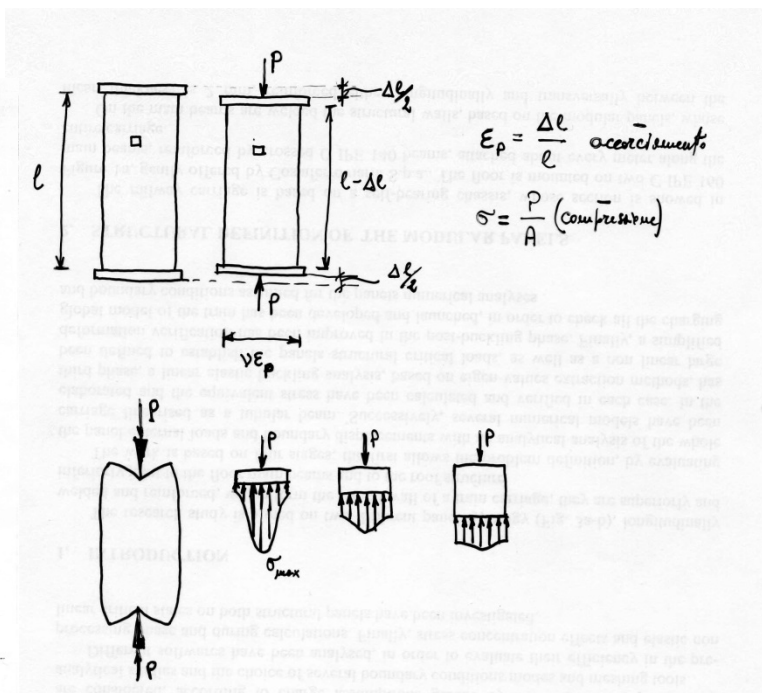
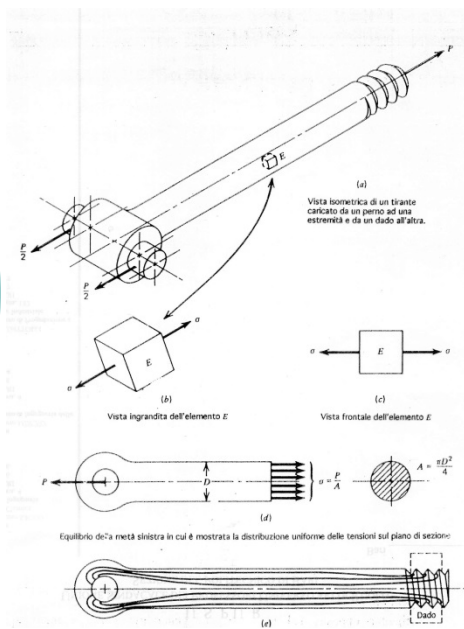
Nelle ipotesi menzionate precedentemente, e aggiungendo le altre di:

- asse della trave perfettamente rettilineo;
- sezione costante senza fori, intagli, filettature, imperfezioni interne.
- equilibrio stabile, intendendo per esso, la condizione che corrisponde all'applicazione sufficientemente lenta dei carichi, tale da poter escludere fenomeni di urto e di instabilità;

per un carico esattamente baricentrico, la distribuzione delle tensioni è uniforme in tutta la sezione nella direzione del carico, secondo la relazione  $\sigma = N/A$  oppure  $\int \sigma \, dA = N$

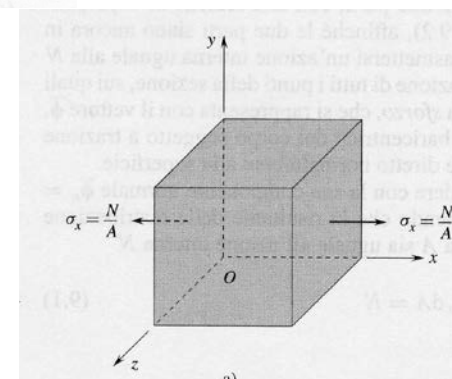
che interpreta la condizione di una distribuzione media del carico sulla sezione.



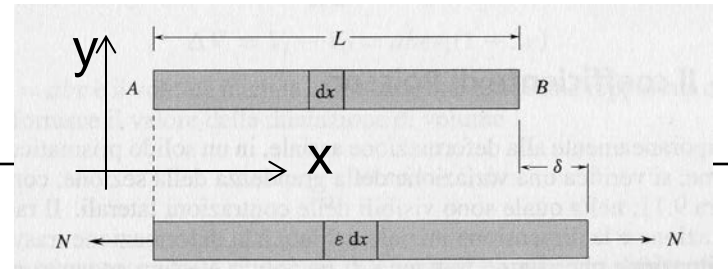


Se estraiamo un elementino cubico, sulla faccia normale al carico la sollecitazione che compare è la sola tensione normale. Le sollecitazioni tangenziali sono nulle e quindi la sollecitazione derivante dallo sforzo normale è **tensione principale**.

Lo stato di tensione è quindi monoassiale in quanto le altre tensioni principali sono nulle.



Da un punto di vista deformativo se si sottopone una barretta di lunghezza L ad una sollecitazione normale, essa si allunga di una quantità  $\Delta L = \delta$  che vien detto allungamento assoluto.



Si definisce invece allungamento relativo (accorciamento relativo per una sollecitazione di compressione) nella direzione del carico, la quantità

$$\epsilon_{xx} = (-)\delta/L \quad [\text{m/m}]$$

Se L è costante, vale a dire siamo in campo elastico  $\epsilon_{xx} = (L_f - L_i)/L_i = \Delta L/L$

Nei solidi assimilabili a travi, per piccoli allungamenti si osserva una diretta proporzionalità con la  $\sigma_{xx}$  che l'ha prodotta

Tale proporzionalità, è espressa dalla legge di Hooke per uno stato di tensione monoassiale con la relazione  $\sigma_{xx} = E \epsilon_{xx}$  con E *modulo di elasticità normale o modulo di Young* con dimensioni di una tensione  $[\text{N/mm}^2] = [\text{MPa}]$

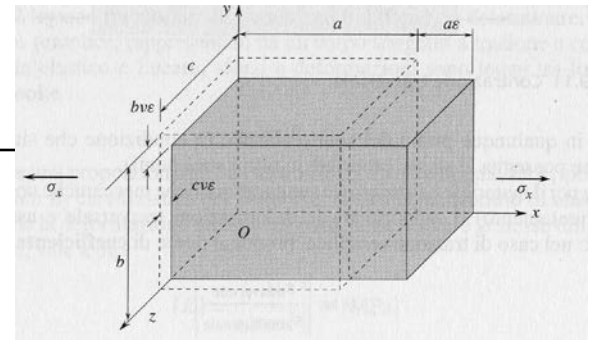
Ricordando le relazioni precedenti della tensione normale e dell'allungamento si può scrivere  $N/A = E \Delta L/L$  da cui  $\Delta L = \delta = NL/EA$  e definire

**rigidezza assiale** il rapporto  $k = N/\delta$  con  $k = EA/L$  mentre con il reciproco

$1/k = L/EA$  si definisce la **cedevolezza assiale**.

Se  $L$  è variabile, vale a dire non c'è più proporzionalità tra causa ed effetto come è tipico del campo plastico, si deve calcolare l'allungamento mediante incrementi infinitesimi di spostamento

$$d\varepsilon_{xx} = \frac{dL}{L} \quad \varepsilon_{xx} = \int_{L_i}^{L_f} \frac{dL}{L} = \ln \frac{L_f}{L_i}$$



Contemporaneamente all'allungamento longitudinale in un solido prismatico soggetto a trazione, si riscontra una variazione della sezione trasversale.

Il rapporto tra contrazione e dimensione iniziale dei lati  $b$  e  $c$  della sezione prende il nome di **contrazione laterale**. La contrazione laterale si esprime ugualmente con  $\varepsilon_{yy} = \Delta b/b$   $\varepsilon_{zz} = \Delta c/c$  il cui legame rispetto alla deformazione longitudinale si esprime attraverso il coefficiente di Poisson  $\nu$  per cui

$$\varepsilon_{yy} = \varepsilon_{zz} = -\nu \varepsilon_{xx} \quad \text{per un materiale omogeneo.}$$

Per i metalli il coefficiente di Poisson è compreso fra 0,25 e 0,35. Insieme ad  $E$  è sufficiente a caratterizzare il materiale elastico.

Le deformazioni fin qui considerate sono di natura elastica, ma è utile citare il fatto che possono essere prodotte anche da differenze di temperatura. In tal caso per le strutture monodimensionali (travi) interviene il *coefficiente di dilatazione termica lineare*  $\alpha$  e quindi la relazione più generale al riguardo per gli

allungamenti nella direzione del carico è del tipo  $\varepsilon_{xx} = \sigma_{xx}/E + \alpha\Delta T$

Nel caso di strutture tridimensionali il coefficiente di dilatazione è quello «cubico» diverso da quello lineare in quanto tien conto delle variazioni dimensionali nelle tre direzioni. Per un materiale omogeneo ed isotropo nel caso di un elemento cubico di lati  $abc$ , il calcolo della coefficiente termico ( $\varepsilon_v$ ) va impostato sul rapporto tra la variazione di volume  $\Delta V$  e il volume primitivo ( $V_o$ ). Pertanto

$$V_f = abc(1 + \varepsilon_l)(1 - \nu\varepsilon_l)(1 - \nu\varepsilon_l)$$

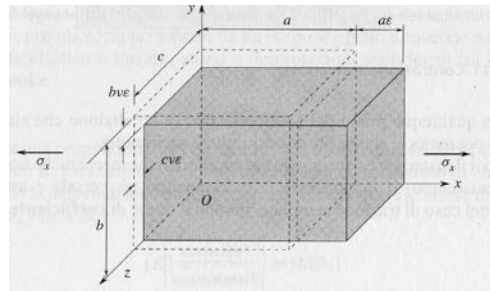
$$V_f = abc(1 + \varepsilon_l - 2\nu\varepsilon_l)$$

$$\Delta V = V_f - V_o = abc\varepsilon_l(1 - 2\nu)$$

$$\varepsilon_v = \frac{\Delta V}{V_o} = \varepsilon_l(1 - 2\nu)$$

$$\varepsilon_v > 0 \text{ per } \nu < 0.5$$

Per  $\nu=0,5$   $\varepsilon_v = 0$ , la qual cosa si verifica per i metalli in campo plastico



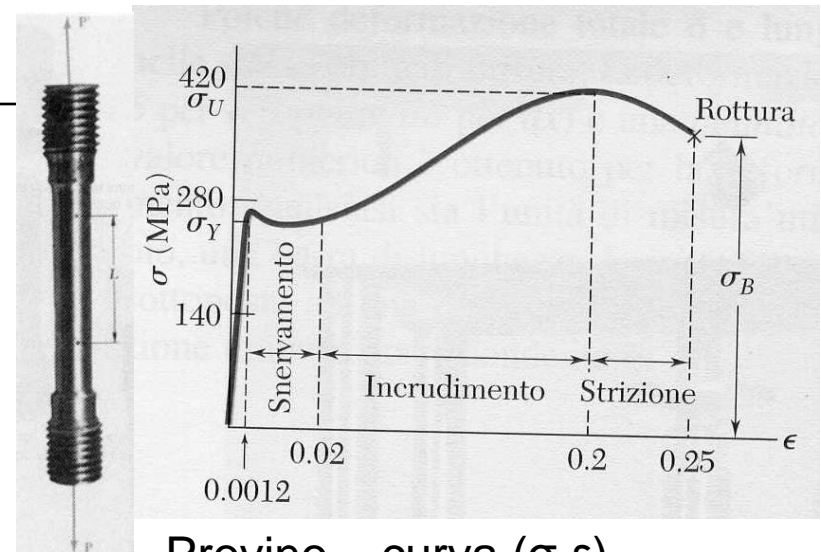


## Comportamento meccanico dei materiali

Le proprietà meccaniche di resistenza dei materiali che si sono evocate nella prima lezione come limiti di sicurezza nella progettazione delle strutture e componenti meccanici, si ricavano da una prova sperimentale che riproduce un carico assiale puro.

Sottoponendo a sforzo assiale un cilindretto (provino) di materiale duttile, nella sezione centrale dello stesso, dove i parametri di sforzo e deformazione sono uniformi, dall'esame della curva costitutiva del materiale ( $\sigma, \epsilon$ ) e di seguito riportata, si possono distinguere le seguenti fasi:

- Elasticità (lineare e non);
- snervamento;
- plasticità e incrudimento;
- frattura



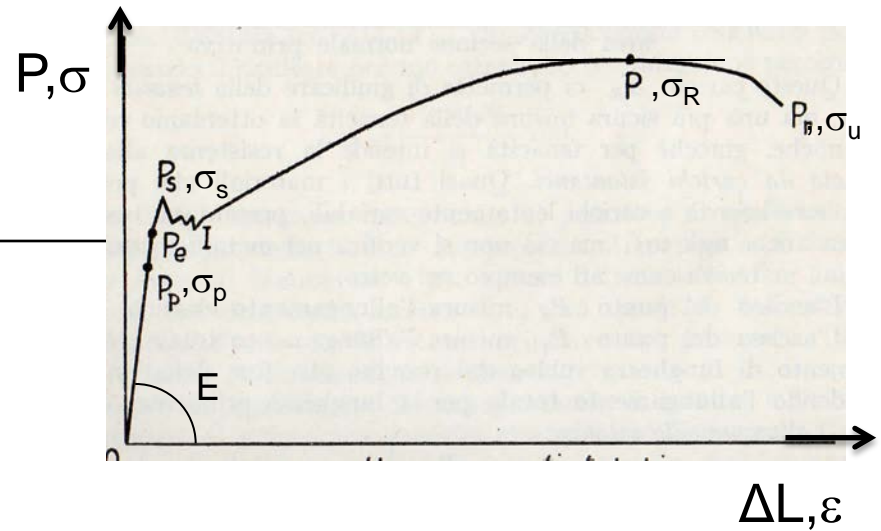
Provino – curva ( $\sigma, \epsilon$ )

Il primo tratto è lineare e visualizza un comportamento elastico del materiale in quanto al crescere dello sforzo aumenta la deformazione, ma al diminuire di carico, diminuisce anche la deformazione al punto che all'annullarsi del carico si azzera anche la deformazione

Il primo tratto lineare è seguito da un secondo tratto elastico non lineare che ha termine con il limite di elasticità. Per diagrammi di questo tipo in termini sforzo-deformazione, lo sforzo che separa il tratto lineare da quello non lineare prende il nome di **limite di proporzionalità**.

In questo tratto trova applicazione la legge di Hooke già citata nella forma proporzionale  $\sigma = E \cdot \varepsilon$ . Il modulo di elasticità  $E$  rappresenta la pendenza del tratto (tangente dell'angolo).

La determinazione del limite di elasticità è piuttosto tediosa e dipende dalla sensibilità degli strumenti di misura delle deformazioni. Per questa ragione esso è spesso sostituito dal limite di proporzionalità che stabilisce la tensione a cui la curva devia rispetto alla linearità.



$P_p, \sigma_p$  limite di proporzionalità

$P_e, \sigma_e$  limite di elasticità  
si accetta una deformazione residua pari a  $10^{-5}$

$P_s, \sigma_s$  limite di snervamento  
si accetta una deformazione residua pari a 0,2%

$P_R, \sigma_R$  limite massimo

$P_u, \sigma_u$  limite di rottura

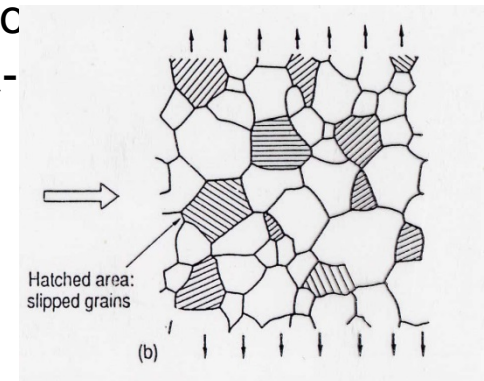


Superando il limite di elasticità il corpo in esame passa ad un comportamento plastico caratterizzato da una permanenza nelle condizioni deformate anche quando il carico viene rimosso. Un corpo permanentemente deformato è detto aver subito una **deformazione plastica** ed il fenomeno che introduce questo cambiamento di comportamento si chiama **snervamento**.

In realtà per un materiale duttile, lo snervamento si manifesta attraverso una oscillazione grafica della curva costitutiva che si spiega considerando che i grani cristallini, essendo diversamente orientati rispetto al carico non assorbono ugualmente il carico applicato. Alcuni raggiungono il carico di plasticizzazione prima di altri e pertanto si allungano più di altri dando luogo ad una resistenza alla plasticizzazione variabile. Solo quando tutti i grani cristallini hanno superato il limite elastico, il solido riprende ad allungarsi nella fase di incrudimento. Nel caso il materiale non manifesti questo fenomeno come cedimento parziale dei grani, lo snervamento viene valutato come tensione che produce convenzionalmente una deformazione dello 0,2%.

La deformazione plastica del cilindretto in sperimentazione comincia appena superato il limite di elasticità.

Mano a mano che la deformazione evolve e cresce, il materiale ha bisogno di sempre maggiore forza per deformarsi

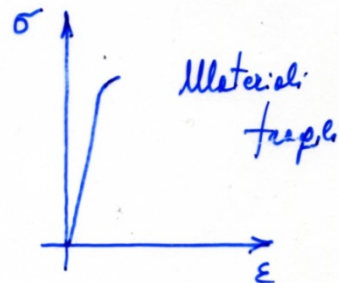
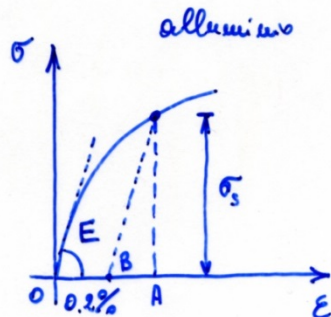
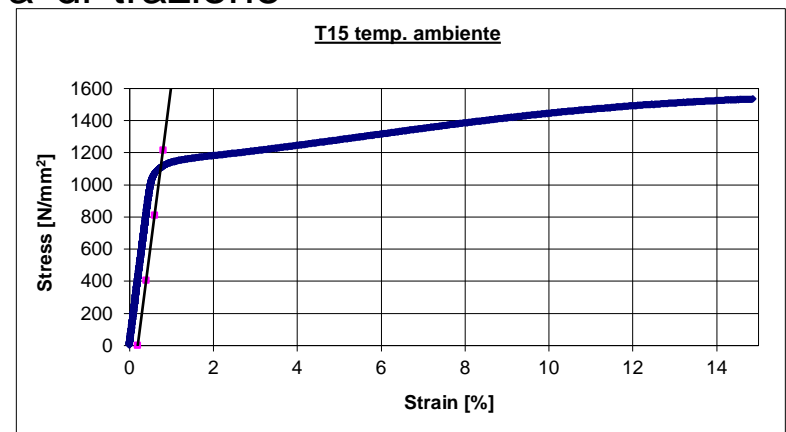
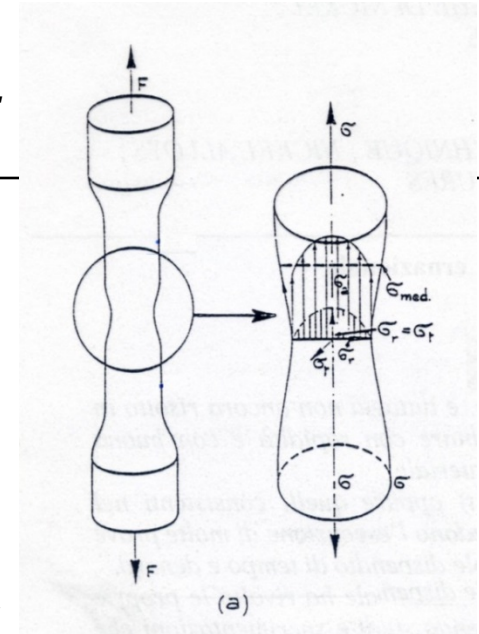


dando luogo all'**incrudimento**.

Il carico massimo corrisponde convenzionalmente al **limite di resistenza** del materiale.

Per un metallo duttile, dopo aver superato il carico massimo, la sezione del «tratto utile» diminuisce rapidamente (**strizione**) fino alla frattura del provino.

Un materiale a comportamento completamente fragile fa osservare la frattura in corrispondenza del limite elastico. Materiali come la ghisa permettono di misurare deboli deformazioni plastiche sulla superficie di frattura. In definitiva le caratteristiche meccaniche di maggior interesse che vengono ricavate dalla curva di trazione sono:



- Sforzo unitario massimo o di resistenza alla trazione, dato dal rapporto fra il carico massimo e la sezione iniziale, misurato in [N/mm<sup>2</sup>];
- Sforzo unitario di snervamento, dato dal rapporto fra il carico di snervamento e la sezione iniziale, misurato in [N/mm<sup>2</sup>];
- Allungamento percentuale, dato dall'allungamento permanente della lunghezza utile dopo rottura espresso in % rispetto alla lunghezza utile iniziale;
- Coefficiente di strizione o contrazione, dato dal rapporto tra area della sezione utile iniziale e l'area ottenuta alla rottura espresso in %.

$$\sigma_R = F_{\max}/S_0$$

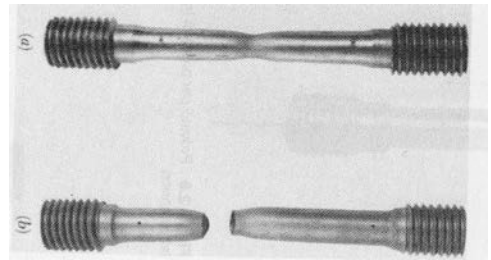
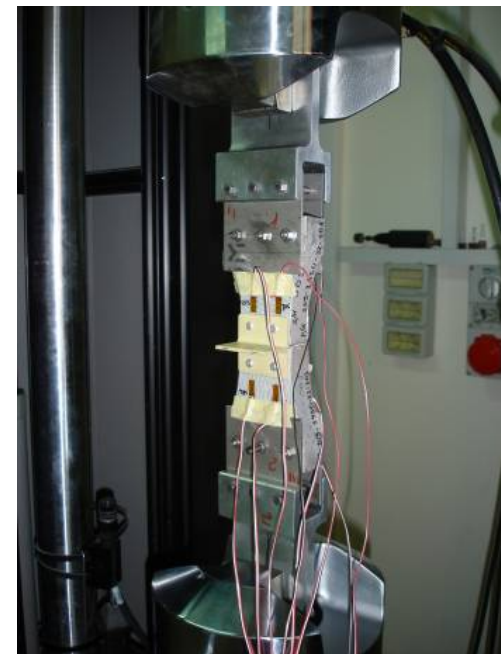
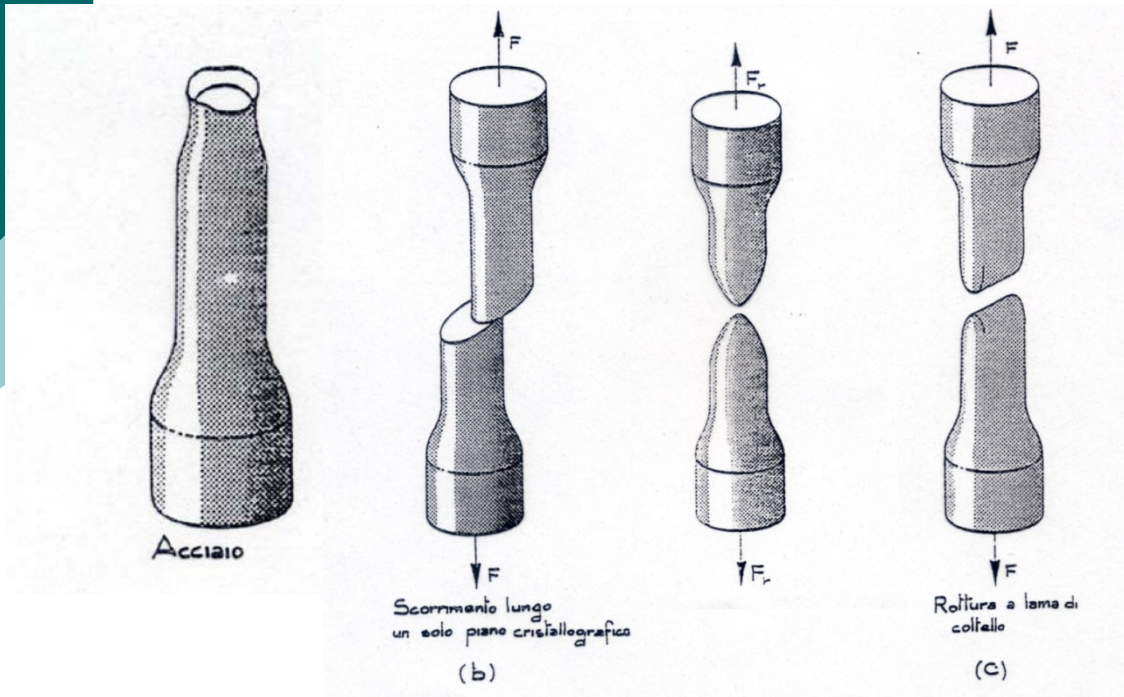
---

$$\sigma_s = F_s/S_0$$

$$A = (L_f - L_i)/L_i$$

$$Z = (S_f - S_i)/S_i$$

Il risultato di queste sequenze è spesso la ben conosciuta superficie di frattura a coppa e cono.

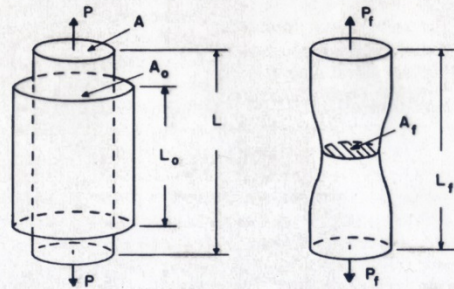


# Curva reale di trazione

- La curva nominale di trazione fornisce i valori caratteristici di tensione di rottura e di snervamento che vengono utilizzati per la verifica e la progettazione
- Per questa ragione tale curva viene detta anche curva ingegneristica
- Tale curva però non descrive perfettamente cosa accade nel materiale dopo lo snervamento, in quanto fa riferimento a grandezze nominali, misurate cioè prima della prova
- Se si vuole descrivere con maggiore precisione il comportamento del materiale, è necessario utilizzare i valori istantanei di lunghezza e sezione
- Si ottiene così la curva reale di trazione



# Grandezze reali e nominali



■ Grandezze nominali:  $s = \frac{F}{A_0}$        $e = \frac{\Delta l}{l_0}$

$$d\varepsilon = \frac{dl}{l_0}$$

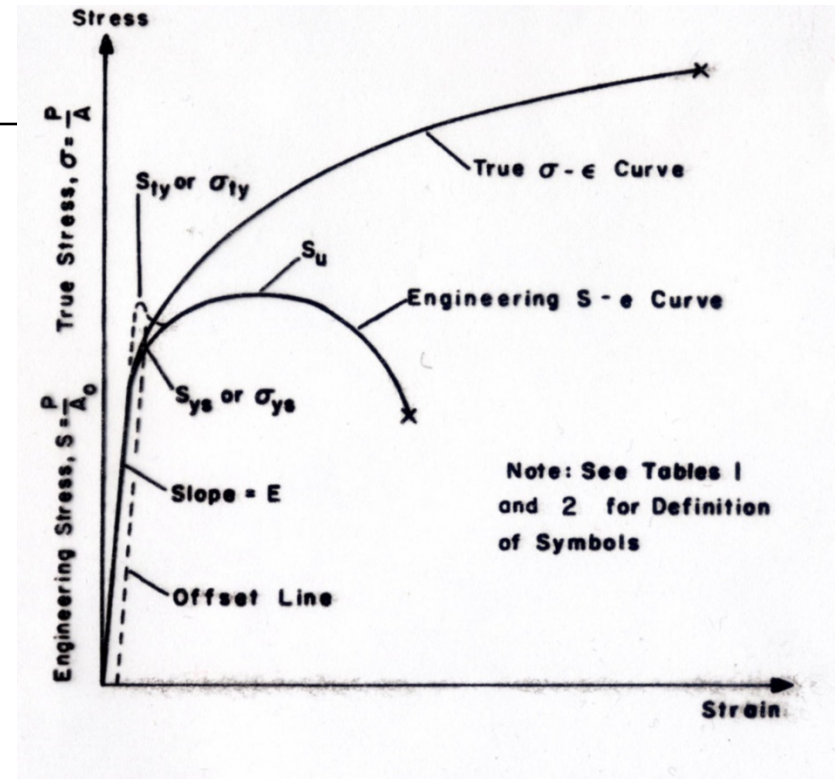
$$d\varepsilon = \frac{dl}{l}$$

$$\int_{l_0}^l d\varepsilon = \int_{l_0}^l \frac{dl}{l_0}$$

$$\int_{l_0}^l d\varepsilon = \int_{l_0}^l \frac{dl}{l}$$

$$e = \frac{l - l_0}{l_0} = \frac{\Delta l}{l_0}$$

$$\varepsilon = \ln\left(\frac{l}{l_0}\right)$$



■ Grandezze reali:  $\sigma = \frac{P}{A}$        $\varepsilon = \int_{l_0}^l \frac{dl}{l} = \ln\left(\frac{l}{l_0}\right)$



## Relazione tra grandezze reali e nominali

- Deformazione reale

$$e = \frac{\Delta l}{l_0} = \frac{l - l_0}{l_0} = \frac{l}{l_0} - 1 \Rightarrow \frac{l}{l_0} = 1 + e \longrightarrow \boxed{\varepsilon = \ln\left(\frac{l}{l_0}\right) = \ln(1 + e)}$$

- Nel campo plastico, risulta valida l'ipotesi di deformazione a volume costante:

$$A_0 \cdot l_0 = A \cdot l \Rightarrow \frac{l}{l_0} = \frac{A_0}{A}$$

- Tensione reale

$$\boxed{\sigma = \frac{P}{A} \cdot \frac{A_0}{A_0} = \frac{P}{A_0} \cdot \frac{A_0}{A} = s(1 + e)}$$

## *Relazione tra grandezze reali e nominali*

- La curva reale di trazione è monotona
- Rispetto alle grandezze nominali, quelle reali sono amplificate nei valori di tensione e ridotte in quelle di deformazione
- Le grandezze reali si discostano da quelle nominali solo nel campo plastico
- Le relazioni tra grandezze reali e nominali non valgono oltre la strizione, per effetto della disuniformità della tensione nella sezione
- Esempio di discordanza tra deformazioni nominali e reali

$e$	0.01	0.1	0.2	0.5	1.0	4.0
$\varepsilon$	0.01	0.095	0.182	0.405	0.693	1.609

Il concetto di deformazione vera può essere messo in evidenza attraverso il seguente esempio.

Si consideri un cilindro a sezione costante che subisce un allungamento pari a due volte la sua lunghezza utile originale.

La deformazione lineare è quindi data da

$$\varepsilon = \frac{2l_o - l_o}{l_o} = 1,00 \quad \text{pari al 100\%}$$

Per ottenere il 100% in compressione, secondo il concetto di deformazione lineare il cilindro dovrebbe essere schiacciato fino ad una lunghezza nulla. Intuitivamente si comprende che l'accorciamento deve essere la metà della lunghezza utile.

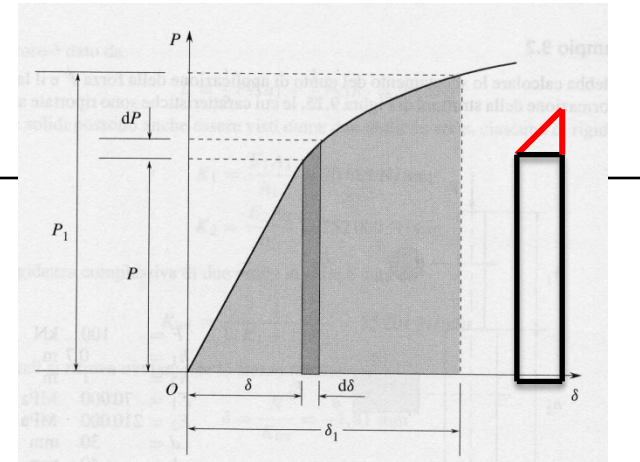
Attraverso il concetto di deformazione vera invece si ottiene lo stesso risultato di deformazione:

$$\varepsilon = \ln \frac{2l_o}{l_o} = \ln 2 = 0,69 \quad \varepsilon = \ln \frac{l_o/2}{l_o} = \ln \frac{1}{2} = -\ln 2 = -0,69$$

## Lavoro di deformazione/Energia elastica

L'osservazione sulla curva sforzi-deformazione permette di introdurre un ulteriore concetto: quello di energia elastica, associata alla deformazione del componente sollecitato.

Nel caso della trazione, nelle ipotesi di incremento graduale del carico - attraverso una successione continua di stati di equilibrio - se si riporta su una diagramma l'andamento della forza in funzione dello spostamento, invece dei corrispondenti parametri unitari, si ottiene il diagramma in figura, simile a quello considerato in precedenza. Da esso si evince che se si incrementa la forza di  $dP$  anche lo spostamento cresce di  $d\delta$ , la qual cosa ci permette di calcolare il lavoro elementare compiuto dalla forza e quindi il lavoro complessivo



$$dL = Pd\delta + \frac{1}{2}dPd\delta$$

trascurando gli infinitesimi di ordine superiore

$$L = \int_0^{\delta} Pd\delta$$

Il lavoro così calcolato va ad incrementare l'energia di deformazione sviluppata dal componente nel corso della sua deformazione per effetto della sollecitazione. Se poniamo  $P = k\delta$  come funzione lineare rappresentativa dell'andamento del componente nel tratto elastico, si ottiene l'energia di deformazione elastica pari all'area al di sotto del tratto lineare della curva  $(P,\delta)$

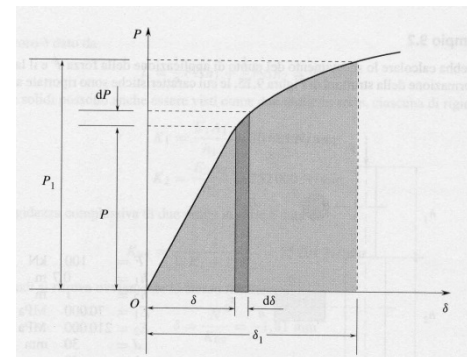
[Teorema di Clapeyron].

$$U = \int_0^{\delta} k\delta d\delta = \frac{1}{2} k\delta^2 = \frac{1}{2} P\delta$$

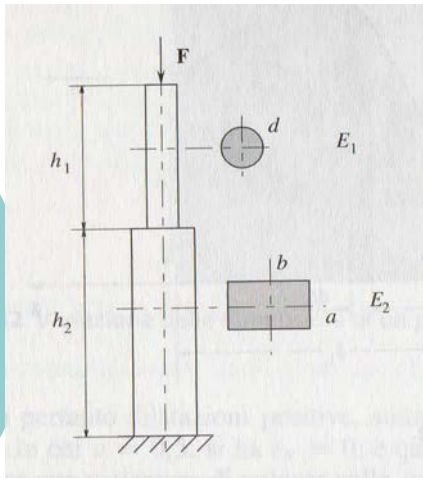
Il lavoro e l'energia sono misurati con le stesse unità dimensionali e pertanto nel sistema SI si esprimono in  $[N.m] = \text{joule [J]}$ .

Se ora dividiamo il lavoro di deformazione per il volume di riferimento, definiamo l'energia di deformazione associata all'unità di volume o densità di energia di deformazione.

$$\Psi = \frac{L}{V} = \frac{P\delta}{2Al} = \frac{1}{2} \sigma \varepsilon = \frac{\sigma^2}{2E}$$



## Esercizio n. 26



Calcolare lo spostamento del punto di applicazione della forza  $F$  e il lavoro di deformazione della struttura in figura le cui caratteristiche sono riportate sotto:

$$F = 100 \text{ kN} \quad h_1 = 0,7 \text{ m} \quad h_2 = 1 \text{ m}$$

$$E_1 = 70000 \text{ MPa (alluminio)} \quad E_2 = 210000 \text{ MPa (acciaio)}$$

$$d = 30 \text{ mm} \quad b = 40 \text{ mm} \quad a = 30 \text{ mm}$$

L'azione assiale  $N_1 = N_2 = -100000$  nei due tratti è negativa per convenzione.

$$A_1 = \frac{\pi d^2}{4} = 706,8 \text{ mm}^2 \quad A_2 = a \cdot b = 1200 \text{ mm}^2$$

$$\text{Gli sforzi sono} \quad \sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} = -141,5 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \quad \sigma_2 = \frac{N_2}{A_2} = -83,3 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

$$\text{Le deformazioni sono} \quad \varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E_1} = 2021 \cdot 10^{-06} (\mu\varepsilon) \quad \varepsilon_2 = \frac{\sigma_2}{E_2} = 396,7 \cdot 10^{-06} (\mu\varepsilon)$$

$$\text{Variazione di lunghezza} \quad \Delta h_1 = h_1 \cdot \varepsilon_1 = 1,415 \text{ mm}$$

$$\Delta h_2 = h_2 \cdot \varepsilon_2 = 0,397 \text{ mm}$$



L'abbassamento totale richiesto

$$\delta = \Delta h_1 + \Delta h_2 = -(1,415 + 0,397) = -1,812 \text{ mm}$$

---

$$L = \frac{1}{2} F \Delta h_1 + \frac{1}{2} F \Delta h_2 = 90,57 \text{ J} \quad \Delta L_T = \Delta L_1 + \Delta L_2$$

I due solidi possono anche essere visti come due molle in serie, ciascuna di rigidezza

$$K_1 = \frac{E_1 A_1}{h_1} = 70\,685 \text{ N/mm}$$

$$K_2 = \frac{E_2 A_2}{h_2} = 252\,000 \text{ N/mm}$$

$$\frac{\cancel{N}}{k_T} = \frac{\cancel{N}}{k_1} + \frac{\cancel{N}}{k_2}$$

$$\frac{1}{k_T} = \frac{k_2 + k_1}{k_1 k_2}$$

La rigidezza complessiva di due molle in serie è data da

$$k_T = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} \rightarrow K_{\text{tot}} = \frac{1}{1/K_1 + 1/K_2} = 55\,201 \text{ N/mm}$$

e quindi si ritrova ovviamente lo stesso risultato

$$\delta = \frac{N}{K_{\text{tot}}} = -1,81 \text{ mm}$$

## Esercizio n. 27

Un tirante d'acciaio di lunghezza 1,8 m e  $d = 25$  mm è sottoposto ad un carico di 70 kN.

---

Quale allungamento subisce questo tirante?

Quale allungamento subirebbe per un carico doppio?

$$\text{Area tirante } A = \pi d^2/4 = \pi \cdot \frac{25^2}{4} = 490 \text{ mm}^2$$

$$\text{Sforzo unitario } \sigma = \frac{F}{A} = \frac{70000}{490} = 143 \text{ N/mm}^2$$

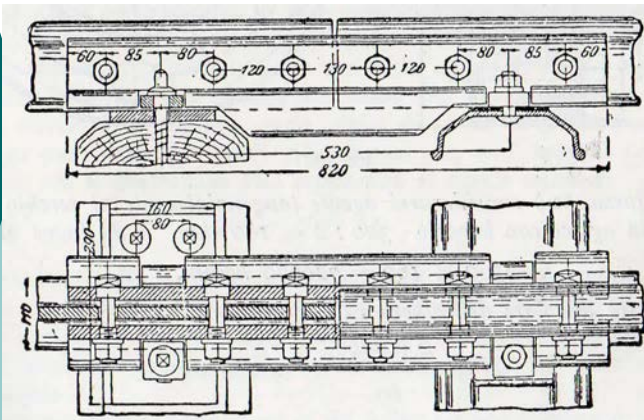
$$\text{Allungamento } \Delta L = \sigma L/E = 143 \cdot 1800/210000 = 1,225 \text{ mm}$$

Raddoppiando il carico si raddoppia anche la tensione interna che superando il limite di elasticità non consente di rispondere alla seconda domanda. Sarebbe opportuno una prova di trazione.

Per poter rispondere infatti dovremmo accertare che

$$2\sigma < \sigma_s$$

## Esercizio n. 28



Calcolare quale sforzo può esercitare una rotaia per effetto della dilatazione termica corrispondente ad una variazione di temperatura di  $40^\circ$  e verificare se può vincere la resistenza di attrito presentata dalle piastre di giunzione. Il giunto è fatto con doppia piastra e 3 bulloni da  $272 \text{ mm}^2$  di sezione resistente (coeff.  $f = 0,4$ )  
 $A_{\text{rot.}} = 6000 \text{ mm}^2$   $L = 12 \text{ m}$   $\sigma_{\text{bull}} = 90 \text{ N/mm}^2$   
 $\alpha = 12 \cdot 10^{-6} \text{ m/}^\circ$

Allungamento termico della rotaia  $\Delta L = L \cdot \alpha \cdot \Delta T = 12000 \cdot 0,000012 \cdot 40 = 5,76 \text{ mm}$

Forza termica  $\Delta L = \frac{FL}{EA}$   $F = \frac{\Delta L \cdot E \cdot A}{L} = \frac{5,76 \cdot 2,1 \cdot 10^5 \cdot 6 \cdot 10^3}{12 \cdot 10^3} = 6,048 \cdot 10^5 \text{ N}$

Forza d'attrito da bullone  $F_{\text{fbull}} = 90 \cdot 272 \cdot 0,4 = 9,79 \text{ kN}$

Forza d'attrito totale sulla rotaia  $F_{\text{fbull}} = 9,79 \cdot 3 = 29,38 \text{ kN}$

Forza d'attrito del giunto sulla rotaia  $F_{\text{fgiunto}} = 29,38 \cdot 2 = 58,752 \text{ kN}$

$F_{\text{fgiunto}} \ll F$  Pertanto la rotaia slitterà rispetto alla giunzione

## Esercizio n. 29

Un tirante d'acciaio viene messo in opera alla temperatura di  $80^\circ$ . Sapendo che il diametro è di 16 mm e che la lunghezza alla temperatura ambiente di  $15^\circ$  è di 2 m, calcolare la forza di tensione che esercita dopo il raffreddamento supponendo che gli attacchi non diano luogo ad alcun cedimento. Il coefficiente di dilatazione termica per il ferro è  $\alpha = 12 \cdot 10^{-6}$

Il salto di temperatura  $\Delta T = 80 - 15 = 65^\circ$

Sezione del tirante  $A = \frac{\pi d^2}{4} = 200 \text{ mm}^2$

La variazione di lunghezza  $\Delta L = \alpha L \Delta T = 12 \cdot 10^{-6} \cdot 2 \cdot 10^3 \cdot 65 = 1,56 \text{ mm}$

Questo accorciamento è impedito e pertanto si manifesta una forza elastica nel tirante data da

$$F = \frac{\Delta L E A}{L} = \frac{1,56 \cdot 2,1 \cdot 10^{11} \cdot 200}{2 \cdot 10^3} = 32,76 \text{ kN}$$

cui corrisponde una tensione  $\sigma = F/A = 163,8 \text{ N/mm}^2$

## Esercizio n. 30

Si tratta di un filo d'acciaio di lunghezza iniziale utile di 50 mm che subisce tre allungamenti uguali  $\varepsilon = 0,1$ . Qual è l'allungamento totale?

Secondo l'approccio elastico

il 1° allungamento è di 5 mm

$$L_1 = 50 + \varepsilon_1 50 = 50 + 5 = 55 \text{ mm}$$

Il 2° è di 5,5 mm

$$L_2 = 55 + \varepsilon_2 55 = 50 + 5,5 = 60,5 \text{ mm}$$

Il 3° è di 6,05 mm

$$L_3 = 60,5 + \varepsilon_3 60,5 = 60,5 + 6,05 = 66,55 \text{ mm}$$

$$\varepsilon_{tot1/3} = \frac{L_3 - L_0}{L_0} = \frac{66,55 - 50}{50} = \frac{16,55}{50} = 0,331 \neq \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = 0,3$$

Secondo l'approccio reale

$$\varepsilon_{tot1/3} = \bar{\varepsilon}_1 + \bar{\varepsilon}_2 + \bar{\varepsilon}_3 = \ln \frac{55}{50} + \ln \frac{60,5}{55} + \ln \frac{66,55}{60,5} = \ln \frac{66,55}{50} = 0,286$$

## Esercizio n. 31

Un provino da sottoporre a trazione, con 12 mm di diametro e 50 mm di lunghezza utile, raggiunge il massimo carico a 90 kN e si rompe a 70 kN. Il minimo diametro a frattura è 10 mm. Determinare la resistenza a trazione e la tensione vera a rottura.

$$\sigma_{rott.} = \frac{P_{max}}{A} = \frac{90 \cdot 10^3 \cdot 4}{\pi \cdot 12^2} = 796 \text{ MPa}$$

Resistenza a trazione  
convenzionale

$$\bar{\sigma} = \frac{P_f}{A_f} = \frac{70 \cdot 10^3 \cdot 4}{\pi \cdot 10^2} = 891 \text{ MPa}$$

Tensione vera a rottura

$$\bar{\varepsilon}_f = \ln \frac{A_o}{A_f} = \ln \left( \frac{12}{10} \right)^2 = 2 \cdot \ln 1,2 = 0,365$$

Deformazione a frattura



## Esercizio n. 32

In un test di trazione , la frattura si osserva al carico massimo, senza strizione con le condizioni

---

$$A_f = 100 \text{ mm}^2 \quad L_f = 60 \text{ mm}$$

$$A_o = 150 \text{ mm}^2 \quad L_o = 40 \text{ mm}$$

Determinare la deformazione vera a rottura

$$\bar{\epsilon}_f = \ln \left( \frac{L_f}{L_o} \right) = \ln \left( \frac{60}{40} \right) = 0,405 \mu\epsilon$$

$$\bar{\epsilon}_f = \ln \left( \frac{A_o}{A_f} \right) = \ln \left( \frac{150}{100} \right) = 0,405 \mu\epsilon$$

Se il metallo è duttile al punto che la strizione si manifesta, qual è la deformazione vera sapendo che

$$L_f = 83 \text{ mm} \quad d_f = 8 \text{ mm} \quad D_o = 12,8 \text{ mm}$$

$$\bar{\epsilon}_f = \ln \left( \frac{L_f}{L_o} \right) = \ln \left( \frac{83}{40} \right) = 0,730 \mu\epsilon$$

Non si può calcolare in quanto non vale più la costanza del volume

$$\bar{\epsilon}_f = \ln \left( \frac{A_o}{A_f} \right) = \ln \left( \frac{\pi D_o^2}{4} \cdot \frac{4}{\pi d_f^2} \right) = 2 \cdot \ln \left( \frac{12,8}{8} \right) = 0,94 \mu\epsilon$$

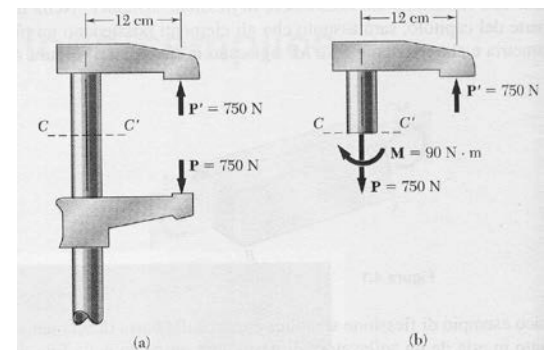
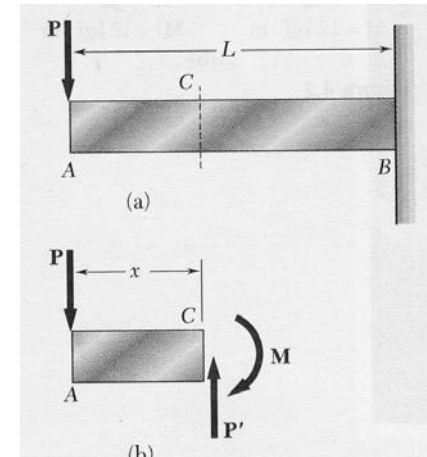
## Flessione semplice

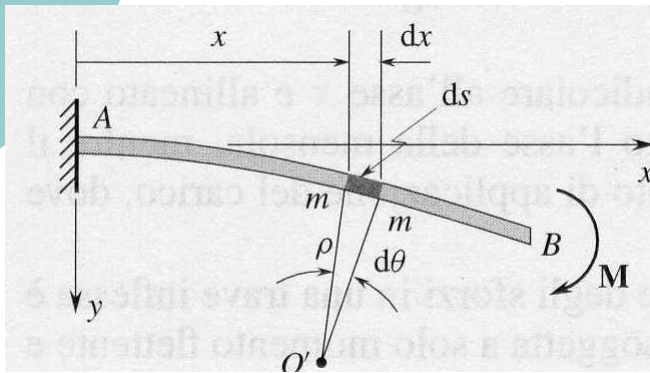
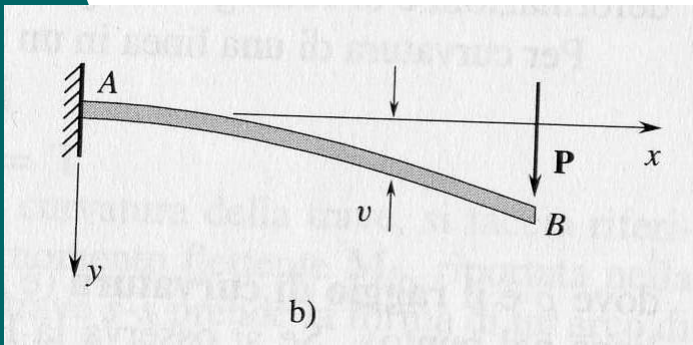
Un altro tipo di sollecitazione particolarmente importante è denominata flessione.

L'esempio qui riportato è quello di una trave a mensola caricata sulla punta da un carico  $P$ . L'asse d'azione del carico è chiamato **asse di sollecitazione** rispetto al piano della sezione. La trave, originariamente rettilinea e a sezione costante si deve supporre caricata in un piano di simmetria e devono valere le ipotesi di De Saint-Venant.

Al momento flettente si accompagna quasi sempre il taglio (sollecitazioni accoppiate); nell'esempio della morsa il momento è accompagnato dallo sforzo normale sull'asse di scorrimento.

Per effetto del carico  $P$ , la trave si deforma, incurvandosi nel piano  $xy$  detto **piano di flessione**.





$$ds = \rho d\theta \sim dx$$

L'intersezione fra il piano di flessione e il piano della sezione generica è **l'asse di flessione**. Nel caso di sezione simmetrica, l'asse di flessione e l'asse di sollecitazione coincidono. Dalla curvatura della trave dipendono deformazioni e sforzi. Per curvatura in un punto si intende l'inverso del raggio della circonferenza osculatrice nel punto considerato  $1/\rho = \Gamma$ . Nel caso della figura la curvatura è positiva per convenzione.

Poiché per l'ipotesi di piccole deformazioni **le sezioni piane rimangono piane**, ciascuna sezione ruota intorno all'asse z, normale alla figura, di un angolo  $\theta$  variabile da  $0^\circ$  all'incastro ad un valore massimo in punta.

Staccato un elemento infinitesimo  $dx$ , i piani delle sezioni di estremità, paralleli nella configurazione indeformata, ruotando di un angolo  $d\theta$  si intersecano in un punto  $O'$  detto centro di curvatura.

Per calcolare le deformazioni associate alla curvatura della trave è necessario fare riferimento alla porzione  $dx$  che soggetta al momento  $M_0$  si incurva con la conseguenza che le fibre situate dalla parte convessa si allungano, mentre quelle dalla parte concava si accorciano. Tale situazione determina l'esistenza di fibre che non subiscono variazioni. Nella configurazione indeformata tali fibre descrivono l'**asse neutro** appartenente ad una superficie neutra

che nel caso di sezione simmetrica è normale all'asse di sollecitazione.

Per le fibre che subiscono variazioni, il valore di  $\Delta L_x$  può essere calcolato mediante la relazione

$$\Delta L_x = L_x - dx = (\rho - y)d\theta - dx = \rho d\theta - yd\theta - dx = -y/\rho dx$$

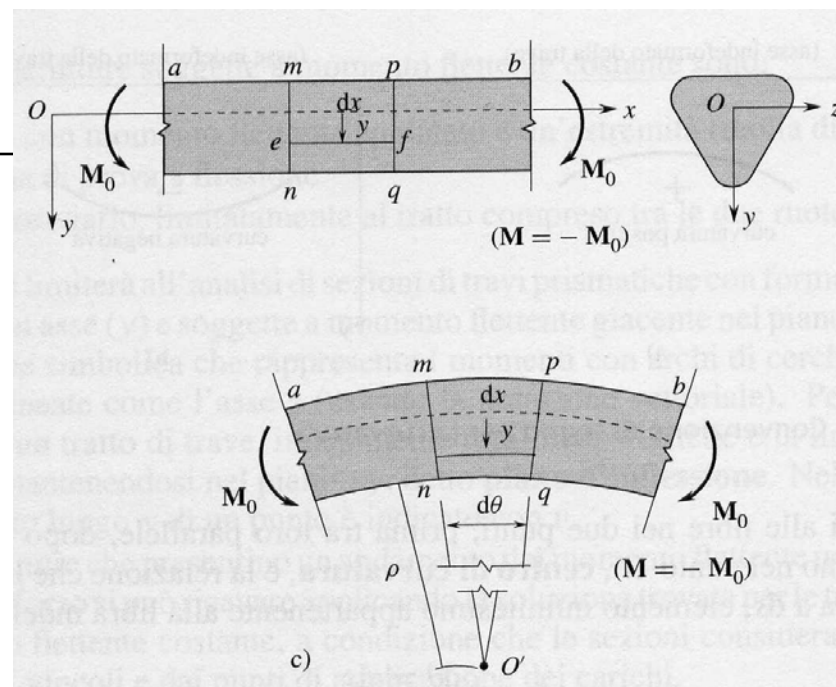
essendo

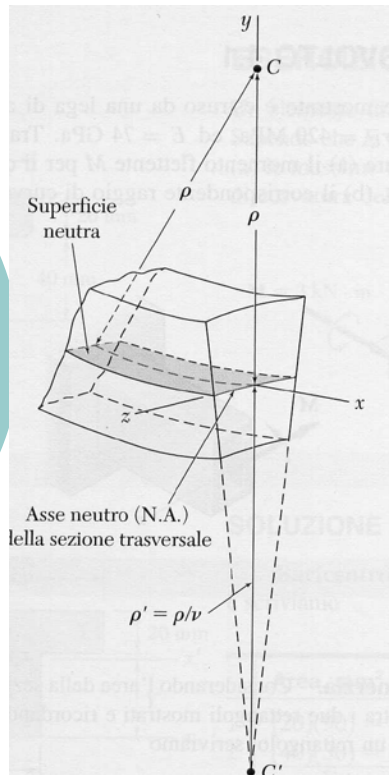
$$d\theta/ds = d\theta/dx = 1/\rho$$

e  $y$  la distanza della generica fibra dall'asse neutro, pertanto si evince che

$$\epsilon_x = \Delta L_x/dx = -y/\rho = -\Gamma y$$

Per convenzione la curvatura è positiva se la concavità è rivolta verso la direzione positiva degli spostamenti.





Corrispondentemente alle deformazioni lungo l'asse  $x$ , trasversalmente si hanno delle contrazioni che si possono esprimere mediante le relazioni

$$\varepsilon_y = -\nu \varepsilon_x = \nu \Gamma y \quad \text{e} \quad \varepsilon_z = -\nu \varepsilon_x = \nu \Gamma y$$

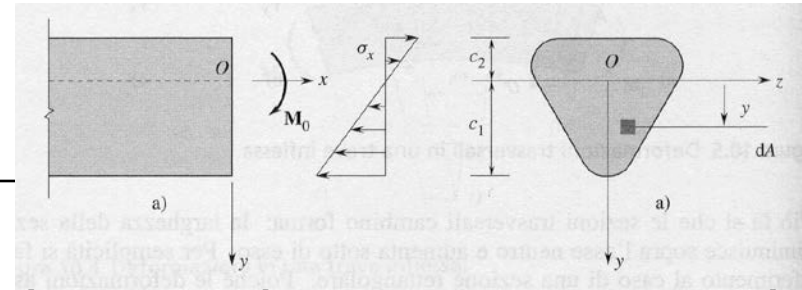
Tale effetto cambia la forma alle sezioni trasversali: infatti, riferendosi per semplicità alla sezione rettangolare della figura accanto, la base tesa si contrae accorciandosi e incurvandosi secondo  $\rho/\nu$  e quella compressa si allunga incurvandosi con la stessa curvatura. Il risultato finale è una configurazione a sella.

Partendo ora dalla deformazione  $\varepsilon_x = -y/\rho = -\Gamma y$  e introducendo il legame elastico della legge di Hooke, si possono calcolare gli sforzi nella sezione indotti dalla

flessione  $\sigma_x = E\varepsilon_x = -Ey/\rho = -E\Gamma y$

che, come si può osservare si distribuiscono secondo una legge lineare proporzionale alla distanza generica della fibra dall'asse neutro. La tensione si annulla sull'asse neutro e cresce in segno avvicinandosi ai bordi inferiore e superiore della sezione.

Nella figura accanto viene riportato il diagramma delle tensioni lungo la sezione generica supposto nota la posizione dell'asse neutro.



Considerando la flessione prodotta dal

solo momento flettente, la tensione così ricavata è la sola presente ed è quindi anche tensione principale essendo le tensioni tangenziali tutte nulle.

Per calcolare la posizione dell'asse neutro si deve tener conto di due condizioni:

- l'azione assiale è nulla;

$$\int \sigma_x dA = - \int E \Gamma y dA = 0$$

- il momento risultante delle forze elementari  $\sigma_x$  invece deve essere uguale al momento flettente, nel caso della figura  $M = -M_0$

La prima condizione si esprime attraverso è soddisfatta se  $\int y dA = 0$

Infatti poiché la curvatura e il modulo di Young sono costanti deve risultare nullo il momento statico della sezione rispetto all'asse neutro.

Questa posizione esprime la condizione che l'asse neutro passa per il baricentro. Nell'ipotesi di simmetria della sezione rispetto all'asse y, quest'ultimo passa per il baricentro ed è asse principale d'inerzia. L'asse z normale a y e passante per il baricentro ed è anche asse principale d'inerzia.



Pertanto se l'asse  $y$  è asse di sollecitazione oltre che di simmetria, **l'asse  $z$** , normale a  $y$  per il baricentro nel piano della sezione è **asse neutro**. Esso coincide anche con l'asse di azione della coppia.

---

La seconda condizione, si esprime, ponendo  $M = - M_0$  con

$$J = \int y^2 dA$$

dove

Il segno (-) sta anche ad indicare che la curvatura sta sempre dalla parte delle fibre compresse indipendentemente dal segno del momento

$$M = \int \sigma_x y dA = -\Gamma E \int y^2 dA$$

$$M = -\Gamma E J$$

$$\Gamma = \frac{1}{\rho} = -\frac{M}{EJ}$$

$EJ$  è detto  
rigidezza  
flessionale

L'espressione degli sforzi si ricava ponendo  $\Gamma$  in  $\sigma_x = -E\Gamma y = My/J$

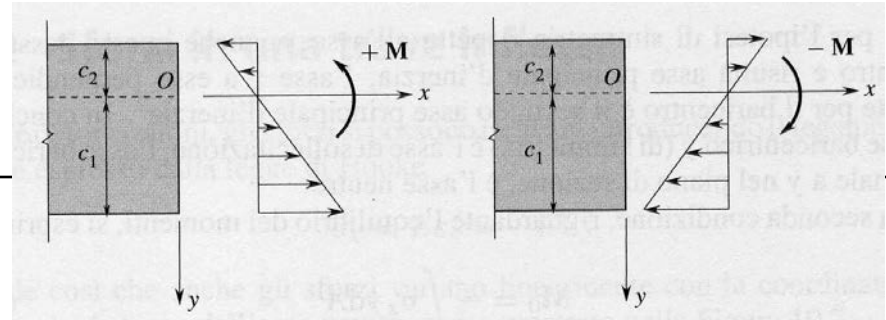
che rappresenta la formula di Navier. Essa mostra come gli sforzi si distribuiscano linearmente e dipendano direttamente dal momento e dalla distanza della fibra dall'asse neutro, mentre sono inversamente proporzionali al momento di inerzia della sezione. Il segno degli sforzi dipende da quello del momento.

Per una sezione simmetrica gli sforzi massimi saranno uguali ed opposti, dal momento che lo sforzo si deve invertire in corrispondenza dell'asse neutro. In corrispondenza degli sforzi massimi si può definire il **modulo di resistenza**

con  $W_{(\text{min o max})} = J/y_{(\text{max o min})}$

e la formula di Navier si semplifica in

$$\sigma_{x(\text{max o min})} = M/W_{(\text{min o max})}$$



## Lavoro di deformazione

Il lavoro di deformazione può essere calcolato applicando il Teorema di Clapeyron secondo il quale il lavoro elastico è dato dalla metà del prodotto tra i valori finali della forza e dello spostamento. Poiché in senso generalizzato, in questo caso, la forza e lo spostamento sono in realtà il momento flettente  $M$  e la rotazione relativa  $\Delta\theta$  tra le sezioni estreme,

$$L = M \Delta\theta/2$$

$$\Delta\theta = \int_0^l d\theta = \int_0^l \frac{M}{EJ} dx = \frac{Ml}{EJ}$$

$$L = M^2 l / 2EJ$$

$$L = \int_V \Psi dV = \int_A \frac{\sigma_x^2}{2E} dA \int_0^l dx = \int_A \frac{(My)^2}{2EJ^2} dA \cdot l = \frac{1}{2E} \left( \frac{M}{J} \right)^2 l \int_A y^2 dA = \frac{M^2 l}{2EJ}$$

## Principio di sovrapposizione degli sforzi

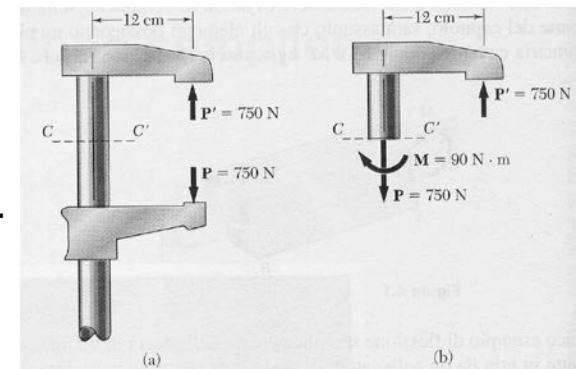
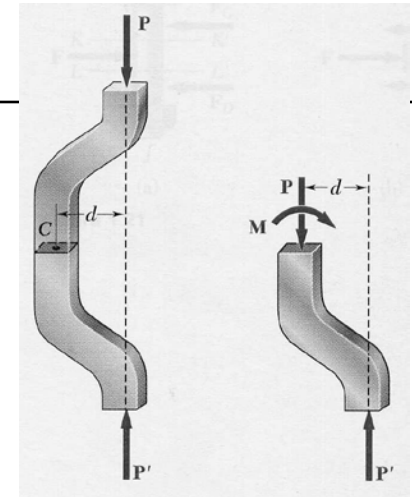
Applicando contemporaneamente in uno stesso sistema *elastico* vari sistemi di forze, si producono spostamenti e quindi anche reazioni vincolari, deformazioni e tensioni uguali alla somma di quelle prodotte separatamente da ciascun sistema di forze.

## Carico assiale eccentrico

Se un elemento strutturale è soggetto a un momento flettente  $M$  e un'azione normale  $N$ , lo stato di sforzo si sovrappone ed è uguale alla somma delle sollecitazioni considerate singolarmente

$$\sigma_x = \sigma_N + \sigma_M = N/A + My/J$$

Nello schema b) sono indicate le reazioni di momento e forza attive sui bracci della morsa in a)



Nel caso di eccentricità “e” del carico P sulla trave, applicato sull’asse y baricentrico, il momento sarà dato da Pe e pertanto

$$\sigma_x = \sigma_N + \sigma_M = P/A + Pe \cdot y/J$$

La posizione dell’asse neutro si andrà a calcolare imponendo l’annullamento della sigma totale ottenendo  $y_0 = -J/Ae$  con il segno negativo per indicare che si trova da parte opposta rispetto al carico. Essa non è altro che l’equazione di una retta parallela all’asse z nel piano della sezione zy.

