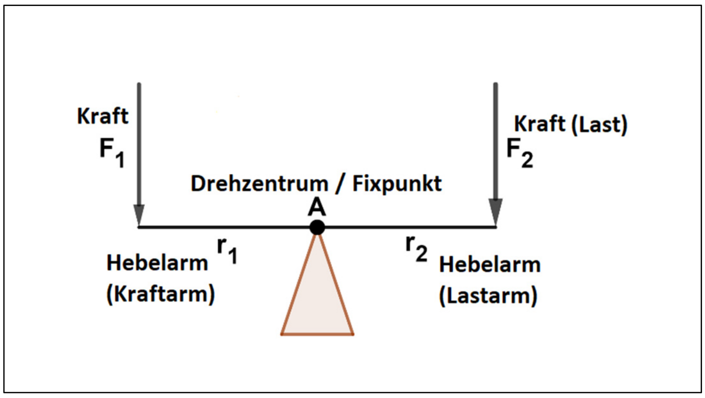
Lösungshinweise

Zu 3.3.1 Flächenschwerpunkt – über physikalische Experimente besondere Linien ebener Figuren entdecken

Zu KV 3.3.1.1: **Warm Up**

1. b) Skizze eines zweiseitigen Hebels beschriftet mit Fachbegriffen:



c) Das Hebelgesetz ist ein Gesetz, nach welchem ein Hebel im Gleichgewicht ist, wenn *für die Längen der Hebel* r_1 *und* r_2 *und die jeweils senkrecht in dieselbe Richtung angreifenden Kräfte* F_1 *und* F_2 *die folgende Gleichung gilt:*

$$F_1 \cdot r_1 = F_2 \cdot r_2$$

Man sagt auch bei einer Bezeichnung der Hebelarme als Kraftarm und Lastarm und der Kräfte als Kraft und Last: „Kraft mal Kraftarm gleich Last mal Lastarm."

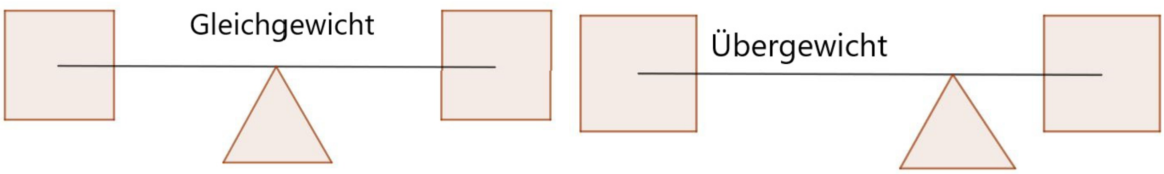
2. Mögliche Beschreibung: Auf dem Bild ist ein langes Brett zu erkennen, das auf einem Stein aufliegt und damit einen physikalischen Hebel bildet. Auf dem einen Hebelarm liegt eine große Kugel (ein Globus oder die Weltkugel) auf, der andere deutlich längere Hebelarm wird von einer Person heruntergedrückt. Das Bild bezieht sich auf den Archimedes nachgesagten Satz: „Gebt mir einen festen Punkt im All, und ich werde die Welt aus den Angeln heben."

Zu KV 3.3.1.2: **Archimedes „Über den Schwerpunkt ebener Flächen“**

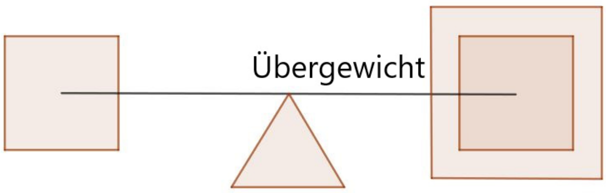
Skizzen zu den sieben Voraussetzungen sowie sieben Paragraphen des Hebelgesetzes:

Hinweis: Es wäre auch möglich, die Waage bei Übergewicht geneigt zu zeichnen.

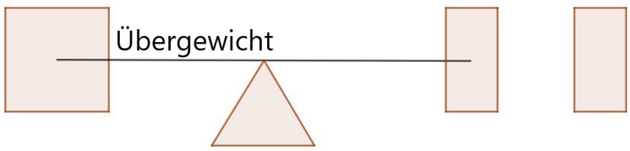
1. Voraussetzung



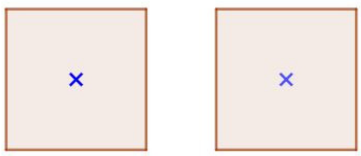
2. Voraussetzung



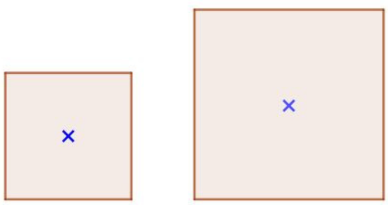
3. Voraussetzung



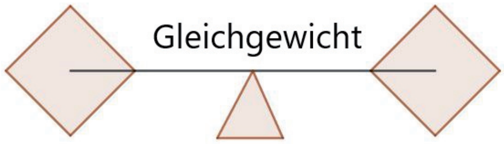
4. Voraussetzung



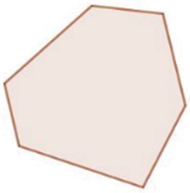
5. Voraussetzung



6. Voraussetzung



7. Voraussetzung



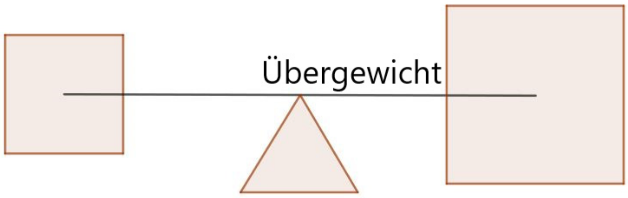
konkav -
Schwerpunkt
innerhalb der Figur

konvex -
Schwerpunkt kann
außerhalb liegen

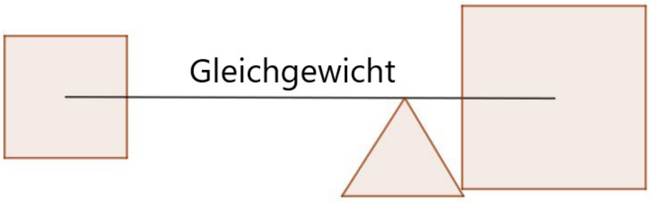
§1


Gleichgewicht

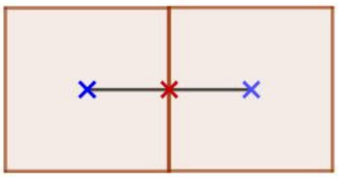
§2


Übergewicht

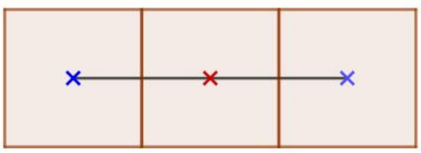
§3


Gleichgewicht

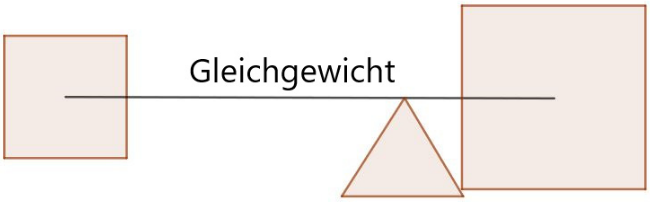
§4



§5

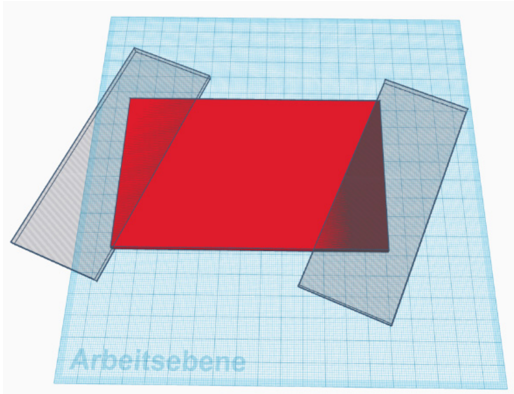


§6 / §7


Gleichgewicht

Zu KV 3.3.1.3: **Schwerpunkt ebener Figuren – physikalisches Experiment**

1. Die Herangehensweise zur Erstellung eines Trapezes mit dreieckiger, parallelogrammförmiger und trapezförmiger Grundfläche unterscheidet sich je nachdem, ob ein parametrisches Modellierungsprogramm, wie Fusion 360, oder ein Direktmodellierungsprogramm, wie Tinkercad™, verwendet wird. Mit Fusion 360 kann die Grundform einfach als zweidimensionale Skizze gezeichnet und bemaßt werden. Anschließend wird die Skizze linear um 3mm extrudiert. Mit Tinkercad™ ist der Konstruktionsprozess etwas aufwändiger. Es bietet sich an, einen Quader auszuwählen und eine Höhe von 3mm einzustellen. Die rechteckige Grundfläche kann dann durch das Hinzufügen von Bohrungskörpern verändert werden, wie es in der nebenstehenden Abbildung für ein Parallelogramm zu sehen ist.



2. **Experiment – Prismen ins Gleichgewicht bringen**

A) Ausbalancieren der Prismen auf dem T-Träger / Beobachtungen:

Das **Parallelogramm** lässt sich auf unendlich vielen verschiedenen Linien mit dem Balken ausbalancieren. Diese verlaufen alle durch einen Punkt. Besondere dieser Linien verlaufen durch zwei gegenüberliegende Seitenmitten oder auch durch zwei gegenüberliegende Ecken.

Das **Dreieck** lässt sich auf unendlich vielen verschiedenen Linien mit dem Balken ausbalancieren. Diese verlaufen alle durch einen Punkt. Besondere dieser Linien verlaufen durch eine Ecke und die gegenüberliegende Seitenmitte.

Das **Trapez** lässt sich auf unendlich vielen verschiedenen Linien mit dem Balken ausbalancieren. Diese verlaufen alle durch einen Punkt. Eine besondere dieser Linien verläuft durch die Seitenmitten der beiden zueinander parallelen Seiten.

B) Ausbalancieren der Prismen auf dem Pfahlträger / Beobachtungen:

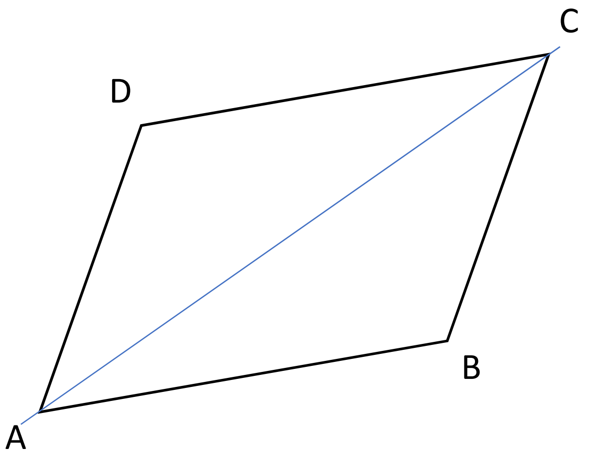
Das **Parallelogramm** lässt sich auf genau einem Punkt ausbalancieren. Hierbei handelt es sich um den Schnittpunkt der Linien aus Aufgabenteil a), also insbesondere der Diagonalen.

Das **Dreieck** lässt sich auf genau einem Punkt ausbalancieren. Hierbei handelt es sich um den Schnittpunkt der Linien aus Aufgabenteil a), also insbesondere der Seitenhalbierenden.

Das **Trapez** lässt sich auf genau einem Punkt ausbalancieren. Hierbei handelt es sich um den Schnittpunkt der Linien aus Aufgabenteil a). Der Schwerpunkt liegt auf der Verbindungslinie der Mitten der zueinander parallelen Seiten.

Zu KV 3.3.1.4 a: **Schwerpunkt eines Parallelogramms**

1.



Wir wollen den Sachverhalt, dass eine Schwerlinie das Parallelogramm in gleich große Teilflächen teilt, beispielhaft an der Diagonalen zwischen den Punkten A und C zeigen. Bei einem Parallelogramm haben die Seiten AB und CD die gleiche Länge. Ebendies gilt für die Seiten AD und BC. Zudem sind gegenüberliegende Winkel bei einem Parallelogramm gleich groß, damit auch die Winkel bei D und B. Nach dem SWS-Kongruenzsatz handelt es sich also bei den Teildreiecken ABC und ACD um kongruente und damit flächeninhaltsgleiche Dreiecke.

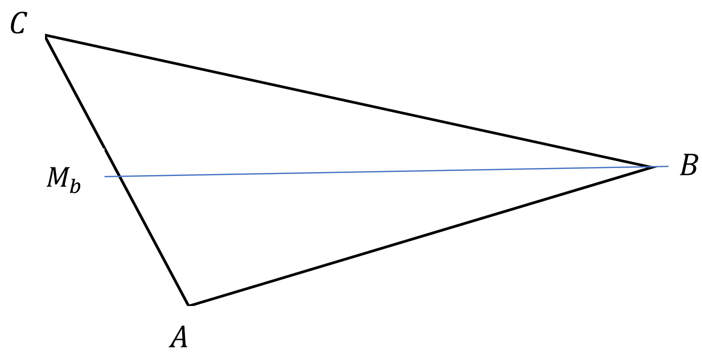
Auf ähnliche Weise kann der Zusammenhang auch für die anderen Schwerlinien gezeigt werden, wobei in den meisten Fällen ein Viereck und kein Dreieck entsteht. Dann bietet es sich an, die Gleichheit der einzelnen Winkel und einer Seitenlänge zu zeigen. Mit der Homogenität und einer gleichen Stärke der Plättchen lassen sich die beiden Gebiete Geometrie und Physik verbinden.

„Der Schwerpunkt eines Parallelogramms ist der Schnittpunkt der Schwerlinien."

2. Die Lösungen zu dieser Aufgabe können sehr individuell ausfallen, weshalb wir hier von einer Beispiellösung absehen. Die Schülerinnen und Schüler sollten bei ihrer Arbeit jedoch darauf hingewiesen werden, jeden Schritt einzeln nachzuvollziehen und mit der Skizze in Verbindung zu setzen. Dabei kann es hilfreich sein, einzelne Teile der Skizze und des Textes farblich zu markieren bzw. zu gestalten. So erhalten Leser bzw. Betrachter eine bessere Übersicht.

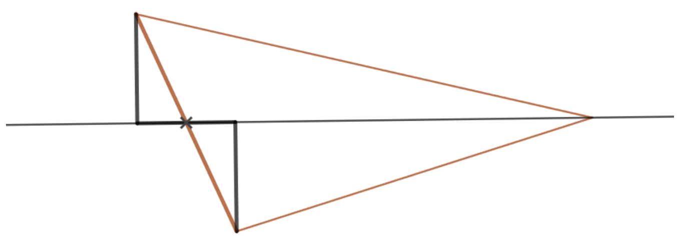
Zu KV 3.3.1.4 c: **Schwerpunkt eines Dreiecks**

1.

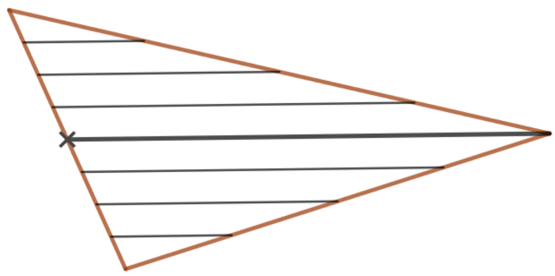


2. Die Dreiecke M_bAB und M_bBC haben den gleichen Flächeninhalt, weil *sie die gleiche Grundseite M_bB sowie gleich lange Höhen besitzen. Die Gleichheit der Länge der Höhen durch die Punkte A bzw. C lässt sich mit den Strahlensätzen zeigen. So bilden die Seitenhalbierende M_bB, die Seite AC sowie die Höhen durch A bzw. C eine Strahlensatzfigur. Da M_bB die Seitenhalbierende ist, sind die Strecken AM_b und CM_b gleich lang, damit nach den Strahlensätzen auch die Höhen.*

Anmerkung: An dieser Stelle könnte auch mit den gleichlangen Grundseiten AM_b und CM_b und derselben (!) Höhe durch B argumentiert werden. Dann würde aus der Flächeninhaltsformel für Dreiecke direkt die Behauptung folgen.



3. Bei M_bB handelt es sich um die Schwerlinie, weil *das Dreieck parallel zur Seitenhalbierenden M_bB in ganz viele schmale Teilflächen (Trapeze, sowie zwei Dreiecke gleicher Höhe) zerlegt werden kann. Bei gleichem Abstand von M_bB hat die Teilfläche auf beiden Seiten jeweils den gleichen Flächeninhalt, da die zueinander parallelen Seiten der Teilflächen gleiche Länge besitzen. Damit haben auch jeweils die Schwerpunkte der Teilflächen den gleichen Abstand zu M_bB. Folglich liegt ihr gemeinsamer Schwerpunkt auf M_bB. Dies gilt für alle solchen Teilflächen.*

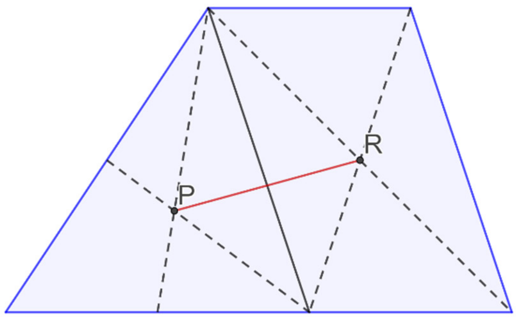


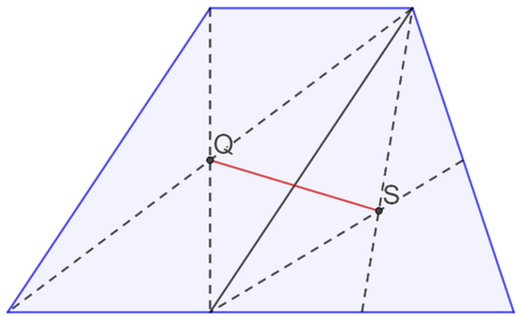
„Der Schwerpunkt eines Dreiecks muss auf jeder einzelnen Seitenhalbierenden liegen, somit liegt er genau da, wo sich alle drei Seitenhalbierenden (auch Schwerlinien genannt) schneiden."

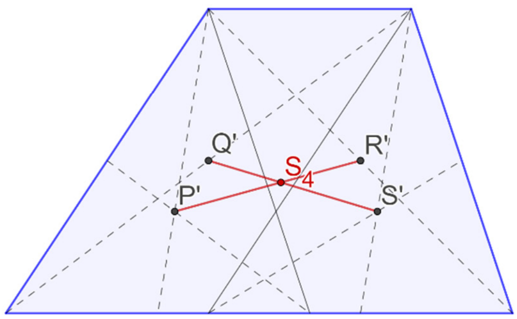
Zu KV 3.3.1.4 d: **Schwerpunkt eines Trapezes**

1. Wie in den beiden unteren Bildern dargestellt, kann ein Trapez auf zwei Arten in ein Parallelogramm und ein Dreieck geteilt werden. Von diesen zwei Figuren kann der Schwerpunkt zeichnerisch mit den Diagonalen bzw. Seitenhalbierenden bestimmt werden.

2. Der Schwerpunkt der Gesamtfigur liegt damit auf der Verbindungslinie der zwei Teilfiguren – die Verbindungslinie ist eine Schwerlinie. Durch die zwei unterschiedlichen Zerlegungen erhält man auch zwei unterschiedliche Schwerlinien. Entsprechend ist der Schnittpunkt dieser Schwerlinien der Schwerpunkt des Trapezes. Dies gilt sowohl für symmetrische wie auch nichtsymmetrische Trapeze.





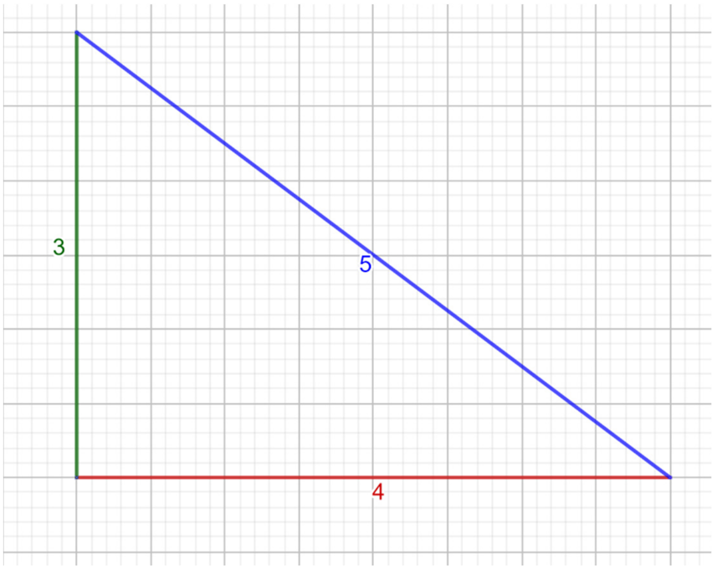


3. Bei den in Aufgabe 1 und 2 gezeichneten Linien handelt es sich tatsächlich um Schwerlinien. Dies lässt sich damit begründen, dass jede durch den Schwerpunkt der Teilfiguren verlaufende Linie eine Schwerlinie der Teilfigur ist. Damit ist die Linie, welche die beiden Schwerpunkte der Teilfiguren verbindet, eine Schwerlinie beider Teilfiguren, und entsprechend auch der Gesamtfigur. Mit der Zerlegungsmethode können verschiedene Schwerlinien der Gesamtfigur bestimmt werden. Der Schwerpunkt der Gesamtfigur liegt auf allen Schwerlinien der Gesamtfigur, damit muss es sich um deren Schnittpunkt handeln.

Zu 3.3.2 Der Satz des Pythagoras – handlungsorientiert beweisen

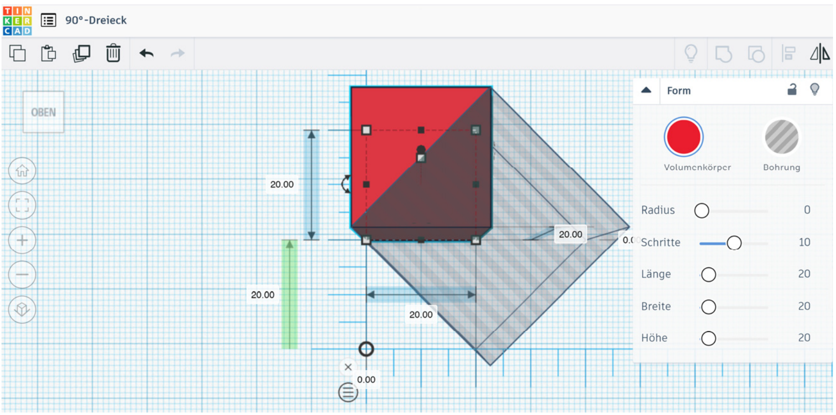
Zu KV 3.3.2.1: **Rechtwinklige Dreiecke 3D-drucken und überprüfen**

1. a)



b)–c) Beispielhafte Erstellung eines Dreiecksprisma, welches dieses rechtwinklige Dreieck als Grundfläche besitzt, im CAD-Programm Tinkercad™:

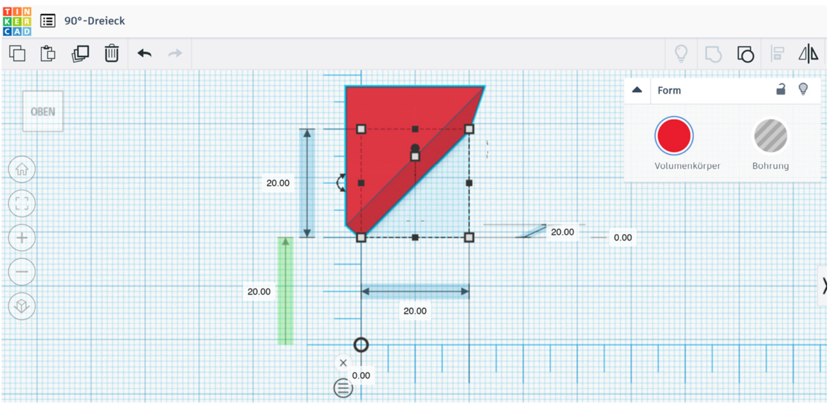
1. Schritt:



Erläuterungen:

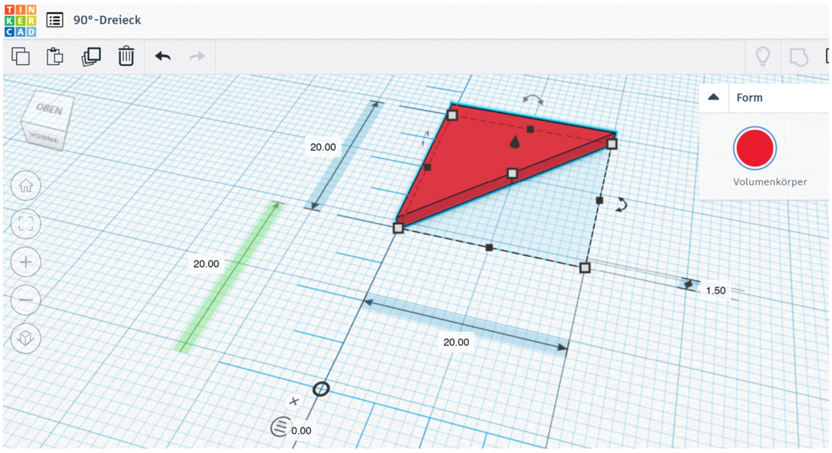
Erst wird ein Quader als Volumenkörper ausgewählt, dann wird mit Hilfe des Befehls „Gruppierung“ der Quader entlang der Diagonalen mit einem weiteren Quader als Bohrungskörper zerschnitten.

2. Schritt:



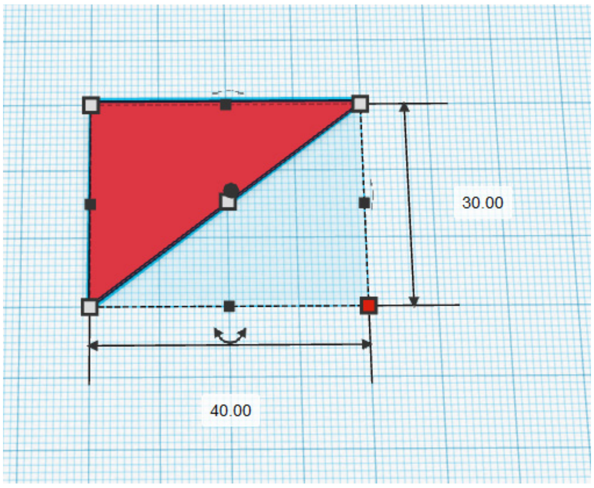
Nach der „Bohrung“ ist nun ein Dreiecks-Prisma entstanden. Die Höhe dieses Prismas muss noch angepasst werden.

3. Schritt:



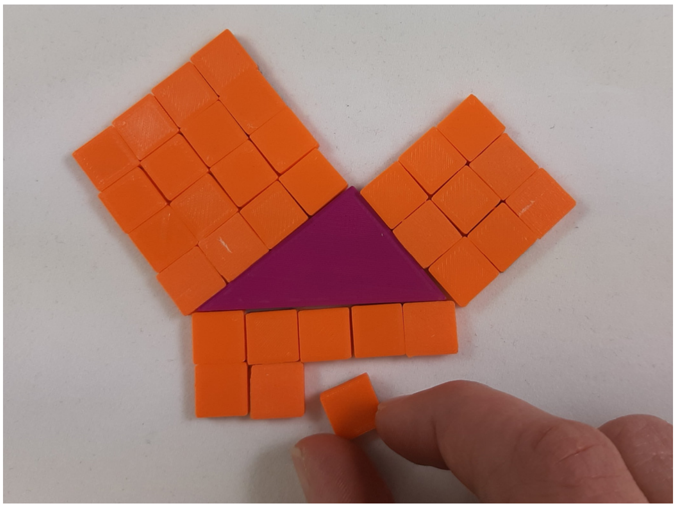
Die Höhe des entstandenen rechtwinkligen Dreiecks-Prismas wird angepasst. Sie beträgt hier nun 1,5mm (auch dies ist möglich).

4. Schritt:



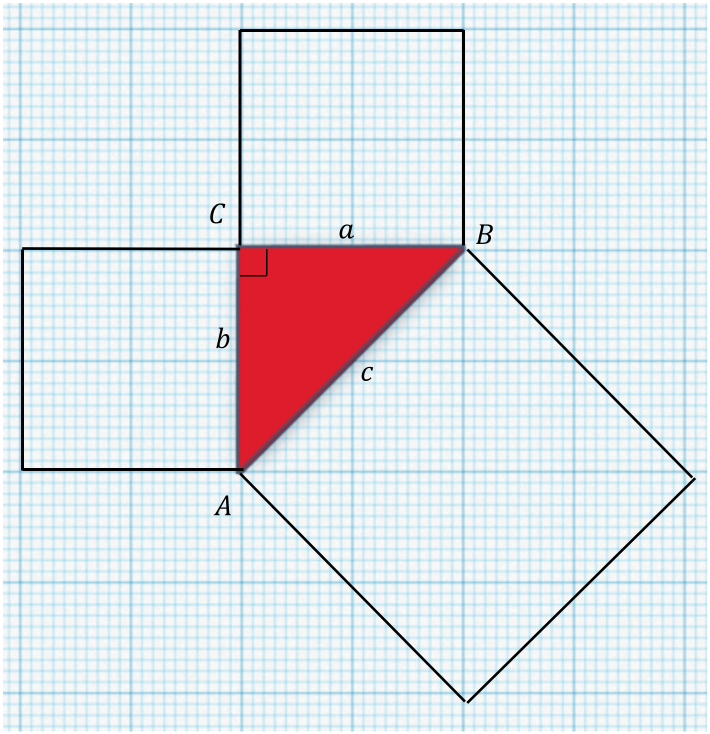
Abschließend werden die Seitenlängen so angepasst, dass ausschließlich ganzzahlige Seitenlängen vorkommen.

2. a) Mit den Einheitsplättchen werden die Quadrate über den Seiten des Dreiecks, wie im folgenden Bild dargestellt, ausgelegt. Anschließend wird die Anzahl der verwendeten Einheitsplättchen bestimmt.



In unserem Beispiel ergibt dies die Gleichung 9+16=25. Damit haben wir die Gültigkeit des Satzes des Pythagoras für diesen einen (unseren) Fall gezeigt.

b)

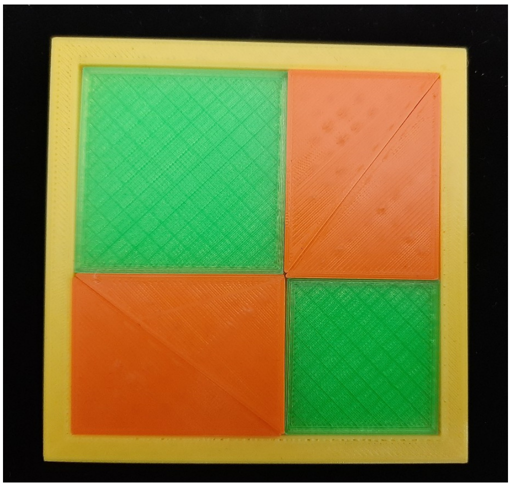


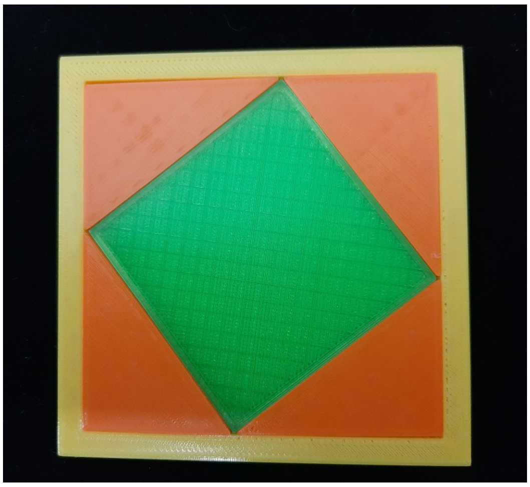
In einem rechtwinkligen Dreieck ABC, mit den Seiten a, b als Katheten und c als Hypotenuse gilt: $a^2 + b^2 = c^2$.

c) In allen rechtwinkligen Dreiecken ist die Summe der Flächeninhalte der Kathetenquadrate gleich dem Flächeninhalt des Hypotenusenquadrates. Sind a und b die Längen der am rechten Winkel anliegenden Seiten, also der Katheten, und c die Länge der dem rechten Winkel gegenüberliegenden Seite, der Hypotenuse, dann lautet der Satz: $a^2 + b^2 = c^2$.

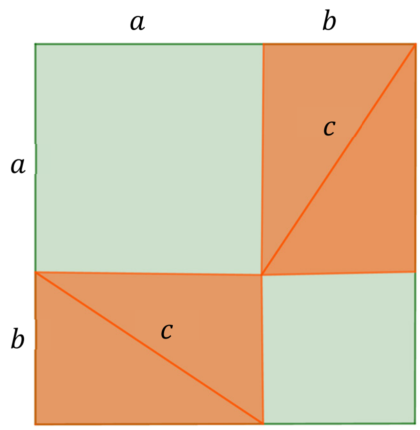
Zu KV 3.3.2.2: **Wir beweisen den Satz des Pythagoras**

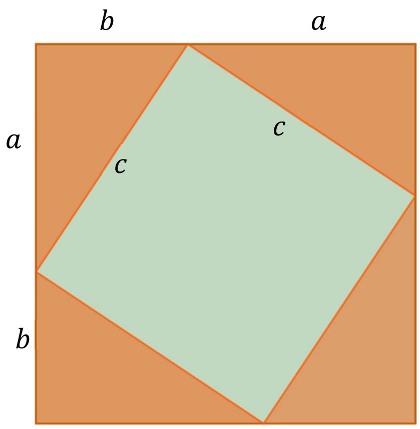
1. a)





b)–d) Wir wählen eine geeignete Beschriftung für die Seitenlängen:





1. Quadrat (vgl. Abbildung oben links): Gegeben ist ein Quadrat, dessen Seiten aus den Teilstrecken a, b bestehen.

Der Flächeninhalt des Quadrats ist dann:

$$A_{Q1} = (a+b)(a+b) = a^2 + 2ab + b^2$$

2. Quadrat (vgl. Abbildung oben rechts): Der Flächeninhalt des Quadrats $(a+b)(a+b)$ lässt sich auch durch die Gleichung

$$A_{Q2} = c^2 + 4\left(\frac{ab}{2}\right) = c^2 + 2ab$$

bestimmen.

Da wir A_{Q1} und A_{Q2} mithilfe von $(a+b)(a+b)$ beschrieben haben, sind sie gleich groß und wir setzen sie gleich:

$$A_{Q1} = A_{Q2}$$

$$a^2 + 2ab + b^2 = c^2 + 2ab$$

$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 = c^2$$

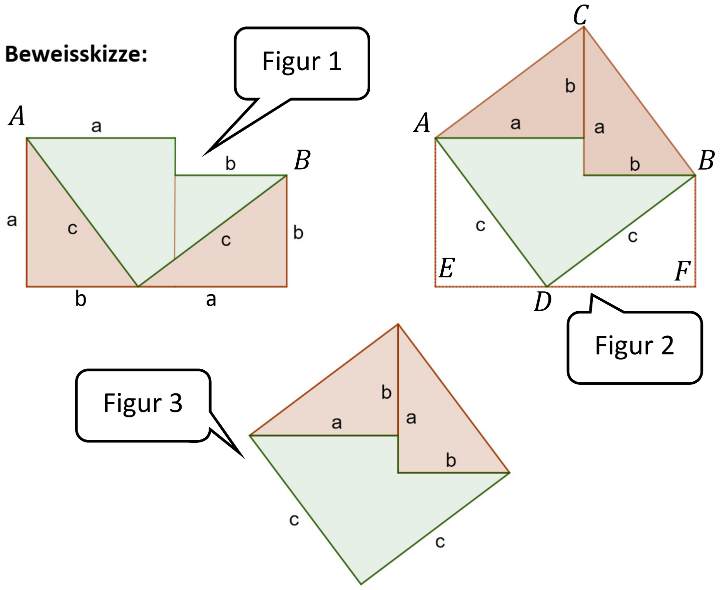
➔ Satz des Pythagoras

Hinweis zu 2.: Der „Beweis“ verkürzt den mathematisch korrekten Beweis dadurch, dass nicht gefragt wird, ob durch das Aneinanderlegen der gezeichneten Figuren auch tatsächlich ein (großes) Quadrat entsteht. Es könnte gefragt werden: Sind die Seiten des Vierecks wirklich gerade, oder wenn man genauer hinschaut nicht? Dazu benötigt man eine Argumentation, die sich auf die Winkel bezieht und wesentlich die Winkelsumme des Dreiecks ausnutzt.

Für unsere Lösungshinweise zu dieser Aufgabe haben wir im Folgenden (siehe Lösungshinweis zu KV 3.3.2 a) eine Beweisidee ausgewählt. Weitere Anregungen erhalten Sie hierzu im Begleittext zum Unterrichtsentwurf.

Zu KV 3.3.2.3 a: **Aufgabenkarten mit Beweisskizzen**

Beweisidee „Stuhl der Braut“ nach Euklid:



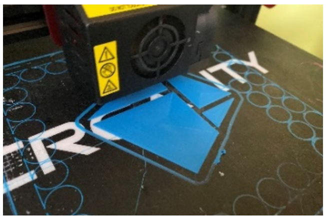
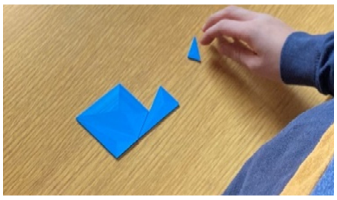
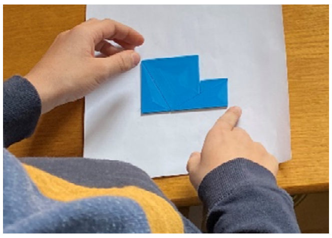
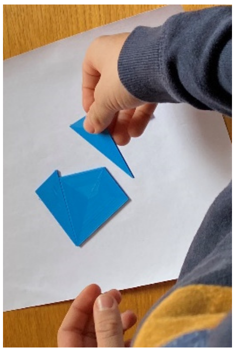
Wir wollen zeigen, dass aus Figur 1, deren Flächeninhalt $a^2 + b^2$ beträgt, durch geeignete Zerlegungen und anschließende Drehungen ein flächengleiches Quadrat c^2 erhalten werden kann.

Figur 1 ist zusammengesetzt aus zwei Quadraten mit den Seitenlängen a und b. Wir zerlegen diese Figur 1 so, dass wir zwei kongruente rechtwinklige Dreiecke (vgl. Figur 2) mit den Katheten a und b und der Hypotenuse c erhalten. Diese Dreiecke verschieben wir oder drehen wir um 90°, sodass wir ein Quadrat mit der Seitenlänge c erhalten (Figur 3).

Aus der Kongruenz der beiden Dreiecke und deren Verschiebung bzw. Drehung folgern wir, dass alle vier Seiten c des Vierecks (die Ecken der beiden gedrehten Dreiecke treffen sich in einem Punkt, nämlich C) gleich lang sind. Gleichzeitig hat das Viereck wegen der Drehung bei A und B je einen rechten Winkel (vgl. Figur 2). Auch der Winkel bei C beträgt 90°, denn er setzt sich aus den beiden Dreiecken ADE und DBF zusammen (an dieser Stelle kann mathematisch auch mit der Winkelsumme eines Dreiecks argumentiert werden). Daher ist das Viereck $ABCD$ ein Quadrat (weil in einem Viereck mit drei rechten Winkeln auch der vierte ein rechter Winkel sein muss). Somit lässt sich für die Flächen über den Seiten der rechtwinkligen Dreiecke folgern: $a^2 + b^2 = c^2$.

Mit 3D-gedrucktem Material, bestehend aus den einzelnen Teilflächen, können die einzelnen Schritte leicht nachvollzogen werden. Die Flächengleichheit der Ausgangs- und der Endfigur kann dadurch begründet werden, dass kein Puzzleteil weggelegt oder hinzugefügt wird. Die einzelnen Winkel können am Material gemessen und anschließend mathematisch begründet werden.

Hier sehen wir einen Schüler bei der Erkundung dieser Beweisidee mit 3D-gedrucktem Material:

Zu 3.3.3 Der Pantograph – einem historischen Zeichengerät auf der Spur

Zu KV 3.3.3.1: **Warm Up – Maßstab, Ähnlichkeit, Strahlensätze**

1.

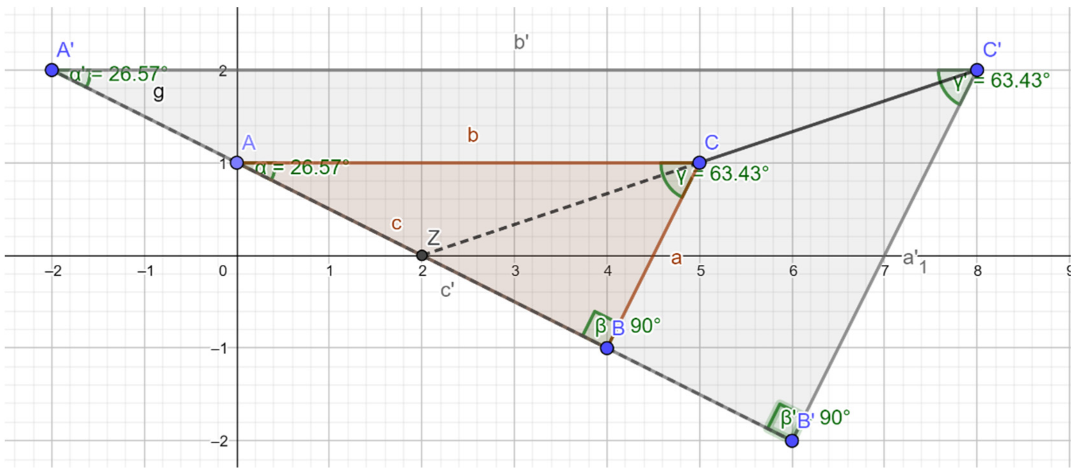
Länge in der Zeichnung	90mm	5cm	3cm	60cm
Maßstab	9:1	1:200	1:180	40:1
Länge in der Realität	10mm	1000cm	540cm	1,5cm

2. a)

A' $(-2/2)$

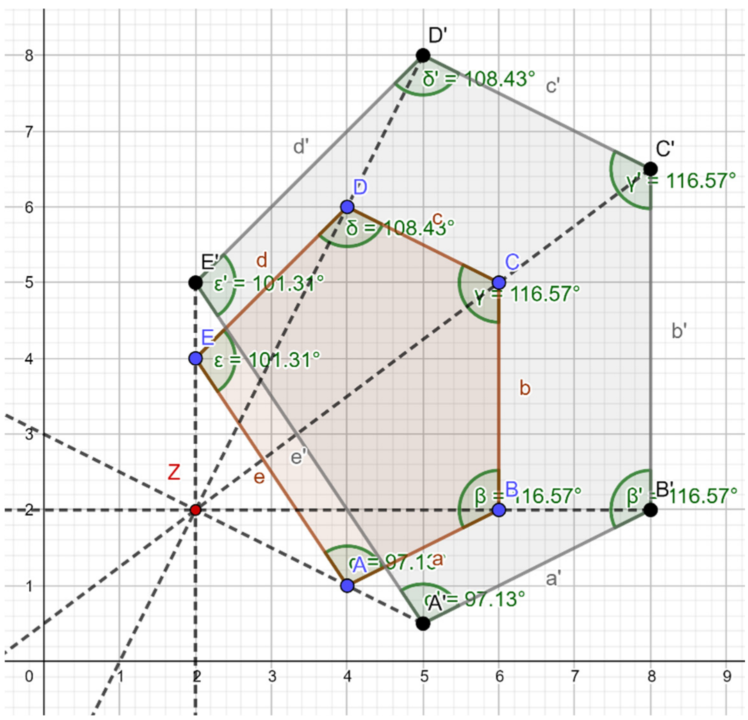
B' $(6/-2)$

C' $(8/2)$



Die Strecken verdoppeln sich ($k = 2$) und die Winkel bleiben gleich.

b)



Die Winkel bleiben hier gleich.

Die Seiten werden mit dem Streckfaktor $k = 1{,}5$ multipliziert.

Das Streckzentrum hat folgende Koordinaten: Z $(2/2)$.

3.

<u>Erster Strahlensatz:</u>

a) $c = 6{,}4cm$ → G
b) $d = 1\frac{1}{3}\ cm$ → E
c) $a = \frac{1}{2}\ cm$ → R
d) $d = 10{,}5\ cm$ → Ä
e) $b = 16cm$ → T

Lösungswort: **Gerät**

<u>Zweiter Strahlensatz:</u>

a) $h = 12cm$ → L
b) $g = 8cm$ → I
c) $h = 5cm$ → N
d) $c = 3cm$ → K

Lösungswort: **Link**

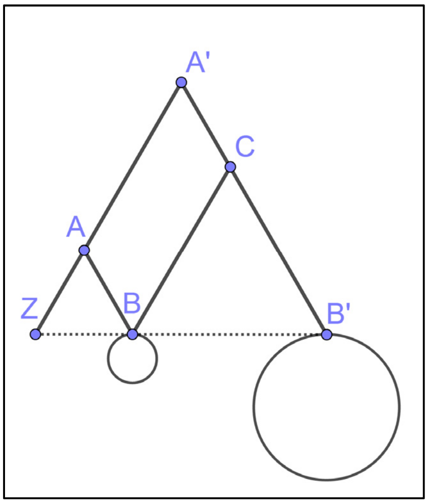
Zu KV 3.3.3.2: **Einem historischen Zeichengerät auf der Spur**

1. Hier testen die Schülerinnen und Schüler einen von der Lehrkraft bereitgestellten Pantographen und stellen zur Verwendung des Pantographen auf.

2. a) Der Pantograph ist ein Werkzeug zur Übertragung von Zeichnungen im gleichen, größeren oder kleineren Maßstab.

b) Das Zeichengerät wurde 1603 von Christoph Scheiner (Physiker, Optiker & Astronom) erfunden. Als mechanischen Pantographen verwendete er diesen zum maßstäblichen Verkleinern und Vergrößern von Zeichnungen. Er erfand auch weitere Werkzeuge, wie z.B. die Scheiner-Fokus-Scheibe.

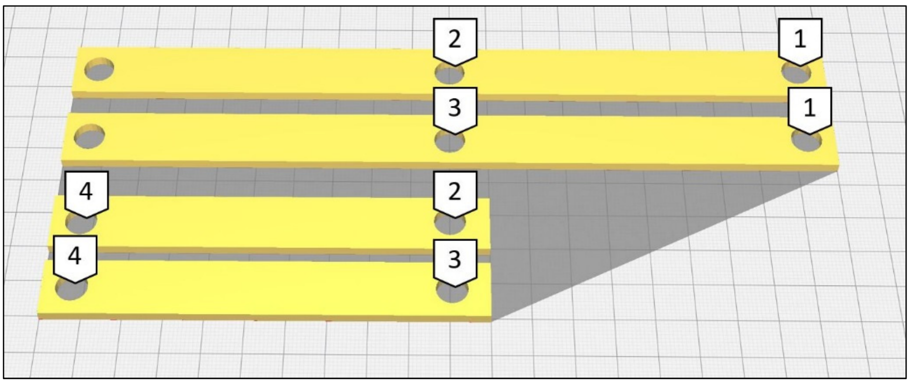
c)



Der Pantograph besteht meist aus vier Leisten, die durch Gelenke miteinander verbunden werden. Dabei bezeichnet Z den Punkt, um den der Pantograph gedreht wird. Dazu wird dieser neben der Ursprungszeichnung angesetzt. Eine Vergrößerung wird durch ein Abfahren mit dem Stift, welcher an Punkt B befestigt ist, erreicht, wobei mit dem Stift, welcher an Punkt B‘ befestigt ist, die Vergrößerung entsteht. Für eine Verkleinerung wird die Ursprungszeichnung mit dem Stift an Punkt B‘ abgefahren, wobei der Stift an Punkt B dann die Verkleinerung erzeugt.

3. Bauplan mit Gebrauchsanweisung

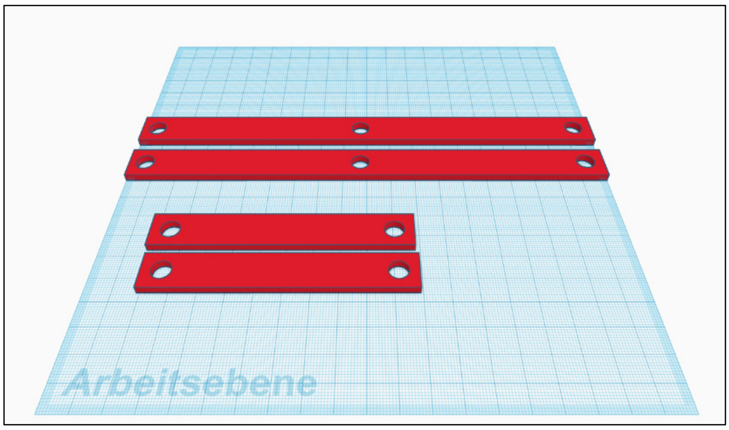
1. Wir benötigen jeweils zwei gleiche lange und kurze Leisten mit Löchern an den passenden Stellen, sodass beim Verbinden ein Parallelogramm entsteht (siehe nachfolgende Abbildung).
2. Zusätzlich werden 4 kurze Gewindeschrauben der Größe M5 mit einer Länge von etwa 2cm und 4 Muttern der Größe M5 gebraucht sowie 1 Saugnapf mit Gewinde und ein Stift.
3. Verbinde die Einzelteile so, dass gleiche Ziffern zusammenkommen, mit folgendem Aufbau: Schraube – Einzelteil – Einzelteil – Mutter.



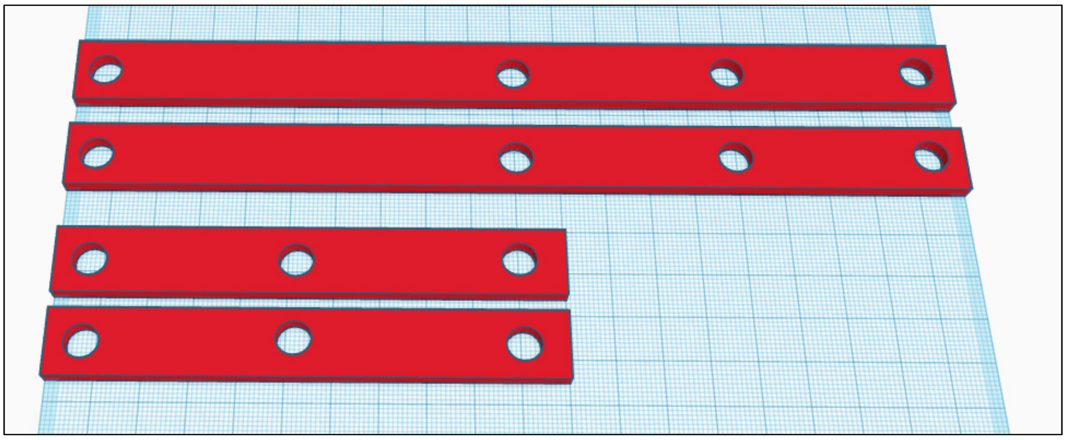
Zu KV 3.3.3.3 a: **Wir entwickeln eigene Pantographen**

1., **2.** und **3.**

Darstellung der einzelnen Bauteile eines Pantographen, welcher den Streckfaktor $k = 2$ zulässt, in Tinkercad™:



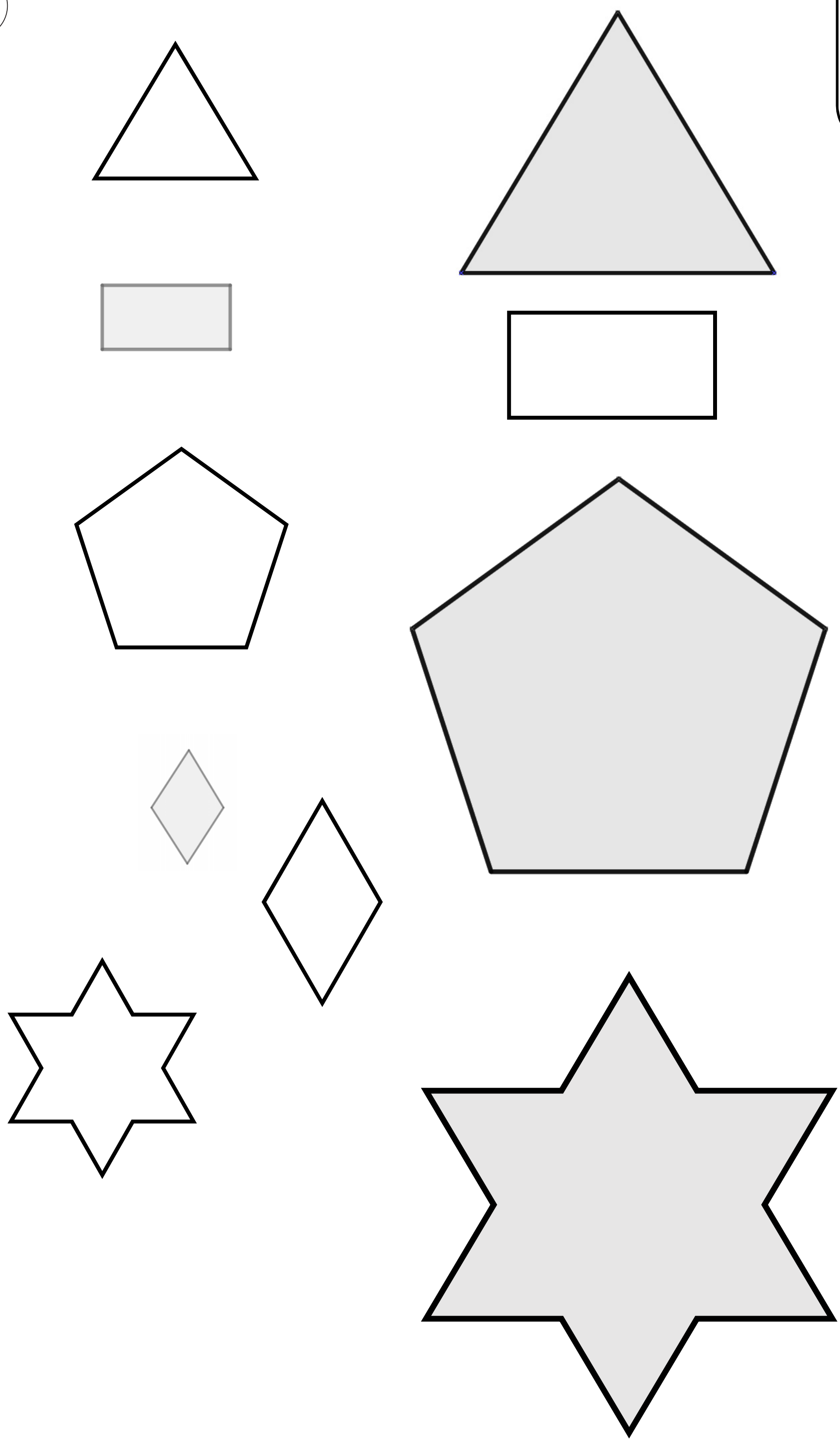
Darstellung der einzelnen Bauteile eines Pantographen, welcher verschiedene Streckfaktoren (hier $k_1 = 2$, $k_2 = 4$, $k_3 = 4/3$) zulässt, in Tinkercad^{TM}:



Zu KV 3.3.3.3 b: **Wir testen unsere Pantographen**

Beispielhafte Darstellung der maßstäblich vergrößerten bzw. verkleinerten Figuren mithilfe des zuvor entwickelten Pantographen.

1.

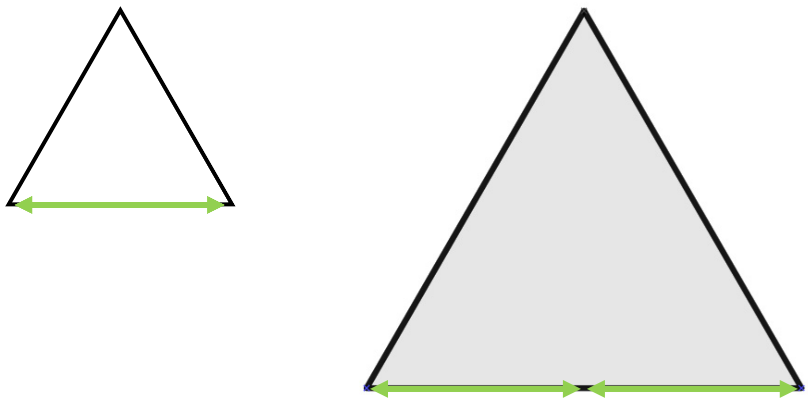


2. Hier ist ähnlich vorzugehen wie in KV 3.3.3.3 b, Aufgabe 1. Es soll systematisch getestet werden, ob der Pantograph als Werkzeug seine Aufgabe erfüllt und die Zeichnungen im gleichen, größeren oder kleineren Maßstab abbildet. Der entsprechende Streckfaktor kann experimentell ermittelt oder auf der Grundlage der Bauweise des Pantographen begründet werden. Die Strahlensätze sind Aussagen (über Verhältnisse in einer speziellen Figur) und können zur Begründung der Funktionsweise herangezogen werden.

Zu KV 3.3.3.4: **Begründen mit dem Pantographen**
– Warum vergrößert/verkleinert der Pantograph?

1. Der Pantograph überträgt ein Ursprungsbild im gleichen, größeren oder kleineren Maßstab in ein ähnliches Abbild. Mithilfe eines Streckfaktors kann die Verkleinerung oder die Vergrößerung der Abbildung angegeben werden. Die Winkel bleiben dabei gleich.

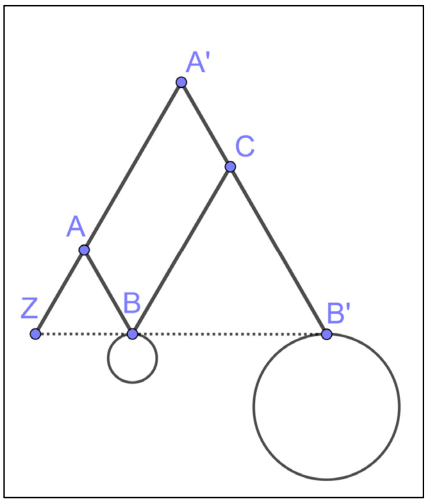
2. Beispielhaft für folgende Bildfigur:



a) Die Länge der Umfangslinien wird verdoppelt bzw. um den Faktor 2 gestreckt (vgl. grüne Pfeile in Abbildung oben).

b) Bei zwei ähnlichen Dreiecken mit Vergrößerungs-/Verkleinerungsverhältnis p, vergrößert/verkleinert sich der Flächeninhalt um den Faktor p^2.

c) Die Konstruktion des Pantographen besteht aus einem beweglichen Gestänge mit vier Schienen. Die vier Schienen entsprechen den Strecken $\overline{ZA'}, \overline{A'B'}, \overline{AB}$ sowie $\overline{BC}$. Die Schienen ZA‘ und $A'B$‘ haben die gleiche Länge, sodass $ZB'A$‘ einem gleichschenkligen Dreieck entspricht. Zudem sind die Schienen AB und BC so mit den anderen Schienen verschraubt, dass ein bewegliches Gelenkparallelogramm ($ABCA$‘) entsteht und Z, B und B‘ kollinear sind. Damit sind die Dreiecke ZBA und $ZB'A'$ stets ähnlich zueinander. Die Ähnlichkeitsabbildung ist eine zentrische Streckung mit dem Zentrum Z. Gleiches gilt für die mit B abgefahrene und B‘ gezeichnete Figur.



3. Auf die zwei genannten Dreiecke (vgl. Aufgabe 2) lassen sich die Strahlensätze anwenden. Nach dem ersten Strahlensatz entspricht das Verhältnis $|\overline{ZB'}|:|\overline{ZB}|$ dem Verhältnis $|\overline{ZA'}|:|\overline{ZA}|$. Es entspricht zudem dem Streckfaktor der gezeichneten Figuren, welcher mit k bezeichnet werden kann. Bei einem Längenverhältnis von $\frac{|\overline{ZA'}|}{|\overline{ZA}|} = \frac{3}{1}$ ist $k = 3$. Somit verschiebt sich der Punkt B‘ um 3 Längeneinheiten, wenn der Punkt B um 1 Längeneinheit verschoben wird. Die Figur wird also um den Faktor 3 vergrößert.