Spojování výroků (podmínek) logickými spojkami

Spojování výroků logickými spojkami

a) Konjunkce - spojení $A \wedge B$; AND; A a současně B

Pravdivostní tabulka konjunkce

A	B	$A \wedge B$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Konjunkce výroků je pravdivá pouze když jsou pravdivé oba (všechny) výroky v konjunkci.

Příklad: Student byl ve třídě a počítal příklady z matematiky.

---

b) Disjunkce - spojení $A \vee B$; OR; A nebo B

Pravdivostní tabulka konjunkce

A	B	$A \vee B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Disjunkce výroků je pravdivá pouze když je pravdivý alespoň jeden výrok.

***Příklad*:** Student bude studovat nebo poslouchat hudbu.

---

c) Implikace - spojení $A \Rightarrow B$; jestliže A potom B (A je předpoklad, B je tvrzení)

Pravdivostní tabulka implikace

A	B	$A \Rightarrow B$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Implikace výroků je nepravdivá pouze když je předpoklad pravdivý a ověření nepravdivé.

Pomůcka: *Problém je, když předpokládám, že mám v kapse peníze a peníze v kapse nemám!*

Příklad implikace: *Výrok:* Když přijdeš, dám ti sto korun!

A	B	A ⇒ B	
0	0	1	Nepřijdeš a nedám 100 Kč – **pravda**, o této možnosti jsem ve výroku nehovořil
0	1	1	Nepřijdeš a dám 100 Kč – **pravda**, o této možnosti jsem nehovořil
1	0	0	Přijdeš a nedám 100 Kč – NEPRAVDA
1	1	1	Přijdeš a dám 100 Kč – **pravda** – to jsem tvrdil

d) Ekvivalence

Ekvivalence libovolných výroků A a B (A ⇔ B) je konjunkce implikace A ⇒B obrácené implikace B⇒A: (A⇒B)∧(B⇒A) tedy A⇔B

Pravdivostní tabulka ekvivalence

A	B	A ⇒ B	B ⇒ A	(A ⇒B)∧(B ⇒A)	A ⇔ B
0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	0	0
1	0	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1

Implikace výroků je pravdivá pouze když mají oba (všechny) výroky stejnou pravdivostní hodnotu.

Příklad ekvivalence:

„Je-li trojúhelník pravoúhlý, pak pro jeho strany platí Pythagorova věta.“
„Jestliže neplatí pro strany trojúhelníku Pythagorova věta, pak není pravoúhlý.“

Negace spojených výroků – pravdivostní tabulky

Negace konjunkce (AND)

¬ (A ∧B) ⇔ ¬A ∨¬B

A	B	A ∧B	¬ (A ∧B)	¬A	¬B	¬A ∨¬B
0	0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	1	0	1
1	0	0	1	0	1	1
1	1	1	0	0	0	0

Negace disjunkce (OR)

$\neg (A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$

A	B	$A \vee B$	$\neg (A \vee B)$	$\neg A$	$\neg B$	$\neg A \wedge \neg B$
0	0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	0	0
1	0	1	0	0	1	0
1	1	1	0	0	0	0

Negace implikace

$\neg (A \Rightarrow B) \Leftrightarrow A \wedge \neg B$

A	B	$A \Rightarrow B$	$\neg (A \Rightarrow B)$	$\neg B$	$A \wedge \neg B$
0	0	1	0	1	0
0	1	1	0	0	0
1	0	0	1	1	1
1	1	1	0	0	0

Negace ekvivalence

$\neg (A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow ((A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B))$

A	B	$A \Leftrightarrow B$	$\neg (A \Leftrightarrow B)$	$\neg A$	$\neg B$	$A \wedge \neg B$	$\neg A \wedge B$	$((A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B))$
0	0	1	0	1	1	0	0	0
0	1	0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	1	0	1	1	0	1
1	1	1	0	0	0	0	0	0

De Morganovy zákony

$\wedge$ - konjunkce - AND, $\vee$ - disjunkce (OR)

Negace konjunkce: $\neg (A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$

Negace disjunkce: $\neg (A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$

Příklady:

$\neg (A \wedge B) \Leftrightarrow \neg C$

A	B	C	$(A \wedge B)$	$\neg (A \wedge B)$	$\neg C$	$\neg (A \wedge B) \Leftrightarrow \neg C$
0	0	0	0	1	1	1
0	0	1	0	1	0	0
0	1	0	0	1	1	1
0	1	1	0	1	0	0
1	0	0	0	1	1	1
1	0	1	0	1	0	0
1	1	0	1	0	1	0
1	1	1	1	0	0	1

Řešení bez pravdivostní tabulky:
Podle De Morganova zákona: $\neg (A \wedge B)$ *logicky ekvivalentní* $\neg A \vee \neg B$

bude:
$\neg (A \wedge B) \Leftrightarrow \neg C$ *je logicky ekvivalentní* $(\neg A \vee \neg B) \Leftrightarrow \neg C$

$(X \Leftrightarrow Y)$ logicky ekvivalentní $(X \wedge Y) \vee (\neg X \wedge \neg Y)$ *(Aplikace formule)*
(výroky jsou ekvivalentní, pokud mají stejné pravdivostní hodnoty, tedy když je X pravda a také Y je pravda nebo když je pravda negace X a také je pravda negace Y)

… *aplikujeme pro* $(\neg A \vee \neg B) \Leftrightarrow \neg C$, *kde* **X** *je* **$(\neg A \vee \neg B)$** *a* **Y** *je* **$\neg C$**

$((\neg A \vee \neg B) \wedge \neg C) \vee (\neg(\neg A \vee \neg B) \wedge \neg\neg C)$
$(\quad X \quad \wedge \quad Y) \vee (\quad \neg X \quad \wedge \quad \neg Y)$

pro $\neg(\neg A \vee \neg B)$ platí podle De Morganova pravidla $(\neg\neg A \wedge \neg\neg B)$ a to je $(A \wedge B)$,
potom bude:

$((\neg A \vee \neg B) \wedge \neg C) \vee ((A \wedge B) \wedge C))$

Je pravda, že :
$((X \vee Y) \wedge Z)$ *je logicky ekvivalentní* ***$(X \wedge Z) \vee (Y \wedge Z)$***
$((X \wedge Y) \vee Z)$ *je logicky ekvivalentní* ***$(X \vee Z) \wedge (Y \vee Z)$***

Potom upravíme:
a) $((\neg A \vee \neg B) \wedge \neg C)$ *je logicky ekvivalentní* $((\neg A \wedge \neg C) \vee (\neg B \wedge \neg C))$
b) $((A \wedge B) \wedge C))$ *je logicky ekvivalentní* $(A \wedge B \wedge C)$

Spojíme a) $\vee$ b) :

$((\neg A \wedge \neg C) \vee (\neg B \wedge \neg C)) \vee (A \wedge B \wedge C)$

a to je

$(\neg A \wedge \neg C) \vee (\neg B \wedge \neg C) \vee (A \wedge B \wedge C)$

Do každé závorky doplníme chybějící podmínku:

a) $(\neg A \wedge \neg C)$, chybí B

$(\neg A \wedge B \wedge \neg C) \vee (\neg A \wedge \neg B \wedge \neg C)$

… v první podmínce je B, ve druhé ¬B, protože bude pro obě pravdivostní hodnoty B (True/False) pravdivá vždy jedna část a obě části jsou spojené OR, bude pro všechny pravdivostní hodnoty B vše pravda . Není důležité, jakou pravdivostní hodnotu bude mít podmínka B! To znamená, že $(\neg A \wedge \neg C)$ je logicky ekvivalentní $(\neg A \wedge B \wedge \neg C) \vee (\neg A \wedge \neg B \wedge \neg C)$!!!

b) $(\neg B \wedge \neg C)$, chybí A

$(A \wedge \neg B \wedge \neg C) \vee (\neg A \wedge \neg B \wedge \neg C)$

c) $(A \wedge B \wedge C)$ – *jsou zde všechny tři podmínky, nic nebudeme měnit*

Spojíme a),b), c) disjunkcí:

$(\neg A \wedge B \wedge \neg C) \vee (\neg A \wedge \neg B \wedge \neg C) \vee (A \wedge \neg B \wedge \neg C) \vee (\neg A \wedge \neg B \wedge \neg C) \vee (A \wedge B \wedge C)$

... druhá a čtvrtá podmínka je stejná a proto ji nemusíme opakovat:

$(\neg A \wedge B \wedge \neg C) \vee (\neg A \wedge \neg B \wedge \neg C) \vee (A \wedge \neg B \wedge \neg C) \vee (A \wedge B \wedge C)$ **…** *a to je výsledek!!!*

$\neg (A \wedge B) \Leftrightarrow \neg C$ je logicky ekvivalentní

$(\neg A \wedge B \wedge \neg C) \vee (\neg A \wedge \neg B \wedge \neg C) \vee (A \wedge \neg B \wedge \neg C) \vee (A \wedge B \wedge C)$

Ještě ověříme v pravdivostní tabulce:

za výrok dosadíme „1“, za negaci výroku „0“

$(\neg A \wedge B \wedge \neg C) \vee (\neg A \wedge \neg B \wedge \neg C) \vee (A \wedge \neg B \wedge \neg C) \vee (A \wedge B \wedge C)$

0 1 0 0 0 0 1 0 0 1 1 1

A víme, že je stejný výsledek jako v pravdivostní tabulce! Wow!

$\neg(A \Rightarrow B) \vee (A \Leftrightarrow C)$

A	B	C	$(A \Rightarrow B)$	$\neg(A \Rightarrow B)$	$A \Leftrightarrow C$	$\neg(A \Rightarrow B) \vee (A \Leftrightarrow C)$
0	0	0	1	0	1	1
0	0	1	1	0	0	0
0	1	0	1	0	1	1
0	1	1	1	0	0	0
1	0	0	0	1	0	1
1	0	1	0	1	1	1
1	1	0	1	0	0	0
1	1	1	1	0	1	1

$(A \Rightarrow B)$ je logicky ekvivalentní $(\neg A \vee B)$
protože:

A	B	$A \Rightarrow B$	$\neg A$	$\neg A \vee B$
0	0	1	1	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	1	1	0	1

Proto bude $\mathbf{\neg(A \Rightarrow B)}$ *logicky ekvivalentní* $\mathbf{\neg(\neg A \vee B)}$

I

$(A \Leftrightarrow C)$ je logicky ekvivalentní $(A \wedge C) \vee (\neg A \wedge \neg C)$
protože:

A	C	$A \Leftrightarrow C$	$\neg A$	$\neg C$	$A \wedge C$	$\neg A \wedge \neg C$	$(A \wedge C) \vee (\neg A \wedge \neg C)$
0	0	1	1	1	0	1	1
0	1	0	1	0	0	0	0
1	0	0	0	1	0	0	0
1	1	1	0	0	1	0	1

$(A \Leftrightarrow C)$ *je logicky ekvivalentní* $(A \wedge C) \vee (\neg A \wedge \neg C)$

Můžeme napsat:
$\neg(A \Rightarrow B) \vee (A \Leftrightarrow C)$ *je logicky ekvivalentní* $\neg(\neg A \vee B) \vee (A \wedge C) \vee (\neg A \wedge \neg C)$

podle De Morganova zákona platí: $\neg(\neg A \vee B)$ *je logicky ekvivalentní* $(A \wedge \neg B)$, *potom:*

$(A \wedge \neg B) \vee (A \wedge C) \vee (\neg A \wedge \neg C)$

... doplníme všechny výroky (písmenka), které chybí, do všech závorek:

$(A \wedge \neg B)$ je logicky ekvivalentní $(A \wedge \neg B \wedge C) \vee (A \wedge \neg B \wedge \neg C)$
protože na v původním spojení na C nezáleží
$(A \wedge C)$: $(A \wedge B \wedge C) \vee (A \wedge \neg B \wedge C)$
$(\neg A \wedge \neg C)$: $(\neg A \wedge B \wedge \neg C) \vee (\neg A \wedge \neg B \wedge \neg C)$

Celkový výsledek :
$(A \wedge \neg B \wedge C) \vee (A \wedge \neg B \wedge \neg C) \vee (A \wedge B \wedge C) \vee (A \wedge \neg B \wedge C) \vee (\neg A \wedge B \wedge \neg C) \vee (\neg A \wedge \neg B \wedge \neg C)$
... první se opakuje, nebudeme ho psát dvakrát :

$\mathbf{(A \wedge \neg B \wedge C) \vee (A \wedge \neg B \wedge \neg C) \vee (A \wedge B \wedge C) \vee (\neg A \wedge B \wedge \neg C) \vee (\neg A \wedge \neg B \wedge \neg C)}$

... v pravdivostní tabulce:
1 0 1 1 0 0 1 1 1 0 1 0 0 0 0