

Fundamentos de radiación y antenas elementales

1. Ecuaciones de Maxwell en el dominio de la frecuencia

En el tema 1 analizamos las ecuaciones de Maxwell en el dominio del tiempo y de la frecuencia. Dado que las ecuaciones de Maxwell en el dominio de la frecuencia constituyen la base de la teoría de sistemas radiantes, es conveniente reproducirlas aquí de nuevo.

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{D} &= \rho & (a) & & \nabla \times \vec{H} - j\omega\vec{D} &= \vec{J} & (b) \\ \nabla \cdot \vec{B} &= 0 & (c) & & \nabla \times \vec{E} + j\omega\vec{B} &= 0 & (d) \end{aligned} \quad (1.1)$$

En estas ecuaciones $\vec{E}(\vec{r})$ o $\vec{H}(\vec{r})$ representan los campos eléctrico y magnético complejos dependientes, exclusivamente, de la posición y la frecuencia. Su relación con los campos verdaderos está dada a través de la transformada inversa de Fourier

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{E}(\vec{r}, \omega) e^{j\omega t} d\omega \\ \vec{H}(\vec{r}, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{H}(\vec{r}, \omega) e^{j\omega t} d\omega \end{aligned} \quad (1.2)$$

En general, cualquier otra magnitud física en el dominio de la frecuencia se expresará de una forma similar.

Aunque no es independiente de las anteriores ecuaciones, es conveniente incluir también la ecuación de continuidad, que expresa la conservación de la carga eléctrica

$$\nabla \cdot \vec{J} = -j\omega\rho \quad (1.3)$$

Además, debemos añadir a las ecuaciones de Maxwell las denominadas relaciones constitutivas, que establecen la dependencia de los campos derivados \vec{D} y \vec{H} con los fundamentales \vec{E} y \vec{B} . Para de medios lineales estas dependencias se establecen a través de la permitividad, ϵ , y la permeabilidad, μ complejas

$$\begin{aligned} \vec{D} &= \epsilon\vec{E} = \epsilon_0\epsilon_r\vec{E} \\ \vec{B} &= \mu\vec{H} = \mu_0\mu_r\vec{H} \end{aligned} \quad (1.4)$$

donde ϵ_r y μ_r son los valores relativos y $\epsilon_0 = 10^{-9}/36\pi F/m$ y $\mu_0 = 4\pi 10^{-7} H/m$ son los valores del vacío. La parte imaginaria de la permitividad compleja $\epsilon = \epsilon' - j\epsilon''$ es la responsable de las pérdidas producidas por el “amortiguamiento” que exhiben los dipolos que configuran los materiales dieléctricos. Esta parte incluye la posible conductividad, σ , que pueda presentar el medio.

2. Potenciales escalar y vectorial

En este apartado retomaremos el estudio de los potenciales vectores, pero a diferencia de lo que se hizo en el tema 1, nos circunscribiremos exclusivamente al dominio de la frecuencia.

Las ecuaciones de Maxwell constituyen un conjunto de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales entre las componentes del campo eléctrico y magnético. Generalmente, resulta de especial interés obtener ecuaciones desacopladas en las que sólo aparezca el campo eléctrico o el magnético. Para nuestra deducción supondremos el caso más sencillo en que el medio es el vacío, de manera que $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}$ y $\vec{H} = \mu_0^{-1} \vec{B}$.

Si tomamos el rotacional de (1.1)d y usamos (1.1)(b) encontramos que

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E} + k_0^2 \vec{E} = -j\omega\mu_0 \vec{J} \quad (2.1)$$

donde $k_0 = \omega\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$ es el número de onda en el espacio vacío. Esta es la ecuación que debería ser resuelta para hallar el campo eléctrico supuesta conocida la densidad de corriente \vec{J} . Sin embargo, en la práctica es más simple determinar los campos introduciendo los potenciales vectorial, \vec{A} , y escalar, Φ .

Dado que la divergencia de \vec{B} es idénticamente nula, podemos expresar \vec{B} como

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \quad (2.2)$$

ya que $\nabla \cdot \nabla \times \vec{A} = 0$. Introduciendo la expresión anterior en (1.1)(d), obtenemos

$$\nabla \times (\vec{E} + j\omega\vec{A}) = 0 \quad (2.3)$$

Dado que cualquier función con rotacional nulo puede ser expresada como el gradiente de una función escalar, tenemos

$$\vec{E} + j\omega\vec{A} = -\nabla\Phi \quad (2.4)$$

Sustituyendo \vec{E} y \vec{B} expresados a través de los potenciales en (1.1)(b), se tiene

$$\nabla \times \mu_0 \vec{H} = \nabla \times \nabla \times \vec{A} = j\omega\mu_0\epsilon_0 \vec{E} + \mu_0 \vec{J} = j\omega\mu_0\epsilon_0 (-j\omega\vec{A} - \nabla\Phi) + \mu_0 \vec{J} \quad (2.5)$$

Utilizando ahora la relación vectorial $\nabla \times \nabla \times \vec{A} = \nabla\nabla \cdot \vec{A} - \nabla^2 \vec{A}$ y reagrupando términos llegamos a la ecuación

$$\nabla^2 \vec{A} + k_0^2 \vec{A} = -\mu_0 \vec{J} + \nabla(\nabla \cdot \vec{A} + j\omega\mu_0\epsilon_0 \Phi) \quad (2.6)$$

Dado que para que se satisfaga la relación (2.2) sólo el rotacional de \vec{A} queda fijado, tenemos libertad para fijar la divergencia de este vector. Una posible elección, que simplifica la ecuación anterior, es la conocida como *condición de Lorentz*, que establece que

$$\nabla \cdot \vec{A} = -j\omega\mu_0\varepsilon_0\Phi \quad (2.7)$$

Con esta elección la ecuación (2.6) se transforma en la ecuación de Helmholtz inhomogénea

$$\nabla^2 \vec{A} + k_0^2 \vec{A} = -\mu_0 \vec{J} \quad (2.8)$$

De manera análoga, teniendo en cuenta de nuevo la condición de Lorentz, se deduce que el potencial escalar satisface también una ecuación similar

$$\nabla^2 \Phi + k_0^2 \Phi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (2.9)$$

Sin embargo, la carga y la corriente no son cantidades independientes ya que están ligadas por la ecuación de continuidad (1.3) y, por tanto, no es necesario resolver también esta última ecuación. De hecho es posible expresar el campo eléctrico en términos del potencial vectorial exclusivamente. Así, introduciendo la condición de Lorentz en (2.4) llegamos a la expresión

$$\vec{E} = -j\omega\vec{A} + \frac{\nabla\nabla \cdot \vec{A}}{j\omega\varepsilon_0\mu_0} \quad (2.10)$$

3. Radiación producida por una distribución arbitraria de corriente

Las ecuaciones (2.8) y (2.9) son las transformaciones al dominio de la frecuencia de la ecuación de onda en el dominio del tiempo, cuya forma general es

$$\nabla^2 \psi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = f(\vec{r}, t) \quad (3.1)$$

donde $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}$ y $f(\vec{x}, t)$ representa la distribución de carga o corriente (la fuente), que supondremos está contenida por completo en un recinto V . Sabemos que la solución general a esta ecuación es

$$\psi(\vec{r}, t) = \frac{-1}{4\pi} \int_V \frac{f\left(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}\right)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' \quad (3.2)$$

Nótese que el potencial ψ en el punto \vec{r} y en el instante t , debido a la fuente situada en \vec{r}' , está retrasado en un tiempo $\frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}$. Por tanto, la velocidad a la que se propaga la señal es

$c \approx 3 \times 10^8$ m/s, que es la velocidad de la luz en el vacío.

En el caso particular en que ψ represente el potencial vectorial $\vec{A}(\vec{r}, t)$ la solución será

$$\vec{\mathcal{A}}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{\mathcal{J}}\left(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}\right)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' \quad (3.3)$$

La transformada de Fourier del potencial vectorial $\vec{\mathcal{A}}(\vec{r}, t)$ da como resultado el potencial vector en el dominio de la frecuencia, $\vec{A}(\vec{r})$. Aplicando la regla del desplazamiento temporal para la transformada de Fourier, $\mathcal{F}\{f(t - t_0)\} = \mathcal{F}\{f(t)\}e^{-j\omega t_0}$, a la expresión anterior, obtenemos

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J}(\vec{r}')e^{-jk_0|\vec{r} - \vec{r}'|}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' \quad (3.4)$$

en donde $k_0 = \omega/c$ es el número de onda en el vacío y \vec{J} es la transformada de Fourier de $\vec{\mathcal{J}}$.

En general, nos interesa conocer los campos producidos en puntos muy alejados de la antena, la zona lejana o de radiación. En esta región $|r| \gg |\vec{r}'|$ para todos los puntos \vec{r}' dentro de V , por lo que podemos hacer algunas aproximaciones en la expresión (3.4).

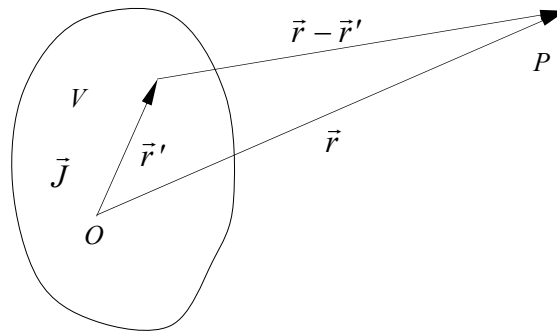


Figura 5

Consideremos que \vec{u}_r es el vector unitario en la dirección de \vec{r} y $\vec{u}_{r'}$ lo es en la dirección de \vec{r}' , entonces el desarrollo de $R = |\vec{r} - \vec{r}'| = (r^2 + r'^2 - 2rr'\vec{u}_r \cdot \vec{u}_{r'})^{1/2}$ en serie de Taylor centrada en $r' = 0$ resulta

$$\begin{aligned} R &= (r^2 + r'^2 - 2rr'\vec{u}_r \cdot \vec{u}_{r'})^{1/2} \approx (r^2 + r'^2 - 2rr'\vec{u}_r \cdot \vec{u}_{r'})^{1/2} \Big|_{r'=0} + \\ &+ \frac{2r' - 2r\vec{u}_r \cdot \vec{u}_{r'}}{2(r^2 + r'^2 - 2rr'\vec{u}_r \cdot \vec{u}_{r'})^{1/2}} \Big|_{r'=0} r' = r - r'\vec{u}_r \cdot \vec{u}_{r'} = r - \vec{r}' \cdot \vec{u}_r \end{aligned} \quad (3.5)$$

Podemos reemplazar R por r en el denominador de (3.4) ya que el efecto sobre la amplitud del potencial vector será despreciable. Sin embargo, los efectos en el cambio de fase de cada elemento de corriente sí han de ser tenidos en consideración ya que un incremento en r del orden de λ_0 implica un cambio de fase igual a $k_0\lambda_0 = 2\pi$. Así, para la exponencial compleja de (3.4) utilizaremos $R \approx r - \vec{r}' \cdot \vec{u}_r$. Con estas aproximaciones encontramos que el potencial vector en la zona lejana es

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 e^{-jk_0 r}}{4\pi r} \int_V \vec{J}(\vec{r}') e^{jk_0 \vec{u}_r \cdot \vec{r}'} dV' = \frac{\mu_0 e^{-jk_0 r}}{4\pi r} \vec{N} \quad (3.6)$$

donde $\vec{N} = \int_V \vec{J}(\vec{r}') e^{jk_0 \vec{u}_r \cdot \vec{r}'} dV'$ se denomina vector de radiación.

En el caso en que la corriente se distribuya a lo largo una superficie S la expresión del potencial vector en campo lejano queda de la forma $\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 e^{-jk_0 r}}{4\pi r} \int_S \vec{J}_S(\vec{r}') e^{jk_0 \vec{u}_r \cdot \vec{r}'} dS'$, en donde dS' es el elemento de superficie sobre S y $\vec{J}_S(\vec{r}')$ es la densidad de corriente superficial en el punto \vec{r}' de S .

Si la corriente fluye por un hilo conductor definido por la curva C el potencial vector en campo lejano es $\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 e^{-jk_0 r}}{4\pi r} \int_C \vec{I}(\vec{r}') e^{jk_0 \vec{u}_r \cdot \vec{r}'} dl'$, en donde dl' es el elemento de longitud sobre la curva C , $\vec{I}(\vec{r}') = I(\vec{r}') \vec{u}(\vec{r}')$ es el vector intensidad de corriente en un punto \vec{r}' de la curva y \vec{u} el vector unitario tangente a dicha curva.

El campo eléctrico se deduce introduciendo (3.4) en (2.10) y conservando sólo las potencias en r^{-1} , ya que son éstas las únicas tienen relevancia en campo lejano.

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{jk_0 Z_0 e^{-jk_0 r}}{4\pi r} \int_V [(\vec{u}_r \cdot \vec{J}(\vec{r}')) \vec{u}_r - \vec{J}(\vec{r}')] e^{jk_0 \vec{u}_r \cdot \vec{r}'} dV' \quad (3.7)$$

donde $Z_0 = \sqrt{\mu_0 / \varepsilon_0}$ es la impedancia intrínseca del vacío. La forma del integrando (3.7) nos indica que, dada una dirección especificada por el vector unitario \vec{u}_r , sólo la componente de corriente perpendicular a \vec{u}_r contribuye al campo de radiación.

Si tenemos en cuenta que $\vec{u}_r \times (\vec{u}_r \times \vec{J}) = \vec{u}_r (\vec{u}_r \cdot \vec{J}) - \vec{J} (\vec{u}_r \cdot \vec{u}_r) = \vec{u}_r (\vec{u}_r \cdot \vec{J}) - \vec{J}$, podemos escribir (3.7) de forma alternativa como

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{jk_0 Z_0 e^{-jk_0 r}}{4\pi r} \vec{u}_r \times \left(\vec{u}_r \times \int_V \vec{J}(\vec{r}') e^{jk_0 \vec{u}_r \cdot \vec{r}'} dV' \right) = \frac{jk_0 Z_0 e^{-jk_0 r}}{4\pi r} \vec{u}_r \times (\vec{u}_r \times \vec{N}) \quad (3.8)$$

Tomando en consideración las expresiones (2.2) y (3.6) deducimos que el campo magnético

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \vec{A} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \left(\frac{\mu_0 e^{-jk_0 r}}{4\pi r} \vec{N} \right) = \nabla \left(\frac{\mu_0 e^{-jk_0 r}}{4\pi r} \right) \times \vec{N} \quad (3.9)$$

Para escribir la última igualdad se ha utilizado el hecho de que \vec{N} es un vector constante. Efectuando operaciones en la expresión anterior y conservando sólo las potencias en r^{-1} obtenemos la expresión

$$\vec{H} = \frac{-jk_0 e^{-jk_0 r}}{4\pi r} \vec{u}_r \times \vec{N} \quad (3.10)$$

Comparando (3.8) con (3.10) vemos que los campos eléctrico y magnético están relacionados de forma similar a como lo están las ondas planas, es decir

$$\vec{E}(\vec{r}) = -Z_0 \vec{u}_r \times \vec{H}(\vec{r}) \quad \Leftrightarrow \quad \vec{H}(\vec{r}) = Y_0 \vec{u}_r \times \vec{E}(\vec{r}) \quad (3.11)$$

donde $Y_0 = Z_0^{-1}$ es la admitancia intrínseca del vacío. Además, estas relaciones nos muestran que en la zona de radiación los campos eléctrico y magnético son perpendiculares entre sí.

Es interesante también escribir los campos en función del potencial vector. Sustituyendo (3.6) en (3.8) obtenemos para el campo eléctrico

$$\vec{E} = j\omega \vec{u}_r \times (\vec{u}_r \times \vec{A}) \quad (3.12)$$

y para el magnético

$$\vec{H} = \frac{-j\omega}{Z_0} \vec{u}_r \times \vec{A} \quad (3.13)$$

Escribiendo \vec{A} en función de sus componentes esféricas, $\vec{A} = A_r \vec{u}_r + A_\theta \vec{u}_\theta + A_\phi \vec{u}_\phi$, y teniendo en cuenta (3.12) y (3.13), es fácil ver que

$$\begin{aligned} E_r &= 0 & H_r &= 0 \\ E_\theta &= -j\omega A_\theta & H_\theta &= j \frac{\omega A_\phi}{Z_0} = -\frac{E_\phi}{Z_0} \\ E_\phi &= -j\omega A_\phi & H_\phi &= -j \frac{\omega A_\theta}{Z_0} = \frac{E_\theta}{Z_0} \end{aligned} \quad (3.14)$$

Cuando una corriente I fluye por un conductor lineal C la expresión (3.7) se transforma en

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{jk_0 Z_0 e^{-jk_0 r}}{4\pi r} \int_C [(\vec{u}_r \cdot \vec{u}) \vec{u}_r - \vec{u}] I(\vec{r}') e^{jk_0 \vec{u}_r \cdot \vec{r}'} dl' \quad (3.15)$$

donde \vec{u} es un vector unitario a lo largo de C en la dirección de la corriente y \vec{r}' es el vector de posición del elemento de corriente. También se puede hallar el campo eléctrico a través de (3.8) con un vector de radiación dado por $\vec{N} = \int_C I(\vec{r}') \vec{u} e^{jk_0 \vec{u}_r \cdot \vec{r}'} dl'$.

Observando las ecuaciones (3.7) y (3.15) vemos que el campo eléctrico tiene la forma

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{jk_0 Z_0 e^{-jk_0 r}}{4\pi r} \vec{f}(\theta, \phi) \quad (3.16)$$

en donde $\vec{f}(\theta, \phi) = \vec{u}_r \times \vec{u}_r \times \vec{N}$ es el patrón de radiación, que expresa la dependencia angular del campo radiado.

4. Radiación producida por un dipolo eléctrico elemental

Como aplicación de la expresión (3.15) vamos a calcular el campo de radiación producido por un pequeño filamento de corriente de longitud dl situado en el origen de coordenadas y orientado según la dirección z (ver figura 2). Podríamos llegar al mismo resultado calculando el vector de radiación \vec{N} y utilizando la ecuación (3.8).

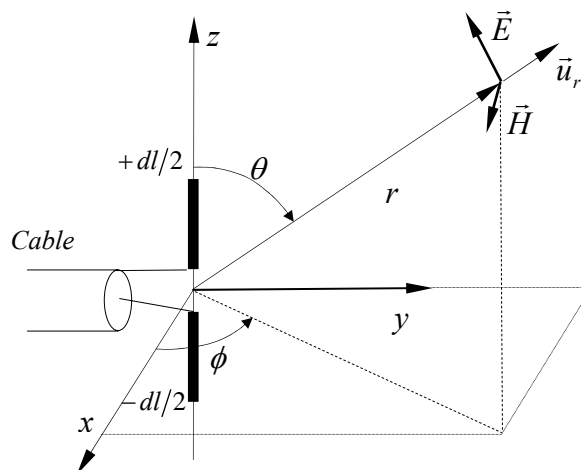


Figura 2

Supondremos que la corriente I es constante a lo largo del filamento. En este caso el vector \vec{u} que define la dirección de la corriente es constante e igual a \vec{u}_z . Por tanto, teniendo en cuenta que $\vec{u}_z = \cos\theta \vec{u}_r - \sin\theta \vec{u}_\theta$, se obtiene $(\vec{u}_r \cdot \vec{u})\vec{u}_r - \vec{u} = \sin\theta \vec{u}_\theta$ y la integral de (3.15) queda

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{dl}{2}}^{\frac{dl}{2}} I \sin\theta \vec{u}_\theta e^{jk_0 z' \cos\theta} dz' &= \frac{2jI \sin\theta \vec{u}_\theta}{jk_0 \cos\theta} \left(\frac{e^{\frac{jk_0 dl \cos\theta}{2}} - e^{-\frac{jk_0 dl \cos\theta}{2}}}{2j} \right) = \\ &= \frac{2I \sin\theta \vec{u}_\theta}{k_0 \cos\theta} \operatorname{sen}\left(\frac{k_0 dl \cos\theta}{2}\right) \end{aligned} \quad (4.1)$$

Si tenemos en cuenta que el dipolo tiene una longitud muy pequeña en comparación con la longitud de onda, esto es $k_0 dl = 2\pi dl / \lambda_0 \ll 1$, podemos aproximar $\operatorname{sen}(k_0 dl \cos\theta / 2)$ por $k_0 dl \cos\theta / 2$, con lo que la integral anterior queda reducida a $I dl \sin\theta \vec{u}_\theta$. Finalmente, el campo eléctrico radiado por el dipolo elemental es

$$\vec{E}(\vec{r}) = jZ_0 I dl k_0 \sin\theta \frac{e^{-jk_0 r}}{4\pi r} \vec{u}_\theta \quad (4.2)$$

Haciendo uso de (3.11) calculamos el campo magnético

$$\vec{H}(\vec{r}) = jI dl k_0 \sin\theta \frac{e^{-jk_0 r}}{4\pi r} \vec{u}_\phi \quad (4.3)$$

Vemos que en la zona de radiación los campos eléctrico y magnético son perpendiculares entre sí y perpendiculares al radio vector.

Para calcular el promedio temporal de la potencia radiada utilizamos el vector de Poynting complejo, que, para una onda que se propaga por el vacío (Z_0 real), está dado por

$$\vec{S} = \frac{1}{2} \vec{E} \times \vec{H}^* = \frac{1}{2} \frac{\vec{E} \cdot \vec{E}^*}{Z_0} \vec{u}_r = Z_0 I^* (dl)^2 k_0^2 \sin^2 \theta \frac{\vec{u}_r}{32\pi^2 r^2} \quad (4.4)$$

Vemos que es real, dirigido hacia afuera y decae como r^{-2} . El promedio temporal de la potencia radiada se calcula integrando el vector de Poynting sobre una superficie esférica de radio r

$$P_r = \oint_S \text{Re}[\vec{S}] \cdot \vec{u}_r dS' = \frac{I^* (dl)^2 k_0^2 Z_0}{32\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin^2 \theta \sin \theta d\theta d\phi = \frac{I^* (dl)^2 k_0^2 Z_0}{12\pi} \quad (4.5)$$

5. Parámetros básicos de una antena

En esta sección introduciremos algunos de los parámetros más importantes que caracterizan una antena en transmisión y en recepción. Algunas de las definiciones que se darán a continuación serán ilustradas mediante el dipolo eléctrico elemental del apartado anterior.

Diagrama de radiación

El diagrama o patrón de radiación de una antena es una representación gráfica de las características de radiación de una antena en función de las direcciones del espacio. Normalmente se empleará un sistema de coordenadas esféricas. Con la antena situada en el origen y manteniendo constante la distancia se expresará el campo eléctrico en función de las variables angulares θ y ϕ . Como el campo es una magnitud vectorial, habrá que determinar en cada punto de la esfera de radio constante el valor de sus dos componentes ortogonales según las direcciones \vec{u}_θ y \vec{u}_ϕ .

Como el campo magnético se deriva directamente del eléctrico, la representación podría hacerse a partir de cualquiera de los dos, siendo lo más habitual que el diagrama se refiera al campo eléctrico. El campo se puede representar en forma absoluta o relativa, normalizando el valor máximo a la unidad.

Un diagrama de radiación muy común es aquel que representa la intensidad de radiación o potencia radiada por unidad de ángulo sólido, $K(\theta, \phi) = dP_r(\theta, \phi)/d\Omega$, para cada dirección del espacio definida por los ángulos θ y ϕ . Si K_{\max} es el máximo valor que adquiere $K(\theta, \phi)$, el correspondiente diagrama de radiación normalizado está dado por

$$t(\theta, \phi) = \frac{K(\theta, \phi)}{K_{\max}} \quad (5.1)$$

Se puede medir el diagrama de radiación de potencia una antena transmisora, A, desplazando otra antena, denominada sonda, S, a una distancia R constante y registrando la potencia

recibida por la sonda en función de la posición angular. Refiriéndonos a la figura 3(a), supongamos que la posición 1 es aquella en la que la sonda S recibe la máxima potencia, P_{\max}^S , y, supongamos asimismo, que la potencia recibida por la sonda en la posición 2 es P^S . El diagrama de radiación de potencia normalizado de la antena A se obtiene calculando el cociente P^S/P_{\max}^S para cada posición angular. Este diagrama también podría medirse manteniendo la sonda S fija y rotando la antena A en sentido opuesto ($-\psi$).

Consideremos ahora que la antena A actúa como receptora y que la sonda S lo hace como emisora (figura 3(b)). Si P_{\max}^A es la máxima potencia que recibe la antena A, que ocurre en la posición 1, y P^A es la potencia que recibe A cuando rota un ángulo $-\psi$ en torno a su eje (posición 2), el diagrama de recepción de la antena A se obtiene al medir P^A/P_{\max}^A para cada ángulo de rotación. El teorema de reciprocidad demuestra que $P^S(\psi)/P_{\max}^S$ es igual a $P^A(-\psi)/P_{\max}^A$ y, en consecuencia, también lo son los diagramas de radiación y recepción.

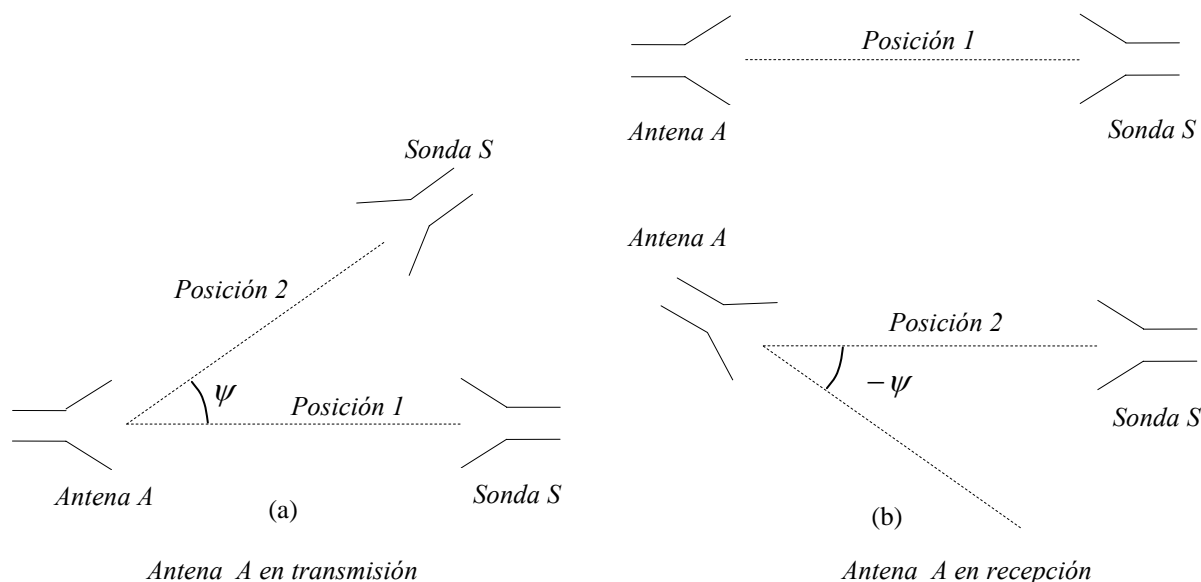


Figura 3

En general, un diagrama completo de radiación, para todo ángulo θ y ϕ (utilizando un sistema de coordenadas esféricas con el eje z como vertical), es difícil de construir por requerir una representación tridimensional. Normalmente, es preferible mostrar ciertos cortes del diagrama tridimensional por planos de interés. Los dos planos más importantes son el plano E y el plano H . Se define plano E como aquel formado por la dirección de máxima intensidad de radiación y el campo eléctrico en dicha dirección. Análogamente, el plano H es el formado por la dirección de máxima radiación y el campo magnético en esa dirección. En el caso del dipolo eléctrico vemos que la potencia varía de acuerdo a $\sin^2\theta$ por lo que la dirección de máxima radiación será $\theta = 90^\circ$ y un valor de ϕ arbitrario, ya que la potencia del dipolo no depende de este ángulo. En esa dirección el campo eléctrico está orientado verticalmente y el campo magnético lo está horizontalmente, por lo que el plano E es cualquiera de los planos que pasa por el eje z el plano H es el definido por $\theta = 90^\circ$. En la figura 4(a) se ha representado el diagrama de radiación tridimensional de un dipolo eléctrico. Los cortes con los planos E y H están representados en las figuras 4(b) y 4(c), respectivamente.

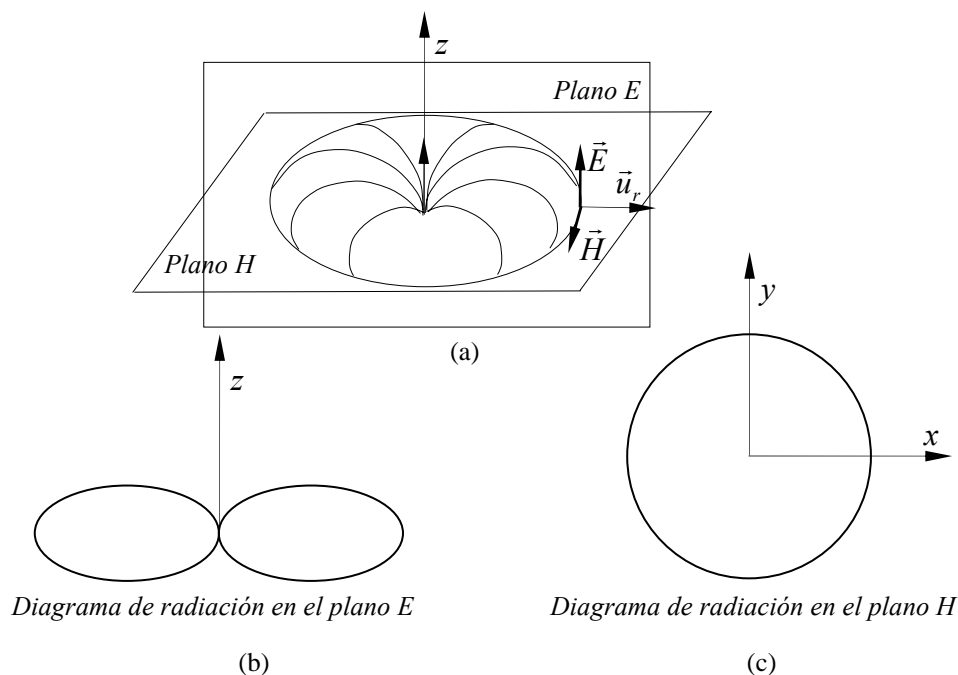


Figura 4

Es bastante habitual la representación del diagrama con escala en decibelios. Si representamos el campo o la potencia normalizadas, la dirección correspondiente al máximo tendrá 0 dB, mientras que las demás direcciones tendrán valores negativos.

En general, los diagramas de la mayoría de las antenas contienen un lóbulo principal y varios lóbulos secundarios, también llamados laterales, de menor amplitud. Dada una determinada sección del diagrama de radiación, se define como ancho de haz del lóbulo principal el ángulo que existe entre las direcciones para las que $K(\theta, \phi)$ se reduce a la mitad de su valor máximo, es decir, disminuye 3 dB (ver figura 5).

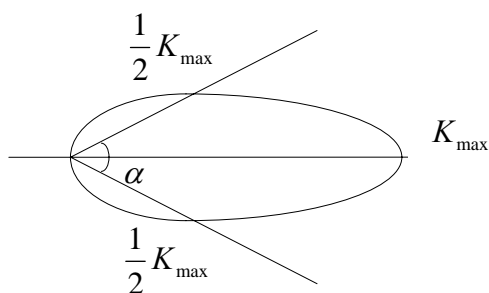


Figura 5

Directividad y Ganancia

Una antena no radia potencia uniformemente en todas direcciones. La directividad de una antena, $D(\theta, \phi)$, es una función que describe la variación de la intensidad de potencia radiada respecto a la dirección espacial.

Se define directividad como la relación entre la intensidad de radiación, $K(\theta, \phi)$, y el promedio de $K(\theta, \phi)$ sobre el ángulo sólido completo, $\frac{1}{4\pi} \oint_{4\pi} K(\theta, \phi) d\Omega$. Para poder disponer

de una expresión de la directividad en función del campo eléctrico radiado es necesario relacionar $K(\theta, \phi)$ con el vector de Poynting. Dado que la integral extendida a todo el ángulo sólido de $K(\theta, \phi) = dP_r(\theta, \phi)/d\Omega$ da la potencia total radiada por la antena $P_r = \oint_{4\pi} K(\theta, \phi) d\Omega$ y que, por otro lado, P_r es también el resultado de integrar la potencia radiada por unidad de superficie a una esfera de radio r que incluya la antena, se tiene

$$P_r = \oint_{4\pi} K(\theta, \phi) d\Omega = \oint_S \frac{1}{2} \operatorname{Re}[\vec{E} \times \vec{H}^*] \cdot \vec{u}_r dS' = \oint_S \frac{1}{2} \frac{\vec{E} \cdot \vec{E}^*}{Z_0} dS' = \oint_{4\pi} \frac{1}{2} \frac{|\vec{E}|^2}{Z_0} r^2 d\Omega \quad (5.2)$$

en donde se ha tenido en cuenta que $dS' = r^2 \sin\theta d\theta d\phi = r^2 d\Omega$ es el elemento diferencial de superficie de la esfera y que los campos eléctrico y magnético están relacionados por la impedancia a través de $\vec{H}(\vec{r}) = Z_0^{-1} \vec{u}_r \times \vec{E}(\vec{r})$. De la expresión anterior resulta que la intensidad de radiación o potencia radiada por ángulo sólido es

$$K(\theta, \phi) = \frac{1}{2} r^2 \operatorname{Re}[\vec{E}(\theta, \phi) \times \vec{H}^*(\theta, \phi)] \cdot \vec{u}_r = \frac{1}{2} \frac{r^2}{Z_0} |\vec{E}(\theta, \phi)|^2 \quad (5.3)$$

Y, por tanto, la directividad de la antena es

$$D(\theta, \phi) = \frac{K(\theta, \phi)}{\frac{1}{4\pi} \oint_{4\pi} K(\theta, \phi) d\Omega} = \frac{4\pi K(\theta, \phi)}{P_r} = \frac{4\pi |\vec{E}(\theta, \phi)|^2}{\oint_S |\vec{E}(\theta, \phi)|^2 dS'} \quad (5.4)$$

Es usual llamar a $D(\theta, \phi)$ función directividad y a su máximo valor, simplemente, directividad, D . Esta magnitud es una medida de capacidad de la antena para concentrar la potencia radiada en la dirección en la que los campos son más intensos. Su valor está dado por

$$D = \frac{4\pi K_{\max}}{P_r} = \frac{4\pi |\vec{E}|_{\max}^2}{\oint_{4\pi} |\vec{E}(\theta, \phi)|^2 d\Omega} \quad (5.5)$$

Por simplicidad designaremos por $\mathcal{P}(\theta, \phi)$ a la potencia por unidad de superficie, es decir, al valor del vector de Poynting en la dirección de propagación. Por tanto, tenemos

$$\mathcal{P} = \frac{1}{2} \operatorname{Re}[\vec{E} \times \vec{H}^*] \cdot \vec{u}_r = \frac{|\vec{E}|^2}{2Z_0} = K/r^2.$$

El diagrama de radiación de potencia normalizado $t(\theta, \phi)$ y la directividad están íntimamente relacionados. Así, teniendo en cuenta (5.4) y (5.5) tenemos

$$t(\theta, \phi) = \frac{K(\theta, \phi)}{K_{\max}} = \frac{D(\theta, \phi)}{D} \quad (5.6)$$

En el caso particular del dipolo elemental es inmediato comprobar que la intensidad de radiación es

$$K(\theta, \phi) = \frac{Z_0 I^* (dl)^2 k_0^2 \sin^2 \theta}{32\pi^2} \quad (5.7)$$

Por tanto, la función directividad de esta antena es

$$D(\theta, \phi) = \frac{3}{2} \sin^2 \theta \quad (5.8)$$

y su directividad (máxima) es $3/2$. Este valor se alcanza en cualquier punto del plano $\theta = \pi/2$, lo que significa que esta antena produce una intensidad de radiación, en ese plano, $3/2$ mayor que una antena isotrópica.

La ganancia de potencia difiere de la directividad en un factor que tiene en cuenta la eficacia de la antena. Puesto que todas las antenas tienen pérdidas disipativas debidas a conductividad finita de los conductores que forman parte de ellas, no toda la potencia de entrada es radiada. Así, podemos escribir que sólo una fracción η de la potencia de entrada a la antena, P_{in} , es radiada

$$P_r = \eta P_{in} \quad (5.9)$$

La constante η se denomina eficiencia de la antena. Para la mayoría de las antenas η tiene un valor cercano a la unidad. Definimos ganancia de una antena como la relación entre la intensidad de radiación y el promedio de la potencia radiada en todo el ángulo sólido

$$G(\theta, \phi) = \frac{K(\theta, \phi)}{P_{in}/4\pi} = 4\pi\eta \frac{K(\theta, \phi)}{P_r} = \eta D(\theta, \phi) \quad (5.10)$$

En la práctica, la máxima ganancia, o simplemente, ganancia G de una antena es un parámetro más significativo que la directividad puesto que resulta más fácil medir la potencia de entrada que la potencia radiada.

Para ilustrar los conceptos introducidos en estos dos últimos apartados, mostraremos los diagramas de radiación y las curvas de respuesta en frecuencia de dos antenas comerciales de UHF. En la figura 6 aparece la fotografía de una antenas Yagi de tres elementos para la recepción de la banda I de televisión, canales 3 y 4 (de 54 a 68 MHz). Se muestra, además, la gráfica de la ganancia de la antena en función de la frecuencia y el los diagramas de radiación de potencia normalizados en los planos E y H . En la figura 7 tenemos una antena Yagi de televisión con 7 elementos adaptada a la recepción de la banda BIII (de 174 a 230 MHz).

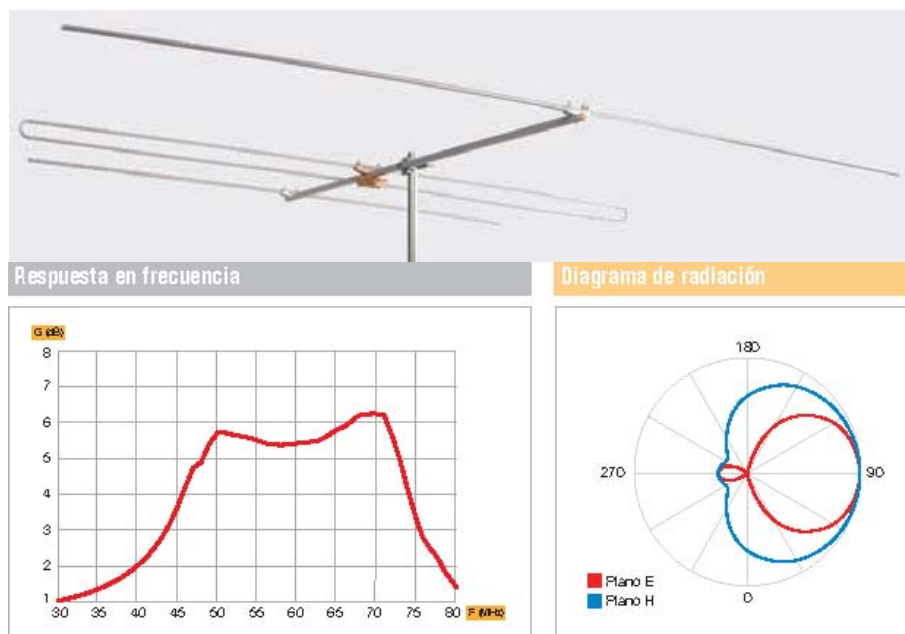


Figura 6



Figura 7

Resistencia de radiación

Consideremos que una antena es alimentada mediante una línea de transmisión y que la intensidad de corriente que circula por sus terminales de entrada es I . Si P_r es la potencia radiada por la antena, la resistencia de radiación R_a se define como la resistencia equivalente que habría que colocar en los bornes de entrada para conseguir que la potencia disipada fuera igual a P_r (ver figura 8).

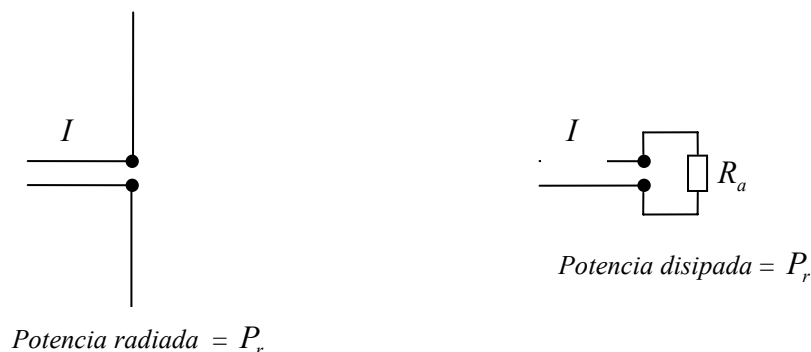


Figura 8

$$\frac{1}{2}|I|^2 R_a = P_r \quad (5.11)$$

Nótese que para una intensidad dada la potencia radiada es proporcional a la resistencia de radiación, por tanto, una antena con una resistencia de radiación pequeña radiará poca potencia; su eficiencia y su ganancia serán malas.

Para el dipolo elemental eléctrico se obtiene

$$R_a = \frac{Z_0 k_0^2 (dl)^2}{6\pi} = 80\pi^2 \left(\frac{dl}{\lambda_0} \right)^2 \quad (5.12)$$

donde se han usado las relaciones $Z_0 \approx 120\pi \Omega$ y $k_0 = 2\pi/\lambda_0$. Por ejemplo, considérese que la frecuencia de la antena dipolar eléctrica es 1MHz y $dl = 1\text{m}$, la longitud de onda será $\lambda_0 = 300\text{m}$ y, por tanto, la resistencia de radiación es igual a 0.0084Ω , la cual es muy pequeña.

Este ejemplo ilustra un resultado general: la resistencia de radiación de una antena cuyas dimensiones son muy inferiores a la longitud de onda es muy pequeña y, por tanto, es un radiador muy ineficaz. En antenas pequeñas la mayoría de la potencia se disipa debido a las pérdidas óhmicas en vez de ser radiada. Una antena eficiente debe tener unas dimensiones comparables a la longitud de onda. Sin embargo, a pesar de su ineficiencia los dipolos elementales resultan aceptables como antenas receptoras si el nivel de señal es suficientemente alto. La limitación en la recepción tiene más que ver con el alto nivel de ruido presente en la atmósfera a bajas frecuencias que con la eficacia de la antena.

Área efectiva

Una antena actuando en recepción extrae potencia de la onda incidente, por lo que presenta una cierta área de captación de energía o área efectiva A_e .

En general, no toda la potencia incidente sobre la antena es transferida a la carga. Por un lado parte de esta la potencia es desaprovechada porque las polarizaciones de la onda incidente y de la antena (la de la onda radiada por ella en una dirección dada) no coinciden (desadaptación de polarización). Por otro, parte de la potencia captada por la antena es reflejada y no se transfiere a la carga (desadaptación de la carga). Además, si la eficiencia η es menor que la unidad, parte de la potencia incidente será disipada en forma de calor.

Si consideramos condiciones ideales de adaptación de carga y polarización y eficiencia igual a la unidad, se define área efectiva de una antena como la relación entre la potencia que entrega la antena a la carga, P_L , y la densidad de potencia incidente en la antena.

$$A_e = \frac{P_L}{\mathcal{P}} \quad (5.13)$$

En otras palabras, el área efectiva de la antena es la superficie del frente de onda que habría que interceptar para conseguir extraer la potencia, P_L . En general, el área efectiva no coincide con el área física de la antena, si bien en algunos casos guarda una relación directa.

Es posible demostrar que para cualquier antena existe una relación entre el área efectiva y la directividad dada por

$$\frac{A_e}{D} = \frac{\lambda_0^2}{4\pi} \quad (5.14)$$

Tensiones y corrientes de una antena receptora.

Haciendo uso del teorema de reciprocidad es posible relacionar la tensión y la corriente que se inducen en los bornes de una antena, actuando en recepción, con la corriente que la recorre cuando actúa en transmisión. Consideremos que sobre una antena de hilo, que actúa como receptora, incide una onda cuyo campo eléctrico es \vec{E}_i . Entonces, es posible demostrar que la corriente en cortocircuito que circula por sus terminales de alimentación es

$$I_{cc} = \frac{1}{V} \int_{ant} \vec{I} \cdot \vec{E}_i dl \quad (5.15)$$

en donde \vec{I} es la corriente que recorre la antena, actuando en transmisión, cuando se le aplica un generador de tensión V .

También se puede probar que la tensión en circuito abierto inducida en esta antena es

$$V_{ca} = \frac{1}{I(0)} \int_{ant} \vec{I} \cdot \vec{E}_i dl \quad (5.16)$$

en donde \vec{I} tiene el mismo significado que antes, e $I(0)$ es la corriente en sus terminales de alimentación.

6. Campo de radiación producido por una antena lineal

Para ciertos sistemas radiantes se puede demostrar teórica y experimentalmente que la distribución de la corriente tiene una forma conocida que es lo bastante sencilla como para hacer posible el cálculo analítico del campo eléctrico de radiación. Para una antena lineal (o dipolo largo) de longitud l , orientado en la dirección del eje z y cuyo centro se encuentra en el origen de coordenadas, la distribución de corriente puede expresarse de forma aproximada por la expresión

$$I(z') = I_m \operatorname{sen} k_0 \left(\frac{l}{2} - |z'| \right) = \begin{cases} I_m \operatorname{sen} k_0 \left((l/2) - z' \right) & 0 \leq z' \leq l/2 \\ I_m \operatorname{sen} k_0 \left((l/2) + z' \right) & -l/2 \leq z' \leq 0 \end{cases} \quad (6.1)$$

En la ecuación anterior I_m es el valor máximo de la corriente, que no coincide necesariamente con el valor de la corriente en la entrada de la antena, que es

$$I(0) = I_0 = I_m \operatorname{sen} \left(k_0 \frac{l}{2} \right) \quad (6.2)$$

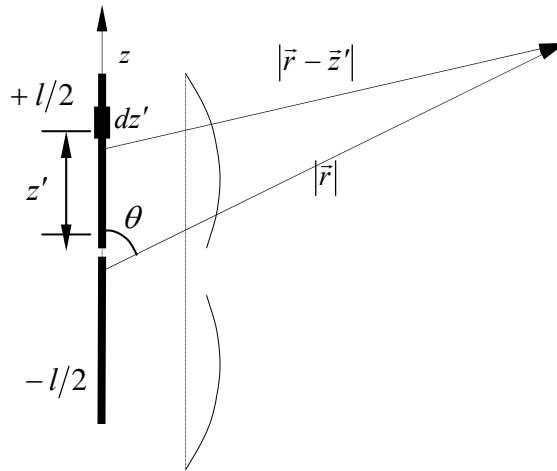


Figura 9

Para el cálculo del campo lejano de un sistema radiante alimentado por esta corriente podemos proceder de dos maneras: utilizando (3.7) directamente o hallando el vector de radiación y, mediante éste, el campo. En esta ocasión utilizaremos el segundo procedimiento

$$\vec{N} = \int_C I(\vec{r}') \vec{u} e^{jk_0 \vec{u}_r \cdot \vec{r}'} dl' = \int_{-l/2}^{l/2} I(z') \vec{u}_z e^{jk_0 \vec{u}_r \cdot \vec{u}_z z'} dz' \quad (6.3)$$

en donde \vec{u} es el vector unitario en la dirección de la corriente, que en este caso coincide con \vec{u}_z . Además, teniendo en cuenta que $\vec{r}' = z' \vec{u}_z$ y que $\vec{u}_r \cdot \vec{u}_z = \cos \theta$, tenemos

$$\vec{N} = \int_{-l/2}^{l/2} I_m \operatorname{sen} k_0 \left(\frac{l}{2} - |z'| \right) \vec{u}_z e^{jk_0 z' \cos(\theta)} dz' = 2I_m \frac{\cos\left(\frac{k_0 l}{2} \cos \theta\right) - \cos\left(\frac{k_0 l}{2}\right)}{k_0 \operatorname{sen}^2 \theta} \vec{u}_z \quad (6.4)$$

Teniendo en cuenta que $\vec{u}_z = \cos \theta \vec{u}_r - \operatorname{sen} \theta \vec{u}_\theta$ vemos que el vector de radiación tiene componentes en las direcciones \vec{u}_r y \vec{u}_θ . Sin embargo, la única que va a intervenir en el cálculo del campo radiado es \vec{u}_θ , ya que la componente \vec{u}_r desaparece al hacer el producto vectorial consigo misma. Utilizando la expresión (3.8) obtenemos

$$\vec{E} = \frac{jk_0 Z_0 e^{-jk_0 r}}{4\pi r} \vec{u}_r \times (\vec{u}_r \times \vec{N}) = \frac{jI_m Z_0}{2\pi r} e^{-jk_0 r} \frac{\cos\left(\frac{k_0 l}{2} \cos \theta\right) - \cos\left(\frac{k_0 l}{2}\right)}{\sin \theta} \vec{u}_\theta \quad (6.5)$$

en donde se ha hecho uso de la identidad $\vec{u}_r \times (\vec{u}_r \times \vec{u}_\theta) = -\vec{u}_\theta$.

Una vez obtenido el campo eléctrico deducimos el campo magnético mediante la ecuación (3.10), obteniéndose

$$\vec{H} = \frac{\vec{u}_r \times \vec{E}}{Z_0} = H_\phi \vec{u}_\phi = \frac{jI_m}{2\pi r} e^{-jk_0 r} \frac{\cos\left(\frac{k_0 l}{2} \cos \theta\right) - \cos\left(\frac{k_0 l}{2}\right)}{\sin \theta} \vec{u}_\phi \quad (6.6)$$

El flujo de potencia por unidad de superficie viene dado por la expresión

$$\vec{S} = \frac{1}{2} \frac{E_\theta E_\theta^*}{Z_0} \vec{u}_r = \frac{|I_m|^2 Z_0}{8\pi^2 r^2} \left(\frac{\cos\left(\frac{k_0 l}{2} \cos \theta\right) - \cos\left(\frac{k_0 l}{2}\right)}{\sin \theta} \right)^2 \vec{u}_r \quad (6.7)$$

La potencia total radiada se obtiene integrando esta expresión sobre una superficie esférica de radio r , obteniéndose

$$P_r = \oint_S \text{Re}[\vec{S}] \cdot \vec{u}_r dS' = \frac{|I_m|^2 Z_0}{8\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{\left(\cos\left(\frac{k_0 l}{2} \cos \theta\right) - \cos\left(\frac{k_0 l}{2}\right) \right)^2}{\sin^2 \theta} \sin \theta d\theta d\phi \quad (6.8)$$

La evaluación analítica de esta integral para cualquier valor de $k_0 l$, aunque posible, es complicada y no resulta particularmente útil para la comprensión del tema. En su lugar vamos a considerar el caso particular en que $l = \lambda_0 / 2$, esto es, un dipolo de media onda. Su interés deriva del hecho de que es un dipolo resonante en el que, como veremos en la próxima sección, la parte imaginaria de su impedancia es prácticamente nula. Esto facilita la adaptación de impedancia del circuito que alimenta la antena.

Como la longitud del dipolo es de media longitud de onda tenemos que $k_0 l = \pi$ y,

$$\text{por tanto, } \vec{E} = \frac{jI_m Z_0}{2\pi r} e^{-jk_0 r} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos \theta\right)}{\sin \theta} \vec{u}_\theta$$

El valor numérico de la integral de (6.10) es en este caso

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2} \cos \theta\right)}{\sin^2 \theta} \sin \theta d\theta d\phi = 2\pi \int_0^\pi \frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2} \cos \theta\right)}{\sin \theta} d\theta = 7.65 \quad (6.9)$$

Dado que en este caso la intensidad de corriente en el origen coincide con su valor máximo, esto es, $I_0 = I_m \sin(\pi/2) = I_m$, obtenemos para la potencia radiada

$$P_r = 36.565 |I_0|^2 = \frac{1}{2} R_a |I_0|^2 \quad (6.10)$$

de donde se deduce que la resistencia de radiación es $R_a = 2 \times 36.565 \Omega = 73.13 \Omega$.

Sabemos que la directividad está dada por la expresión

$$D(\theta, \phi) = 4\pi \frac{K(\theta, \phi)}{P_r} \quad (6.11)$$

y que la potencia radiada por unidad de ángulo sólido es

$$K(\theta, \phi) = \frac{1}{2} \frac{r^2}{Z_0} |\vec{E}(\theta, \phi)|^2 \quad (6.12)$$

Sustituyendo (6.5) y (6.10) en las expresiones anteriores, se deduce que la directividad del dipolo de media onda es

$$D(\theta, \phi) = 1.64 \left(\frac{\cos((\pi/2)\cos\theta)}{\sin\theta} \right)^2 \quad (6.13)$$

Su valor máximo se alcanza en $\theta = \pi/2$ y vale 1.64. El diagrama de radiación del campo eléctrico en el plano E se muestra en la figura 10.

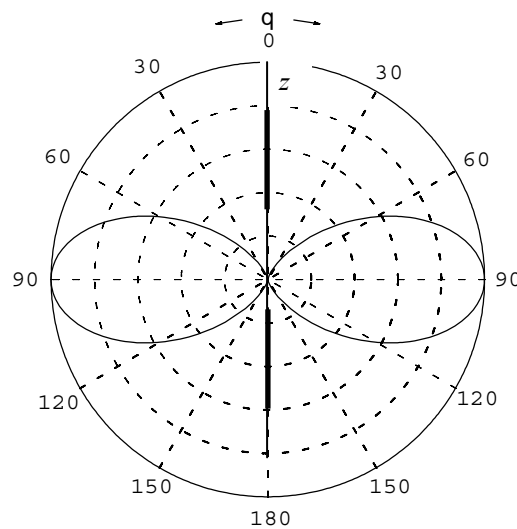


Figura 10

Impedancia de la antena dipolo

El teorema de Poynting complejo permite definir la impedancia de entrada de una antena. Imaginemos que la antena está rodeada por una superficie esférica ficticia, S , de radio suficientemente grande como para asegurar los puntos sobre S se encuentran en la zona de radiación. Si V_0 y I_0 son la tensión y corriente complejas en los terminales de la antena, respectivamente, entonces, la potencia compleja con que se alimenta la antena es $V_0 I_0^*/2$. Por otro lado, si P_r es la potencia radiada a través de S , P_d es la potencia disipada por pérdidas óhmicas en el interior de S y W_e y W_m son los promedios temporales de las energías eléctrica y magnética almacenadas en la zona de campo cercano a la antena, el teorema de Poynting complejo establece que

$$\frac{1}{2} V_0 I_0^* = P_r + P_d + 2j\omega(W_m - W_e) \quad (6.14)$$

Ahora bien, la potencia compleja que entra a la antena a través de sus terminales se puede escribir en función de la impedancia de entrada, Z_a , como $Z_a I_0 I_0^*/2$, de donde se deduce que

$$Z_a = R + jX = \frac{P_r + P_d + 2j\omega(W_m - W_e)}{I_0 I_0^*/2} \quad (6.15)$$

En general, la impedancia de entrada consta de un término resistivo R y otro reactivo X . Sólo cuando las energías eléctrica y magnética almacenadas en los campos cercanos sean iguales desaparecerá la parte reactiva. En ese caso diremos que la antena es resonante. Esto ocurre en un dipolo delgado cuando la longitud de la antena es, aproximadamente, un múltiplo de $\lambda_0/2$ (ver figura 12).

Podemos considerar que la resistencia de entrada de la antena, R , es la suma de la resistencia de radiación $R_a = \frac{P_r}{I_0 I_0^*/2}$ y la resistencia óhmica, $R_d = \frac{P_d}{I_0 I_0^*/2}$. La eficiencia de una antena se puede obtener a partir de las resistencias de radiación y óhmica. Teniendo en cuenta que η es la relación entre la potencia radiada y la potencia entregada a la antena, se tiene que $\eta = \frac{P_r}{P_r + P_d} = \frac{R_a}{R_r + R_d}$.

La parte imaginaria o reactiva, X , es generalmente difícil de calcular ya que requiere un conocimiento detallado de la radiación de la antena en campo cercano. Por ello no resulta fácil obtener una expresión analítica de Z_a . Sin embargo, podemos analizar el comportamiento de Z_a en función de la frecuencia y las dimensiones físicas de la antena, bien por procedimientos numéricos o bien por procedimientos experimentales. El conocimiento de este comportamiento es fundamental para disponer de un modelo circuital de la antena.

En general, cuando la antena está conectada a una línea de transmisión de impedancia característica Z_c se produce una onda reflejada. La relación entre las amplitudes en los terminales de la antena de la onda incidente, V^+ , y la reflejada, V^- , está dada por el coeficiente de reflexión

$$\Gamma = \frac{V^-}{V^+} = \frac{Z_a - Z_c}{Z_a + Z_c} \quad (6.16)$$

La suma de la onda incidente y la reflejada produce una onda estacionaria con puntos de amplitud máxima y mínima. Se define coeficiente de onda estacionaria o (COE) como la relación entre el valor máximo y mínimo de los módulos de la tensión alcanzados a lo largo de la línea de transmisión. Su relación con el coeficiente de reflexión es

$$\text{COE} = \frac{1 + |\Gamma|}{1 - |\Gamma|} \quad (6.17)$$

La relación de impedancias entre la línea de alimentación y la antena es considerada aceptable cuando el COE es menor que 1.5, al que corresponde un coeficiente de reflexión $|\Gamma| = 0.2$, o a una potencia reflejada proporcional a $|\Gamma|^2 = 0.04$, es decir de un 4%.

Las figura 11 y 12 muestran relaciones experimentales de la resistencia y la reactancia de entrada de diversos dipolos en función de l/λ_0 para diferentes relaciones de l/d . En la figura 4 se observa que cuando $l/\lambda_0 \approx 0.48$ la reactancia es cero. Este valor es corresponde a la primera longitud de resonancia, en la que $R_a \approx 73\Omega$. Esta longitud representa un acortamiento entorno al 5% respecto del dipolo de media onda. La impedancia de la antena resonante de media onda tiene un valor próximo a la impedancia característica de algunos cables coaxiales muy utilizados, como es el de 75Ω . Cuando esta antena es alimentada con uno de estos cables, el coeficiente de reflexión resultante es muy bajo, lo que permite una conexión directa sin ningún adaptador de impedancia.

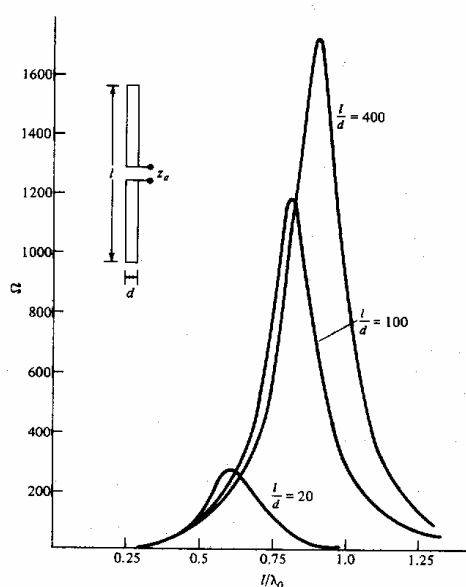


Figura 11. Resistencia de entrada de una antena dipolo

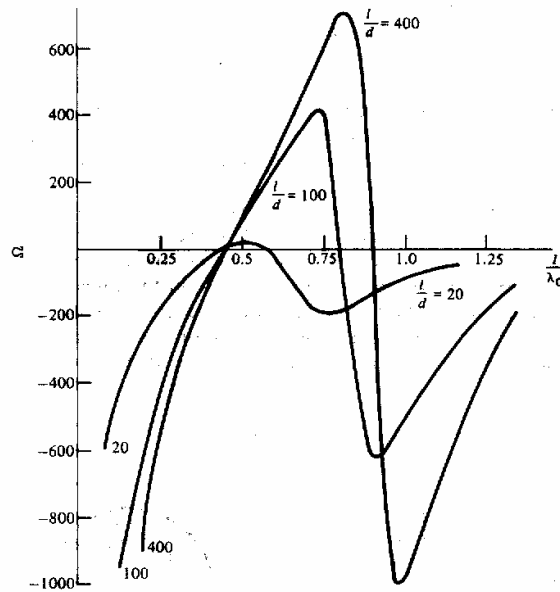


Figura 12. Reactancia de entrada de una antena dipolo

Existen otras resonancias para l/λ_0 comprendido entre 0.8 y 0.9. En este punto la resistencia de radiación es grande a causa de que la corriente en los terminales de la antena, $I_0 \approx I_m \sin(k_0 l/2) = I_m \sin \pi = 0$, es muy pequeña. Si la antena es muy delgada, la segunda resonancia ocurre cuando $l/\lambda_0 = 1$, y la resistencia de radiación puede alcanzar valores de varios miles de Ω . Para una antena gruesa la reactancia presenta una menor variación con los cambios de l/λ_0 , lo que es deseable si la antena debe operar en una banda amplia de frecuencias.

7. Campo de radiación producido por una espira circular

Consideremos una espira circular de radio a recorrida por una corriente uniforme I_0 y situada en el plano xy , tal como se muestra en la figura 13. Podemos calcular el campo eléctrico a través de la expresión

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{jk_0 Z_0 e^{-jk_0 r}}{4\pi r} \int_C [(\vec{u}_r \cdot \vec{u}) \vec{u}_r - \vec{u}] I(\vec{r}') e^{jk_0 \vec{u}_r \cdot \vec{r}'} dl' \quad (7.1)$$

En nuestro caso la corriente a lo largo de la espira está dada por $I_0 \vec{u}_{\phi'}$. Por tanto,

$$\vec{E} = \frac{jk_0 I_0 Z_0 a}{4\pi r} e^{-jk_0 r} \int_0^{2\pi} ((\vec{u}_r \cdot \vec{u}_{\phi'}) \vec{u}_r - \vec{u}_{\phi'}) e^{jk_0 \vec{r}' \cdot \vec{u}_r} d\phi' \quad (7.2)$$

La integral de esta última expresión puede representarse mediante funciones de Bessel de orden uno $J_1(x)$

$$\int_0^{2\pi} \cos(\phi - \phi') e^{jk_0 a \sin\theta \cos(\phi - \phi')} d\phi' = 2\pi j J_1(k_0 a \sin\theta) \quad (7.8)$$

Sustituyendo en (7.7) y efectuando algunas operaciones, obtenemos

$$\vec{E} = E_\phi \vec{u}_\phi = \frac{k_0 I_0 Z_0 a}{2r} e^{-jk_0 r} \vec{u}_\phi J_1(k_0 a \sin\theta) \quad (7.9)$$

Esta expresión es válida para cualquier espira circular con corriente uniforme. Un tipo particular de la antena que estamos analizando, conocida como dipolo magnético elemental o espira elemental, se presenta cuando $a \ll \lambda_0$ y $|k_0 a \sin\theta| \ll 1$. Sabiendo que $J_1(x) \approx x/2$ para $x \ll 1$, podemos aproximar (7.9) como

$$E_\phi = \frac{k_0^2 a^2 I_0 Z_0}{4r} e^{-jk_0 r} \sin\theta \quad (7.10)$$

que es el campo eléctrico radiado por el dipolo magnético elemental.

Resulta útil escribir la expresión anterior en función del momento magnético de la espira circular, $\vec{m} = I_0 \pi a^2 \vec{n}$, donde \vec{n} es el vector normal a la espira, que en nuestro caso coincide con \vec{u}_z . Teniendo en cuenta que $\sin\theta \vec{u}_\phi = \vec{u}_z \times \vec{u}_r$, podemos escribir el campo eléctrico anterior como

$$\vec{E} = \frac{k_0^2 a^2 \pi I_0 Z_0}{4\pi r} e^{-jk_0 r} \vec{u}_z \times \vec{u}_r = \frac{k_0^2 Z_0}{4\pi r} e^{-jk_0 r} \vec{m} \times \vec{u}_r \quad (7.11)$$

Esta expresión sigue siendo válida para un dipolo magnético orientado en una dirección \vec{n} arbitraria. Incluso si la forma del dipolo no es circular, la expresión anterior es válida si reemplazamos πa^2 en \vec{m} por la superficie delimitada por la espira.

La potencia radiada se obtiene a partir del vector de Poynting complejo

$$\vec{S} = \frac{1}{2} \frac{\vec{E} \cdot \vec{E}^*}{Z_0} \vec{u}_r = \frac{Z_0 I_0^2 k_0^4 a^4}{32 r^2} \sin^2 \theta \vec{u}_r \quad (7.12)$$

Integrando el vector de Poynting sobre una superficie esférica de radio r se obtiene la potencia radiada por la espira

$$P_r = \oint_S \text{Re}[\vec{S}] \cdot \vec{u}_r dS' = \frac{Z_0 I_0^2 k_0^4 a^4}{32} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta = \frac{\pi Z_0 I_0^2 k_0^4 a^4}{12} \quad (7.13)$$

De la expresión anterior se deduce para la resistencia de radiación

$$R_a = \frac{2P_r}{I_0^2} = \frac{\pi Z_0 k_0^4 a^4}{6} = 320 \pi^6 \left(\frac{a}{\lambda_0} \right)^4 \quad (7.14)$$

La resistencia de radiación de la espira elemental depende de sus dimensiones a través de $(a/\lambda_0)^4$ mientras que la del dipolo elemental lo hace según $(dl/\lambda_0)^2$. Por tanto, dado que tanto a como dl son mucho menores que λ_0 , a igualdad de dimensiones la resistencia de radiación de la espira es mucho menor que la del dipolo. Dado que las pérdidas óhmicas son del mismo orden de magnitud, la eficiencia de la espira será menor.

De lo expuesto se deduce que la espira es una mala antena emisora. Sin embargo, si agrupamos en serie N espiras el resultado es equivalente a tener una espira alimentada por una corriente I_0 pero recorrida por una corriente NI_0 . Por tanto, la potencia radiada será $P'_r = (1/2)(NI_0)^2 R_a$ y la nueva resistencia de radiación, que por definición es, $2P'_r/I_0^2$, resulta $R'_a = N^2 R_a$. Esta antena es útil para pequeños receptores de radio.

Dado que la dependencia angular del campo eléctrico para la espira elemental (7.9) es la misma que la del dipolo eléctrico elemental, el diagrama de radiación y la directividad son iguales.