# Tema 3
# Transmisión de señales en sistemas lineales



## 1. Sistemas lineales

Todo lo que hemos visto sobre la teoría de Fourier va a servirnos para centrar nuestra atención en un tipo especial de sistemas como son los **sistemas lineales**. Vamos a comenzar definiendo lo que se un **sistema** y después particulizaremos al caso de los **sistemas lineales**.

**DEF**: Un ***sistema*** es todo dispositivo físico que produce una o más señales de salida en respuesta a una o varias señales de entrada.

Por ejemplo, en la transmisión de datos, la entrada son los datos a transmitir, la salida la señal que recibe el receptor y por lo tanto el sistema serán todos los elementos que hacen posible la comunicación: codificadores, moduladores, el canal de comunicaciones, ... Dependiendo de lo complejo o sencillo que queramos que sea nuestro sistema tomaremos más o menos elementos a la hora de describir el sistema.

Dentro de un sistema podemos considerar subsistemas: 'trozos' del sistema. La salida de un (sub)sistema puede ser la entrada a otro (sub)sistema.

**DEF:** Un ***sistema lineal*** es aquel que verifica el ***principio de superposición***: la respuesta/salida de un sistema a un conjunto de entradas aplicadas simultáneamente es igual a la suma de las salidas cuando cada entrada se aplica individualmente:

$$\Re[a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t)] = a_1 \Re[x_1(t)] + a_2 \Re[x_2(t)]$$

**Ejemplos** típicos de sistemas lineales en las comunicaciones son los filtros y los canales físicos de la comunicación (cuando operan en la parte lineal). Un **filtro** es un dispositivo que se utiliza para limitar el espectro de frecuencia de la señal que queremos transmitir a una determinada banda de frecuencias. El **canal** se refiere al medio de transmisión que conecta al emisor y al receptor en un sistema de transmisión de datos.

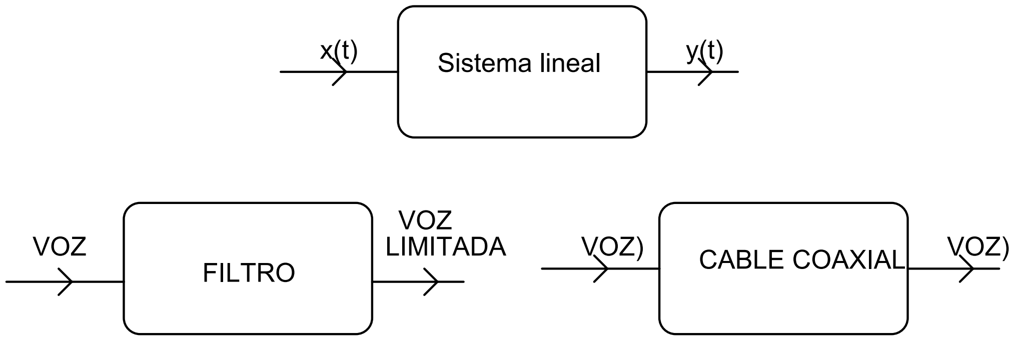



**Figura 1: Sistemas lineales**

Diremos que un ***sistema lineal es invariante en el tiempo*** cuando ante una entrada determinada, el sistema responde de la misma forma independientemente del instante de tiempo en el que se aplique esa entrada.

Se dice que un ***sistema es causal*** cuando no responde antes de ser excitado. Para el caso de sistemas lineales invariantes, el sistema será causal cuando h(t) sea nula para t>0.

Para que un sistema en tiempo real sea físicamente realizable debe ser causal.

Decimos que el ***sistema es estable*** si la salida esta limitada (acotada) para cualquier señal acotada presente en la entrada. Es lo que llamamos el criterio de estabilidad ***BIBO*** (Bounded Input Bounded Output).

## 2. Respuesta impulsional. Función de transferencia

Mediante la respuesta impulsional y la función de transferencia vamos a lograr un modelo del sistema de comunicaciones. Es decir, vamos a tener unas fórmulas matemáticas que nos permitan ‘saber’ de forma bastante aproximada cómo se va a comportar ese sistema de comunicaciones cuando transmitamos algo a través de él. Por ejemplo, en una transmisión es muy importante saber qué sucede con la potencia de una señal a lo largo de una transmisión, la función de transferencia nos va a permitir entender qué sucede con la potencia de la señal sin que físicamente haya sido necesario transmitirla. Veamos ahora cómo obtener estos elementos. Las definiciones que vamos a dar se aplican al caso de sistemas lineales.

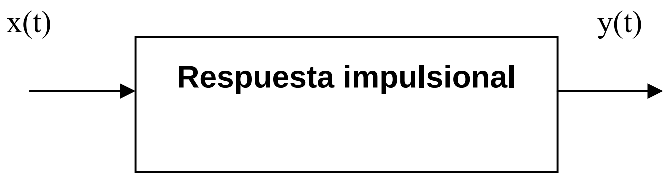



**Figura 2: Respuesta impulsional**

Vamos a suponer el esquema básico: señal a transmitir, sistema lineal (un canal o un filtro), señal que se recibe. Si aplicamos como entrada un impulso unitario, la señal que obtenemos a la salida es lo que llamamos **respuesta impulsional**. Deben considerarse condiciones iniciales nulas[1].

Generalmente la respuesta impulsional se representa por h(t) (Figura 2).

Veamos unos ejemplos. En la Figura 3 se muestra un ejemplo de obtención de respuesta impulsional. Para nosotros el sistema de comunicaciones es una caja negra[2] y necesitamos calcular de algún modo las ecuaciones que lo representen, así que aplicamos una entrada impulso unitario en el instante inicial y la salida que obtenemos es lo que se muestra en la gráfica. El siguiente paso será escribir una ecuación que nos refleje lo que tenemos en la gráfica.

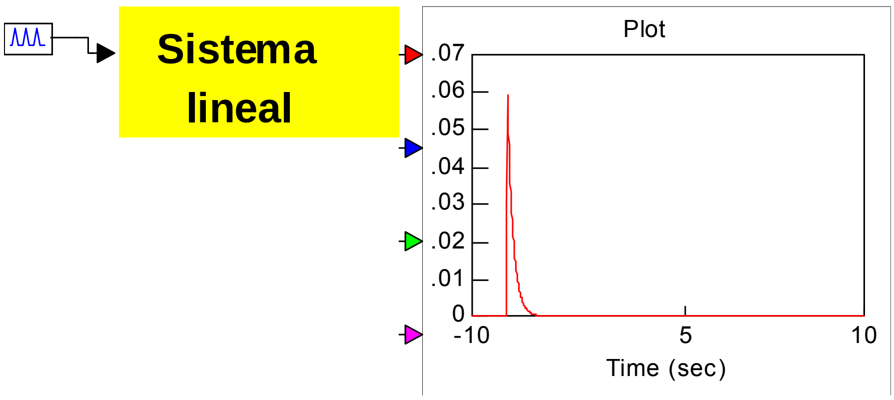



**Figura 3: Ejemplo de obtención de la respuesta impulsional**

En la Figura 4 se muestra otro sistema lineal distinto al de la Figura 3, por lo tanto la respuesta impulsional será diferente.

[1] Esta condición es muy importante. Pero a efectos de la asignatura no vamos a ver su significado en profundidad.

[2] Término utilizado en ingeniería para referirnos a un elemento o conjunto de elementos del que no sabemos su contenido y que sólo se puede conocer a partir de la observación de las salidas obtenidas cuando se aplican unas determinadas entradas.

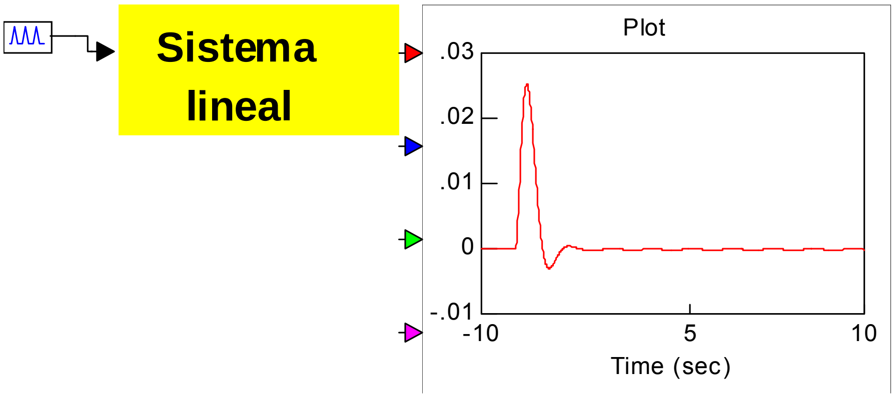



**Figura 4: Otro sistema lineal**

En el caso de los sistemas invariantes en el tiempo, la forma de la respuesta impulsional será independiente del instante de tiempo en el que se haya aplicado el impulso unitario a la entrada del sistema.

La **función de transferencia** H(f) se define como la transformada de Fourier de la respuesta impulsional h(t).

Para calcular la salida del sistema ante una entrada, tenemos ahora dos posibilidades:ç

- Dominio temporal. La salida y(t) se define como la convolución de la entrada con h(t).

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

- Dominio frecuencial. La salida Y(f) se calcula como el producto X(f) por H(f).

En el caso en que la entrada al sistema sea una señal periódica, se cumplirá:

$$X(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \delta(f - nf_0)$$

y el espectro de la señal de salida del sistema será:

$$Y(f) = H(f) \cdot X(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n H(n \cdot f_0) \delta(f - n \cdot f_0)$$

tanto si se trabaja con señales periódicas como con las que no lo son, se puede obtener una relación entre la PSD de la señal de entrada y la de la salida:

$$PSD_y(f) = PSD_x(f)|H(f)|^2$$

## 3. Transmisión sin distorsión

En los sistemas de comunicación lo ideal es trabajar con canales que no introduzcan ningún tipo de distorsión.

Ahora lo que tenemos que ver es lo que entendemos por distorsión. Intuitivamente o por resultado de nuestra experiencia entendemos el significado de la palabra. En principio habrá distorsión cuando no podamos reconocer 'adecuadamente' una señal que se ha transmitido.

Veamos las dos señales de la Figura 5. Ambas representan a una señal seno, la diferencia entre la primera y la segunda es que en la primera hay 10 segundos en los que no se recibe nada. Podemos concluir que la primera señal es una versión retrasada de la segunda, pero seguimos reconociendo que se trata de una señal seno con el mismo periodo de repetición.

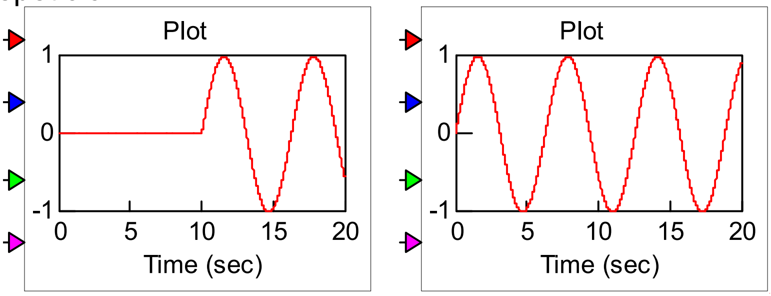



**Figura 5 : Señal con retraso y señal sin retraso**

Observemos ahora lo que sucede con la Figura 6. Ahora tenemos dos señales iguales, excepto en amplitud. De hecho, si no nos fijamos en la escala vertical, las confundiríamos y pensaríamos que son la misma señal.

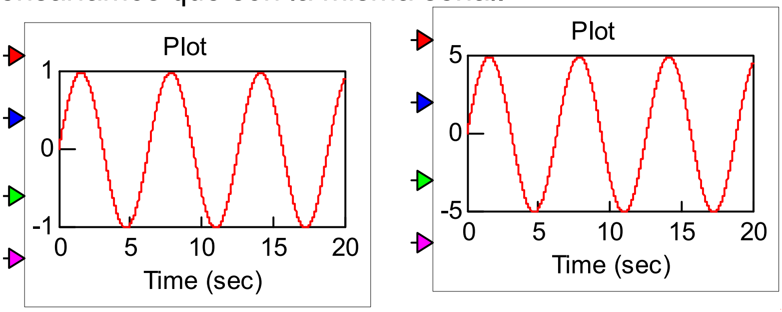



**Figura 6: Señales con diferente amplitud**

¿Qué es lo que sucede con los ejemplos de la Figura 7?. Que tienen diferente amplitud y retraso, pero seguimos teniendo el mismo periodo de repetición y seguimos reconociendo de qué señal se trata.

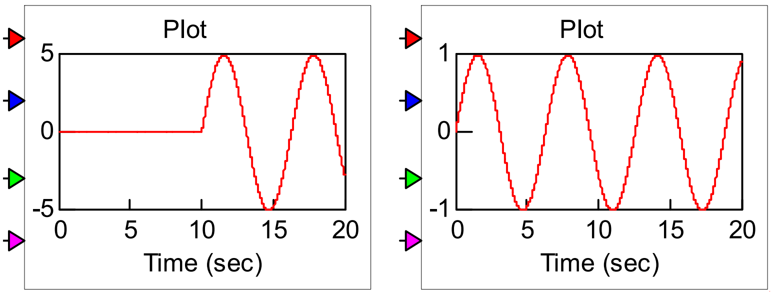



**Figura 7: Señales con diferente amplitud y retraso**

Los ejemplos de las figuras anteriores sirven para introducir el concepto de transmisión sin distorsión. Vamos a considerar que no hay distorsión en la transmisión cuando la señal que se recibe en el receptor, es decir, la salida, es una versión proporcional y retrasada de la entrada:

$$y(t)=Ax(t-T_d)$$

donde A es la ganancia y $T_d$ es el retraso introducido por la línea (tiempo necesario para la transmisión).

Si estas condiciones se traducen al dominio de la frecuencia:

$$Y(f)=A\cdot X(f)e^{-j2\pi fT_d}$$

Por lo tanto, para que la transmisión se realice sin distorsión se necesita que la función de transferencia del canal sea:

$$H(f)=\frac{Y(f)}{X(f)}=A\cdot e^{-j2\pi fT_d}$$

En resumen, para que no haya distorsión en la transmisión a la salida de un sistema invariante en el tiempo deben cumplirse:

1. La respuesta en amplitud (espectro de magnitud) es del tipo: $|H(f)|=constante=A$
2. La respuesta de fase (espectro de fase) es:

$$\Theta(f)=-j2\pi fT_d$$

Cuando se cumple la primera condición se dice que no hay ***distorsión de amplitud***. Cuando se cumple la segunda se dice que no hay ***distorsión de fase***. Para que la transmisión no sufra distorsiones, deben satisfacerse ambas condiciones.

La segunda condición se puede escribir entérminos del retardo de tiempo:

$$T_d(f)=-\frac{1}{2\pi f}\Theta(f)$$

entonces, para que no haya distorsión debe cumplirse:

$$T_d(f)=\text{constante}$$

si no se cumple, entonces habrá distorsión de fase porque el espectro de fase ($\Theta(f)$) no es una función lineal de la frecuencia.

# 4. Ancho de banda

El ancho de banda (tanto de una señal como de un canal) indica el tamaño de la gama de frecuencias que se utilizan en la comunicación.

Hay varias definiciones para ancho de banda, según se quieran resaltar unas características u otras. Estas definiciones pueden aplicarse lo mismo al caso del ancho de banda de una señal o de un canal.

El ancho de banda puede definirse en de muchas formas, se usará la que más convenga para la aplicación que se esté desarrollando. En cierta forma, aunque no es lo mismo, pero el ejemplo sirve, ocurre lo mismo que cuando nos referimos a la longitud.

Una persona mide lo mismo independientemente de la unidad que se use: cm, m, pulgadas, ....

## 4.1. Señales limitadas en banda (bandlimited) y en tiempo

En transmisión de datos es bastante habitual trabajar con señales cuyo espectro de frecuencias está limitado, es decir, que es diferente de cero sólo en un determinado intervalo de frecuencias. Esta propiedad va a permitir que apliquemos unos teoremas muy importantes para el procesamiento de este tipo de señales. Estas ideas se aplican especialmente al caso de las comunicaciones digitales.

**DEF SEÑALES LIMITADAS EN BANDA**

Una señal g(t) se dice que está limitada en banda a B Hertzios si

$$G(f) = \Im[g(t)] = 0, |f| \geq B$$

**DEF SEÑALES LIMITADAS EN EL TIEMPO**

Una señal g(t) se dice que está limitada en el tiempo si g(t)=0 cuando $|t| > T$

**TEOREMA**

Una señal no puede ser a la vez limitada en banda y en tiempo.

**Ejemplos:**

- Un pulso rectangular de duración T. Esta señal claramente es una señal limitada en el tiempo, pero su espectro de frecuencias es infinito, no está limitado. En la Figura 8 se muestra un pulso de amplitud 3 y duración 1, claramente es una señal limitada en tiempo, pero no en banda.

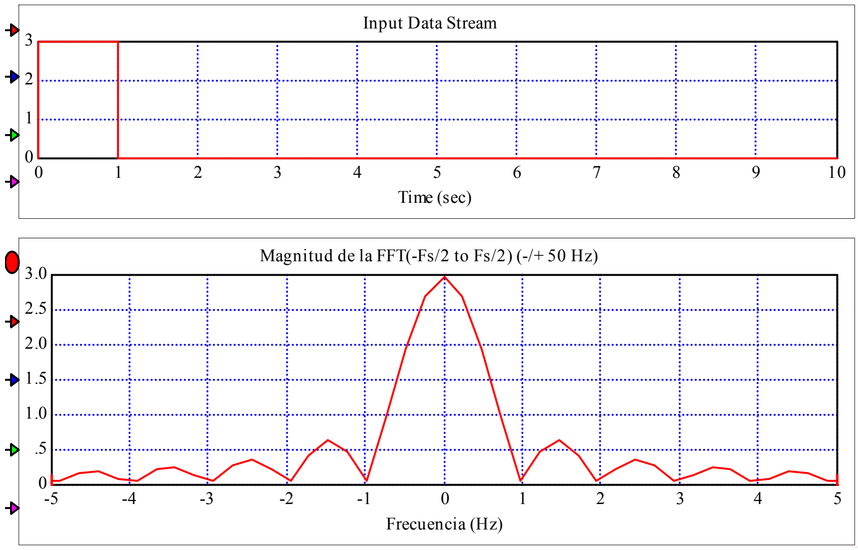



**Figura 8: Salto en el tiempo y su espectro de magnitud**

- Un filtro pasa baja es una señal que está limitada en banda, pero por el contrario no lo está en el dominio del tiempo.
- también podemos tener señales que no sean ni limitadas en tiempo, ni en banda. Por ejemplo, el pulso exponencial (Figura 9).

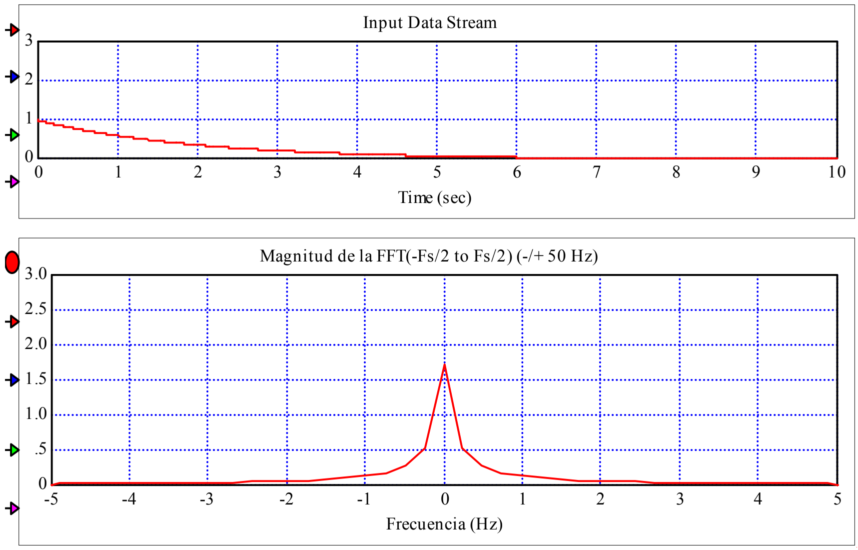



**Figura 9: Señal no limitada en tiempo ni en banda**

- Las señales sinusoidales (Figura 10) son señales que no son limitadas en tiempo, pero si en banda.

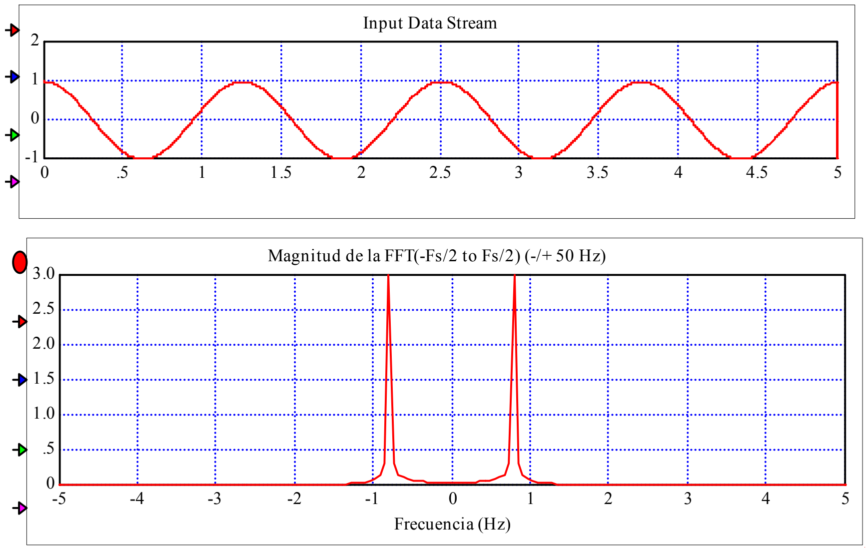



**Figura 10: Señal limitada en banda**

## 4.2. Ancho de banda de una señal

El **ancho de banda** de una señal da una idea de la extensión del contenido espectral significativo de la señal para frecuencias positivas.

***Sólo se considera el rango positivo de las frecuencias, la dirección positiva, NO se usa el semieje negativo para la definición de ancho de banda***

Cuando la señal es limitada en banda no hay ambigüedad en la definición del ancho de banda de la señal. Por ejemplo, el espectro de la función *sinc* es un pulso rectangular, por lo que están claramente definidas las frecuencias significativas. Cuando la señal no es limitada en banda aparecen algunos problemas a la hora de definir el concepto de ancho de banda. La principal dificultad es determinar qué quiere decir significativo en un espectro de frecuencias. Esta es la razón de que no haya una definición de ancho de banda aceptada universalmente.

Veamos algunas de estas definiciones del ancho de banda:

1) **Ancho de banda absoluto**: $f_2 - f_1$, donde el espectro es cero fuera del intervalo $f_1 < f < f_2$ a lo largo del eje positivo de frecuencias.

2) **Ancho de banda cero-a-cero** (null-to-null bandwidth) o **ancho de banda cruzando-cero** (zero-crossing bandwidth): es $f_2 - f_1$, donde $f_2$ es la es la frecuencia de corte según el eje positivo de la componente más significativa del espectro, y $f_1$ es cero en las señales pasabaja y el valor simétrico al $f_2$ respecto al 'centro', en una señal pasabanda.

3) **Ancho de banda 3dB o ancho de banda de la mitad de la potencia**: es $f_2 - f_1$, tal que para las frecuencias dentro de la banda $f_1 < f < f_2$, el espectro de magnitud cae menos de $1/\sqrt{2}$ del valor máximo.

4) **Ancho de banda de potencia**: es $f_2 - f_1$, donde $f_1 < f < f_2$ es la banda de frecuencia donde reside el 99% de la potencia total.

## 4.3. Ancho de banda de un sistema

El ancho de banda de un sistema se define de la misma forma que el ancho de banda de una señal.

### 4.3.1. Influencia del ancho de banda en la transmisión

Cuanto mayor es el ancho de banda, más información podemos enviar por ese canal. Esto se traduce en que se pueden enviar más señales simultáneamente o bien en que el ancho de banda de la señal que se envía sea mayor y por lo tanto la precisión de la información en el receptor será mejor.

Cuando una señal pasa a través de un medio físico siempre sufre una distorsión (alteración de la forma de la señal) por efecto de lo que se conoce como ***ancho de banda pasante del medio***, que se define como $f_2 - f_1$.

Por efecto de este ancho de banda:

1) Las componentes de frecuencia de nuestra señal que están dentro de este rango sufren atenuaciones de hasta 3dB (es decir, la potencia de la señal disminuye).

2) Las componentes de frecuencia que están fuera de este rango no son transmitidas, el canal actúa como un filtro para todas las frecuencias que están fuera de ese rango. Se dice que el canal se comporta como un filtro pasabanda.

Si el ancho de banda pasante fuese infinito, la señal no sufriría ninguna atenuación ni distorsión, pero en la práctica esto es totalmente imposible. Además se cumple que a menor ancho de banda mayor es el efecto de las distorsiones y atenuaciones.

### 4.4. Factores que afectan al ancho de banda

Las señales que tienen transiciones muy fuertes en el dominio del tiempo tienen un contenido en armónicos más alto que las que presentan transiciones suaves.

Esto se debe a que los cambios bruscos sólo se pueden construir a partir de un gran número de señales sinusoides de alta frecuencia: armónicos elevados de las series de Fourier.

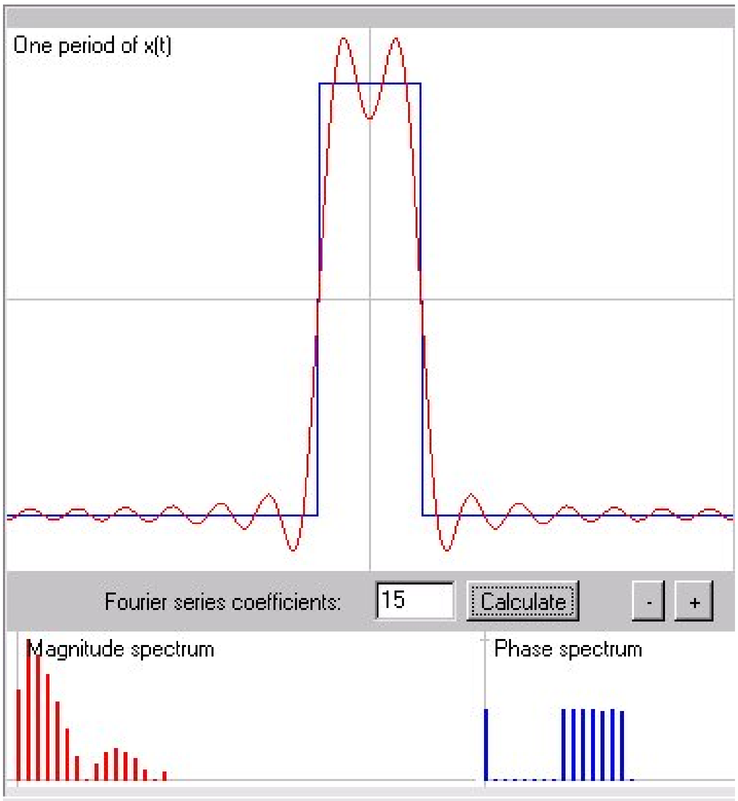



**Figura 11: 15 armónicos de una secuencia de pulsos rectangulares**

En la Figura 11 y la Figura 12 se muestra un ejemplo de este comportamiento. En primer lugar podemos comprobar como los 15 primeros armónicos de un pulso rectangular dan lugar a un espectro de magnitud donde los elementos son todos ellos significativos. En cambio cuando aproximamos el pulso triangular, los elementos tienden a cero mucho más rápidamente.

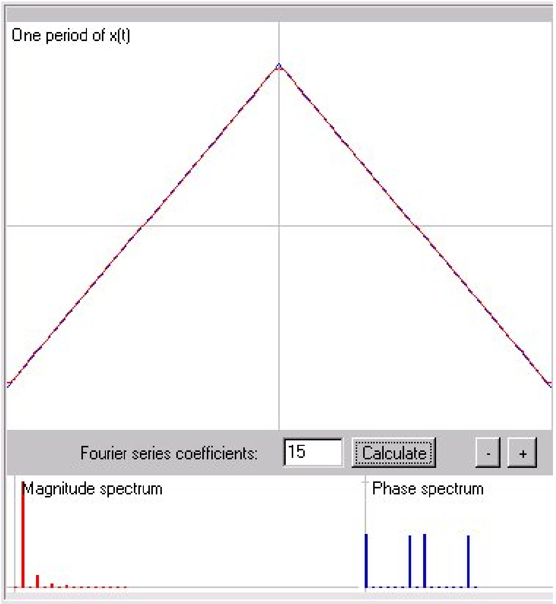



**Figura 12: 15 armónicos de un pulso triangular**

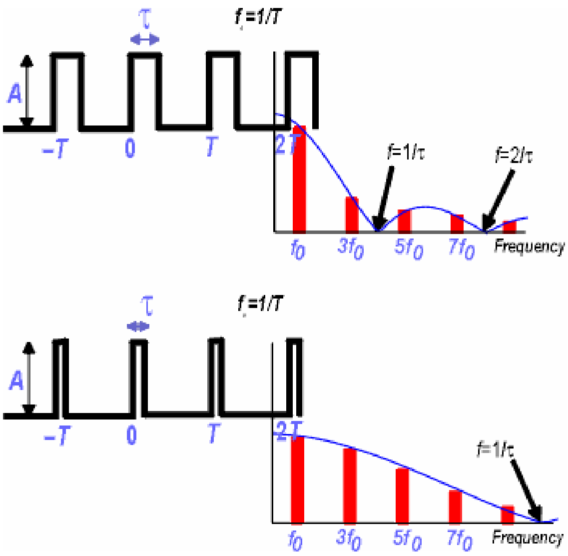



**Figura 13**

La forma de la señal no es el único factor que influye cuando se determina la amplitud de las componentes frecuenciales de la serie de Fourier. El ancho de los pulsos juega un papel muy importante.

Como se puede apreciar en la figura de la izquierda, si disminuimos el ancho del pulso, pero mantenemos constante el periodo de repetición, se obtiene como resultado un aumento en la amplitud de los armónicos de altas frecuencias.

La energía de la señal también ha disminuido.

En el límite, a medida que el pulso tiende a cero, es decir, la función delta, se puede esperar que la amplitud de cada armónico se aproxime a un valor constante.

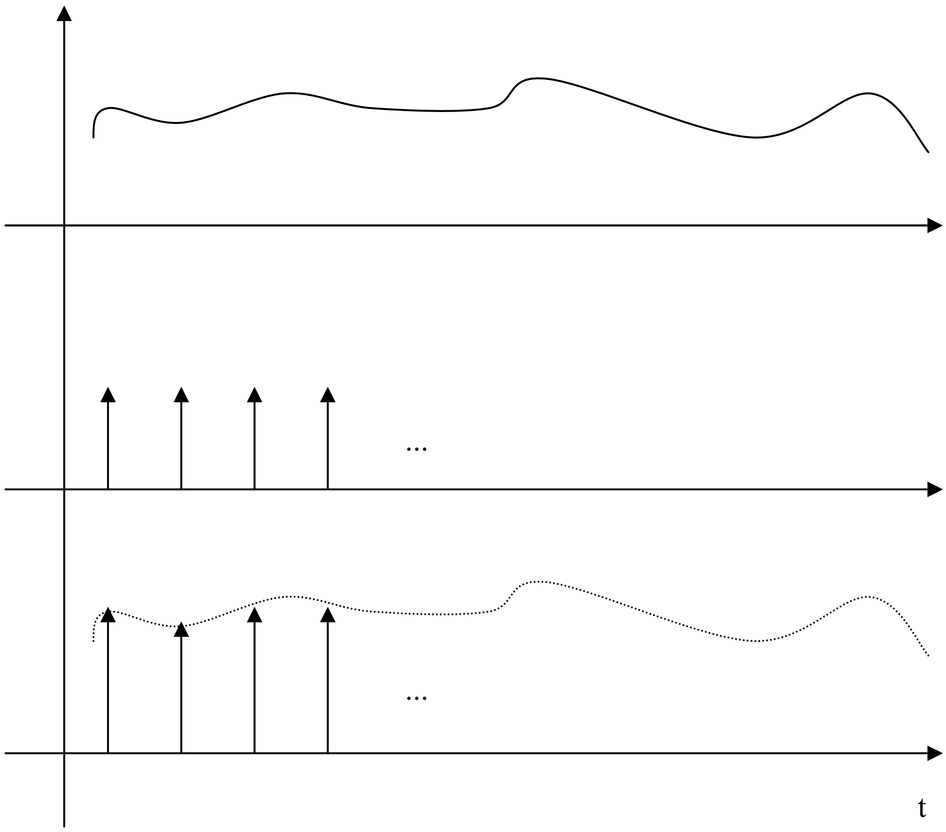
## 5. Señales muestreadas. Teorema de muestreo de Nyquist

## 5.1. Señales muestreadas. Muestreo mediante un tren de Impulsos Periódicos

En el tema anterior se presentó la diferencia entre señales analógicas, muestreadas y digitales.

Una señal discreta es una señal que no es continua en el tiempo, es decir, que sólo toma valores en determinados instantes de tiempo. Cuando la señal discreta es analógica, sus valores en cualquier instante de tiempo están definidos dentro de un continuo posible de valores. Estas señales son las que denominamos analógicas muestreadas. La conversión de una señal continua en una señal analógica se hace mediante el muestreo.

**Figura 14 : Ejemplo de muestreo**




**Def. Muestreo**

Es la representación de una señal continua u(t) por sus valores u(nT) tomados en los múltiplos enteros de un intervalo temporal T (periodo de muestreo).

El muestreo puede ser periódico o no periódico. Nosotros sólo nos vamos a ocupar del muestreo periódico de una señal.

## 5.2. Teorema de muestreo

Mediante el muestreo obtenemos la representación de una señal continua en el tiempo en determinados instantes de tiempo que son múltiplos enteros de un intervalo temporal T (período de muestreo).

La señal muestreada debe transmitir la misma información que la señal analógica. La señal muestreada sólo posee toda la información de la continua cuando se aplica correactamente el teorema de muestreo.

El muestreo lo realizaremos mediante un tren de impulsos unitarios:

$$g_s(t) = g(t)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t - n \cdot T_s)$$

donde $T_s$ es el periodo de muestreo.

En la Figura 14 se muestran los diferentes pasos para muestrear una señal. Esta señal todavía no es digital, corresponde a una señal analógica muestreada.

## 5.3. Teorema de muestreo. Frecuencia de muestreo de Nyquist

**Teorema**: Si la transformada de Fourier de una función es cero para $f>f_m$ y los valores de la función son conocidos para $t=nT_s$ ($\forall n\in Z$), entonces la función se conoce exactamente para todos los valores de t.

Lo que ahora es necesario es fijar un valor para el periodo de muestreo y por lo tanto para la frecuencia de muestreo.

La frecuencia de muestreo $f_s$ debe ser superior a $f_m$, es decir, al doble de la frecuencia máxima de la señal.

**Frecuencia de Nyquist:**

$$T_s < \frac{1}{2f_m}$$

$$\frac{1}{T_s} > 2f_m$$

$$f_s > 2f_m$$

Existe un límite inferior en la frecuencia de muestreo, pero no uno superior. Se trata de utilizar un valor suficiente para reconstruir la señal.

En los ejemplos de la Figura 15 se muestra una señal seno, que se muestrea con diferentes valores del periodo de muestreo. Analicemos lo que sucede. Se trata de una señal seno de periodo de repetición 0.5, o lo que es lo mismo, su ecuación es:

$$y(t) = sin(2\pi 2t)$$

si esta señal la pasamos al dominio de la frecuencia tendremos:

$$Y(f) = \frac{1}{2}(\delta(f-2) + \delta(f+2))$$

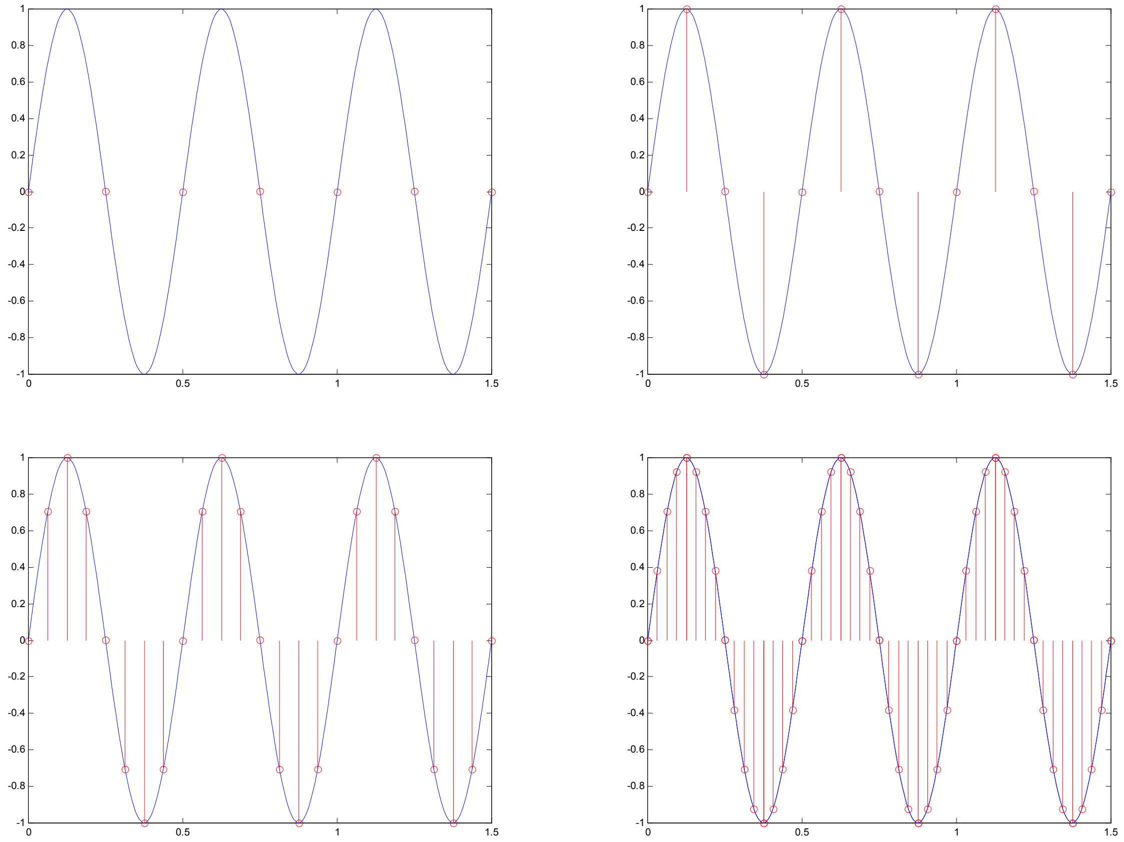


**Figura 15: Señal seno muestreada a diferentes valores**

es decir, dos deltas de Dirac de altura 0.5 en las frecuencias 2 y -2.

| | |
|---|---|
| a | b |
| c | d |

Si aplicamos el teorema de muestreo de Nyquist, tenemos que la frecuencia de muestreo debe ser **MAYOR** que el doble de la máxima frecuencia presente en la señal. En nuestro ejemplo, la máxima frecuencia es 2 Hz. así que deberemos muestrear a frecuencias mayores de 4 Hz, o llevado al dominio temporal, el periodo de muestreo debe ser **MENOR** que 1/4=0.25 segundos.

La gráfica a) corresponde al seno muestreado cada 0.25 segundos (4 Hz). El resultado del muestreo son los círculos rojos sobre el eje: como se muestrea justo a la frecuencia de Nyquist, no obtenemos buenos resultados.

En la gráfica b) se ha muestreado a 8 Hz (0.125 seg). Ahora estamos muestreando al doble de la frecuencia de Nyquist. Los resultados son mejores, pero todavía podríamos mejorarlos más (gráficas c) y d)).

La pregunta es: ¿qué frecuencia de muestreo utilizar?, cuanto mayor sea la frecuencia de muestreo mejores serán los resultados, pero más tiempo tardaremos. Se trata de escoger un valor adecuado que nos permita recuperar adecuadamente la señal.

Formalicemos un poco lo visto. Ya sabemos obtener de forma gráfica la señal muestreada en el dominio del tiempo. Veamos la ecuación que nos da la señal muestreada:

$$g_{T_s}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g(n \cdot T_s) \cdot \delta(t - n \cdot T_s)$$

es decir, la señal muestreada en el dominio temporal queda representada por deltas de Dirac separadas $T_s$ unidades temporales y de altura igual a lo que vale nuestra señal en ese punto.

## 5.4. Señal muestreada en el dominio de la frecuencia

Utilizamos el dominio de la frecuencia para calcular la frecuencia a la que se debe muestrear ( $f_s$[3]), después calculamos el inverso de la frecuencia de muestreo y obtenemos el periodo de muestreo $T_s = \dfrac{1}{f_s}$ y es en el dominio del tiempo donde calculamos la señal muestreada.

Una pregunta que nos podemos hacer es ¿qué relación hay entre el espectro de magnitud $|G(f)|$ de la señal original g(t) y el espectro de magnitud $|G_{Ts}(f)|$ de la señal muestreada $g_{Ts}(t)$.

Se cumple que:

$$G_{T_s}(f) = f_s \sum_{n=-\infty}^{\infty} G(f - n \cdot f_s)$$

La demostración es bastante sencilla, pero no vamos a verla.

Si en la expresión anterior calculamos el módulo:

$$\left|G_{T_s}(f)\right| = f_s \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left|G(f - n \cdot f_s)\right|$$

lo que nos queda es que el espectro de magnitud de la señal muestreada, es el espectro de magnitud de la señal sin muestrear, repetido en todos los múltiplos de la frecuencia de muestreo.

[3] La ***s*** de los subíndices viene de 'sampling' palabra inglesa que significa muestreo.

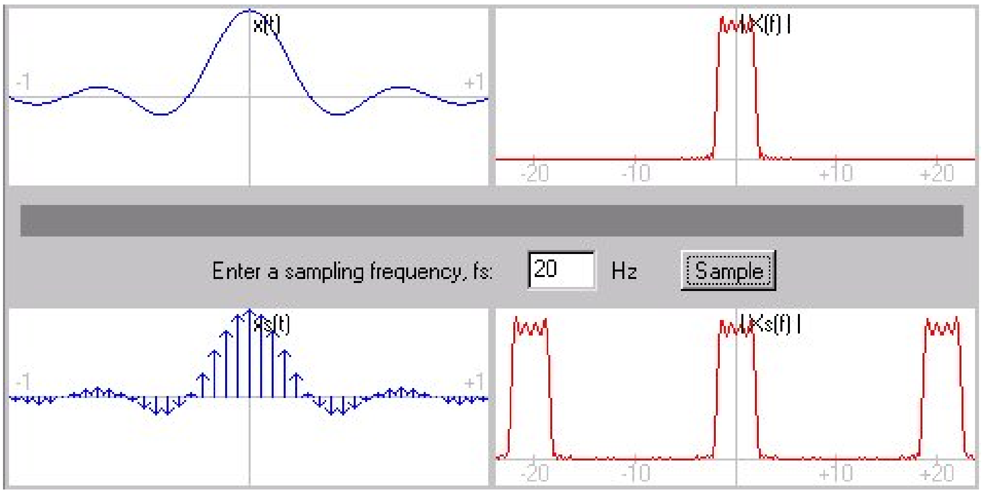



**Figura 16 : Pulso sinc muestreado a 1/20 segundos**

| | |
|---|---|
| a | b |
| c | d |

En la gráfica a de la Figura 16 se muestra un pulso sinc, en la b se muestra su espectro de magnitud (como no se considera todo el eje temporal sino sólo lo que se muestra en la figura por eso no se obtiene el pulso rectangular perfecto).

En la gráfica c de la Figura 16 se muestra la señal muestreada en el dominio del tiempo y en la d, el espectro de magnitud de la señal muestreada: en las frecuencias múltiplo de la frecuencia de muestreo (20 Hz en el ejemplo) se repite el espectro de magnitud de la señal original (la señal sin muestrear).

## 5.5. Efectos de la mala elección de la frecuencia de muestreo

En el apartado 5.3 vimos como al aumentar la frecuencia de muestreo, la señal muestreada cada vez se aproxima más a la real.

El efecto más importante por la mala elección del periodo de muestreo es el **aliasing** y donde mejor se observa es en el dominio de la frecuencia.

En el ejemplo de la de la Figura 16, cuando observamos el espectro de magnitud de la señal muestreada, distinguimos claramente todos los pulsos rectangulares: estamos en una situación en la que no hay aliasing.

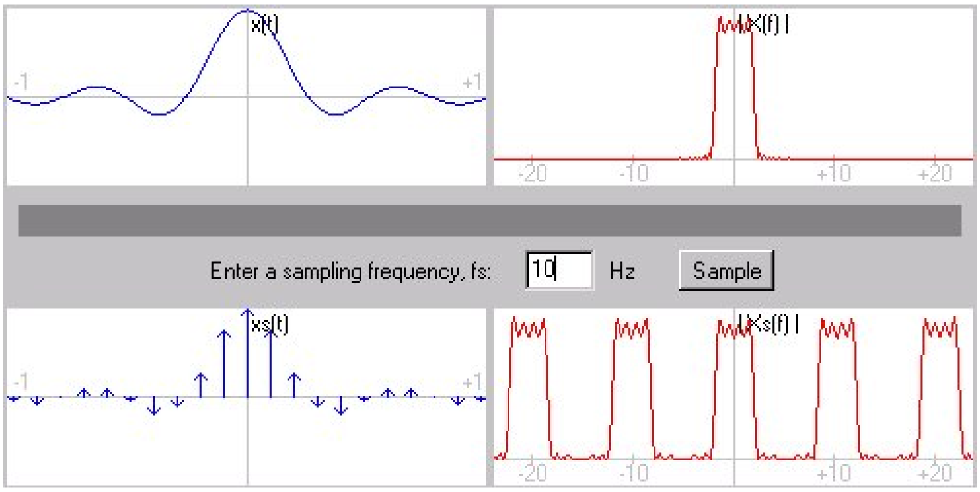



**Figura 17: Señal sinc muestreada a 1/10 segundos**

En la Figura 17 se muestrea la misma señal, pero ahora a 10 Hz., así que los pulsos rectangulares del espectro de magnitud nos quedan más próximos los unos a los otros, pero podemos distinguirlos.

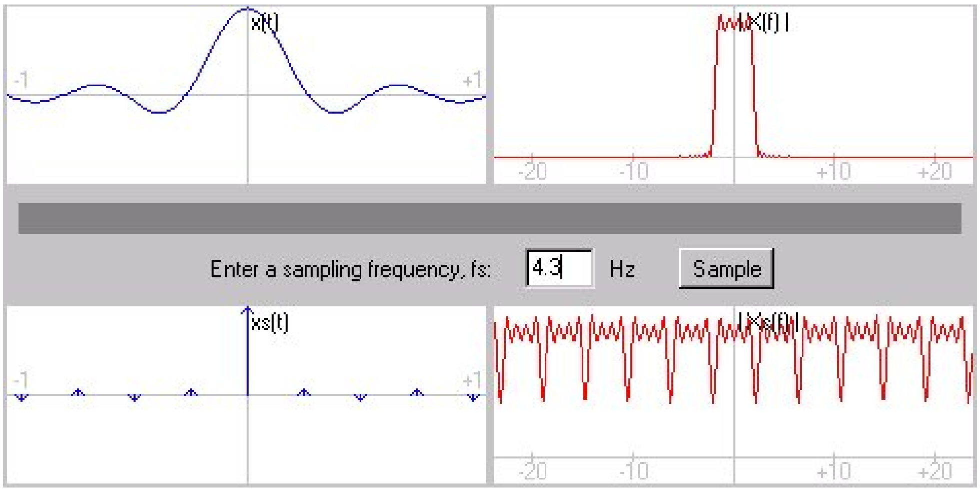



**Figura 18: Señal sinc muestreada a 1/4.3 segundos**

Si muestreamos la misma señal (Figura 18) ahora ya no podemos distinguir claramente los pulsos rectangulares: se solapan unos con otros: esto es lo que se conoce como aliasing. Cuando no es posible reconocer el espectro de magnitud de la señal sin muestrear, se dice que tenemos aliasing. Este es un efecto no deseable porque cuando se produce no podemos recuperar adecuadamente la señal de la que se parte.

Un caso extremo de aliasing es el de la Figura 19. Aquí el solapamiento de todos los pulsos es tal que al sumarlos lo que nos queda es una línea constante.

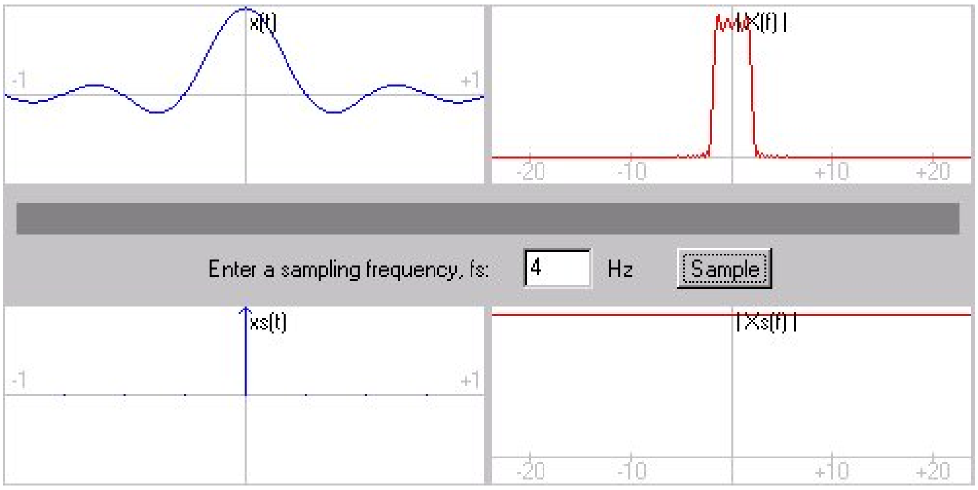



**Figura 19: Señal sinc muestreada a 0.25 segundos**

## 5.6. Recuperación de la señal en el receptor

El muestreo de señales se realiza siempre que se quiere transmitir una señal analógica a través de un medio digital. Después de muestrearla se cuantiza para transformarla en digital, pero de momento esto no nos preocupa. La señal muestreada (cuantizada) es la que se va a transmitir por la línea de comunicaciones y el receptor a partir de la señal muestreada debe reconstruir la señal analógica. Si se ha producido un efecto de aliasing, esta reconstrucción no va a ser posible.

Hemos visto en los apartados anteriores que el espectro de magnitud de la señal muestreada, es el espectro de magnitud de la señal original repetido en los múltiplos enteros de la frecuencia de muestreo. El receptor para recuperar la señal original lo único que necesita hacer es aplicar un filtro (ya sé que todavía no los hemos estudiado y que lo haremos en el apartado siguiente ☺) que le permita quedarse sólo con el espectro de magnitud original.

De forma simplificada un filtro lo podemos definir como un sistema lineal tal que su espectro de magnitud es un pulso rectangular que se extiende desde $-f_{corte}$ hasta $f_{corte}$. El valor de la frecuencia de corte (cut-off frequency) hará que nos quedemos con más o menos señal. Entonces se multiplica el filtro por la señal muestreada y el resultado nos permite recuperar nuestra señal sin muestrear.

Veamos en un ejemplo la recuperación de la señal en el receptor.

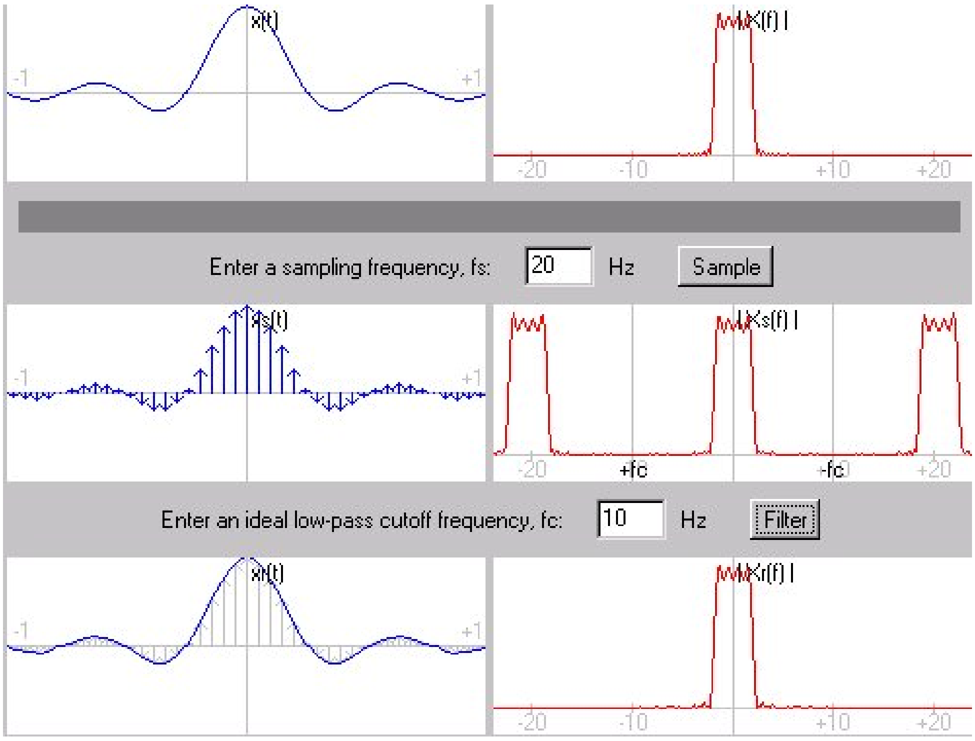



**Figura 20: Recuperación de la señal muestreada a 1/20 seg.**

Seguimos trabajando con la señal sinc (Figura 20). Tomamos la que muestreamos a 20 Hz. Para recuperarla en el receptor aplicamos un filtro con una frecuencia de corte de 10 Hz., eso supone que todo lo que está a la derecha de 10 Hz. y a la izquierda de -10 Hz. se descarta (es lo que nos indican las dos líneas verticales de la gráfica d). Entonces el espectro de magnitud que nos queda es el de la figura f y calculando la antitransformada de Fourier obtenemos la señal de la figura e: la señal sinc.

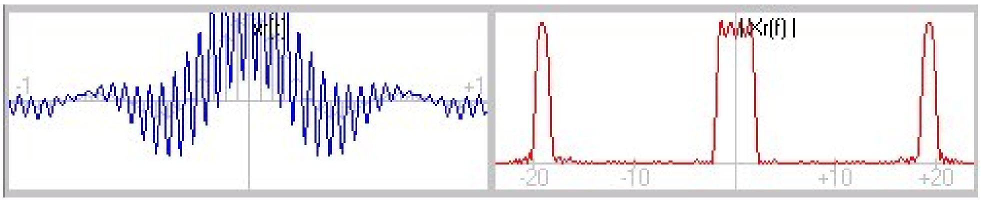



**Figura 21: Frecuencia de corte de 20 Hz.**

La frecuencia de corte debe escogerse para quedarnos sólo con la parte que nos interesa del espectro de magnitud de la señal muestreada. En la Figura 21 se ha escogido la frecuencia de corte igual a 20 Hz, así que no sólo nos quedamos con el pulso rectangular del origen, sino con la mitad de los pulsos colocados en 20 y -20 Hz. Así que la señal que se recupera no es la original.

### 5.6.1. Efectos del aliasing en la recuperación de una señal

Si se produce aliasing, sea cual sea la frecuencia de corte que escojamos en el filtro, no podemos garantizar la correcta recuperación de la señal (Figura 22).

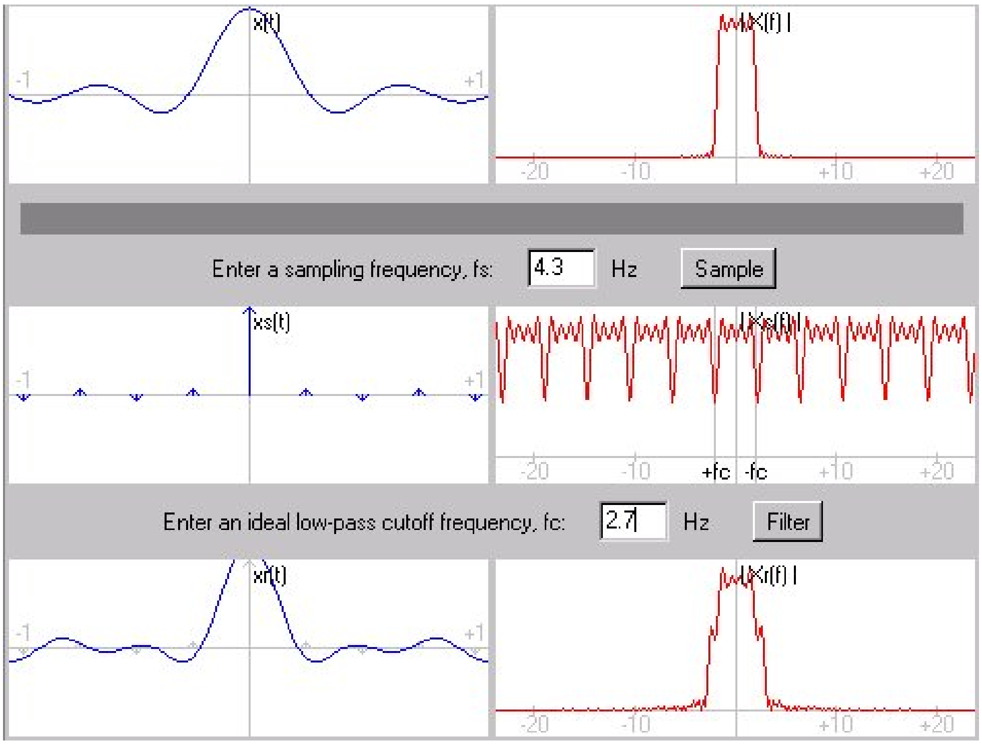



**Figura 22: Señal con aliasing**

***Muestreo de señales no limitadas en banda***

Sólo podemos muestrear señales que sean limitadas en banda, si nuestra señal no lo es, lo primero que debemos hacer antes de muestrearla es pasarla a través de un filtro.

# 6. Filtros

Un ***filtro*** es un dispositivo que se utiliza para limitar el espectro de una señal a una determinada banda de frecuencias.

Los filtros nos van a permitir eliminar frecuencias no deseadas en la señal. ¿Cuándo es esto útil?. Por ejemplo, cuando tenemos una señal que no es limitada en banda para que podamos muestrearla en primer lugar deberemos asegurarnos de que es limitada en banda. Otra utilidad es para eliminar ruido.

La respuesta en frecuencia de un filtro se caracteriza por una **banda de paso** (passband) y una **banda de stop o rechazo** (stopband). Las frecuencias que están dentro de la banda de paso se transmiten (con muy poca o nula distorsión en el caso ideal) y las que están fuera no.

Los filtros pueden ser:

1) **LOWPASS o PASA-BAJA**: dejan pasar las bajas frecuencias.
2) **HIGHPASS o PASA-ALTA**: dejan pasar las altas frecuencias.
3) **BANDPASS o PASA-BANDA**: dejan pasar las frecuencias intermedias.
4) **STOPPASS o PASA-STOP:** dejan pasar todas las frecuencias excepto las intermedias.

**NOTAS**:

- todos los filtros tienen una representación tanto en el dominio del tiempo como en el dominio de la frecuencia
- cuando hablamos de filtrar una señal, lo que hacemos es quedarnos con las frecuencias que nos interesen y eso lo hacemos en el dominio de la frecuencia.
- La señal filtrada podemos verla tanto en el dominio temporal como en el dominio de la frecuencia.

En primer lugar vamos a ver la definición de los filtros ideales, y después veremos una aproximación al diseño real de filtros.

Cuando se habla de filtros ideales lo que hacemos es definir unas caracterísiticas que sólo los filtros diseñados sobre el papel cumplen, no hay filtros que se comporten así en la realidad. Un filtro ideal se define de tal forma que no introduzca ningún tipo de distorsión en la señal (ni de amplitud, ni de fase) , pero no existe ningún filtro real que lo cumpla.

## 6.1. Filtros ideales

### 6.1.1. Filtro Pasabaja ideal

Un filtro pasabaja ideal tiene el siguiente espectro de frecuencias:

$$H(f) = \begin{cases} A \cdot e^{-j2\pi f t_0}, |f| \le f_m \\ 0, |f| > f_m \end{cases}$$

donde $f_m$ es la frecuencia de corte, es la máxima frecuencia que el filtro deja pasar.
El espectro de magnitud y fase corresponden a:

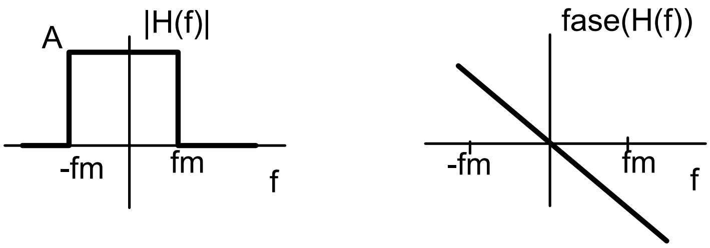



**Figura 23: Espectro de magnitud y de fase de un filtro pasabaja**

La respuesta impulsional del filtro la obtenemos como la antitransformada de la función de transferencia:

$$
\begin{aligned}
h(t) &= \int_{-f_m}^{f_m} A \cdot e^{-j2\pi f_m t_0} \cdot e^{j2\pi ft} dt \\
&= A \frac{\sin\left(2\pi f_m (t - t_0)\right)}{\pi (t - t_0)} \\
&= 2Af_m \mathrm{sinc}\left(2f_m (t - t_0)\right)
\end{aligned}
$$

El retardo $t_0$ es proporcional a la pendiente de la recta que nos define el espectro de fase. La frecuencia de corte es proporcional al valor máximo de h(t) e inversamente proporcional al espacio entre los cruces de la función con el eje horizontal. Es decir, ***a medida que*** $f_m$ ***aumenta, el máximo de h(t) aumenta y el ancho del pulso disminuye --> la respuesta en el tiempo se hace más alta y estrecha***.

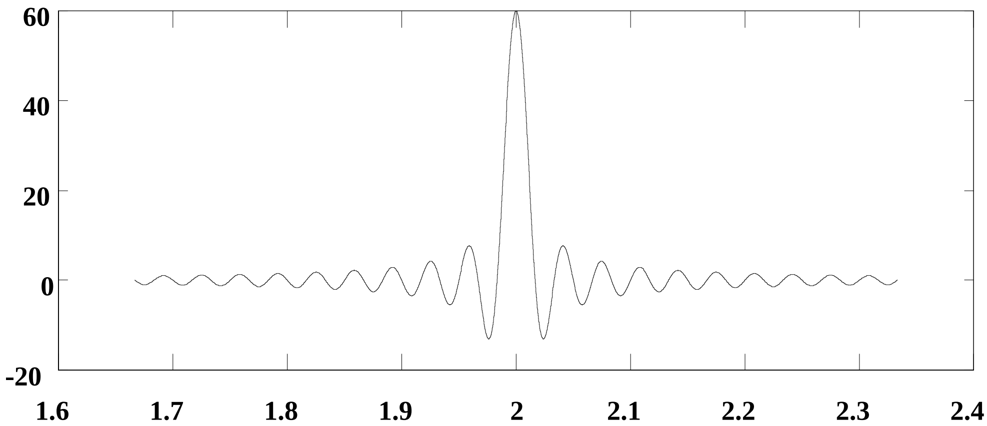



**Figura 24: Respuesta impulsional de un filtro pasabaja**

### 5.1.2. Filtro pasabanda ideal

Un **filtro pasabanda ideal** deja pasar todas las frecuencias comprendidas en el intervalo $\left[f_l, f_h\right]$. La función de transferencia H(f) es:

$$
H(f) = \begin{cases} A \cdot e^{-j2\pi f t_0}, f_l < |f| < f_h \\ \quad 0, \text{fuera} \end{cases}
$$

El espectro de magnitud y de fase aparecen en la :

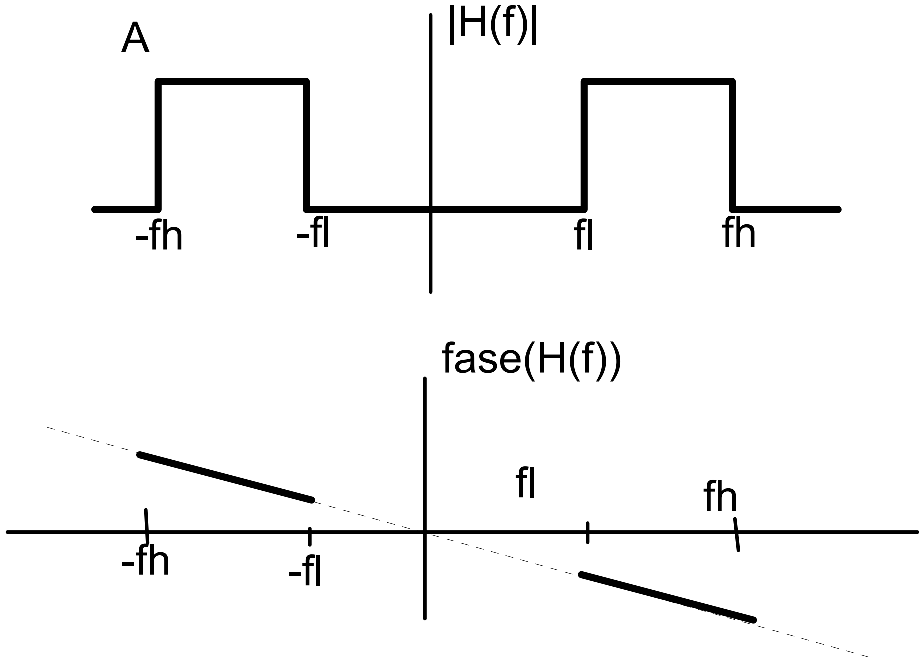



**Figura 25 : Espectro de magnitud y fase de un filtro pasabanda**

Esta función de transferencia podemos expresarla a partir de la función de transferencia de un filtro pasa baja al que se le aplica el teorema de desplazamiento en frecuencia:

$$H(f) = H_{lp}\left(f - \frac{f_l + f_h}{2}\right) + H_{lp}\left(f + \frac{f_l + f_h}{2}\right)$$

Realizando las operaciones adecuadas se llega a que la respuesta impulsional de un filtro pasa banda es:

$$h(t) = \frac{2 \cdot A \cdot \sin[\pi(f_h - f_l)(t - t_0)]\cos[\pi(f_h + f_l)(t - t_0)]}{\pi(t - t_0)}$$ [4]

La gráfica de esta función es:

[4] Las ecuaciones en el dominio temporal de los filtros pasabaja y pasabanda ideales no son materia de examen. Debéis saber filtrar señales, pero en el dominio de la frecuencia.

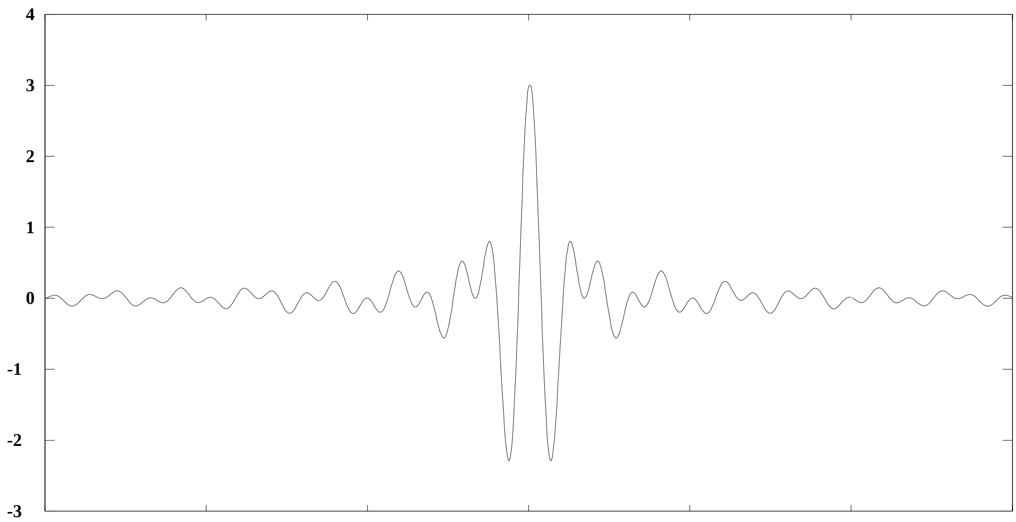



**Figura 26: Respuesta impulsional de un filtro pasabanda**

### 5.1.2. Filtro pasaalta ideal

Un **filtro pasaalta ideal** desde el punto de vista conceptual es exactamente igual que uno pasabanda. La diferencia estriba en el rango de frecuencias que permite que pasen. La realización física es la que es más complicada, pero en un filtro ideal eso no nos importa demasiado ☺.

## 5.2. Introducción al diseño de filtros

Los filtros se dividen en dos grandes familias:

1. Filtros analógicos. Sirven para filtrarseñales analógicas.Son el paso inicial en cualquier sistema de comunicaciones digital cuando se transmite una señal analógica o siempre que sea necesario limitar en banda una señal analógica. Un ejemplo de los dos casos mencionados lo tenemos en los sistemas de telefonía. Es posible obtener una representación digital de filtros diseñados mediante técnicas analógicas, son los filtros IIR (Infinite Impulse Response).
2. Filtros digitales. Estos filtros se aplican a señales digitales o a señales muestreadas. También se pueden aplicar a señales analógicas limitadas en banda (esto supone un 'pequeño truco' como es el uso de un conversor analógico digital. Suponen el uso de técnicas de computación. Los más típicos son los FIR (Finite Impulse Response).

El diseño de filtros puede realizarse de formas muy diversas: dado un conjunto de especificaciones no hay una solución única al problema. Las tres aproximaciones más utilizadas son:

1. Aproximación analógica: se diseñan filtros analógicos.
2. Aproximación analógica a digital: se trata de diseñar un filtro digital, a partir de uno analógico.
3. Aproximación digital directa: diseño de filtros digitales.

### 6.2.1. Filtros analógicos

Los filtros ideales se caracterizan porque permiten pasar todas las componentes dentro de la banda de paso (*passband*), sin ningún tipo de distorsión y rechaza todas las frecuencias de la banda de paro o rechazo (*stopband*). Además la transición de la banda de paso a la de rechazo es brusca. Como resultado estos filtros no son implementables. Así que en la práctica tendremos que relajar un poco las condiciones, lo que supondrá que vamos a tener un poco de distorsión.

Vamos a definir tres bandas:

1. Banda de paso (bandpass). Dentro de esta banda, el espectro de magnitud del filtro debe tener todos sus valores en la banda de 1 a 1-ε:

$$1-\varepsilon \le |H(f)| \le 1, \qquad para \quad 0 \le |f| \le f_p$$

   donde ε es un parámetro de tolerancia y $f_s = f_{corte}$ es la frecuencia de corte del filtro.

2. Banda de rechazo (stopband).El espectro de magnitud no debe exceder del valor δ (otro parámetro de tolerancia):

$$|H(f)| \le \delta, \qquad para \quad |f| \ge f_s = f_{rechazo}$$

3. Banda de transición (transition band). Tiene un ancho finito e igual a la diferencia

$$f_p - f_s$$

La Figura 27 resume los tres puntos anteriores.

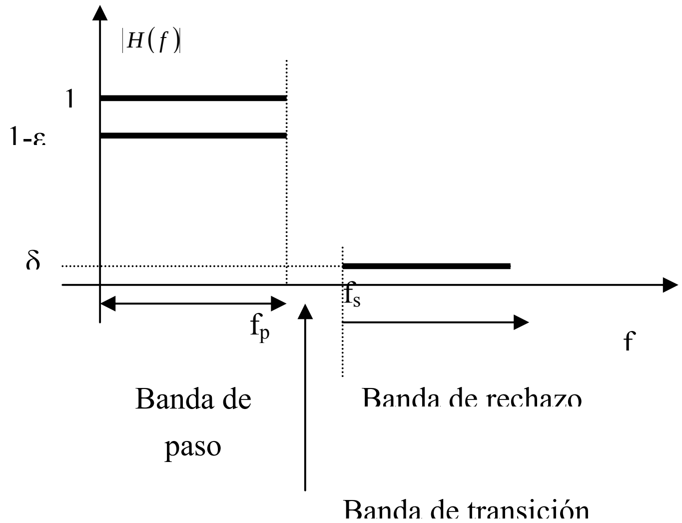



**Figura 27: Bandas y parámetros de diseño**

Comentario: el parámetro ε, en ocasiones en vez de expresarlo con un valor entre 0 y 1, se pasa a decibelios. En VisSim, se puede introducir de cualquiera de las dos formas y automáticamente se expresa en la otra.

### 6.2.2. Etapas en el diseño de los filtros analógicos

El diseño de los filtros analógicos no ideales (reales) se hace para filtros pasabaja, y después mediantes fórmulas, se transforman en el tipo de filtro que queramos: pasabanda, pasaalta, ...

El diseño de filtros se hace más en base a las especificaciones de su función de transferencia o respuesta en frecuencia, que a su respuesta impulsional (es decir, su representación en el dominio temporal)

Los pasos que se recomienda seguir en el diseño son:

1. Definir la respuesta del filtro en el dominio de la frecuencia.
2. Encontrar una función de transferencia que implemente la respuesta en frecuencia deseada.

3. Realización práctica mediante un sistema físico de la función de transferencia (por ejemplo, mediante un circuito: resistencias, condensadores, amplificadores operacionales, ...).

### 6.2.3. Filtros de Butterworth

Se define la función de Butterworth de orden N como:

$$|H(f)|^2 = \frac{1}{1+\left(\frac{f}{f_c}\right)^{2N}}$$

y el filtro que se diseña utilizando esta función es el que se denomina filtro de Butterworth de orden N. Donde $f_c$ es la frecuencia de corte, entonces se cumple:

$$f_p = f_c\left(\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}\right)^{\frac{1}{2N}},\ f_s = f_c\left(\frac{1-\delta}{\delta}\right)^{\frac{1}{2N}}$$

Las raíces del denominador cumplen que están colocadas uniformemente distribuídas sobre un cículo de radio $f_c$. Estas raíces se llaman polos.

Las funciones de Butterworth son monótonas tanto en la banda de paso como en la banda de rechazo.

En los filtros de Chebyshev se cumple siempre que la magnitud del filtro está entre 1 y 1-$\varepsilon$, dentro de la banda de paso, además como el comportamiento es monótono, estaremos más cerca de 1 para las frecuencias próximas a 0.

Veamos algunos ejemplos en las figuras de la páginasiguiente(Figura 28, Figura 29, Figura 30).

Cuanto mayor sea el orden del filtro mejor será la aproximación que obtengamos en el espectro de magnitud, pero también su complejidad es más alta. Así que se trata de escoger un valor para N que nos dé unos resultados buenos y que no sea demasiado complicado.

A partir de los ejemplos podemos ver que para N=2, la distorsión de fase es pequeña, pero la de magnitud es mayor. Cuando N=8, la distorsión de fase es algo mayor, pero en magnitud se filtran mejor las frecuencias: la banda de transición es menor.

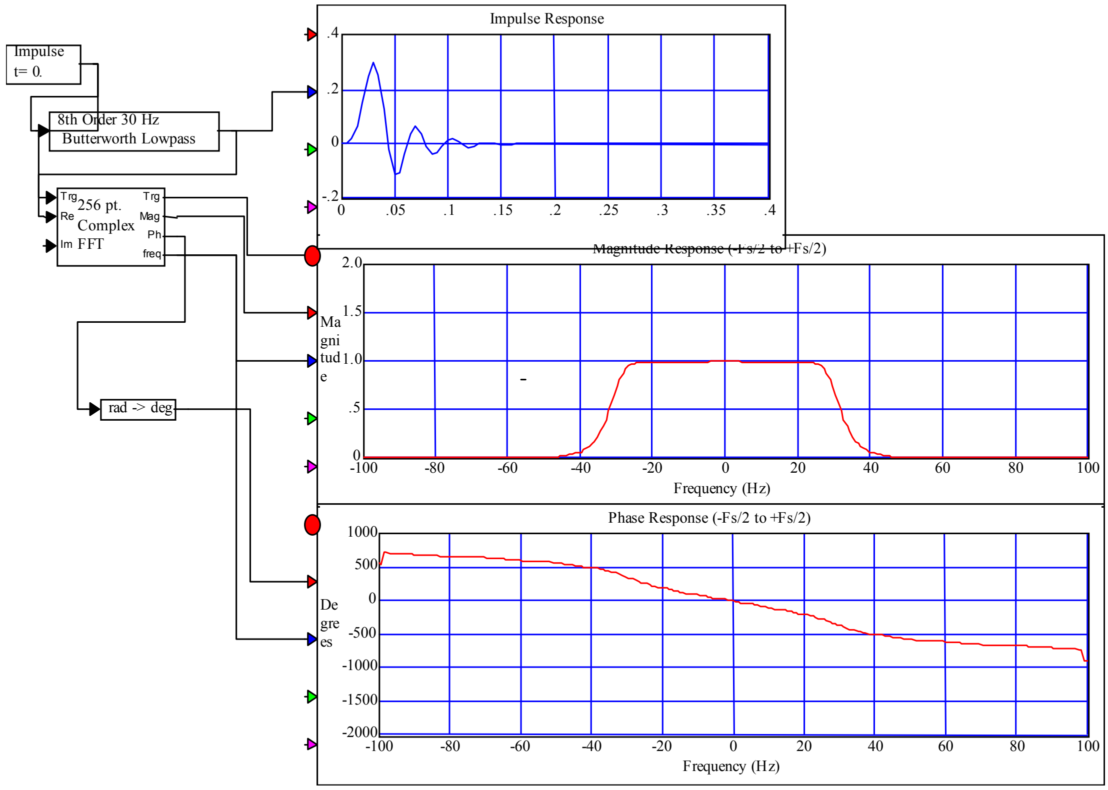



**Figura 28: Filtro de Butterworth de orden 8**

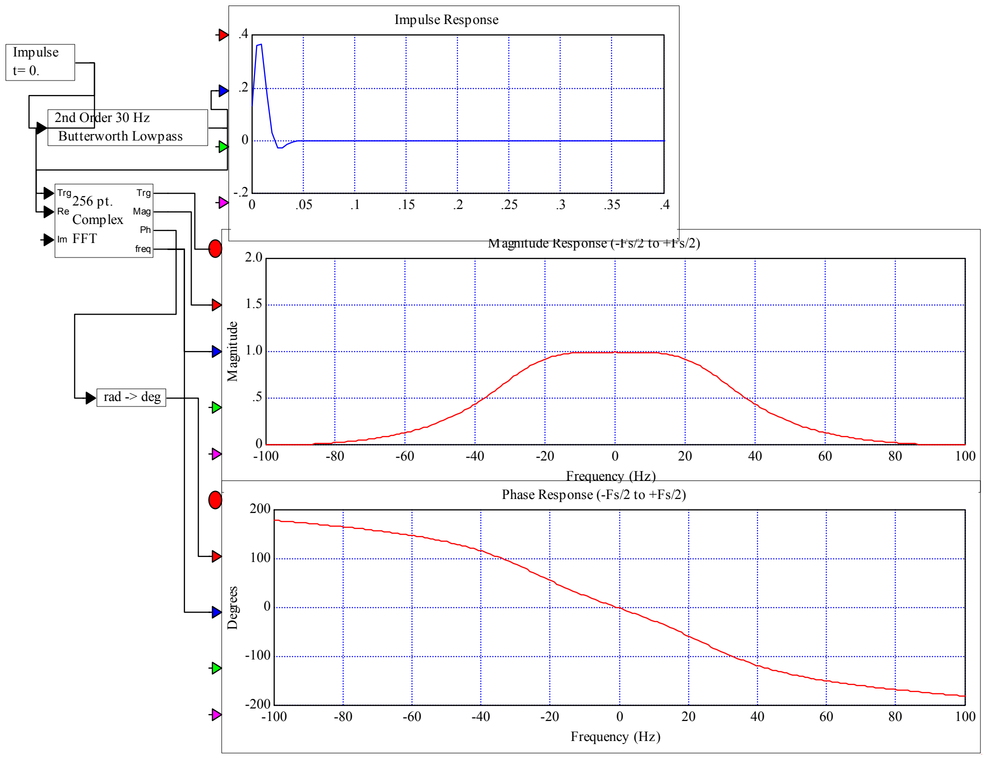



**Figura 29: Filtro de Butterworth de orden 2**

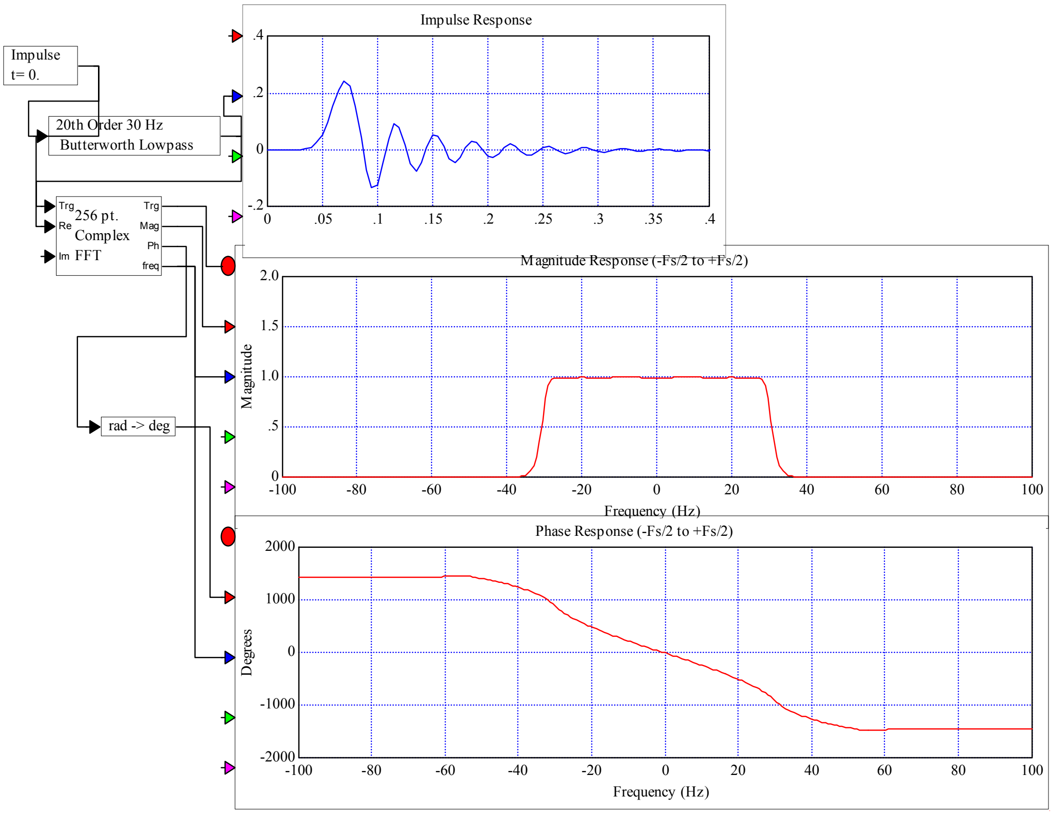



Figura 30: Filtro de Butterworth de orden 20

### 6.2.4. Filtros de Chebyshev Tipo I

Los filtros de Chebyshev se diseñan para lograr que dentro de la banda de paso, la magnitud del filtro oscile uniformemente entre 1 y 1-$\varepsilon$. Esto supone que las raíces del denominador de la función de transferencia van a estar colocadas sobre una elipse. En la banda de rechazo el comportamiento es monótono.

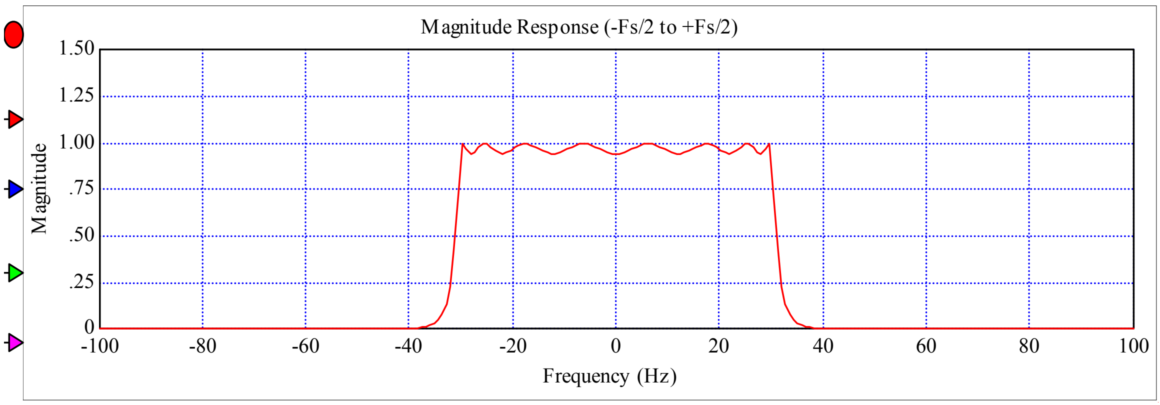



Figura 31: Filtro de Chebyshev tipo I, N=8

### 6.2.5. Filtros de Chebyshev Tipo II

Las raíces del denominador están colocadas sobre el eje imaginario. Ahora el comportamiento monótono se obtiene en la banda de paso y en la de rechazo tenemos un rizado (un valor típico es el de 30 dB).

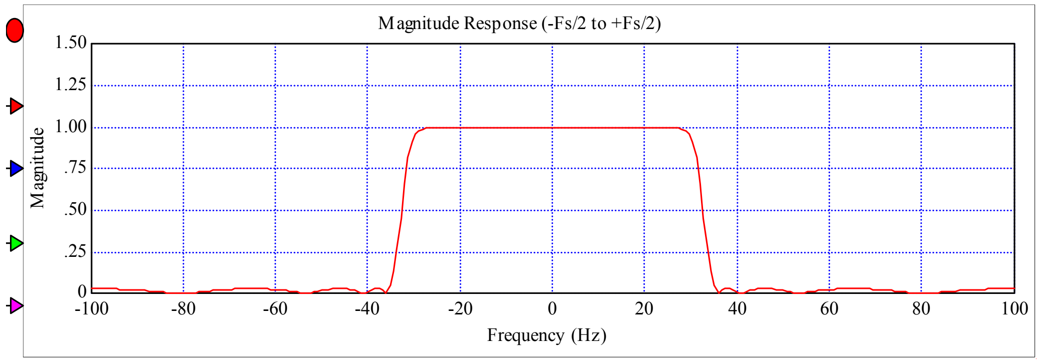



**Figura 32: Filtro de Chebyshev tipo II, N=8**

### 6.2.6. Filtros elípticos

Estos filtros tratan de hacer la banda de transición lo más pequeña posible. Su función de transferencia es más difícil de realizar en la práctica. Tienen rizado tanto en la banda de paso como en la de rechazo.

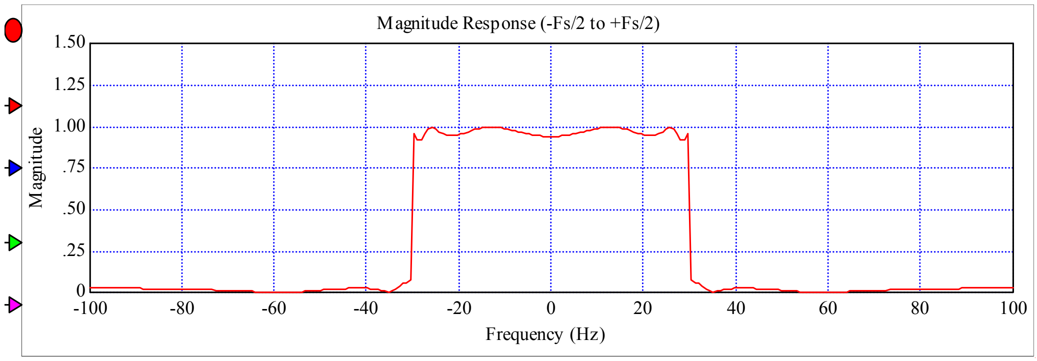



**Figura 33: Filtro elíptico, N=8, con 30 dB en la banda de rechazo**

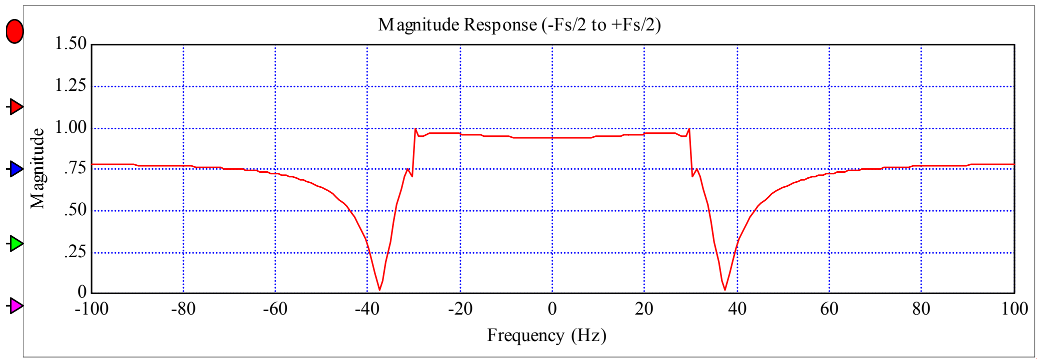



**Figura 34: Filtro elíptico, N=8 con 3 dB de atenuación en la banda de rechazo**

En los filtros de Chebyshev Tipo II y en los elípticos hay otro parámetro que hay que fijar: la atenuación deseada en la banda de rechazo.Este valor se introduce en decibelios: cuanto mayor sea, menor serán las frecuencias que pasen de la banda de rechazo (comparar Figura 33 y Figura 34).

### 6.2.7. Comparación entre los diferentes tipos de filtros analógicos

Como en otros aspectos de la transmisión de datos, la elección del tipo de filtro vendrá determinada por las señales a transmitir y las prioridades que tengamos en esa comunicación. Pero de forma general podemos establecer algunas características:

- Los filtros de Butterworth tienen una banda de transición mayor que los de Chebysev y los elípticos, pero ...
- La distorsión de fase que introducen es menor, lo que los hace adecuados para tratar señales en las que sea importante que la distorsión de fase sea pequeña (Figura 35).
- Los de Chebyshev de tipo I, introducen un rizado en la banda de paso, lo que supone que tendremos distorsión de amplitud en la señal filtrada.
- Los de Chebyshev de tipo II, introducen el rizado en al banda de rechazo, lo que supone que frecuencias no deseadas de la señal van a dejarse pasar a través del filtro.
- La realización práctica de los filtros elípticos es mucho más complicada.
- En general, los más utilizados son los de Butterworth y los de Chebyshev.

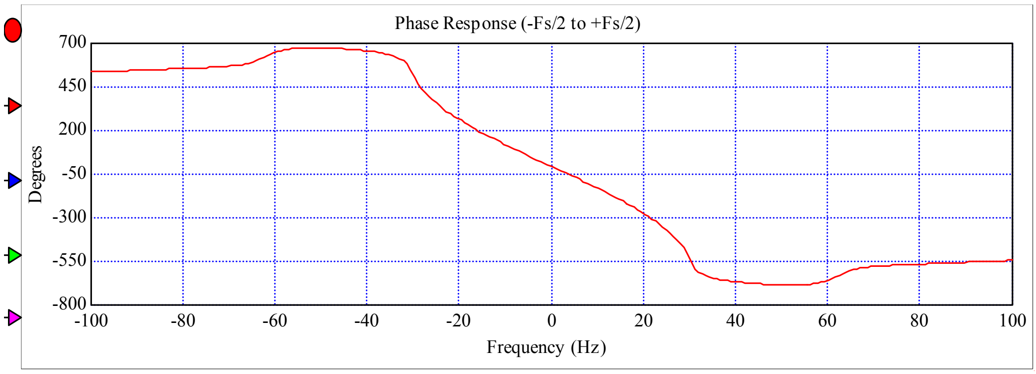



**Figura 35: Espectro de fase de un filtro de Chebyshev de orden 30**

### 6.2.8. Realización de filtros pasaalta

Lo explicado en los apartados anteriores sirve para el diseño de filtros pasabaja, pero ¿qué ocurre cuando lo que queremos es diseñar un filtro pasaalta?.

La transformación es muy sencilla, sólo hay que sustituir en la función de transferencia del filtro pasabaja f por fc/f.

### 6.2.9. Realización de filtros pasabanda

La sustitución ahora es un poco más complicada:

$$\frac{f + f_0^2}{Bf} \text{ por f,}$$

donde **B** es el ancho de banda del filtro pasabanda y $\mathbf{f_0}$ es la frecuencia en la mitad del ancho de banda del filtro (por ejemplo, si queremos un filtro pasabanda de 30 a 60 Hz, B=60-30=30 Hz y $f_0$ es 45 Hz).

### 6.2.10. Filtros pasivos

Una vez que hemos diseñado el filtro tenemos que implementarlo en un circuito.Cuando el circuito sólo incluye elementos pasivos: resistencias, condensadores e inductancias, se habla de filtros pasivos.

Por ejemplo, sólo con un condensador y una resistencia podemos construir un filtro de Butterworth de orden 1.

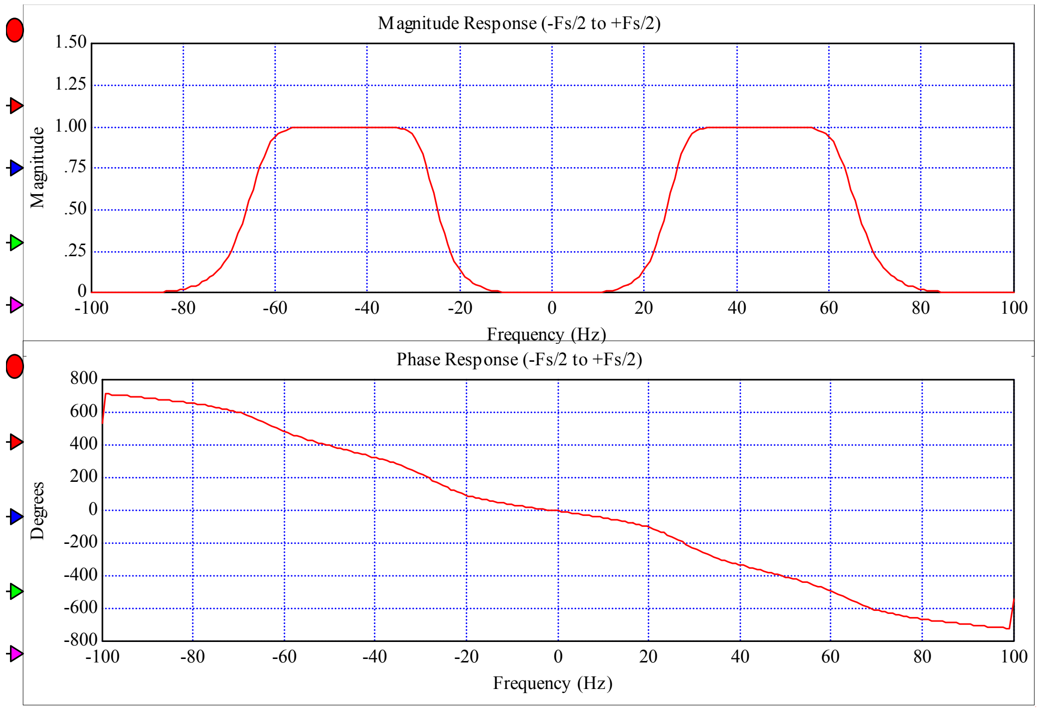



**Figura 36: Filtro de Buttherwoth pasabanda (30 a 60 Hz) de orden 8**

## 6.3. Filtros digitales

Los filtros digitales han supuesto un gran avance en el diseño de este tipo de dispositivos, presentando ventajas sobre los analógicos.

Los dos tipos de filtros digitales más utilizados son los IIR y los FIR.

### 6.3.1. Filtros IIR

Los filtros IIR: Infinite Impulse Response (Respuesta Impulsional Infinita) son la versión digital de los filtros analógicos de los apartados anteriores. Estos filtros se suelen diseñar en analógico y después mediante la transformación bilineal pasarlos a digitales. En VisSim lo que se implementa son los filtros IIR, en vez de la versión analógica directamente.

### 6.3.2. Filtros FIR

Los filtros digitales más habituales son los FIR: Finite Impulse Response (Respuesta impulsional finita).

Las principales características de los FIR es que

1. no introducen distorsión de fase y

2. siempre son estables.

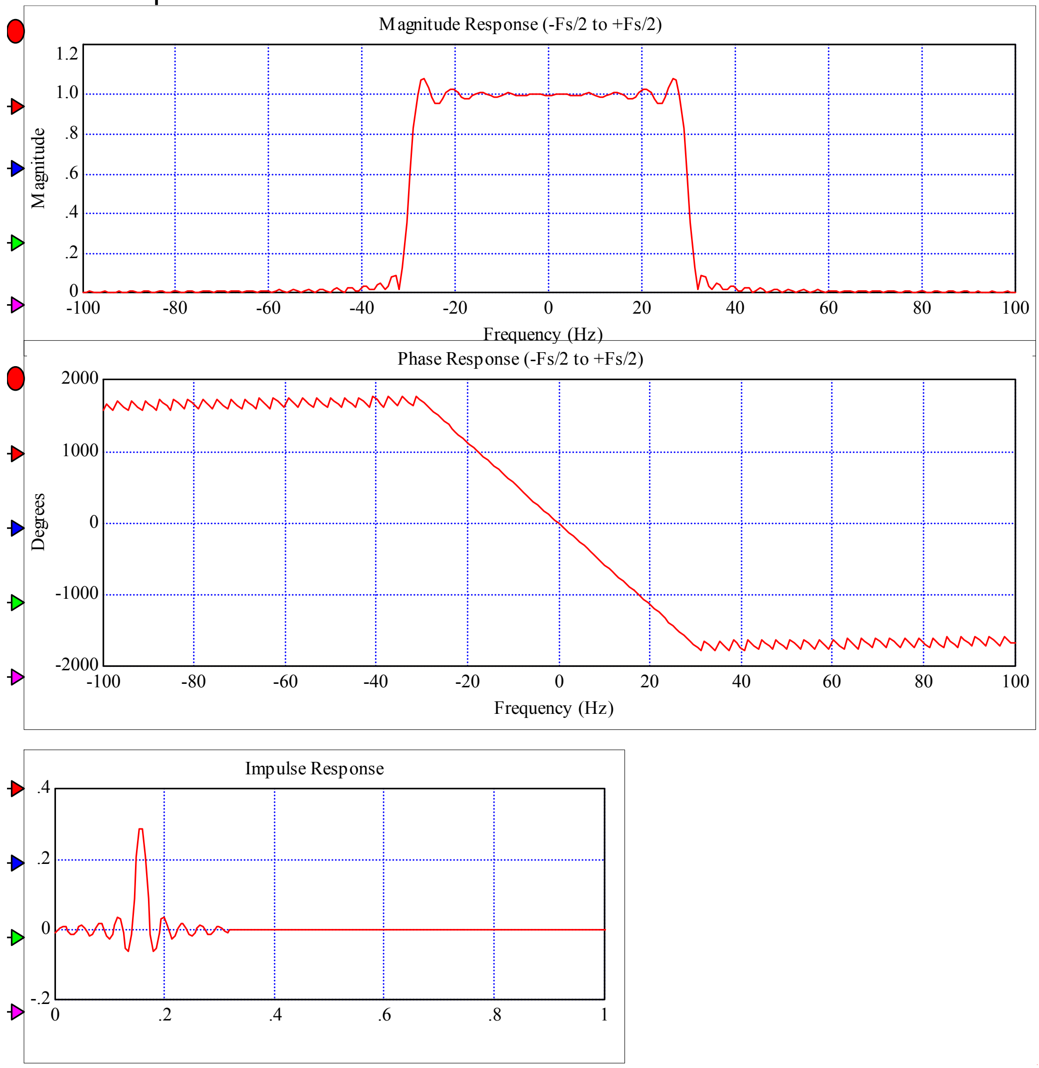



**Figura 37 : Espectro de magnitud, fase y respuesta impulsional de un filtro FIR con ventana rectangular y 64 TAPs**

Para diseñar un filtro FIR se siguen estos pasos:

1. Se decide cómo queremos que sea la respuesta en frecuencia del filtro, es decir, el espectro de magnitud (el de fase, debe ser una línea recta de una determinada pendiente: determina el retraso).

2. Una vez que sabemos cómo queremos que sea esa respuesta, se calcula la antitransformada de Fourier (debe ser la discreta porque es con el tipo de señales que trabajan estos filtros) y de esta forma tenemos la respuesta impulsional del filtro.

3. El siguiente paso es decidir cuántos elementos de la respuesta impulsional vamos a considerar, los valores típicos son las potencias de 2: 32, 64, 128, 256, ... Este valor nos da el orden del filtro (TAP en VisSim) y aquí es necesario introducir el concepto de ventana ...

4. A continuación se aplica una ventana (apartado 6.3.3. ventanas).
5. Esta ventana se aplica en el dominio temporal. El resultado es la respuesta impulsional del filtro FIR que vamos a aplicar.
6. Se calcula la transformada discreta de Fourier para calcular la función de transferencia del filtro.
7. Ya podemos filtrar.

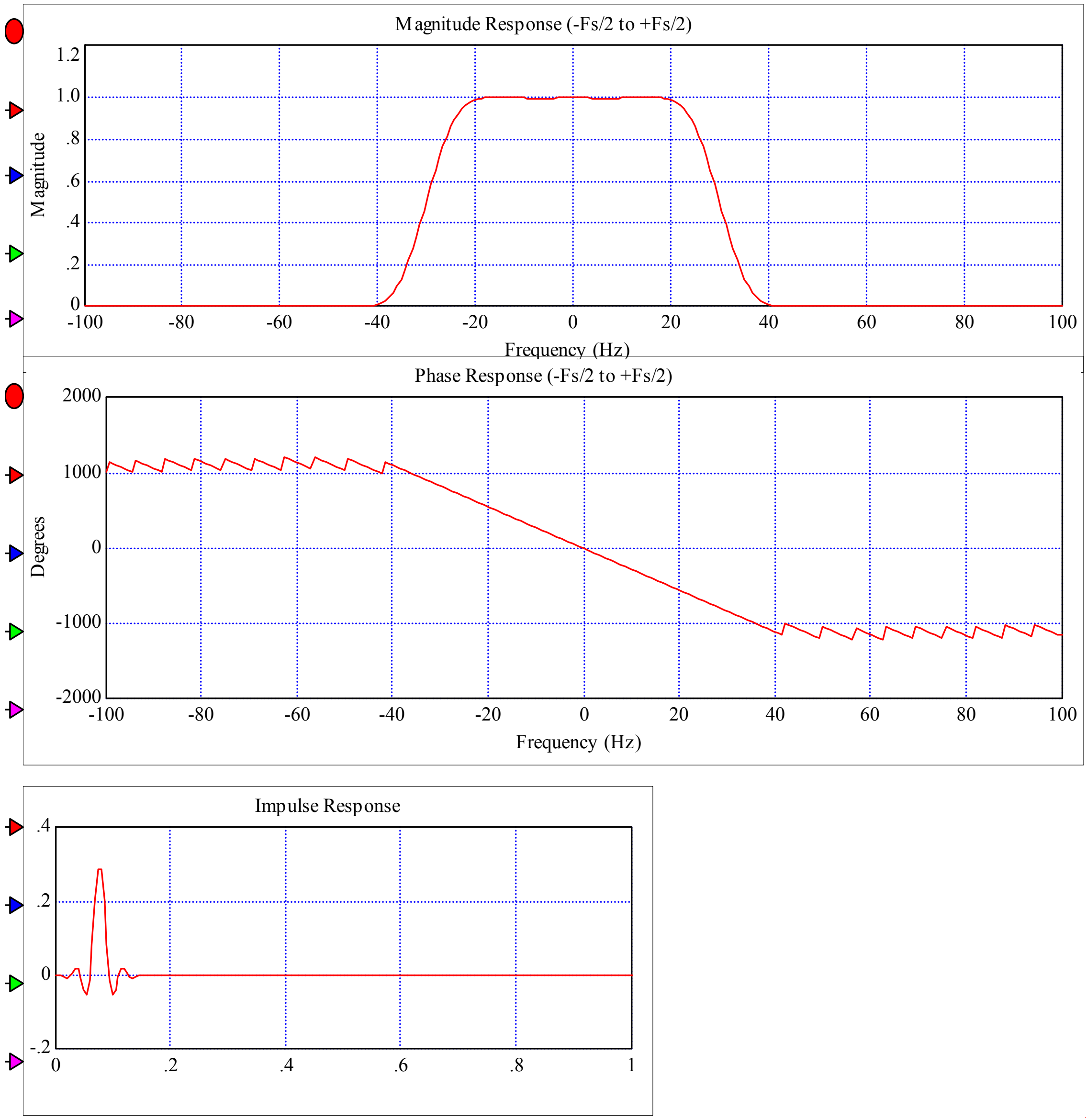



**Figura 38 : Espectro de magnitud, fase y respuesta impulsional de un filtro FIR con ventana Hamming y 32 TAPs**

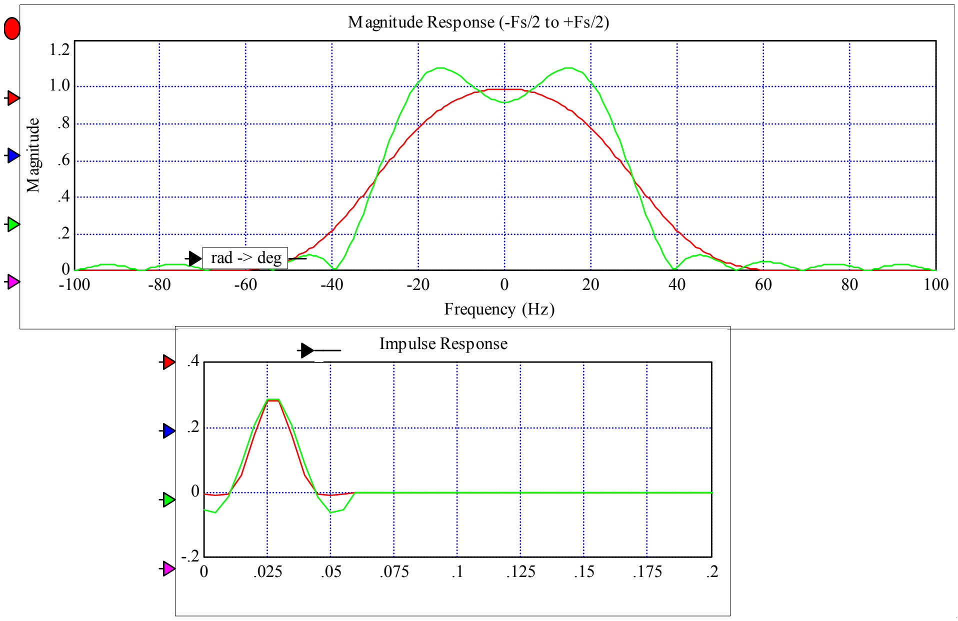



**Figura 39 : Espectro de magnitud y respuesta impulsional de un filtro FIR con M=12 y ventana rectangular (línea verde), y filtro FIR con ventana de Hamming**

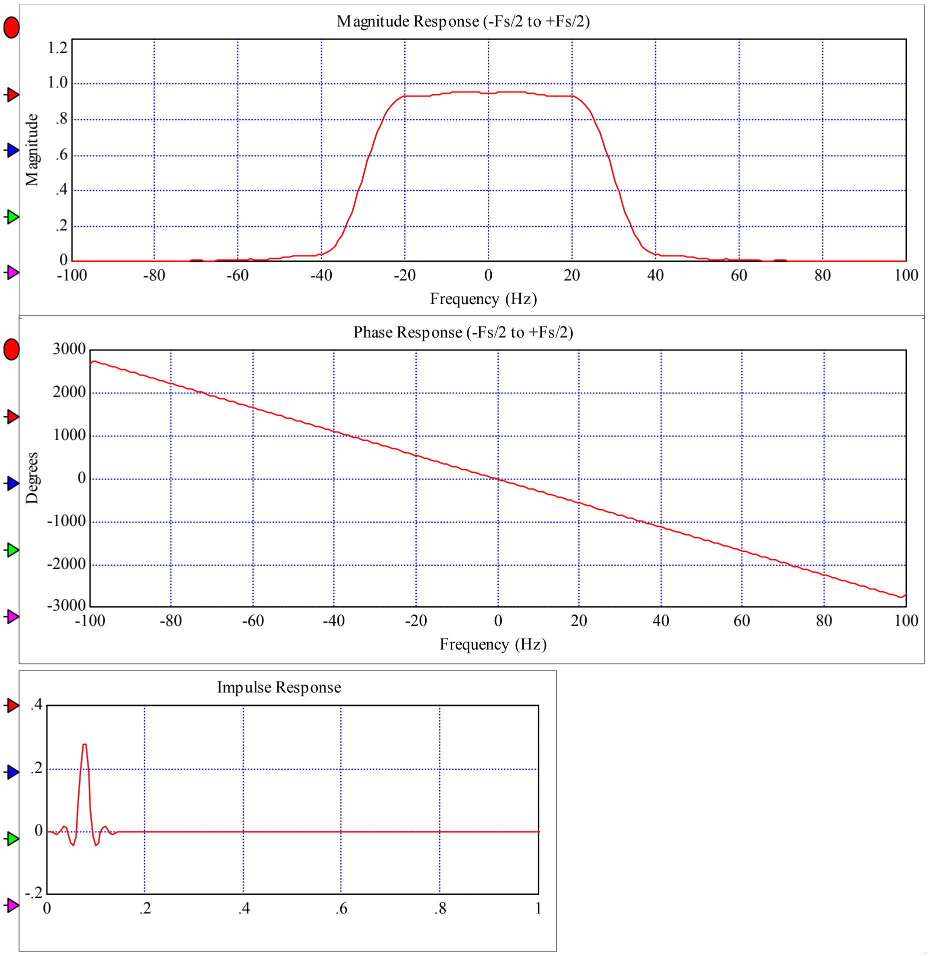


**Figura 40 : Espectro de magnitud, fase y respuesta impulsional de un filtro FIR con ventana Hanning y 32 TAPs**

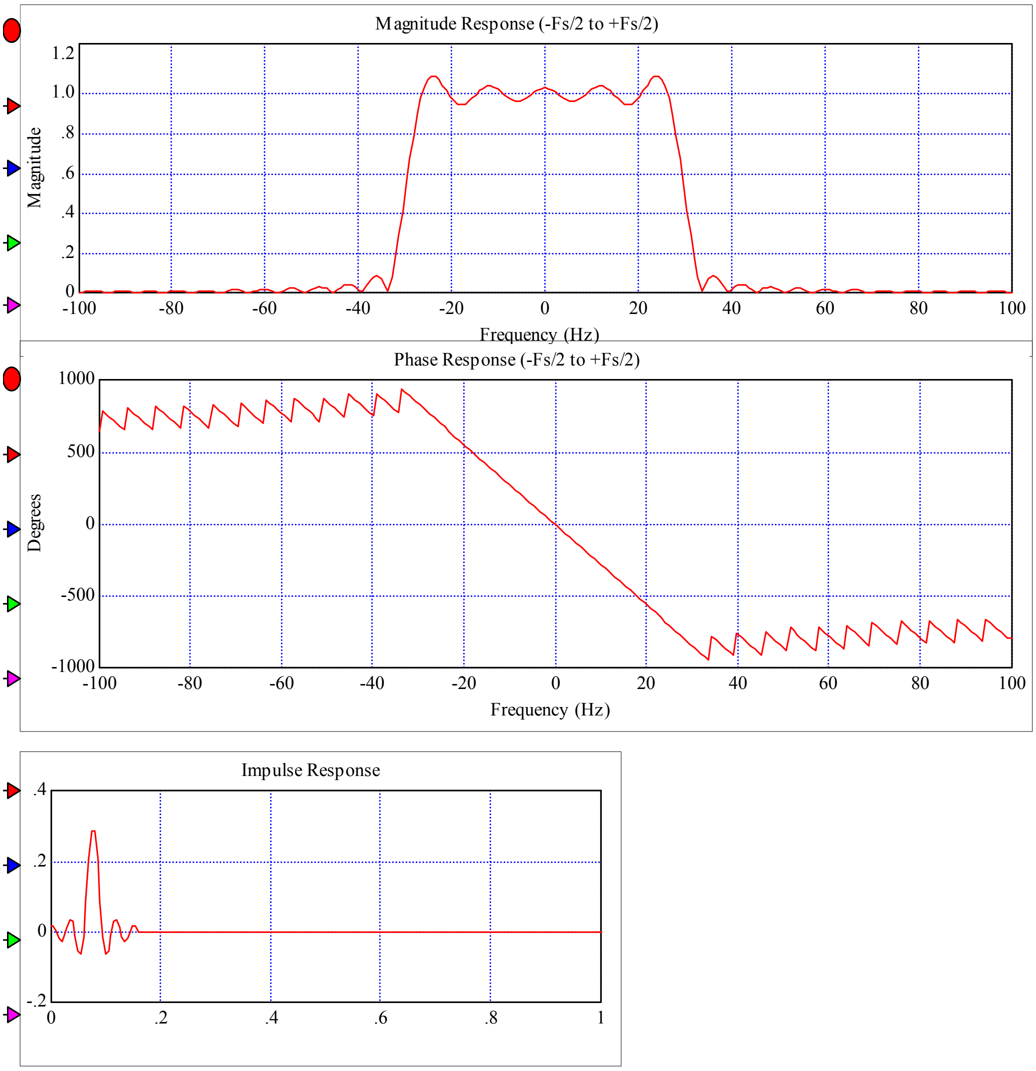



**Figura 41 : Espectro de magnitud, fase y respuesta impulsional de un filtro FIR con ventana rectangular y 32 TAPs**

### 6.3.3. Ventanas

En el diseño de filtros digitales se trunca la respuesta impulsional a un determinado número de puntos. Típicamente una potencia exacta de 2. ¿Qué ocurre si con el número de elementos que nos quedamos de esta respuesta estamos en un valor final que no es cero?

Pues que nos aparecería un rizado (como en los filtros elípticos y en los de Chebyshev). Mediante el uso de las ventanas vamos a poder disminuir el efecto de este rizado.

Una ventana no es más que una función que está definida en un intervalo temporal, y fuera de él vale 0.

Aplicar una ventana equivale a multiplicar en el dominio del tiempo la ventana por la respuesta impulsional del filtro.

Veamos a continuación algunas de las ventanas más utilizadas.

### 6.3.3.1. Ventana rectangular

La ventana rectangular equivale a no aplicar ventana, es decir, contamos los elementos tal cual y cuando llegamos al número deseado paramos, independientemente del valor en el que se esté.

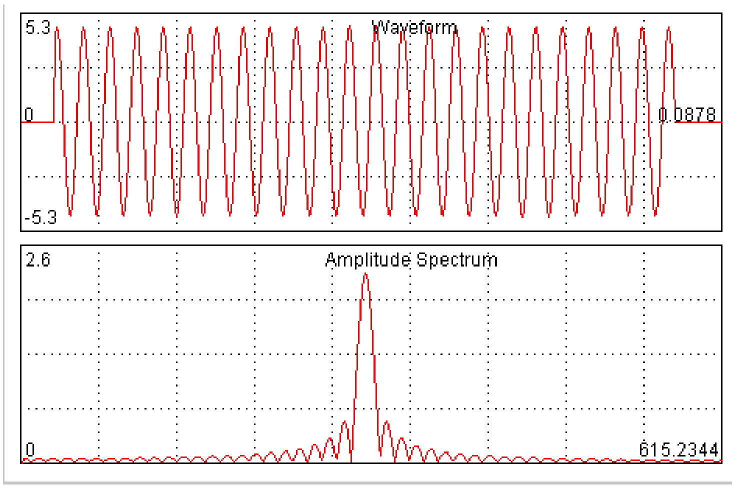



**Figura 42: Ventana rectangular**

### 6.3.3.2. Ventana de Hamming

La ventan de Hamming sigue la expresión:

$$w[n] = \begin{cases} 0.54 - 0.46\cos\left(\dfrac{2\pi n}{M}\right) & 0 \le n \le M \\ 0 & fuera \end{cases}$$

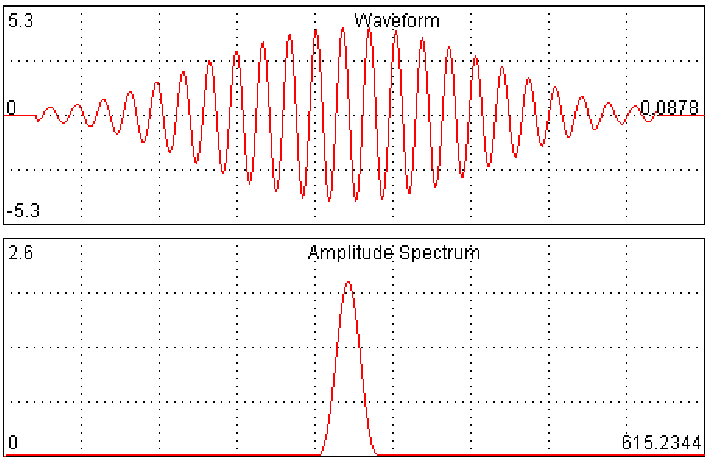



**Figura 43: Ventana de Hamming**

En la Figura 43 se muestran dos gráficas, la superior corresponde a la ventana de Hamming en el dominio temporal, y la inferior al espectro de magnitud de la misma.

#### 6.3.3.2. Ventana de Hanning y de Blackman

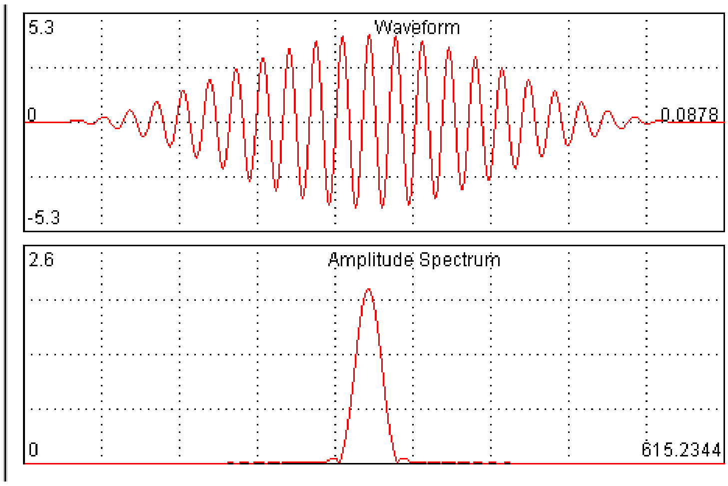



**Figura 44: Ventana de Hanning**

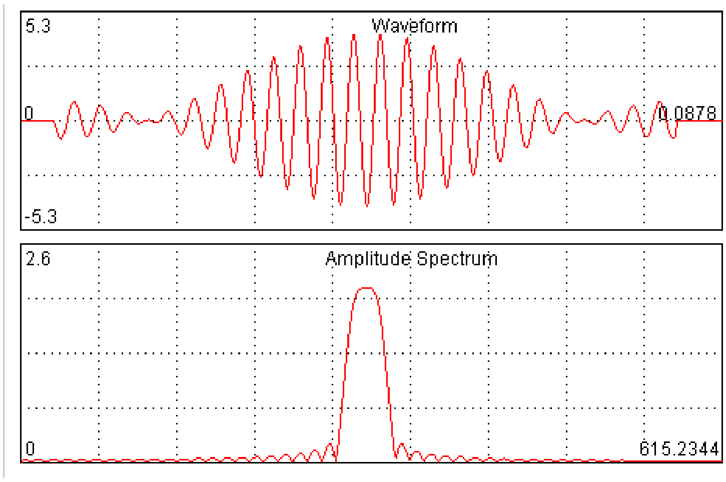



**Figura 45: Ventana de Blackman**

### 6.3.4. Etapas en el diseño de filtros digitales

Las etapas básicas que encontramos en el diseño de cualquier tipo de filtro son:

1. Especificación de las propiedades deseadas del sistema.
2. Aproximación de las especificaciones mediante un sistema causal en tiempo discreto.
3. Realización del sistema

## 6.4. Filtros analógicos versus filtros digitales

La tendencia actual es usar siempre que se pueda filtros FIR en vez de filtros IIR porque la distorsión es menor y son siempre estables.

No obstante tienen un inconveniente: es necesario usar un orden muy alto para que se obtengan buenos resultados.

# 7. Relación señal-ruido

En muchos sistemas de comunicación, uno de los parámetros que mayor interés despiertan es la potencia media. No obstante, este valor por si mismo no tiene mucho interés ya que el valor medio de la potencia puede modificarse al hacer pasar la señal por un amplificador o un atenuador. Además hay que añadir el hecho de que en el receptor la señal que se recibe es la suma de la señal enviada y el ruido presente en la línea.

Si la señal recibida se amplifica o atenúa, se le está aplicando el mismo factor de conversión al ruido y a la señal con la información. Podemos concluir entonces que el parámetro de interés es la relación entre la potencia de la señal y la potencia del ruido. A esta relación es a la que se denomina relación señal-ruido y se la denota por S/N o SNR (Signal to Noise Ratio)

**DEF SNR**

Es la relación entre la potencia de la señal y la potencia del ruido medidas cada una de ellas en watios.

**DEF Variación de S/N**

Se define la variación S/N como:

$$\Delta \mathrm{SNR} = \frac{(\mathrm{S/N})_{\mathrm{out}}}{(\mathrm{S/N})_{\mathrm{in}}}$$

En ocasiones se expresa en decibelios como:

$$\Delta \mathrm{SNR}_{\mathrm{db}} = 10 \log_{10}(\Delta \mathrm{SNR})$$

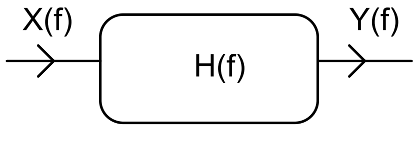
**Ejemplo**:

- Vamos a calcular la relación señal/ruido (S/N) de una señal al pasar a través de un filtro

  Para realizar este ejercicio necesitamos calcular la potencia media de la señal, para ello vamos a obtenerla a partir de la PSD:

  $$\mathrm{P} = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{PSD} df = 2\int_{0}^{\infty} \mathrm{PSD} df$$

  Por otro lado también nos interesa saber cuál es la PSD de una señal después de pasar a través de un sistema lineal:

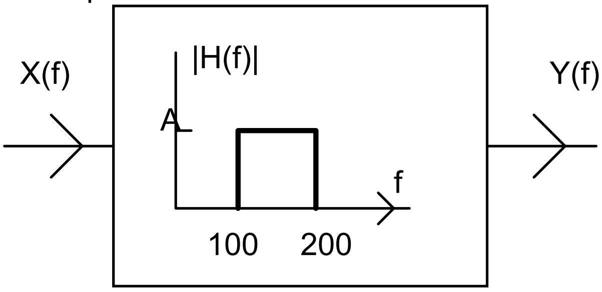



  Tendremos que:

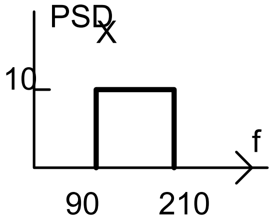
  $$\mathrm{PSD}_{\mathrm{Y}} = \mathrm{PSD}_{\mathrm{X}} \cdot |\mathrm{H}(f)|^2$$

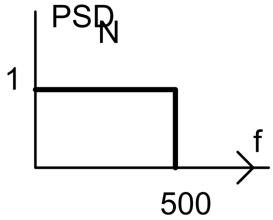
  Ahora ya podemos formular el problema:

La entrada al filtro pasabanda de la figura es la suma de una señal y ruido. La PSD del ruido y de la señal son las que aparecen en las figuras. Encontrar la variación S/N que se produce con la señal filtrada.




Las PSD de la señal y el ruido son:




Las potencias medias de la señal y el ruido a la entrada las obtenemos como la integral de las PSD:

$$P_X = 2\int_{90}^{210} 10df = 2\cdot 10\cdot f\Big]_{90}^{210} = 20\cdot(210-90) = 20\cdot 120 = 2400\text{watios}$$

$$P_N = 2\int_{0}^{500} 1df = 2\cdot f\Big]_{0}^{500} = 2\cdot(500-0) = 2\cdot 500 = 1000\text{watios}$$

La S/N a la entrada:

$$(S/N)_{in} = 24$$

$$(S/N)_{in_{db}} = 4.8\text{db}$$

Para calcular las PSD de la señal y el ruido a la salida aplicamos la fórmula:

$$PSD_Y = PSD_X \cdot |H(f)|^2$$

con lo que obtenemos

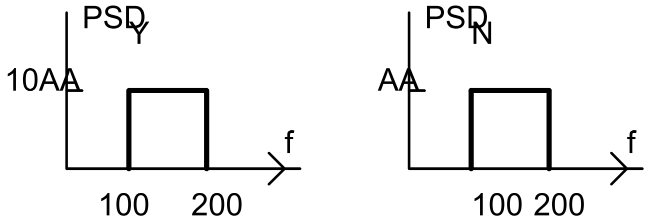
$$PSD_Y = PSD_X |H(f)|^2 = \begin{cases} 10A^2, 100 \le |f| \le 200 \\ 0, \text{otherwise} \end{cases}$$

$$PSD_{Nout} = PSD_N |H(f)|^2 = \begin{cases} A^2, 100 \le |f| \le 200 \\ 0, \text{otherwise} \end{cases}$$

y la potencia media de la señal y del ruido y la relación entre ellos será:

$$P_Y = 2\int_{100}^{200} 10A^2 df = 2\cdot 10A^2 \cdot f\Big]_{100}^{200} = 2000A^2 \text{watios}$$
$$P_N = 2\int_{100}^{200} A^2 df = 2\cdot f\Big]_{100}^{200} = 2\cdot A^2 (200-100) = 2\cdot 100A^2 = 200A^2 \text{watios}$$
$$(S/N)_{out} = 10$$
$$(S/N)_{out_{db}} = 10db$$

Gráficamente:




la variación entre la S/N a la entrada y a la salida es:

$$\Delta SNR = \frac{10}{2.4} = 4.17$$
$$\Delta SNR_{db} = 10 - 4.8 = 6.2db$$

# 8. La Transformada discreta de Fourier

Hasta ahora nos hemos ocupado de señales analógicas y hemos visto cómo se puede pasar del dominio temporal al dominio de la frecuencia mediante la transformada y las series de Fourier. El problema que plantea el desarrollo visto hasta ahora es que sólo es 'fácilmente' aplicable a aquellas señales para las que es posible calcular la integral de la transformada de Fourier y esto sólo sucede para señales sencillas (pulsos rectangulares, triangulares, senos, cosenos,...), pero no para señales reales como son la voz o los datos generados por un ordenador.

¿Qué hacer en estos casos?. Se utiliza el ordenador para poder calcular la representación en el dominio de la frecuencia y analizar los resultados. En los ordenadores sólo podemos trabajar con señales discretas, así que el primer paso será transformar la señal analógica mediante el muestreo y a partir de la señal muestreada usar lo que se denomina la transformada discreta de Fourier.

## 8.1. Diferencias entre la transformada continua de Fourier y la discreta

1. La transformada continua trabaja con señales (funciones) analógicas y la discreta con una versión muestreada de la señal.
2. La transformada continua se calcula para todo el rango temporal: de -∞ a +∞.
3. La transformada continua de Fourier evalúa una función de frecuencia continua, mientras que la transformada discreta evalúa una función discreta de la frecuencia.
4. La transformada continua de Fourier está definida para todo el rango de frecuencias, mientras que la discreta sólo se evalúa en un intervalo finito de frecuencias.

Veamos con un ejemplo la diferencia entre considerar una señal definida en todo el rango temporal o sólo en un intervalo. Vamos a suponer que tenemos una señal periódica como la de la Figura 46:

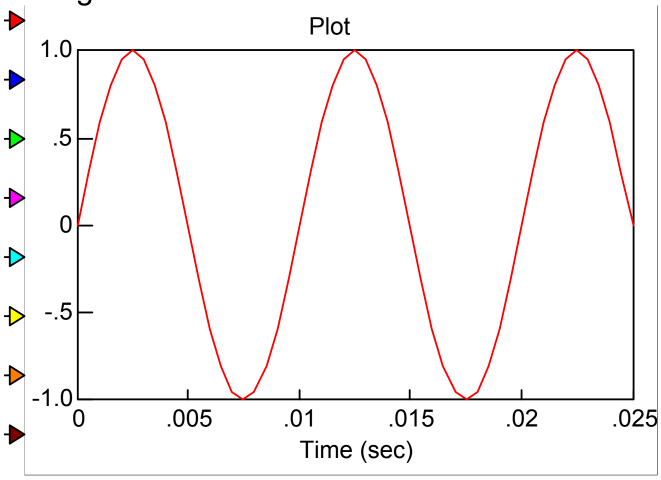



**Figura 46**

se trata de una señal seno con periodo de repetición de 1/100 segundos y amplitud 1. Si calculamos la transformada de Fourier de esta señal, obtendremos dos deltas de Dirac en las frecuencias 100 y -100 Hz.

Pero esto sólo es cierto si tenemos una señal de duración infinita. En la realidad tendremos una señal seno que sólo existirá un tiempo T. Esto es equivalente a multiplicar nuestra señal por una ventana rectangular de duración T (Figura 47).

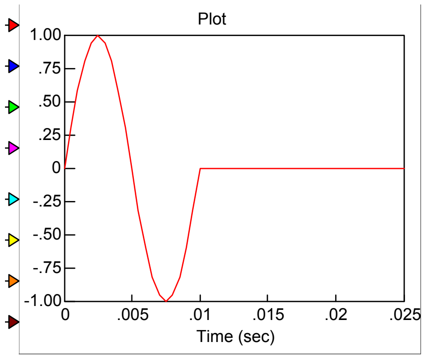



**Figura 47**

en nuestro ejemplo, T=0.01 segundos.

Y el espectro de magnitud en el dominio de la frecuencia será el de la Figura 48.

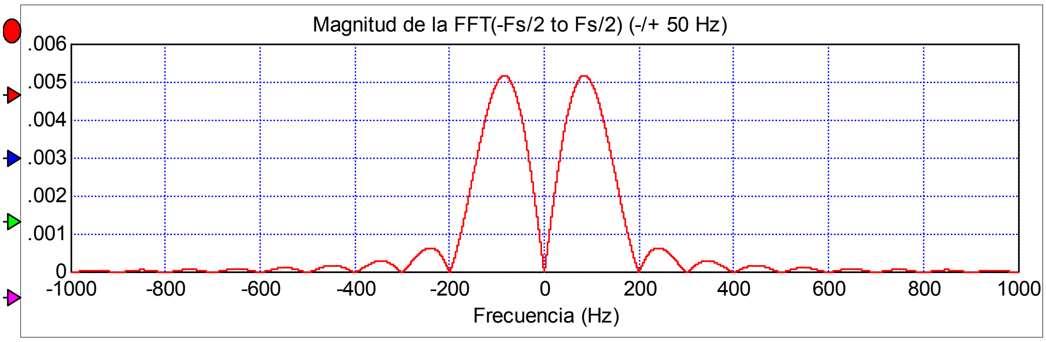
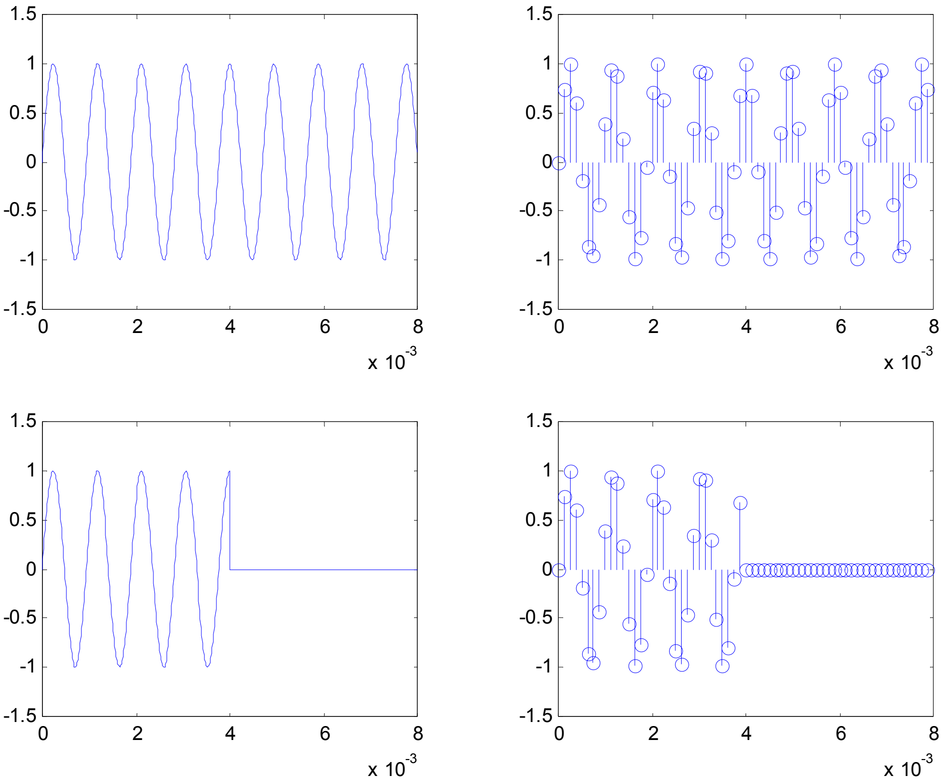



**Figura 48**



| | |
|---|---|
| a | b |
| c | d |

**Figura 49**

Esto es sólo una aproximación a la respuesta ideal en frecuencia. La única forma que tenemos de mejorar la respuesta es aumentar el tamaño de la señal en el dominio del tiempo: supone aumentar el tamaño de la ventana.

En un sistema real, además de aplicar una ventana lo que vamos a tener es una señal discreta. En la Figura 49 se muestra en a) la señal analógica original, en b) la señal muestreada, en c) la señal analógica aplicada la ventana y en d) la señal digital aplicada la ventana. Se trata de una señal seno de frecuencia 1062.5. Se muestrea la señal a 125 microsegundos (por lo tanto la frecuencia de muestreo será de 8000 Hz. La señal de la gráfica d) se le ha aplicado una ventana que sólo se queda con N=32 muestreas de la señal, separadas $t_s$=125$\mu$seg.

¿Qué es lo que sucede en el dominio de frecuencia?

Para el caso de las señales analógicas lo hemos analizado en el ejemplo anterior.

¿Qué sucede con el espectro de magnitud de la señal discreta de longitud infinita? ☺ ya deberíais saberlo... es la aplicación directa del teorema de muestreo...

En el caso de la señal de la gráfica d) lo que obtenemos en el dominio de la frecuencia es lo de la Figura 50.

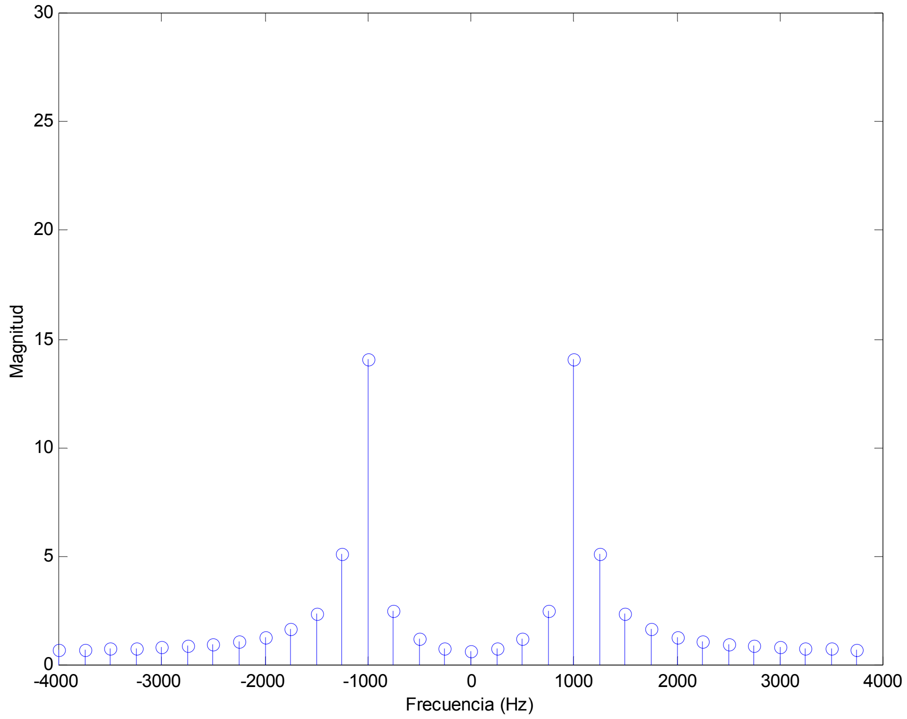



**Figura 50**

Realmente lo que obtenemos es ese espectro, pero repetido en los múltiplos de la frecuencia de muestreo. Se trata además de un espectro discreto. La separación entre cada par de elementos ahí mostrados es:

$$f_d = \frac{f_s}{N} = \frac{\text{Frecuencia de muestreo}}{\text{Número de puntos en el dominio del tiempo}}$$

así que cuantos más puntos consideremos en el dominio del tiempo, más pequeña será $f_d$, y más se parecerá el espectro al de una señal continua.

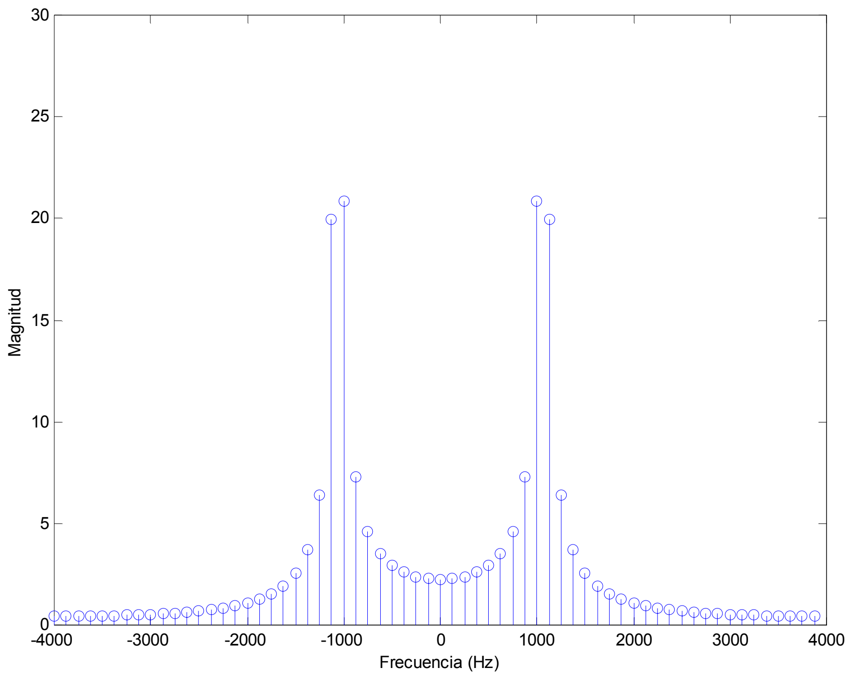



**Figura 51**

Si hubiésemos tomado una ventana de tamaño 64, tendríamos lo que muestra la Figura 51.

Es importante tener en cuenta que siempre que aplicamos una ventana a una señal, lo que obtenemos en el dominio de la frecuencia es una aproximación a lo que obtendríamos con 'toda la señal' y debemos hacer las cosas con cuidado y analizar los resultados adecuadamente para no caer en errores.

En los apartados siguientes vamos a ver las expresiones que nos permiten obtener los gráficos de las figuras anteriores.

## 8.2. La ecuación de la transformada discreta de Fourier

La transformada discreta de Fourier se suele denotar por sus siglas en inglés: DFT (Discrete Fourier Transform) y se calcula como:

$$X[k]=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}x[n]e^{-j2\pi nk/N}=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}x[n]W_N^{nk}$$

donde

- N es el número de muestras
- x[n] es la señal discreta obtenida a partir de la analógica x(t), donde $x[n]=x(nt_s)$
- $W_N^{nk}=e^{-j2\pi nk/N}$ es el factor de 'twiddle' o girado.

veamos un poco más este último término. Si por ejemplo tomamos N=8 y representamos gráficamente los diferentes valores de $W_N^{nk}$, tendremos (Figura 52):

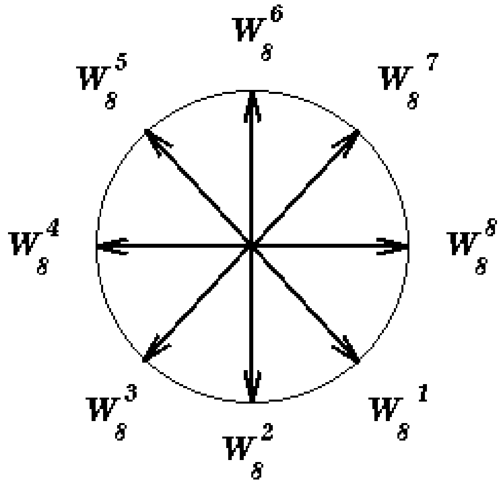



**Figura 52**

tenemos que:

- es periódico ($W_8^9 = W_8^1$, ...)
- Los vectores son simétricos y
- están distribuidos uniformemente sobre el círculo unitario con una separación de $f_d = \frac{f_s}{N} = \frac{2\pi}{N}$[5].

Este término es el que se denomina resolución de la frecuencia de la DFT y nos va a dar la separación entre los diferentes elementos de la DFT.

Además el factor de girado cumple una determinada simetría con respecto al origen:

$$W_8^1 = conjugado\left(W_8^7\right)$$
$$W_8^2 = conjugado\left(W_8^6\right)$$
$$W_8^3 = conjugado\left(W_8^5\right)$$
$$...$$

otros autores prefieren expresarlo:

$$W_8^1 = inverso\left(W_8^5\right)$$
$$W_8^2 = inverso\left(W_8^6\right)$$
$$W_8^3 = inverso\left(W_8^7\right)$$
$$...$$

y ¿cuál es la interpretación?

Que sólo necesitamos calcular la mitad de los elementos de la DFT porque la otra mitad se obtienen a partir de estos elementos.

Si tenemos una señal en el tiempo de 64 muestras, en la frecuencia vamos a obtener también 64 valores, pero de esos nos basta con conocer los 32 primeros. Es

---

[5] La última igualdad indica que para la representación del círculo se trabaja con frecuencias normalizadas.

decir, mediante la fórmula obtenemos los elementos del semieje positivo de frecuencias y los del negativo los dibujamos simétricos respecto al eje vertical.

> ***Comentario**: en realidad lo que obtenemos al aplicar la DFT, son elementos que todos ellos corresponden al semieje positivo de frecuencias. Pero como a partir de la mitad del vector se nos van a repetir los elementos, podemos 'darle la vuelta' y colocar esta segunda mitad de los elementos sobre el semieje negativo para poder hacer una interpretación como la del dominio frecuencial continuo.*

## 8.3. La transformada discreta inversa de Fourier

La expresión para pasar del dominio de la frecuencia al temporal es:

$$x[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{j2\pi nk/N}$$

esto es lo que se denomina IDFT: Inverse Discrete Fourier Transform.

## 8.4. Propiedades de la DFT

**Periodicidad**

La señal discreta x[n], la definimos desde 0 hasta N-1, donde N es el número de muestras. Pero no hay nada que nos impida calcular x[n] para una n mayor que N:

$$x[n] = x[n+iN], \mathrm{i} = 0,1,2,...$$

en base a la expresión anterior.
Análogamente:

$$X[k] = X[k+iN], \mathrm{i} = 0,1,2,...$$

es decir, que tanto la señal discreta como la DFT de la señal, son señales periódicas.

**Linealidad**

Si $x_1[n] \leftrightarrow X_1[k]$ y $x_2[n] \leftrightarrow X_2[k]$, entonces

$$\alpha_1 x_1[n] + \alpha_2 x_2[n] \leftrightarrow \alpha_1 X_1[k] + \alpha_2 X_2[k]$$

**Desplazamiento circular de x[n]**

Lo mismo que desplazamos las señales analógicas, podemos pensar en desplazar m periodos de muestreo la señal. Si m toma un valor grande podemos 'pasarnos' y quedarnos sin señal, es decir que necesitemos calcular un valor de x[n+m] con n+m mayor que N, pero como hemos visto en la primera propiedad que esos valores se pueden obtener ... en el fondo es equivalente a hacer un desplazamiento circular de los datos. Matemáticamente esto se puede formular como:
Si $x[n] \leftrightarrow X[k]$ entoces $x[n+m] \leftrightarrow W_N^{-mk} X[k]$

**Desplazamiento circular de X[k]**

Si $x[n] \leftrightarrow X[k]$ entoces $W_N^{mn} x[n] \leftrightarrow X[k]$

Todas las propiedades que hemos visto de la transformada de Fourier tienen su equivalente para el caso discreto, pero no vamos a verlas ☹.

En la dirección www.jhu.edu/˜signals hay applets para comprobar algunas de las propiedades de la DFT, también hay otro applet para la convolución de señales discretas.

### 8.5. Goteo espectral de la DFT

En los apartados anteriores hemos visto como a partir de una señal analógica nos quedamos sólo con una parte y eso es lo que se muestrea y a lo que se le aplica la DFT. ¿Qué ocurre cuando al quedarnos con ese trozo de la señal no tenemos una señal continua?.

Lo que se introduce en la DFT es lo que está en la gráfica de la tercera fila y segunda columna de la Figura 53.

Esas discontinuidades, dan lugar a que en vez de obtener el espectro de magnitud típico de un seno obtengamos algo diferente.

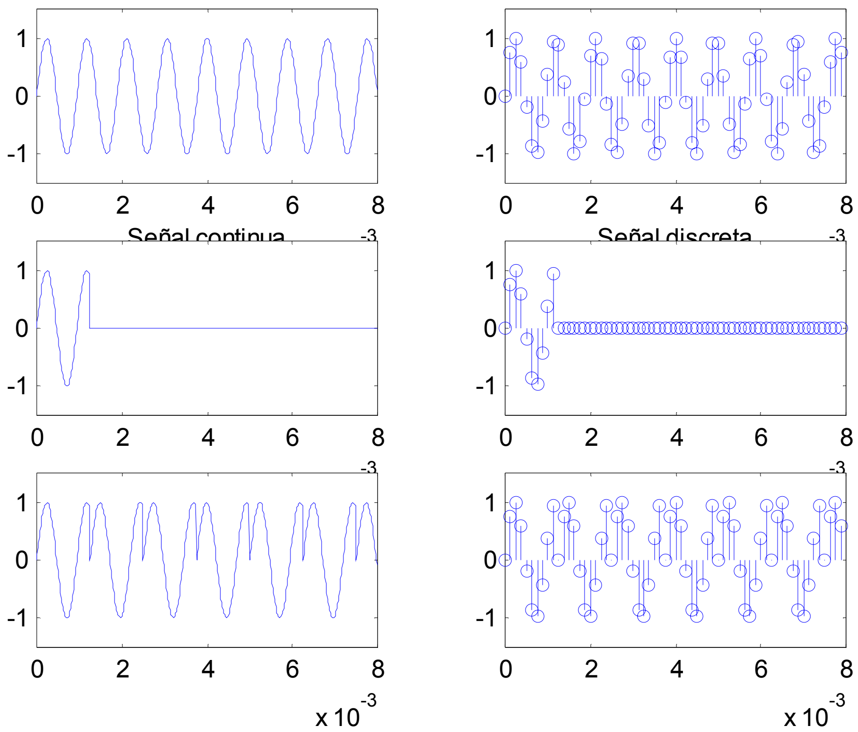



**Figura 53**

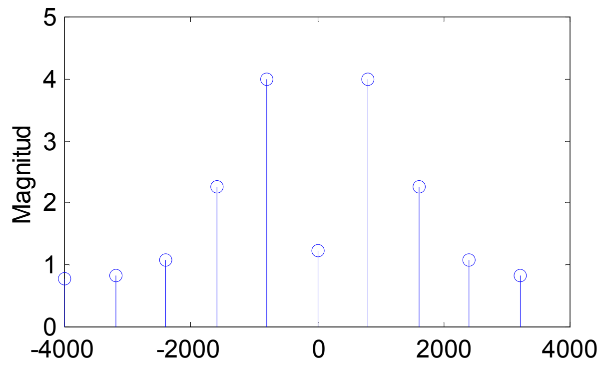



**Figura 54: Espectro de magnitud de la señal discontinua**

Como vemos en la Figura 54 cerca de los 1062,5 Hz aparece la componente de frecuencia más importante, pero las que están cerca también son muy grandes. Además la amplitud de la componente principal no es tan grande como debería. Si calculásemos la energía tendríamos que es la misma que la de la señal 'buena', pero nos aparecen más componentes que no nos dejan interpretar adecuadamente los resultados.

Por eso es muy importante escoger bien el trozo de señal en el dominio temporal. Si a pesar de poner mucho cuidado, no se obtienen buenos resultados, conviene aplicar una ventana (Figura 55).

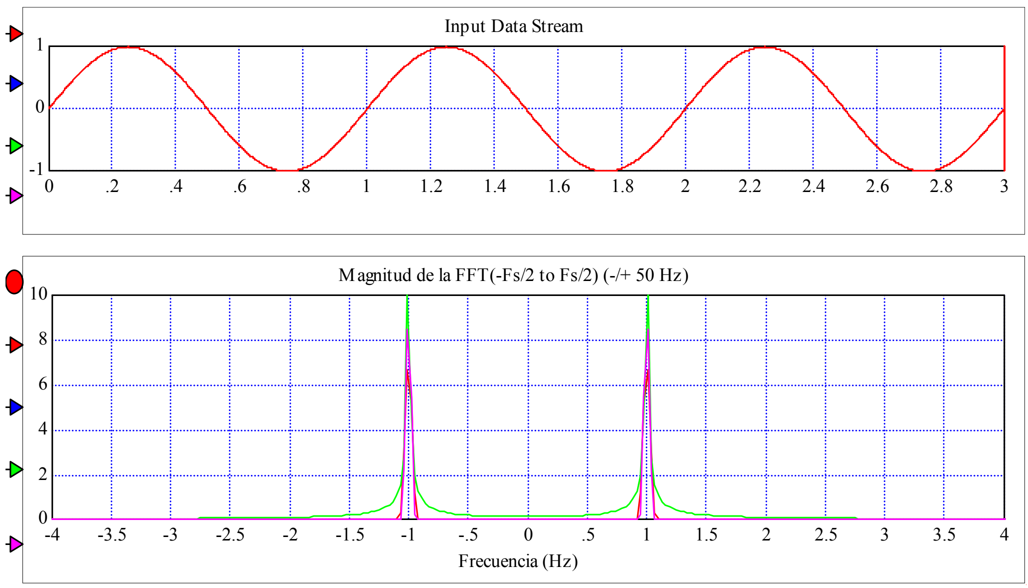



**Figura 55**

# 9. Bibliografía

- Tratamiento de señales en tiempo discreto, 2ª edición.
  Alan Oppenheim y Ronald W. Schafer.
  Prentice Hall
- Signal and Linear Systems Analysis
  Gordon E. Carlson
  Prentice Hall
- Signals and Systems
  Simon Haykin
  John Wiley
- Communication Systems, 3 ed.
  Simon Haykin
  John Wiley

# Tema 3 Problemas

**1.** Una línea telefónica tiene un ancho de banda de 3KHz. Si se quiere transmitir a una velocidad de 5Kbps, ¿Cuál es la SNR necesaria?

**2.** Sea un sistema de comunicaciones en el que se quiere transmitir una señal sinusoidal $s(t) = 20\sin(2\pi t)$. Se sabe que la densidad espectral de potencia (PSD) del ruido que se suma a la señal es $G_n(f) = e^{-3|f|}$. La señal suma de estas dos es la entrada a un filtro. Se pide:

a) Calcular la relación señal/ruido SNR a la entrada del filtro.

b) Supongamos que el filtro es un filtro pasabaja ideal con una frecuencia de corte de 2 Hz. Calcular la variación de la SNR entre la entrada y la salida del filtro y expresarla en dB.

c) Si el filtro es pasabanda, con la banda de paso entre 0.9 y 1.1 Hz. Calcular lo mismo que en el apartado b

(**NOTA**: la autocorrelación de una señal sinusoidal $w(t) = A\sin(2\pi f_0 t)$ es $R_w(\tau) = \frac{A^2}{2}\cos(2\pi f_0 \tau)$. Calculando la transformada de Fourier de la autocorrelación se obtiene la densidad espectral de potencia y a partir de ella ya se puede obtener la potencia media de la señal)

**3.** Dado un pulso triangular:

$$\mathrm{tri}\left(\frac{t}{T}\right) = \begin{cases} 1 - \frac{|t|}{T}, |t| \le T \\ 0, |t| \ge T \end{cases}$$

Calcular:

a) El ancho de banda absoluto de la señal

b) El ancho de banda de cero-a-cero en función de T

**4**. Sea la señal $g(t) = \cos(2\pi t)$. Se muestrea la señal cada $3/4$ de segundo. Se pide:

a) Dibujar la señal

b) Dibujar la señal muestreada por el tren de impulsos

c) ¿Es posible reconstruir la señal original a partir de la muestreada?. Razona la respuesta

**5**. Sea la señal $g(t)=\frac{\sin(5\pi t)}{\pi t}+\frac{\sin(10\pi t)}{\pi t}$. La señal se muestrea mediante un tren de impulsos unitarios. Se pide:

a) Calcular la frecuencia de Nyquist

b) Supuesto que el muestreo se hace de acuerdo a la frecuencia de Nyquist, dibujar el espectro de frecuencias de la transformada de Fourier de la señal muestreada.