

Tema 3.Modulación Lineal.

3.Modulación lineal.

3.1.Introducción.

3.2.Modulación lineal.

3.3.Modulación en amplitud (AM)

3.3.1. Espectro de una señal AM

3.3.2.Cálculo de la potencia de una señal AM

3.3.3.- Moduladores AM

3.3.3.1.- Modulador de ley de potencias.

3.3.3.2. Modulador de switcheo o modulador de interrupción.

3.3.4.- Demoduladores AM

3.3.4.1.- Detector de envolvente

3.3.4.2.- Detector síncrono

3.4.Modulación de doble banda lateral (DBL o DSB).

3.4.1.- Espectro de una señal DSB

3.4.2.- Cálculo de potencia de la señal DSB

3.4.3. - Moduladores DSB

3.4.3.1.Moduladores que utilizan elementos no lineales:

3.4.4. - Demoduladores DSB

3.4.4.1.- Detector síncrono

3.4.4.2.- Detección homodina

3.4.4.3.- Receptor de portadora inyectada

3.5.Modulación de banda lateral única.

3.5.1.- Transformada de Hilbert

3.5.2.- Análisis temporal y frecuencial de una señal SSB

3.5.3.- Moduladores SSB

3.5.3.1.- Métodos por discriminación en frecuencia

3.5.3.2. Modulación por discriminación de fase

3.5.4.- Demodulación de ondas SSB

3.5.4.1.- Detección síncrona:

3.5.4.2.Detección de SSB con un detector de envolvente.

3.6.Otras modulaciones lineales.

3.6.1.Banda lateral vestigial (BLV)

3.6.1.1.Representación en tiempo de una señal VSB.

3.6.1.2.- Moduladores VSB

3.6.1.3.Demoduladores VSB

3.6.2.Banda lateral única compatible.(BLC)

3.6.3.Banda lateral independiente.

3.Modulación Lineal.

3.1.Introducción.

Las señales que obtenemos de un transductor, hay veces que no podemos hacer uso de ellas para transmitir tal cual , sino que las hemos de tratar.En mucho casos hemos de aplicar a la señal un proceso llamado modulación.

Por ejemplo si quisieramos transmitir varias señales al mismo tiempo y por el mismo medio(guiado o no), deberíamos asignar a cada señal una banda de frecuencias determinada, esto es lo que se denomina multiplexado en frecuencia (FDM).

Entonces cada señal se desplaza a una región de frecuencias diferente de las demás, y así cuando recibamos las señales, las podremos discernir unas de otras. Para transmitir estas señales, necesitamos antenas, y estas han de ser del mismo orden de magnitud que la longitud de onda de la señal que queremos transmitir; por consiguiente, haciendo cálculos rápidos, para transmitir una señal de kHz necesitaríamos una antena de unos cuantos Km de longitud, cosa inviable, por consiguiente la solución que se adopta es trasladar la señal que queremos transmitir a una banda de frecuencias en la cual la longitud de la antena asociada sea viable. También tenemos que la potencia necesaria para transmitir una señal, es inversamente proporcional a la frecuencia de la señal, con lo cual necesitaríamos mucha potencia para una señal de baja frecuencia, por ejemplo para transmitir audio, entonces la solución vuelve a pasar por trasladar la banda frecuencial de la señal a transmitir a unos valores mas altos. Pero no siempre hace falta modular las señales, como por ejemplo una señal que estamos midiendo con un polímetro, etc. Tendremos que modular la señal a transmitir dependiendo del uso que le vamos a dar.

Por consiguiente, modularemos una señal cuando , como hemos dicho antes, tengamos que multiplexar canales, invertir menos potencia en la transmisión, o hacer uso de antenas de dimensiones viables.

Las diferentes señales que nos vamos a encontrar a lo largo del tema son:

1. Señal en banda base o señal moduladora: Es la señal que procede del transductor, es decir, es la señal que queremos transmitir.
2. Señal portadora : Es una señal de alta frecuencia, de tipo sinusoidal frecuentemente, que da soporte para trasladar de frecuencia la señal moduladora.
3. Señal modulada: es la combinación de las señales portadora + moduladora, es la señal a emitir.

Según para que utilicemos la señal que queremos transmitir, y de sus características, aplicaremos modulación lineal o angular.

3.2.Modulación lineal.

La modulación lineal recibe su nombre porque el espectro que produce está relacionado en forma lineal con el espectro del mensaje. Entre los tipos de modulación lineal que existen se encuentran: AM (Amplitude Modulation), DSB (Double Side Band), SSB (Single Side Band), VSB (Vestigial Side Band) . Sea cual sea el tipo que se analice, las convenciones serán las siguientes:

1. El mensaje $x(t)$ estará limitado en banda ($BW=W$)
2. El mensaje $x(t)$ estará normalizado, esto es, $|x(t)| \leq 1$. En este caso la potencia promedio será también menor e igual que 1 si proviene de una fuente ergódica.
3. Muchas veces supondremos que el mensaje es un tono $x(t)=A_m \cos \omega_m t$ lo cual tiene sentido dado que el análisis de Fourier nos permite representar señales en función de sinusoides y así aplicar superposición si los sistemas son lineales. Por otra parte como la modulación de onda continua utiliza portadora sinusoidal, la señal resultante (si el ancho de banda fraccional es pequeño) puede analizarse como una senoide pura.

A continuación veremos cada uno de los sistemas de modulación lineal y los compararemos de acuerdo a los siguientes parámetros : Ancho de banda, potencia transmitida, complejidad de transmisores y receptores y relación señal a ruido a la salida.

3.3.Modulación en amplitud (AM)

Como su nombre lo indica, consiste en variar la amplitud de una senoide de acuerdo al mensaje que se desea transmitir. A la senoide se le llama portadora debido a que llevará la información sobre sí. Este tipo de modulación se usa en radiodifusión comercial y en algunas bandas de transmisión de banda ciudadana.

Sea $x(t)$ un mensaje que cumple las condiciones indicadas en la introducción; sea $x_c(t) = A_c \cos \omega_c t$ la portadora. La señal modulada en amplitud (AM) se expresará como: $x_{AM}(t) = A_c (1 + m x(t)) \cos \omega_c t$ m es el índice de modulación que se encuentra entre 0 y 1.

La Figura N° 3.1 muestra la señal $x_{AM}(t)$ para un mensaje $x(t)$ sinusoidal. La envolvente de la señal modulada tiene la forma del mensaje. Sin embargo si m superase la unidad, se presentaría un cambio de fase que haría perder el parecido entre la envolvente y el mensaje.

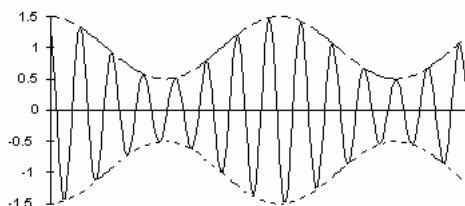


Figura N°3.1.-Modulación AM de mensaje sinusoidal

Sistemas de Telecomunicacion .Tema 3:Modulación Lineal.

Si se sabe que el mensaje toma valores extremos +1 y -1 en algún instante de tiempo, el índice de modulación puede determinarse observando los máximos y mínimos de la señal modulada :

$$x_{AM}(t) \text{ máx} = A_c (1 + m)$$

$$x_{AM}(t) \text{ mín} = A_c (1 - m)$$

$$x_{AM}(t) \text{ máx} + x_{AM}(t) \text{ mín} = 2A_c$$

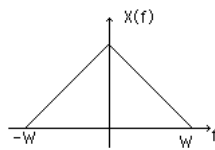
$$x_{AM}(t) \text{ máx} - x_{AM}(t) \text{ mín} = 2mA_c$$

En ese caso:

$$m = \frac{x_{AM}(t) \text{ máx} - x_{AM}(t) \text{ mín}}{x_{AM}(t) \text{ máx} + x_{AM}(t) \text{ mín}}$$

3.3.1. Espectro de una señal AM

Supongamos un mensaje $x(t)$ cuyo espectro ocupa una banda W tal y como se ilustra:

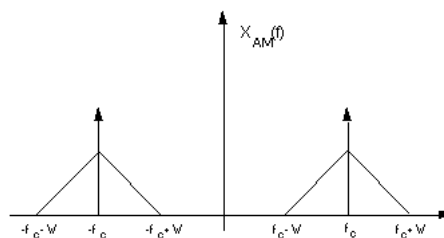


$$x_{AM}(t) = A_c \text{Cos} \omega_c t + A_c m x(t) \text{Cos} \omega_c t$$

Al transformar:

$$X_{AM}(f) = (A_c / 2) \delta (f-f_c) + (A_c / 2) \delta (f+f_c) + (mA_c / 2) X (f-f_c) + (mA_c / 2) X (f+f_c)$$

Como se elige f_c en relación a W ? Para el diseño de sistemas conviene que el ancho de banda fraccional definido como W/ f_c se encuentre entre 0.01 y 0.1. De esta forma los filtros pasabanda utilizados tendrán un factor Q entre 10 y 100 lo cual es un rango razonable y práctico. Volvamos a AM y consideremos que $f_c \gg W$. De esta forma, al graficar $X_{AM}(f)$ tendremos:



Sistemas de Telecomunicación . Tema 3: Modulación Lineal.

Aparece el espectro del mensaje trasladado en frecuencia. De aquí se observa la posibilidad de compartir un mismo canal utilizando diferentes frecuencias de portadora para los diversos mensajes. Un análisis del espectro de la señal modulada indica que:

1. El ancho de banda ocupado es igual a $2W$
2. Se puede definir como banda lateral superior (USB) a la porción del espectro que se encuentra por encima de f_c ; a aquella que está por debajo se le llamará banda lateral inferior (LSB)
3. La señal modulada contiene a la portadora lo que resta eficiencia al sistema.

3.3.2.- Cálculo de la potencia de una señal AM

Determinemos la potencia de la señal AM , promediando el cuadrado de $x_{AM}(t)$.

$$\begin{aligned} \langle (x_{AM}(t))^2 \rangle &= \langle Ac^2 (1 + mx(t))^2 \cos^2 \omega_c t \rangle = \\ &\langle Ac^2 \cos^2 \omega_c t + 2 Ac^2 mx(t) \cos 2\omega_c t + Ac^2 (mx(t))^2 \cos^2 \omega_c t \rangle \end{aligned}$$

Como por convención el nivel DC del mensaje es cero:

$$\begin{aligned} \langle (x_{AM}(t))^2 \rangle &= \langle Ac^2 \cos^2 \omega_c t \rangle + \langle 2 Ac^2 mx(t) \cos 2\omega_c t \rangle + \langle Ac^2 (mx(t))^2 \cos^2 \omega_c t \rangle \\ \langle (x_{AM}(t))^2 \rangle &= \langle 0.5 Ac^2 (1 + \cos 2\omega_c t) \rangle + \langle 2 Ac^2 mx(t) \cos 2\omega_c t \rangle + \langle 0.5 Ac^2 (mx(t))^2 (1 + \cos 2\omega_c t) \rangle \end{aligned}$$

Ahora bien, se sabe que dos señales son ortogonales cuando:

1. No coinciden en tiempo
2. No coinciden en frecuencia
3. Tienen simetrías opuestas

y cuando son ortogonales el promedio de su producto se anula.

En este caso $\langle (mx(t))^2 \cos 2\omega_c t \rangle = 0$
porque $x^2(t)$ no coincide en frecuencia con $\cos 2\omega_c t$.

También $\langle Ac^2 mx(t) \cos 2\omega_c t \rangle = 0$. Así:

$$\langle (x_{AM}(t))^2 \rangle = Ac^2/2 + \langle Ac^2 (mx(t))^2 / 2 \rangle$$

Si llamamos S_x a la potencia del mensaje $x(t)$:

$$\langle (x_{AM}(t))^2 \rangle = Ac^2/2 + Ac^2 m^2 S_x / 2 = P_c + 2 PSB$$

donde $P_c = Ac^2/2$ es la potencia de la portadora y $PSB = Ac^2 m^2 S_x / 4$ es la potencia de cada banda lateral. Obsérvese que la potencia total es menor que el doble de la potencia de portadora , lo que significa que esta última consume más de la mitad de la potencia total de transmisión. Esto se ve también al calcular la eficiencia definida como:

$$\text{Eficiencia} = (2 PSB / P_{total}) \times 100\% = m^2 S_x / (1 + m^2 S_x) \times 100\%$$

Esto logra un valor máximo (50 %) cuando $m^2 S_x = 1$.

Sistemas de Telecomunicacion .Tema 3:Modulación Lineal.

En conclusión podemos decir que AM es un sistema que produce:

1. Un ancho de banda de transmisión igual al doble del ancho de banda del mensaje.
2. Un gasto de potencia en la portadora que se refleja en que la eficiencia máxima que se puede lograr es de 50%.

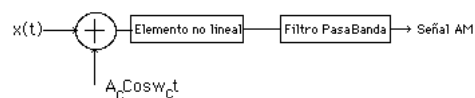
Otro detalle, que permitirá comparar este sistema de modulación con otros, es la complejidad de los procesos de modulación y demodulación involucrados. Esto podrá ser considerado luego de ver los esquemas de modulación y demodulación utilizados.

3.3.3.- Moduladores AM

Para conseguir una señal AM se necesita básicamente un sumador y un multiplicador. El multiplicador podría realizarse con multiplicadores analógicos o también con dispositivos no lineales (Ej: Pasar cada señal por un elemento que tome el logaritmo de cada una , luego sumarlas y finalmente tomar el antilogaritmo). Sin embargo, existen métodos que generan una modulación AM indirectamente y en forma más sencilla y que por tanto son los usados en la práctica.

3.3.3.1.- Modulador de ley de potencias o modulador de ley cuadrática.

Requiere de tres elementos: un sumador, un elemento no lineal y un filtro pasabanda. Su esquema es el siguiente:



Por ejemplo se pueden usar diodos y transistores en aquellas regiones donde

$$x_{out}(t) = a_1 x_{in}(t) + a_2 x_{in}^2(t) .$$

$$\text{Si se tiene } x_{in}(t) = A_c \cos \omega_c t + x(t)$$

$$x_{out}(t) = a_1 (A_c \cos \omega_c t + x(t)) + a_2 (A_c \cos \omega_c t + x(t))^2$$

$$x_{out}(t) = a_1 A_c \cos \omega_c t + a_1 x(t) + a_2 A_c^2 \cos^2 \omega_c t + 2 a_2 A_c x(t) \cos \omega_c t + a_2 x^2(t)$$

Un análisis de esta señal revela que la ocupación de los 5 términos que la componen es la siguiente:

Término 1: Ubicado exactamente en f_c (Necesario para la señal AM)

Término 2: Ubicado en banda base, ancho W (NO necesario para la señal AM)

Término 3: Ubicado en $f=0$ y en $f=2f_c$ (NO necesario para la señal AM)

Término 4: Ubicado alrededor de f_c (Necesario para la señal AM)

Término 5: Ubicado en banda base, ancho $2W$ (NO necesario para la señal AM) Por lo tanto si esto lo hacemos pasar por un filtro pasabanda ubicado en f_c con ancho de banda $2W$, solo quedará:

Sistemas de Telecomunicación . Tema 3: Modulación Lineal.

$$x_{out}(t) = a_1 A_c \cos \omega_c t + 2 a_2 A_c x(t) \cos \omega_c t$$

$$x_{AM}(t) = a_1 A_c \cos \omega_c t (1 + (2 a_2 / a_1) x(t)) .$$

Se observa que el índice de modulación toma el valor de $m=2 a_2 / a_1$ lo que constituye una desventaja ya que normalmente $a_2 \ll a_1$ y esto implica que la profundidad de modulación será baja. Uno podría pensar que el remedio a esto sería aumentar $x(t)$, pero esto nos colocaría en una zona de la curva característica del dispositivo no lineal diferente a la necesaria, lo que produciría una salida distorsionada.

3.3.3.2. Modulador de switcheo o modulador de interrupción.

La idea fundamental es trasladar el espectro del mensaje más la portadora a frecuencias múltiplos de f_c ; esto se logra multiplicándolas por una señal periódica de período $1/f_c$. En la práctica esto se logra utilizando dispositivos de conmutación con salida proporcional a la entrada en los semiciclos positivos de esta y nula en los semiciclos negativos. Por ejemplo si la señal de entrada es $A_c \cos \omega_c t + x(t)$, con $A_c \gg x(t)$, la salida se puede modelar como el producto de la entrada por una señal que es constante y positiva en los semiciclos positivos de $\cos \omega_c t$, y cero en los semiciclos negativos. Esta señal periódica cuadrada par, solo tiene términos de serie tipo coseno y de las frecuencias impares. Así, la salida será:

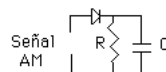
$$(A_c \cos \omega_c t + x(t)) (a_0 + \sum a_n \cos n \omega_c t)$$

Esta señal contiene (verificar) : el mensaje banda base, el mensaje trasladado a todas las frecuencias múltiplos impares de f_c , tonos en todas las frecuencias múltiplos de f_c , un término DC. Para obtener entonces una señal AM basta con utilizar un filtro pasabanda adecuado.

3.3.4.- Demoduladores AM

3.3.4.1.- Detector de envolvente .

La principal ventaja de modular en AM consiste en que es posible recuperar el mensaje (demodular) con un simple detector de envolvente con tiempo de carga corto y de tiempo de descarga largo. Su versión más sencilla es la siguiente:



Cuando se aplica una señal a la entrada, el capacitor se carga a través de R; por lo tanto el producto RC debe ser mucho menor que el inverso del ancho de banda del mensaje. Cuando la tensión baja, el diodo se abre y el capacitor comienza a descargarse; por lo tanto el producto RC debe ser mucho mayor que el inverso de ω_c . La salida de este circuito es el mensaje sobre una DC que puede bloquearse con un condensador, aunque esto empobrece la respuesta a bajas frecuencias.

La sencillez de este demodulador permite aplicaciones masivas, tal como radiodifusión comercial.

3.3.4.2.- Detector síncrono

Otra forma de demodular la señal AM es la siguiente:



Al multiplicar la señal modulada por la portadora se tendrá:

$$x_{AM}(t) \cos\omega_c t = A_c \cos^2\omega_c t + A_c m x(t) \cos^2\omega_c t = 0.5 A_c (1 + m x(t))(1 + \cos 2\omega_c t)$$

Al filtrar y quitar la DC solo quedará $0.5 A_c m x(t)$. Observe que se asume que el receptor tiene una muestra de la portadora de la misma frecuencia y fase que la usada en el modulador. El efecto que tendría un error de fase o frecuencia en el oscilador del demodulador será analizado posteriormente.

3.4. Modulación de doble banda lateral (DBL o DSB).

Se puede definir como AM con la portadora suprimida con el objeto de ahorrar potencia. Este tipo de modulación se usa en comunicación punto a punto donde hay un solo receptor ya que este sería más complejo que en AM. También se utiliza para colocar los canales derecho e izquierdo (R y L) en FM estéreo, con el propósito de tener buena reproducción en la zona de baja frecuencia; por esta misma razón, algunos sistemas de telemetría usan el esquema DSB.

Sea $x(t)$ un mensaje que cumple las condiciones indicadas en la introducción; sea $x_c(t) = A_c \cos\omega_c t$ la portadora. La señal DSB se expresará como $x_{DSB}(t) = A_c x(t) \cos\omega_c t$. La Figura N° 3.2 muestra la señal $x_{DSB}(t)$ para un mensaje $x(t)$ sinusoidal. Como se ve la envolvente no sigue la forma del mensaje.

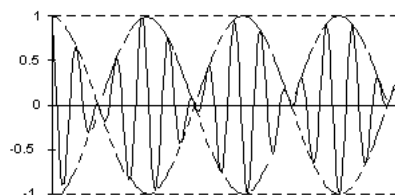
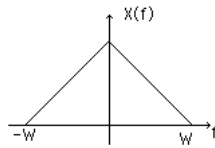


Figura N° 3.2 Modulación DSB

3.3.1.- Espectro de una señal DSB

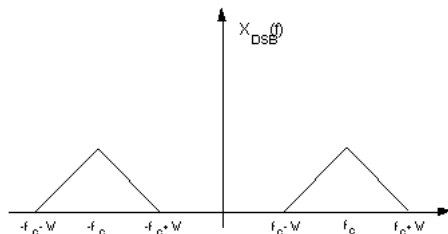
Supongamos un mensaje $x(t)$ cuyo espectro ocupa una banda W tal y como se ilustra:



Al transformar la señal DSB , se tendrá:

$$X_{DSB}(f) = (Ac /2) X (f-f_c) + (Ac /2) X (f+f_c)$$

Gráficamente:



Se observa que solo aparece el espectro del mensaje trasladado en frecuencia (no aparece la portadora) por lo que el ancho de banda es , como en AM, igual a $2W$.

3.4.2.- Cálculo de potencia de la señal DSB

Determinemos la potencia de la señal DSB , promediando el cuadrado de $x_{DSB}(t)$.

$$\langle (x_{DSB}(t))^2 \rangle = \langle Ac^2 x^2 (t) \cos^2 \omega_c t \rangle = \langle 0.5 Ac^2 x^2 (t) \cos 2\omega_c t + 0.5 Ac^2 x^2 (t) \rangle$$

Pero $\langle x^2 (t) \cos 2\omega_c t \rangle = 0$ porque $x^2 (t)$ no coincide en frecuencia con $\cos 2\omega_c t$. Así:

$$\langle (x_{DSB}(t))^2 \rangle = \langle 0.5 Ac^2 x^2 (t) \rangle$$

Si llamamos S_x a la potencia del mensaje $x(t)$:

$$\langle (x_{DSB}(t))^2 \rangle = 0.5 Ac^2 S_x = 2 PSB$$

La eficiencia resulta:

$$\text{Eficiencia} = (2 PSB / P_{total}) \times 100\% = 100\%$$

Sistemas de Telecomunicación .Tema 3:Modulación Lineal.

En conclusión podemos decir que DSB es un sistema que produce:

1. Un ancho de banda de transmisión igual al doble del ancho de banda del mensaje (2W)
2. Una eficiencia de 100%.

Falta por analizar la complejidad de sus esquemas prácticos de modulación y demodulación, cosa que veremos a continuación.

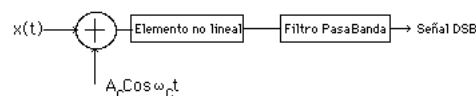
3.4.3. - Moduladores DSB

Para conseguir una señal DSB se necesita básicamente un multiplicador que puede ser analógico o basado en la función logaritmo tal y como se explicó para AM.

Existen otras formas de lograr la modulación DSB:

- 1.Utilizando elementos no lineales.
- 2.Utilizando 2 moduladores AM (Modulador balanceado)

3.4.3.1. - Moduladores que utilizan elementos no lineales:



Por ejemplo se pueden usar dispositivos donde :

$$x_{out}(t) = a_1 x_{in}^2(t) .$$

$$\text{Si se tiene } x_{in}(t) = A_c \cos \omega_c t + x(t)$$

$$x_{out}(t) = a_1 (A_c \cos \omega_c t + x(t))^2$$

$$x_{out}(t) = a_1 A_c^2 \cos^2 \omega_c t + 2 a_1 A_c x(t) \cos \omega_c t + a_1 x^2(t)$$

Los 3 términos están:

Término 1: Ubicado en $f = 2f_c$ y en $f = 0$

Término 2: Ubicado alrededor de f_c (Necesario para la señal DSB)

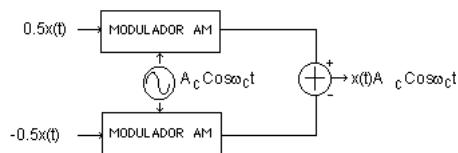
Término 3: Ubicado en banda base, ancho 2W.

Sistemas de Telecomunicacion .Tema 3:Modulación Lineal.

Por lo tanto si $x_{out}(t)$ pasa por un filtro pasabanda ubicado en f_c con ancho de banda $2W$, solo quedará:

$x_{out}(t) = 2 a_1 A_c x(t) \cos \omega_c t$ que es una señal DSB.

Como los dispositivos no lineales de ley cuadrática perfecta son difíciles de conseguir, en la práctica se utilizan dos moduladores AM que, combinados como se indica a continuación, producen un modulador balanceado.



En la rama superior, a la salida del modulador AM se tiene $A_c(1 + 0.5x(t)) \cos \omega_c t$

En la rama inferior, a la salida del modulador AM se tiene $A_c(1 - 0.5x(t)) \cos \omega_c t$

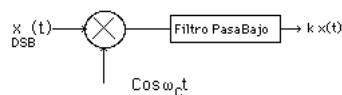
Al restar estas dos señales se obtiene la señal DSB.

3.4.4. - Demoduladores DSB

Para recuperar la señal $x(t)$ de la señal DSB basta multiplicar esta última por $\cos \omega_c t$ y luego pasarla por un filtro pasabajo de ancho de banda W igual al ancho de banda del mensaje. Esto es un detector síncrono. También analizaremos el detector homodino y el receptor de portadora inyectada

3.4.4.1.- Detector síncrono

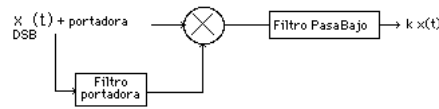
La figura muestra el esquema de un detector síncrono el cual simplemente multiplica la señal DSB por la portadora y luego se obtiene el mensaje al filtrar con un pasabajo.



Observe que se asume que el receptor tiene una muestra de la portadora de la misma frecuencia y fase que la usada en el modulador. El efecto que tendría un error de fase o frecuencia en el demodulador será analizado posteriormente.

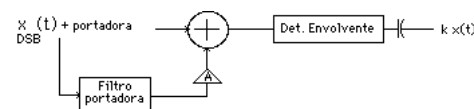
3.4.4.2.- Detección homodina

Se puede enviar una pequeña muestra de la portadora y amplificarla en el receptor para luego detectar en forma síncrona. En realidad esta señal se usa más para enganchar un oscilador en el receptor que como oscilador mismo.



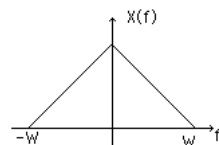
3.4.4.3.- Receptor de portadora inyectada

También se manda una porción de portadora. En el receptor se separa la portadora, se amplifica y luego se suma a la señal recibida. Finalmente se utiliza un detector de envolvente.

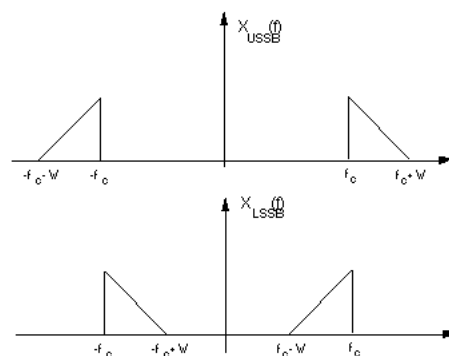


3.5.Modulacion de banda lateral unica.

El sistema de modulación AM se modificó para aumentar la eficiencia al no tener que llevar la portadora. Esto produjo modulación DSB. Sin embargo, analizando el espectro de una señal DSB, se encuentra que aún hay redundancia ya que las dos bandas alrededor de f_c son simétricas. Por lo tanto bastaría enviar una sola de las dos: la superior o la inferior. Por ejemplo si el mensaje $x(t)$ tiene el siguiente espectro:



Se puede tener USSB(Upper Single Side Band o Banda Lateral Superior) o LSSB (Lower Single Side Band o Banda Lateral Inferior)



Sistemas de Telecomunicación .Tema 3:Modulación Lineal.

En AM la potencia resultó igual a $P_c + 2 P_{SB}$. Ahora, en cualquiera de los dos tipos de SSB, la potencia será P_{SB} , es decir:

$$P_{USB} = P_{LSB} = A_c^2 S_x / 4$$

Por otra parte el ancho de banda de transmisión es W , la mitad que para AM y DSB. Como se ha visto hasta ahora, el análisis de SSB en el dominio de la frecuencia es simple, no así en el dominio del tiempo. Antes de intentarlo veremos una herramienta matemática indispensable: la transformada de Hilbert.

3.5.1.- Transformada de Hilbert

Si se tiene una señal $x(t)$ cuya transformada de Fourier es $X(f)$, a la transformada de Hilbert de $x(t)$ se le llamará

$$\hat{x}(t)$$

y su transformada de Fourier será:

$$\hat{X}(f) = -j \operatorname{sgn}(f) X(f)$$

Es decir, un transformador de Hilbert lo que hace es desfasar -90° todas las componentes de frecuencia de la señal sin alterar su amplitud. Esto en el dominio del tiempo se traduciría en lo siguiente:

$$\hat{x}(t) = F^{-1} \{ -j \operatorname{sgn}(f) \} * x(t)$$

Para encontrar la antitransformada de $-j \operatorname{sgn}(f)$, aplicaremos dualidad:

$$F \{ j \operatorname{sgn}(t) \} = \frac{1}{\pi f}$$
$$F^{-1} \left\{ \frac{1}{\pi t} \right\} = -j \operatorname{sgn}(f)$$

Así:

$$\hat{x}(t) = \frac{1}{\pi t} * x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \frac{1}{\pi(t-\tau)} d\tau$$

Propiedades de la transformada de Hilbert:

1) Si $y(t) = x(t) \cdot w(t)$ donde $x(t)$ es una señal pasabajas y $w(t)$ una señal pasaltos (esto es $X(f) = 0$ para $|f| > f_c$ y $W(f) = 0$ para $|f| < f_c$), entonces la transformada de Hilbert de $y(t)$ será igual al producto de $x(t)$ por la transformada de Hilbert de $w(t)$. Es decir:

$$\hat{y}(t) = x(t) \cdot \hat{w}(t)$$

De aquí se deducen algunos pares transformados de interés:(Considere siempre que $x(t)$ es una señal pasabajo)

$$y(t) = e^{j\omega_c t} \quad \hat{y}(t) = -j e^{j\omega_c t}$$

$$y(t) = x(t) e^{j\omega_c t} \quad \hat{y}(t) = -j x(t) e^{j\omega_c t}$$

$$y(t) = \cos \omega_c t \quad \hat{y}(t) = \sin \omega_c t$$

$$y(t) = \sin \omega_c t \quad \hat{y}(t) = -\cos \omega_c t$$

$$y(t) = x(t) \cos \omega_c t \quad \hat{y}(t) = x(t) \sin \omega_c t$$

$$y(t) = x(t) \sin \omega_c t \quad \hat{y}(t) = -x(t) \cos \omega_c t$$

2) Una señal cualquiera tiene el mismo espectro de energía o de potencia que el de su transformada de Hilbert.

$$\begin{aligned} x(t) \quad \text{-----} \quad X(f) \quad \text{-----} \quad |X(f)|^2 \\ \hat{x}(t) \quad \text{-----} \quad -j \operatorname{sgn}(f) X(f) \quad \text{-----} \quad |X(f)|^2 \end{aligned}$$

3) Por la misma razón anterior, la autocorrelación de una señal y la de su transformada de Hilbert, coinciden.

4) Una señal y su transformada de Hilbert son ortogonales.

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t) \hat{x}(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) (-j \operatorname{sgn}(f) X(f))^* df = -j \int_{-\infty}^0 |X(f)|^2 df + j \int_0^{\infty} |X(f)|^2 df = 0$$

5) La transformada de Hilbert de la transformada de Hilbert de una señal $x(t)$ produce $-x(t)$

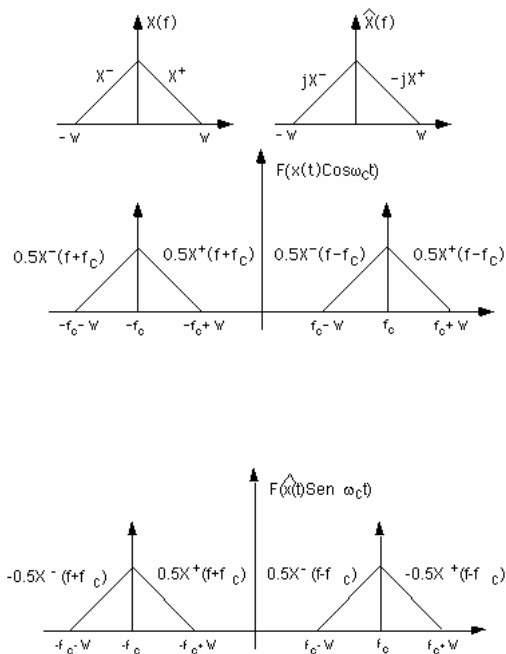
$$H \{ H \{ x(t) \} \} = -x(t)$$

3.5.2.- Análisis temporal y frecuencial de una señal SSB

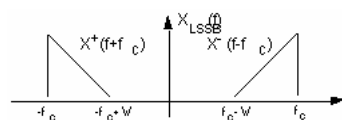
Supongamos que la expresión de la señal SSB es la siguiente:

$$x_{SSB}(t) = \frac{1}{2} A_c \left[x(t) \cos \omega_c t \pm \hat{x}(t) \text{Sen } \omega_c t \right]$$

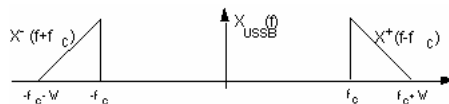
donde $x(t)$ está limitada en banda. Hagamos el análisis en frecuencia:



Si se suman estas dos señales, se tendría:



Si se restan:



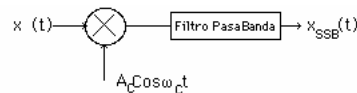
En conclusión: El método de modulación SSB reduce ancho de banda y potencia. Por supuesto la desventaja está en la complicación del modulador y el demodulador.

3.5.3.- Moduladores SSB

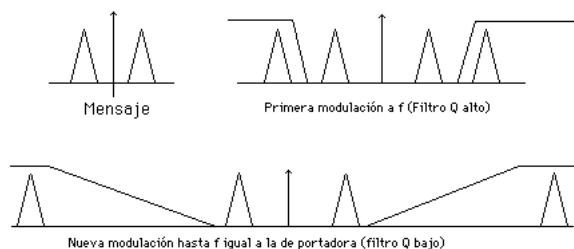
Existen dos métodos básicos para generar señales SSB: por discriminación de frecuencia y por discriminación de fase.

3.4.3.1.- Métodos por discriminación en frecuencia

Se genera una señal DSB y luego se le elimina una de las bandas con un filtro apropiado.



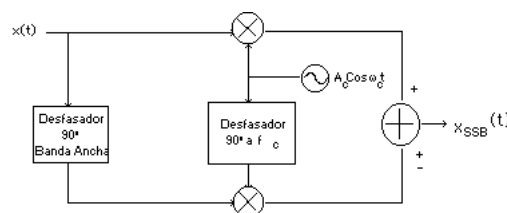
Si la señal tiene componentes de baja frecuencia, el filtro tiene que ser ideal y esto no es realizable físicamente. Por lo tanto este modulador se puede usar cuando el contenido de baja frecuencia del mensaje sea significativo a partir de una $f=f_{mín}$ distinta de cero. El ancho de la pendiente de rechazo del filtro, debe ser menor a $2 f_{mín}$ y esto puede obligar a usar filtros con Q muy alto (Si f_c es grande, $Q=f_c/BW \gg 1$). Una forma de solucionar este problema es utilizar una doble modulación. Es decir se multiplica primero por un tono de frecuencia f_1 pequeña y se usa un filtro de alto Q (relativamente , ya que $Q_1=f_1/BW$ es pequeño). A continuación se eleva el espectro a la frecuencia definitiva y se filtra esta vez con un filtro menos exigente.



Esta es una de las razones por la que en TV no se puede usar SSB, ya que la frecuencia a partir de la cual es importante la información es de 25 Hz. En cambio en telefonía si se presta , ya que $f_{mín} = 300$ Hz.

3.5.3.2. Modulación por discriminación de fase

Se basa en la expresión temporal de la señal SSB, y se logra con el siguiente sistema:



Sistemas de Telecomunicación . Tema 3: Modulación Lineal.

Es difícil lograr un desfaseador de 90° de banda infinita; lo que se puede lograr es una banda de trabajo específica o a lo sumo utilizar dos desfaseadores cuya diferencia sea siempre de 90°.

Con este tipo de modulador es fácil pasar de USSB a LSSB. Además, como no requiere filtraje, se puede hacer en una sola etapa. Sin embargo el grado de supresión de la banda indeseada depende de:

- La precisión de los mezcladores
- La precisión de la cuadratura de las dos portadoras
- La precisión del desfaseador de banda ancha.

En la práctica se logra que la supresión alcance 20 dB, se puede lograr 30 dB y es difícil encontrar 40 dB.

3.5.4.- Demodulación de ondas SSB

3.5.4.1.- Detección síncrona:

Al multiplicar la señal SSB por $\cos \omega_c t$

$$x_{SSB}(t) \cos \omega_c t = \frac{1}{2} A_c \left[x(t) \cos \omega_c t \pm \hat{x}(t) \sin \omega_c t \right] \cos \omega_c t = \\ \frac{A_c}{4} x(t) + \frac{A_c}{4} x(t) \cos 2 \omega_c t \pm \frac{A_c}{4} \hat{x}(t) \sin 2 \omega_c t$$

El filtro pasabajo solo dejaría pasar el primer término, que es precisamente el mensaje. Los efectos que tendría un error de fase o frecuencia de la portadora se analizan posteriormente.

3.5.4.2. Detección de SSB con un detector de envolvente (Compatible Single Side Band).

Supongamos que se envía un tono piloto y al llegar lo amplificamos y sumamos a la señal de entrada.

$$x_1(t) = \frac{1}{2} A_c \left[x(t) \cos \omega_c t \pm \hat{x}(t) \sin \omega_c t \right] + A \cos \omega_c t = \\ \left(A + \frac{1}{2} A_c x(t) \right) \cos \omega_c t \pm \frac{1}{2} A_c \hat{x}(t) \sin \omega_c t$$

La envolvente de esta señal es $R(t)$

$$R(t) = \sqrt{\left(A + \frac{1}{2} A_c x(t) \right)^2 + \left(\frac{1}{2} A_c \hat{x}(t) \right)^2} \\ = \sqrt{A^2 + A A_c x(t) + \frac{A_c^2}{4} \hat{x}(t)^2 + \frac{A_c^2}{4} x(t)^2}$$

Si $A \gg A_c$, los dos últimos términos serán despreciables, y el detector de envolvente produciría:

$$- A \sqrt{1 + \frac{A_c}{A} x(t)} - A \left(1 + \frac{A_c}{2A} x(t) \right)$$

3.6. Otras modulaciones lineales.

3.6.1. Banda lateral vestigial (BLV)

Cuando se quiere ahorrar ancho de banda, la modulación SSB parece la más adecuada. Sin embargo, dado que es imposible eliminar exactamente la banda indeseada, este esquema de modulación produce una mala reproducción de las bajas frecuencias; además es bastante complicado generarla y detectarla. Aparece entonces un esquema de modulación que mejora estos dos últimos problemas a cambio de un ligero aumento del ancho de banda. Esto produce VSB o banda lateral vestigial, que deja pasar casi completamente una banda y un vestigio de la otra tal y como se muestra a continuación.

La aplicación más difundida de VSB es en TV comercial. La señal VSB puede ser vista como una señal DSB filtrada de manera muy particular. Las características de dicho filtro se deducen imponiendo como condición que el mensaje se pueda recuperar con un detector síncrono como en todos los otros métodos de modulación lineal. Veamos este análisis:

Transmisor:

La señal DSB tiene un espectro de la siguiente forma

$$X_{DSB}(f) = A_c/2 [X(f-f_c) + X(f+f_c)]$$

Al pasarla por el filtro VSB:

$$X_{VSB}(f) = A_c/2 [X(f-f_c) + X(f+f_c)] H(f)$$

Receptor:

Si se quiere recuperar el mensaje con un detector síncrono, el cual lo primero que hace es multiplicar la señal VSB por un tono de frecuencia f_c , se tendría lo siguiente:

$$A/2 [X_{VSB}(f-f_c) + X_{VSB}(f+f_c)] =$$

$$\frac{A_c A_c}{2} \left\{ [X(f) + X(f+2f_c)] H(f+f_c) + [X(f) + X(f-2f_c)] H(f-f_c) \right\}$$

=

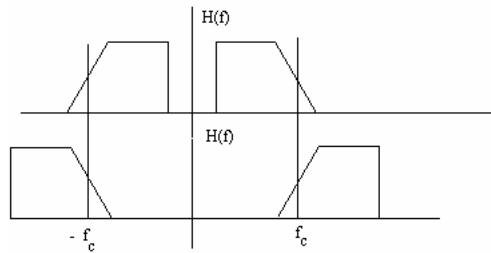
$$\frac{A_c A_c}{4} \left\{ X(f) [H(f+f_c) + H(f-f_c)] + X(f+2f_c) H(f+f_c) + X(f-2f_c) H(f-f_c) \right\}$$

Al pasar por el filtro pasabajo del detector síncrono, solo queda:

$$\frac{A_c A_c}{4} X(f) [H(f+f_c) + H(f-f_c)] = K X(f)$$

Sistemas de Telecomunicacion .Tema 3:Modulación Lineal.

Para esto, $[H(f+fc) + H(f-fc)] = \text{constante}$ para $|f| \leq W$. Esto sería posible si $H(f)$ fuese por ejemplo cualquiera de las dos respuestas siguientes:



Es decir, debe existir cierta simetría en el filtro alrededor de la frecuencia de la portadora. Dependiendo del filtro elegido, se tendría LVSb o UVSB. De este análisis se deduce que:

- El ancho de banda de la señal VSB = $W + \Delta W$, donde ΔW es el ancho del vestigio de la banda que no pasa.
- La potencia de la señal VSB será:

$$\frac{A_c^2 \overline{x^2}}{4} \leq P_{VSB} \leq \frac{A_c^2 \overline{x^2}}{2}$$

3.6.1.1.Representación en tiempo de una señal VSB.

Si llamamos $h(t)$ a la respuesta impulsiva del filtro VSB, tendremos que:
 $x_{VSB}(t) = A_c x(t) \cos \omega_c t * h(t)$

$$A_c \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) x(t-\tau) \cos \omega_c (t-\tau) d\tau$$

$$A_c \cos \omega_c t \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) x(t-\tau) \cos \omega_c \tau d\tau + A_c \sin \omega_c t \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) x(t-\tau) \sin \omega_c \tau d\tau$$

Pero:

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) x(t-\tau) \cos \omega_c \tau d\tau = x(t) * h(t) \cos \omega_c t$$

lo que en frecuencia sería $X(f) [H(f+fc) + H(f-fc)] / 2 = X(f)/2$ debido a la simetría del filtro vestigial y suponiendo $H(fc) = H(-fc) = 0.5$

Por otra parte:

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) x(t-\tau) \sin \omega_c \tau d\tau = x(t) * h(t) \sin \omega_c t$$

y en frecuencia esto sería $X(f) [H(f-fc) - H(f+fc)] / 2j = X(f) H_Q(f) / 2$

Sistemas de Telecomunicacion .Tema 3:Modulación Lineal.

Finalmente entonces:

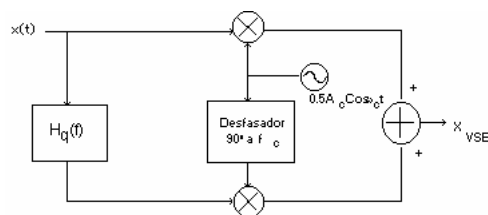
$$x_{VSB}(t) = 0.5A_c x(t)\cos\omega_c t + 0.5A_c x_Q(t)\sin\omega_c t$$

donde $x_Q(t)$ es la señal $x(t)$ filtrada a través del filtro $H_Q(f)$.
 Observe el parecido en la expresión temporal de la señal VSB con la de la señal SSB.

3.6.1.2.- Moduladores VSB

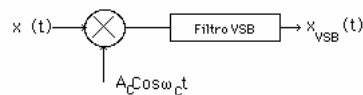
Se puede obtener una señal VSB con cualquiera de dos esquemas circuitales: uno basado en la expresión temporal , y el otro basado en el análisis frecuencial .

-Esquema N° 1:



Se genera VSB con dos ondas DSB moduladas con dos portadoras en cuadratura (Sen y Cos).

-Esquema N° 2



Para la aplicación de TV comercial , no se envía estrictamente la señal VSB que hemos analizado, sino que en el transmisor se filtra la señal en forma simple eliminando la banda indeseada sin un control estricto, y es en el receptor cuando se termina de conformar la característica VSB. Esto se hace así, ya que es más fácil darle la forma adecuada al espectro en el receptor porque con niveles de potencia más bajos se alcanza una menor distorsión.

3.6.1.3.Demoduladores VSB

De la expresión temporal de la señal VSB se observa que el mensaje se puede rescatar con un detector síncrono; sin embargo como la principal aplicación de VSB es la transmisión de señales de televisión, en donde se tienen muchos receptores, el sistema de demodulación empleado es el basado en un detector de envolvente. Para esto es necesario agregar a la señal VSB la portadora.

Supón:

$$x_{VSB}(t) + \text{portadora} = \frac{1}{2} A_c [x(t) \cos \omega_c t \pm x_Q(t) \sin \omega_c t] + A \cos \omega_c t =$$

$$(A + \frac{1}{2} A_c x(t)) \cos \omega_c t \pm \frac{1}{2} A_c x_Q(t) \sin \omega_c t$$

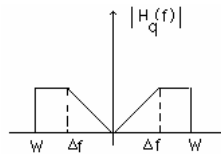
$$R(t) = \sqrt{\left(A + \frac{1}{2} A_c x(t)\right)^2 + \left(\frac{1}{2} A_c x_q(t)\right)^2}$$

$$= \left(A + \frac{1}{2} A_c x(t)\right) \sqrt{1 + \left(\frac{\frac{A_c}{2} x_q(t)}{\left(A + \frac{1}{2} A_c x(t)\right)}\right)^2}$$

Para que el término encerrado en la raíz tienda a 1, tiene que cumplirse que:

a) $A \gg A_c$ y b) $x_q(t)$ sea pequeña.

Como $x(t)$ es pasada por un filtro cuya magnitud es más o menos de la siguiente forma:



Si Δf es grande, pasa menos señal (la banda de rechazo es más grande).

En TV se utiliza un vestigio de 0.75 MHz el cual es aproximadamente 1/6 del ancho de banda total; de esta forma no es necesario un valor de A muy grande.

3.6.2.Banda lateral unica compatible.(BLC)

Como vimos antes, la ventaja fundamental en la modulación en banda lateral única es que el ancho de banda de modulación es muy pequeño, pero la demodulación de señales BLU es mas compleja que la que corresponde a DBL o AM y además es menos eficaz.

La modulación en banda lateral única compatible (BLC) combina las ventajas que nos ofrece BLU y la facilidad con la que podemos demodular AM; en esta modulación se transmite la banda lateral superior junto a la portadora, la cual se reinserta previamente a la emisión, además de transmitir una parte de la anda lateral inferior. Al estar presente la portadora la demodulación se puede efectuar con circuitos demoduladores de AM, pero con perdida de la eficacia.

3.6.3.Banda lateral independiente.

Este tipo de modulación nos permite transmitir dos señales independientes haciendo uso de la misma portadora. Para dos señales $x_1(t)$ y $x_2(t)$, modulamos la primera señal a una portadora de frecuencia f_p en BLS, y la otra señal la modulamos a la misma portadora en BLI.