Índice de contenidos

Plan de Trabajo

1. Tema: Isoclinas, Campos de Acción y Método de Euler

2. Objetivos:

2.1 General: Evaluar la utilidad de los métodos de las isoclinas y Euler para resolver ecuaciones diferenciales.

2.2 Específicos: Aplicar los métodos mencionados, para la resolución de ecuaciones diferenciales.

Perfeccionar el uso del cálculo diferencial e integral.

3. Planteamiento del Problema:

La resolución analítica de ecuaciones diferenciales por los métodos más usuales: variables separables, ecuaciones homogéneas, ecuaciones exactas, ecuaciones lineales; puede llegar a ser muy complicada. Por lo cual hay que buscar métodos alternativos para poder resolverlas.

4. Posible Solución al Problema:

El uso del método de las isóclinas (método gráfico), y del método de Euler (método analítico); son otros caminos por los cuales se puede resolver ecuaciones diferenciales. La aplicación correcta de ellos, nos facilitará la deducción de una ecuación diferencial.

5. Metodología:

5.1 Tipo de Investigación: Exploratoria

5.2 Métodos: Científico; Deductivo.

6. Calendarización:

6.1 Fecha de Entrega: 21 de febrero de 2013

Introducción

Una ecuación diferencial no necesita tener una solución, y aun si la tiene, no siempre podemos expresarla en forma explícita o implícita; en muchos casos tendremos que contentarnos con una aproximación.

Métodos Clásicos de Resolución de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

Variables Separadas

Las ecuaciones en variables separadas son las más sencillas de integrar y, a la vez, las más importantes, ya que cualquier otro método de resolución se basa esencialmente en aplicar diversos trucos para llegar a una ecuación en variables separadas.

Son de la forma $g(x) = h(y)y'$

Formalmente, se separa $g(x) = h(y)dy/dx$ en $g(x)\,dx = h(y)\,dy$ y se integra.

Ecuación de la forma $y' = f(ax + by)$.

El cambio de función $y(x)$ por $z(x)$ dado por $z = ax + by$ la transforma en una de variables separadas.

Homogéneas

Son de la forma $y'= f(y/x)$

Se hace el cambio de función $y(x)$ por $u(x)$ mediante $y = ux$, transformándose así la E. D. en una de variables separadas.

Ecuaciones Exactas

Son las de la forma $P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = 0$,

es decir, $y' =(dy/dx) = -P(x,y)/Q(x,y)$, que cumplen $P_y = Q_x$. Se busca una función $F(x, y)$ tal que $dF = \omega = P\,dx+Q\,dy$, y la solución de la E. D. es $F(x, y) = C$

Ecuaciones Lineales

Son de la forma $y'+ a(x)y = b(x)$.

La solución general de la E. D. lineal es

$$y = \exp\left(-\int a(x)\,dx\right)\left[\int b(x)\exp\left(\int a(x)\,dx\right)dx + C\right]$$

ISOCLINAS Y CAMPOS DE DIRECCIONES

Resolver una ecuación diferencial analíticamente puede ser difícil o casi imposible. Sin embargo, existe una aproximación gráfica que se puede usar para aprender mucho acerca de la solución de una ecuación diferencial.

Se trata de uno de los métodos para resolver varias clases de ecuaciones diferenciales de manera gráfica mediante la interpretación geométrica de las ecuaciones diferenciales y sus soluciones; para metodología es útil analizar las ecuaciones de la forma:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

Cuya solución es una función $y = g(x)$. Geométricamente, en la ecuación se afirma que, en cualquier punto (x, y) la pendiente (dy/dx) de la solución en ese punto está dada por $f(x, y)$. Esto puede indicarse si se traza un pequeño segmento rectilíneo que pase por el punto (x, y) con la pendiente $f(x, y)$. La colección de todos esos segmentos rectilíneos se llama **campo direccional** de la ecuación diferencial. El campo direccional puede observarse si se trazan pequeños segmentos rectilíneos en algún conjunto representativo de puntos en el plano xy. Se elige una rejilla rectangular de puntos. Una vez que se obtiene un esquema del campo direccional, a menudo es posible ver de inmediato el comportamiento cualitativo de las soluciones, o quizá observar regiones que tienen algún interés especial.

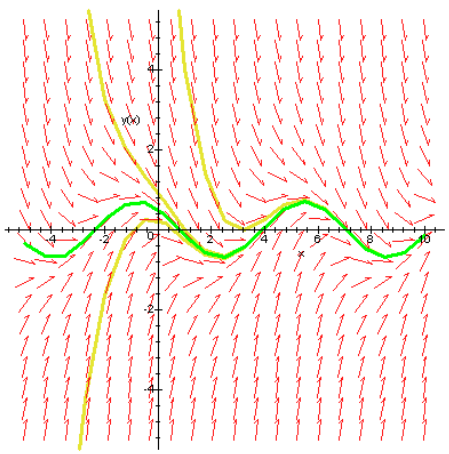
Isoclinas Si es necesario trazar manualmente el campo direccional de la ecuación diferencial $y' = f(x, y)$, es útil observar que la pendiente y' de la solución tiene valor constante en todos los puntos de la curva $f(x, y) = c$. Estas curvas se denominan curvas isoclinas. Para ecuaciones relativamente simples es posible trazar el campo direccional dibujando unas cuantas isoclinas y luego insertar los segmentos rectilíneos tangentes a la solución en varios puntos de cada una.
Cuando se hace variar el parámetro c, obtenemos un conjunto de isoclinas en los elementos lineales se constituyen adecuadamente. La totalidad de esos elementos lineales se llama de diversos modos: campo de direcciones, campo direccional, campo pendiente o campo de elementos lineales de la ecuación diferencial $dx/dy = f(x, y)$, el

campo de direcciones recuerda las “líneas de flujo” de la familia de curvas de solución de la ecuación diferencial de la cual obtenemos soluciones particulares como pueden ser los puntos (0,1), (2,3) etc.

Ejemplos.

1. Para la ecuación $y' = -y - sen(x)$

   Cuya solución general es $y = \frac{\sin(x)+\cos(x)}{2} + ce^{-x}$

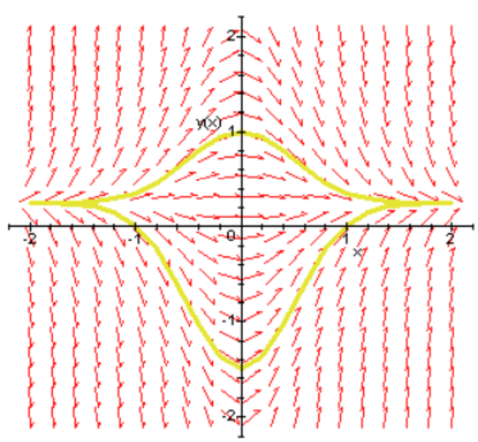


El campo de direcciones se muestra en la figura siguiente, junto con la gráfica de cuatro miembros de la familia de soluciones (que llamamos curvas isoclinas.) Se puede apreciar que tres de las curvas convergen a una cuarta (onda verde en la pantalla). Esta cuarta curva es la solución que se obtiene al poner $c = 0$, es decir $y = (sen(x) + \frac{\cos(x)}{2})$

2. En el caso de la ecuación $y' = x - 4xy$ la solución general es

$$y = \frac{1}{4} + ce^{-2x^2}$$

Se ilustra el campo de direcciones y algunas curvas isóclinas: $c = 1$ y $c = -1.5$



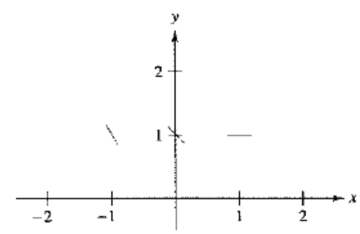
En resumen, en la gráfica del campo de direcciones de una ecuación diferencial se pueden apreciar todas las soluciones de la ecuación dada. Por el teorema de existencia y unicidad, cada curva solución se determina, ya sea dándole un valor a la constante c o de forma equivalente, estipulando un punto (x_0, y_0) del plano por donde pasa la solución.

- **Representación gráfica de campo de direcciones (campo direccional, campo pendiente o campo de elementos lineales)**

Sea $y' = x - y$ para los puntos $(-1{,}1)$, $(0{,}1)$ y $(1{,}1)$

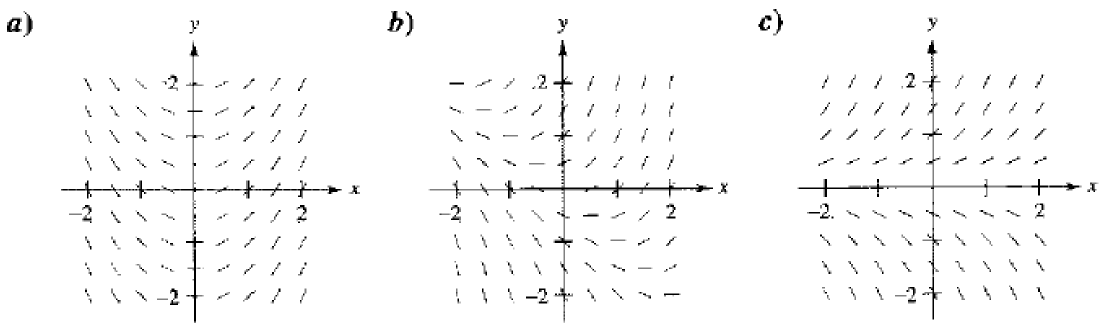
SOLUCIÓN

La pendiente de la curva en cualquier punto (x, y) es
$F(x, y) = x - y$. Asi:
La pendiente en el punto $(-1{,}1)$ es $y' = -1 - 1 = -2$;
La pendiente en $(0{,}1)$ es $y' = 0 - 1 = -1$;
La pendiente en $(1{,}1)$ es $y' = 1 - 1 = 0$;



- **Identificar campos de pendientes para ecuaciones diferenciales**

$i)\ y' = x + y$ $\qquad ii)\ y' = x$ $\qquad iii)\ y' = y$



SOLUCIÓN

a) En la figura “a)” se puede observar que la pendiente de cualquier punto a lo largo del eje y es 0. La única ecuación que satisface esta condición es $y' = x$.
Así, la gráfica corresponde con $ii)$.

b) En la figura "b)" se puede observar que la pendiente en el punto $(1,-1)$ es 0. La única ecuación que satisface esta condición es $y' = x + y$.

Así, la gráfica corresponde con $i)$.

c) En la figura "c)" se puede observar que la pendiente de algún punto a lo largo del eje x es 0. La única ecuación que satisface esta condición es $y' = y$.

Así, la gráfica corresponde con $iii)$.

- **Mediante un campo de pendientes trazar una gráfica**

Trazar un campo de pendientes para la ecuación diferencial

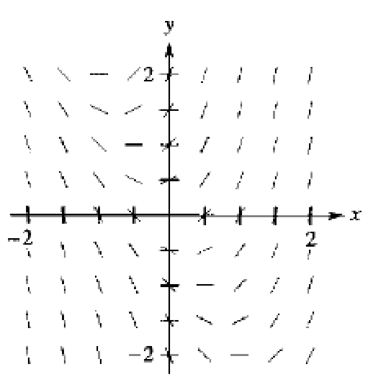
$$y' = 2x + y$$

Usar un campo de pendientes para representar gráficamente la solución que pasa por el punto $(1,1)$.

SOLUCIÓN

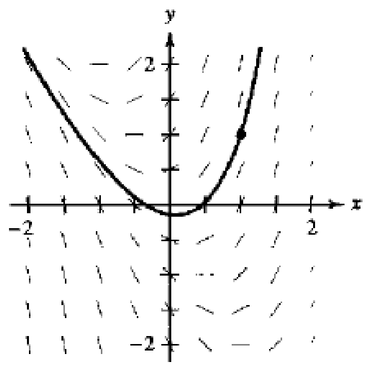
Hacer una tabla que demuestre las pendientes en varios puntos. La tabla siguiente es un pequeño ejemplo. Se deben calcular las pendientes de muchos puntos para el campo de pendientes representativo.

x	-2	-2	-1	-1	0	0	1	1	2	2
y	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1
$y' = 2x + y$	-5	-3	-3	-1	-1	1	1	3	3	5



A continuación, dibujar segmentos de rectas en los puntos con sus respectivas como se muestra en la figura.

Duespues de dibujar el campo de pendientes, se comienza en el punto inicial (1,1) y se mueve a la derecha en direccion del segmento.



A continuación, dibujar la curva solucion de (1,1)

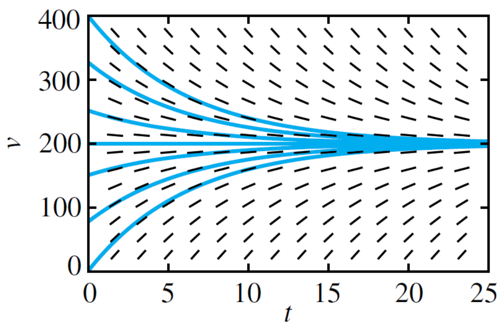
Se puede notar que el campo de pendientes muestra que mientras x aumenta, y' lo hace hasta el infinito.

APLICACIÓN DE ISOCLINAS

1. Supóngase que se lanza una pelota de beisbol en línea recta hacia abajo desde un helicóptero suspendido a una altitud de 3000 ft. Nos preguntamos si alguien abajo pudiera cacharla. Para estimar la velocidad con la cual la bola llegará a tierra, puede usarse un sistema de álgebra en una computadora portátil para construir un campo de isoclinas de la ecuación diferencial

$$\frac{dv}{dt} = 32 - 0.16v$$

   El resultado se muestra en la figura junto con varias curvas solución correspondientes a diferentes valores de la velocidad inicial $v(0)$ con las cuales se podría lanzar la pelota hacia abajo. Nótese que todas estas curvas solución tienden asintóticamente a la línea horizontal $v = 200$. Esto implica que «como quiera que sea lanzada» la bola de beisbol $se\ acercar$á $a\ la\ velocidad\ limite\ de\ \ v = 200[ft/s]$ en lugar de acelerar indefinidamente (como sería en ausencia de la



resistencia del aire). Convirtiendo el resultado a millas por hora, 60 $[mi/h]$ = 88$[ft/s]$ resulta:

$$v = 200\left[\frac{ft}{s}\right] \times \frac{60\left[\frac{mi}{h}\right]}{88\left[\frac{ft}{s}\right]} \approx 136.36\left[\frac{mi}{h}\right]$$

Tal vez un "catcher" acostumbrado a bolas rápidas de 100 mi/h podría tener alguna oportunidad de capturar esta pelota.

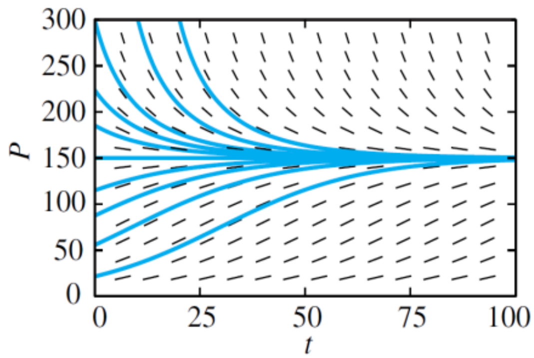
- Ecuación diferencial logística se utiliza frecuentemente para modelar una población $P(t)$ donde sus habitantes, en un medio ambiente determinado, cuentan con una $cuota\ limitada\ M$. Esto significa que M es la población máxima que ese medio ambiente puede sostener a la larga (por ejemplo, en términos del alimento máximo disponible).

$$\frac{dP}{dt} = kP(M - P)$$

2. Si tomamos $k = 0.0004$ y $M = 150$, entonces la ecuación logística en toma la forma.

$$\frac{dP}{dt} = 0.0004P(150 - P) = 0.06P - 0.0004P^2$$

El término positivo $0.06P$ en el lado derecho de la ecuación corresponde al crecimiento natural a una tasa anual de 6% (con tiempo t medido en años). El término negativo $-0.0004P^2$ representa la inhibición del crecimiento debido a una limitación de los recursos en ese medio ambiente.



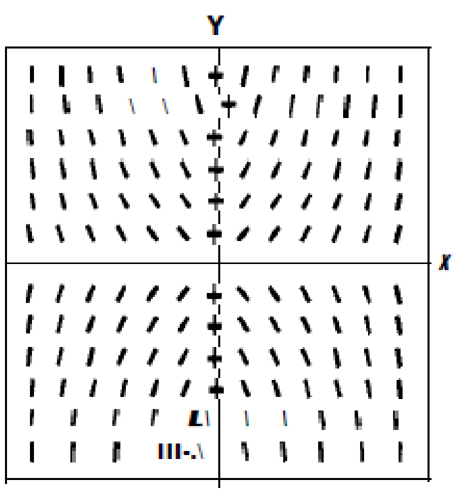
La figura muestra un campo de isoclinas para la ecuación junto con varias curvas solución correspondientes a los diferentes valores posibles de la población inicial $P(0)$. Nótese que todas estas curvas solución que aparecen tienen como asíntota a la línea horizontal $P = 150$. Esto implica que «para cualquier población inicial» la población $P(t)$ se acercará a la $poblacion\ límit$ conforme $P = 150\ t \to \infty$.

- NOTA Dibujar un campo de pendientes a mano es tedioso. En la práctica, los campos de pendientes usualmente se dibujan mediante un método gráfico.

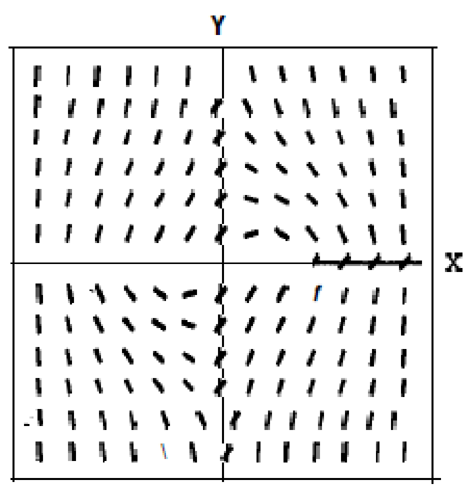
EJERCICIOS PROPUESTOS

En los problemas 1 y 2 use el respectivo campo de direcciones generado por computadora para trazar diversas curvas de solución posibles de la ecuación diferencial indicada.

1. y’ = xy



2. y’= 1 -xy



En los problemas 3 al 5 trace u obtenga con computadora el campo de direcciones de la ecuación diferencial dada. Indique diversas curvas posibles de solución.

3. y' = x

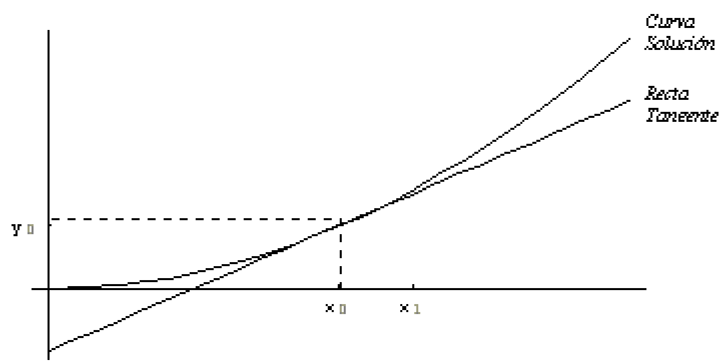
4. y' = x + y

5. y' = 1 – (y / x)

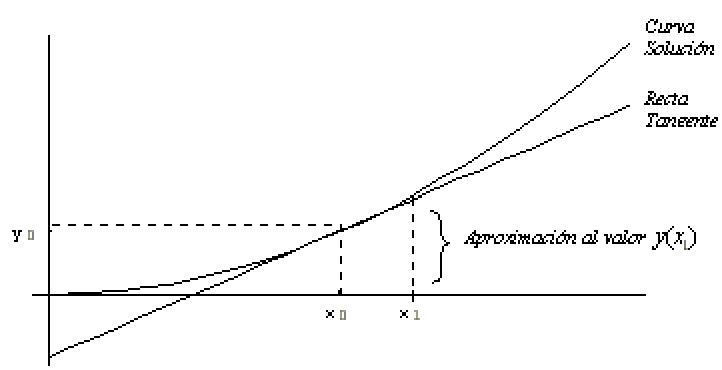
MÉTODOS DE EULER

La idea del método de Euler es muy sencilla y está basada en el significado geométrico de la derivada de una función en un punto dado.

Supongamos que tuviéramos la curva solución de la ecuación diferencial y trazamos la recta tangente a la curva en el punto dado por la condición inicial.



Debido a que la recta tangente aproxima a la curva en valores cercanos al punto de tangencia, podemos tomar el valor de la recta tangente en el punto x_1 como una aproximación al valor deseado $y(x_1)$.



Así, calculemos la ecuación de la recta tangente a la curva solución de la ecuación diferencial dada en el punto (x_0, y_0), sabemos que la ecuación de la recta es:

$$y = m(x - x_0) + y_0$$

donde m es la pendiente. En este caso, sabemos que la pendiente de la recta tangente se calcula con la derivada:

$$m = y'\big|_{(x_0, y_0)} = f(x_0, y_0)$$

Por lo tanto, la ecuación de la recta tangente es :

$$y = f(x_0, y_0)(x - x_0) + y_0$$

Ahora bien, suponemos que x_1 es un punto cercano a x_0, y por lo tanto estará dado como $x_1 = x_0 + h$. De esta forma, tenemos la siguiente aproximación:

$$y(x_1) = y(x_0 + h) \approx f(x_0, y_0)(\cancel{x_0} + h - \cancel{x_0}) + y_0$$

De aquí, tenemos nuestra fórmula de aproximación:

$$y(x_0 + h) \approx y_0 + h \cdot f(x_0, y_0)$$

Esta aproximación puede ser suficientemente buena, si el valor de h es realmente pequeño, digamos de una décima ó menos. Pero si el valor de h es más grande, entonces podemos cometer mucho error al aplicar dicha fórmula. Una forma de reducir el error y obtener de hecho un método iterativo, es dividir la distancia $h = |x_1 - x_0|$ en n partes iguales (procurando que estas partes sean de longitud suficientemente pequeña) y obtener entonces la aproximación en n pasos, aplicando la fórmula anterior n veces de un paso a otro, con la nueva h igual a $\dfrac{|x_1 - x_0|}{n}$.

En una gráfica, tenemos lo siguiente:

$$\begin{array}{cccc}
x_0 & x_0 + h & x_0 + 2h & \cdots x_1 \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
y_0 & y_1 & y_2 & \cdots y_n \\
 & & & (\textit{\textbf{solución}})
\end{array}$$

Ahora bien, sabemos que:

$$y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0)$$

Para obtener y_2 únicamente hay que pensar que ahora el papel de (x_0, y_0) lo toma el punto (x_1, y_1), y por lo tanto, si substituimos los datos adecuadamente, obtendremos que:

$$y_2 = y_1 + hf(x_1, y_1)$$

De aquí se ve claramente que la fórmula recursiva general, está dada por:

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$$

Esta es la conocida fórmula de Euler que se usa para aproximar el valor de $y(x_1)$ aplicándola sucesivamente desde x_0 hasta x_1 en pasos de longitud h.

Ejemplo 1

Dada la siguiente ecuación diferencial con la condición inicial:

$$y' = 2xy$$
$$y(0) = 1$$

Aproximar $y(0.5)$.

NOTA

Primero observamos que esta ecuación sí puede resolverse por métodos tradicionales de ecuaciones diferenciales. Por ejemplo, podemos aplicar el método de separación de variables. Veamos las dos soluciones.

Solución Analítica.

$$\frac{dy}{dx} = 2xy$$

$$\frac{dy}{y} = 2xdx$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int 2xdx$$

$$\ln|y| = x^2 + c$$

Sustituyendo la condición inicial:

$$x = 0 \rightarrow y = 1$$

$$\ln 1 = 0^2 + c$$

$$0 = c$$

Por lo tanto, tenemos que la curva solución real está dada:

$$\ln y = x^2$$

$$e^{\ln y} = e^{x^2}$$

$$y = e^{x^2}$$

Y por lo tanto, el valor real que se pide es:

$$y(0.5) = e^{(0.5)^2} = 1.28403$$

Solución Numérica

Aplicamos el método de Euler y para ello, observamos que la distancia entre $x_0 = 0$ y $x_1 = 0.5$ no es lo suficientemente pequeña. Si dividimos la distancia entre cinco obtenemos un valor de $h = 0.1$ y por lo tanto, obtendremos la aproximación deseada en cinco pasos.

De esta forma, tenemos los siguientes datos:

$$\begin{cases} x_0 & = & 0 \\ y_0 & = & 1 \\ h & = & 0.1 \\ f(x,y) & = & 2xy \end{cases}$$

Sustituyendo estos datos en la formula de Euler, tenemos, en un primer paso:

$$\begin{cases} x_1 & = & x_0 + h & = & 0.1 \\ y_1 & = & y_0 + hf(x_0, y_0) & = & 1 + 0.1[2(0)(1)] & = & 1 \end{cases}$$

Aplicando nuevamente la formula de Euler, tenemos, en un segundo paso:

$$\begin{cases} x_2 & = & x_1 + h & = & 0.2 \\ y_2 & = & y_1 + hf(x_1, y_1) & = & 1 + 0.1[2(0.1)(1)] & = & 1.02 \end{cases}$$

Y así sucesivamente hasta obtener y_5. Resumimos los resultados en la siguiente tabla:

n	x_n	y_n
0	0	1
1	0.1	1
2	0.2	1.02
3	0.3	1.0608
4	0.4	1.12445
5	0.5	1.2144

Concluimos que el valor aproximado, usando el método de Euler es:

$$y(0.5) \approx 1.2144$$

Puesto que en este caso, conocemos el valor verdadero, podemos usarlo para calcular el error relativo porcentual que se cometió al aplicar la formula de Euler. Tenemos que:

$$|\epsilon_v| = \left|\frac{1.28402 - 1.2144}{1.28402} \times 100\%\right| = 5.42\%$$

Ejemplo 2

Aplicar el método de Euler para aproximar $y(1.3)$, dada la ecuación diferencial.

$$y' = x^2 + 0.5y^2$$

$$y(1) = 2$$

Solución

Nuevamente vemos que nos conviene dividir en pasos la aproximación. Así, elegimos nuevamente $h = 0.1$ para obtener el resultado final en tres pasos. Por lo tanto, aplicamos el método de Euler con los siguientes datos:

$$\begin{cases} x_0 & = & 1 \\ y_0 & = & 2 \\ h & = & 0.1 \\ f(x,y) & = & x^2 + 0.5y^2 \end{cases}$$

En un primer paso, tenemos que:

$$\begin{cases} x_1 & = & x_0 + h & = & 1.1 \\ y_1 & = & y_0 + hf(x_0, y_0) & = & 2 + 0.1\left[1^2 + 0.5(2)^2\right] & = & 2.3 \end{cases}$$

Resumimos los resultados en la siguiente tabla:

n	x_n	y_n
0	1	2
1	1.1	2.3
2	1.2	2.6855
3	1.3	3.1901

De lo cual, concluimos que la aproximación buscada es:

$$y(1.3) \approx 3.1901$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

1.3 Problemas

En los problemas 1 al 10 se proporcionan campos de isoclinas de la ecuación diferencial indicada junto con una o más curvas solución. Trace las curvas solución que pasan por los puntos adicionales marcados en cada campo de isoclinas.

1. $\dfrac{dy}{dx} = -y - \text{sen } x$

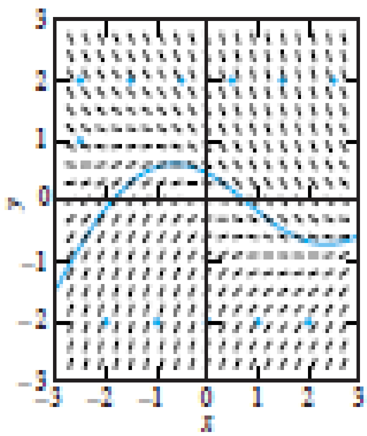


FIGURA 1.3.15.

2. $\dfrac{dy}{dx} = x - y$

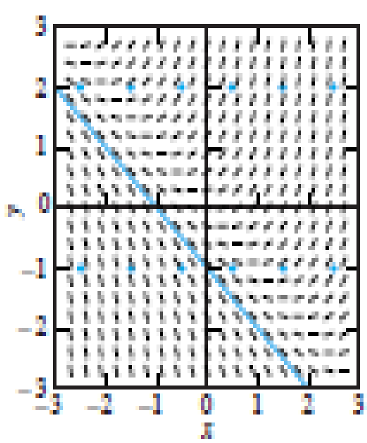


FIGURA 1.3.16.

4. $\dfrac{dy}{dx} = x - y$

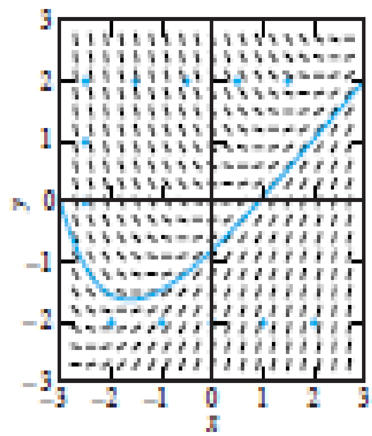


FIGURA 1.3.18.

5. $\dfrac{dy}{dx} = y - x + 1$

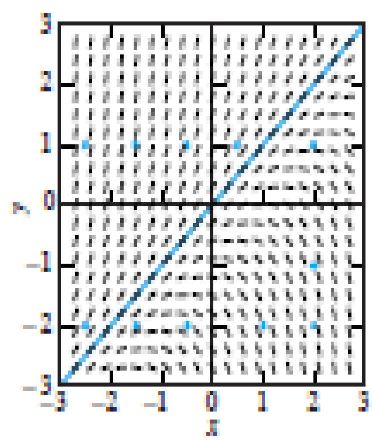


FIGURA 1.3.19.

23. $y' = x^2 + y^2 - 1, \quad y(0) = 0; \quad y(2) = ?$

24. $y' = x + \frac{1}{2}y^2, \quad y(-2) = 0; \quad y(2) = ?$

25. Usted se lanza con un paracaídas desde el helicóptero del ejemplo 3 y tira de la cuerda para abrirlo. Considere $k = 1.6$ en la ecuación (3), de tal manera que su velocidad de caída satisface el problema de valor inicial

$$\frac{dv}{dt} = 32 - 1.6v, \quad v(0) = 0.$$

Para investigar la probabilidad de sobrevivir, construya un campo de isoclinas para esta ecuación diferencial y trace la curva solución apropiada. ¿Cuál será su velocidad límite? ¿Servirá de algo colocar estratégicamente una gran pila de paja? ¿Cuánto le tomará alcanzar 95% de su velocidad límite?

26. Suponga que la población de venados $P(t)$ en un pequeño bosque satisface la ecuación logística

$$\frac{dP}{dt} = 0.0225P - 0.0003P^2.$$

Construya un campo de isoclinas y una curva solución apropiada para dar respuesta a las siguientes preguntas: Si hay 25 venados en el tiempo $t = 0$, y t es medido en meses, ¿cuánto tiempo le tomará duplicarse a esta población? ¿Cuál será la población límite de venados?

Conclusiones

- La aplicación de isoclinas y campos de dirección nos dan una familia de curvas y posibles soluciones.
- Los métodos de Euler son técnicas gráficas de solución numérica de Ecuaciones Diferenciales.

Recomendaciones

- Manejar eficientemente las técnicas de derivación e integración
- Poner atención en el significado de cada gráfica y análisis de cada punto o solución que obtiene.

Bibliografía

- M. BRAUN, “Ecuaciones diferenciales y sus aplicaciones”, Grupo Editorial Iberoamérica, México, 1990.
- BOYCE DIPRIMA, ”Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera”, ED.DIGITAL EDUCACIÓN PARA TODOS. Edición cuarta, Limusa-Willey, México ISBN 958-18-4974-4 2005?
- DENNIS G. ZILL, “Ecuaciones Diferenciales con aplicaciones de modelado” International Thomson Editores, An International Thomson Publishing Company. Loyola Marymount University. Edicion sexta, Impreso en México ISBN 968-7529-21-0, 1997.
- LARSON, HOSTETLER, EDWARS. “Calculo con geometría analítica”, Octava edición, Volumen I, McGraw-Hill Interamericana, Impreso en México 2006.
- Juan Pablo Prieto y Mauricio Vargas, “Apuntes de Clases Calculo II”, Ingenieria Forestal e Ingenieria en Industrias de la Madera. Universidad de Talca, 2004.
- Murray R Spiegel, “Ecuaciones diferenciales” Edición tercera, PRENTICE-HALL IHISPANOAMERICANA, S.A. 1993.
- EDWARS PENNEY. “ECUACIONES DIFERENCIALES Y PROBLEMAS CON VALORES EN LA FRONTERA ”, Computo y Modelado, Edición cuarta