TEMA V: ESTIMACIÓN PUNTUAL Y POR INTERVALOS.

INTRODUCCIÓN.

Tratamos de estudiar una variable aleatoria unidimensional X que es desconocida en mayor o menor medida.

Concretamente vamos a suponer que X sigue una distribución que tiene una forma funcional fija y conocida (exponencial, normal, Poisson, etc) pero de la que es desconocida algún parámetro de una o más dimensiones, esta situación se engloba en lo que se llama Inferencia paramétrica.

Para sacar información sobre el parámetro desconocido está claro que no cabe otra alternativa que llevar a cabo observaciones del fenómeno aleatorio objeto de estudio.

En primer lugar, vamos a estudiar lo que se denomina estimación puntual, es decir, situaciones en las que el objetivo es utilizar la información que nos da las observaciones para obtener un pronóstico numérico acerca de un parámetro desconocido de la distribución.

En segundo lugar, vamos a estudiar la estimación por intervalos o intervalos de confianza, se trataría de dar intervalos en los que pueda razonablemente afirmarse que se encuentra el verdadero valor del parámetro desconocido.

Llevar a cabo observaciones del fenómeno objeto de estudio es obtener una muestra de la población, está claro que lo que interesa y se quiere es obtener muestras representativas de la población.

¿Cómo obtener estas muestras representativas? Todo el desarrollo de la Inferencia que vamos a hacer está hecho con un tipo de muestreo que se denomina muestreo aleatorio simple (m.a.s.), cualquier otro tipo de muestreo acaba cayendo en algún momento en este. Vamos a definir este m.a.s. y vamos a comentar las hipótesis en las que está basado.

Definición. Una muestra aleatoria simple (m.a.s.) de tamaño n, de una variable aleatoria X son n variables aleatorias (X_1, X_2,....,X_n) independientes e igualmente distribuidas que X.

Por lo tanto:

$P(X_1=x_1,X_2=x_2,......,X_n=x_n)=p(X_1=x_1).p(X_2=x_2).......p(X_n=x_n)=p(X=x_1).p(X=x_2).......p(X=x_n)$
(caso discreto)

$f(x_1, x_2,....,x_n)=f_{X_1}(x_1).f_{X_2}(x_2)......f_{X_n}(x_n)= f_X(x_1).\ f_X(x_2)......f_X(x_n)$ (caso continuo)

Comentario sobre el m.a.s. Los dos supuestos del m.a.s. son aceptables sobre todo para poblaciones bastante homogéneas respecto a la característica objeto de estudio.

El supuesto de independencia podría plantear problemas en poblaciones con un número de elementos pequeño. Lo normal es que si un elemento de la población es elegido, éste ya no sea reintegrado en la población para poder volver a ser elegido, pero si la población es grande la probabilidad de que un elemento de ella sea elegido ya de por sí es muy pequeña y no digamos nada de ser elegido dos veces, por lo tanto

nos da igual que haya o no reemplazamiento y por lo tanto la hipótesis de independencia no plantea ningún problema y constituye una hipótesis perfectamente asumible.
En cuanto al supuesto de igualmente distribuidas que X, decir que cada X_i es una variable aleatoria (será un valor concreto cuando se haya elegido un elemento de la población). Una hipótesis bastante aceptable será suponer que X_i sigue la distribución de X que es la población de la cual procede.
De todo lo comentado podemos concluir con la idea de que el m.a.s. es muy bueno, pero está también claro que puede der mejorado con informaciones adicionales sobre la población.
Lo que tiene que quedar claro es que se utilice el tipo de muestreo que se utilice se necesita la distribución conjunta de la muestra, considerada como un vector aleatorio n-dimensional.
Pasamos al primer problema planteado, la estimación puntual.
Definición. Un estadístico es cualquier función de la muestra: $T(X_1, X_2,\ldots,X_n)$.
Si los estadísticos son variables aleatorias tendrán su distribución.
En primer lugar, quizás queramos obtener estimaciones puntuales de parámetros tales como la media o la varianza de una población. Para representar el parámetro de interés usaremos la letra griega ϑ tanto si es unidimensional como si es k-dimensional. El objetivo de la estimación puntual como ya se ha dicho es seleccionar un número, con base en la muestra, que sea el valor más plausible de ϑ. El valor numérico de un estadístico es el que será utilizado como estimación del parámetro, que en este caso va a recibir el nombre de estimador.Definición. Un estimador $\widehat{\Theta}$ de un parámetro ϑ de una población X será cualquier estadístico que se utiliza para estimar el valor del parámetro ϑ.
Notación: $\widehat{\Theta}= T(X_1, X_2,\ldots,X_n)$.
La cuestión estaría en que estadísticos hay que utilizar y que propiedades estaría bien que cumplieran.
Se puede estudiar métodos para calcular estimadores y estudiar propiedades que estaría bien que cumplieran pero no lo vamos a hacer y nos vamos a conformar con dar estimadores para la media y la varianza de cualquier población que por otra parte es lo que nos interesa y vamos a comentar únicamente una propiedad de los estimadores que estaría bien que tuvieran.
En lógica si a uno se le pregunta por un buen estimador de la media μ, de una población, contestará que la media muestral, pues bien ese es el estimador que damos para la media de la población: $\hat{\mu} = \overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$
Este estimador de la media tiene una propiedad que sería muy deseable que tuvieran los estimadores de cualquier parámetro ϑ y es la propiedad de ser insesgado o centrado para el parámetro.
Definición. Un estimador $\widehat{\Theta}$ se dice insesgado o centrado del parámetro ϑ si $E(\widehat{\Theta}) = \vartheta$
Que un estimador sea insesgado es una forma de decir que $\widehat{\Theta}$ estará próximo al verdadero valor del parámetro desconocido.
Si el estimador no es insesgado, entonces la diferencia: $E(\widehat{\Theta})- \vartheta$ recibe el nombre de sesgo del estimador ϑ.

Ahora nos planteamos un estimador para la varianza σ^2, en lógica uno pensaría en la varianza muestral: $\widehat{\sigma^2}$ = S^2 = $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$, el caso es que la llamada cuasi varianza muestral : S_c^2 = $\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$ tiene una ventaja sobre el estimador varianza muestral y es que es insesgado para la varianza poblacional, con lo cual quizás podamos utilizarlo para estimar dicha varianza.

Para finalizar la estimación puntual, vamos a hacer unos comentarios sobre preferencias entre varios estimadores..

Si tuviéramos varios estimadores insesgados para un parámetro, ¿cuál sería preferible? Supongo que es claro que aquel que tuviera menor varianza ya que sería una forma de decir que más difícilmente nos desviaríamos del verdadero valor del parámetro.

Ahora bien si tenemos dos estimadores uno insesgado y otro no, ¿cuál es preferible?

La cuestión podría no ser tan clara, porque aunque la propiedad de estimador insesgado es buena tampoco hay que magnificarla, vamos a introducir un concepto que podría aclarar las cosas.

Definición. Se define el error cuadrático medio de un estimador $\hat{\theta}$ del parámetro ϑ como: ECM $(\hat{\theta})$ = $E\left[(\hat{\theta} - \vartheta)^2\right]$

El error cuadrático medio coincide con la varianza de $\hat{\theta}$ cuando es estimador es insesgado. En otro caso se tiene: ECM $(\hat{\theta})$ = $E\left[(\hat{\theta} - \vartheta)^2\right]$ = $E\left[(\hat{\theta} - E(\hat{\theta}) + E(\hat{\theta}) - \vartheta)^2\right]$ = $E\left[(\hat{\theta} - E(\hat{\theta}))^2\right]$ + $E\left[(E(\hat{\theta}) - \vartheta)^2\right]$ + 2 $E\left[(\hat{\theta} - E(\hat{\theta})(E(\hat{\theta}) - \vartheta)\right]$ = Var$(\hat{\theta})$ + (Sesgo$(\hat{\theta})^2$ ya que $E(\hat{\theta})$ - ϑ es una constante y el doble producto se anula.

El asunto está en que un estimador aunque no fuera insesgado podría tener un ECM menor que el insesgado y entonces podría plantearse dudas sobre cual es preferible.

6 Estimación por intervalos de confianza

Cuando tratamos la estimación puntual, uno de los problemas que se plantearon es que el valor de la estimación es sólo uno de los valores (posiblemente infinitos) del estimador, obtenido al extraer una muestra concreta, de forma que si extraemos dos muestras distintas, las estimaciones serán distintas. Al hacer cualquier estimación se está cometiendo un error, y sería deseable proporcionar una medida de la precisión de la estimación del parámetro.

En este tema vamos a introducir el concepto de intervalo de confianza como un intervalo cuyos extremos son variables que dependen de la muestra, y en el cual se confía que esté el valor de parámetro. El intervalo se obtendrá a partir de un estadístico generalmente relacionado con un estimador puntual, cuya distribución no depende del parámetro desconocido, y una medida de la validez del intervalo es el nivel de confianza, que indica la proporción de intervalos de todos los que se podrían construir a partir de muestras distintas, que realmente contienen al parámetro.

Definición 5 *Sea X una v.a. con distribución que depende de un parámetro θ desconocido y sea $X_1, \ldots, X_n$ una m.a.s. de X. Llamaremos intervalo de confianza de nivel $1-\alpha$, (siendo $\alpha \in (0,1)$) a un intervalo $(L_1(X_1, \ldots, X_n), L_2(X_1, \ldots, X_n))$, cuyos extremos son variables aleatorias que dependen de la muestra, tal que el $(1-\alpha)100\%$ de los intervalos construidos a partir de las posibles muestras de tamaño n, contiene a θ.*

Para comprender mejor el concepto de intervalo de confianza y la forma en que estos se construyen, vamos a comenzar presentando un ejemplo sencillo:

Ejemplo:

Intervalo de confianza para la media de una v.a. con distribución normal y varianza (σ^2) conocida.

Sea X una v.a. con distribución $N(\mu, \sigma)$ y sea $X_1, \ldots, X_n$ una m.a.s. de esta distribución. Como ya hemos visto en el tema anterior, el estimador $\overline{X}$ de μ, que se define como:

$$\overline{X} = \sum_{i=1}^{n} \frac{X_i}{n}$$

es una suma de variables aleatorias con distribución normal e independientes (pues $X_1, \ldots, X_n$ lo son) y, por tanto, tiene distribución normal. Su media es μ y su varianza $\frac{\sigma^2}{n}$. Si estandarizamos esta variable, se tiene que:

$$\frac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \rightsquigarrow N(0,1).$$

Obsérvese que esta variable aleatoria tiene distribución conocida e independiente del valor del parámetro μ, que por otra parte es el único valor desconocido de la variable una vez extraída una m.a.s. concreta de tamaño n. Esto es lo que nos va a permitir construir el intervalo de confianza para μ.

Si fijamos un nivel $1-\alpha$ de confianza, pretendemos que para un $(1-\alpha)100\%$ de las muestras de tamaño n posibles, el valor de μ esté incluido en el intervalo que vamos a construir. Para ello, vamos a considerar el valor $z \in \mathbb{R}$ para el cual $p(-z \leq Z \leq z) = 1-\alpha$, donde Z es una variable aleatoria con distribución $N(0,1)$. (Recuérdese que esto significa que el $(1-\alpha)100\%$ de los valores de la variable Z que extraigamos al azar, estarán en el intervalo $(-z, z)$).

En particular, $p\left(-z \leq \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \leq z\right) = 1-\alpha.$

¿Qué significa esto? Que para el $(1-\alpha)100\%$ de las muestras de tamaño n de la v.a. X, al obtener $\overline{X}$ y formar el cociente anterior, ese valor estará entre $-z$ y z. Si en:

$$-z \leq \frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \leq z$$

despejamos μ, se obtiene:

$$\overline{X} - z\,\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \;\leq\; \mu \;\leq\; \overline{X} + z\,\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

que es el intervalo correspondiente.

<u>Observación</u> 3 *1. Los extremos del intervalo, $\overline{X} \pm z\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, son variables aleatorias que dependen de la muestra; es decir, para cada muestra distinta, tomarán un valor diferente.*

2. El valor del parámetro, aunque desconocido, es un <u>valor fijo</u>.

3. El valor z que interviene en el intervalo, es el valor que corresponde a una probabilidad acumulada de $1-\frac{\alpha}{2}$, y se obtiene fácilmente a partir de la tabla de la $N(0,1)$; denotaremos este punto por $z_{1-\frac{\alpha}{2}}$. (Como en el intervalo $(-z,z)$ debe haber una probabilidad $1-\alpha$, en las colas debe quedar distribuida una probabilidad de α, y de ahí que $p(Z \leq z) = 1-\frac{\alpha}{2}$.) Podríamos elegir otros valores z_1 y z_2, tales que $p(z_1 \leq Z \leq z_2) = 1-\alpha$, y a partir de ellos obtendríamos también intervalos de confianza de nivel $1-\alpha$, de la forma

$$\overline{X} - z_2\,\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \;\leq\; \mu \;\leq\; \overline{X} + z_1\,\frac{\sigma}{\sqrt{n}},$$

pero estos intervalos tendrían mayor amplitud, y por tanto, la estimación de μ sería menos precisa.

Para obtener el intervalo anterior, hemos utilizado un estadístico que depende de la muestra y del parámetro $\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$, cuya distribución es conocida e independiente del parámetro. Esto sugiere que para construir intervalos de confianza para otros parámetros o en otras condiciones (por ejemplo, si no se conoce σ^2), es necesario utilizar estadísticos similares, con distribución conocida. Esta es la forma en que procederemos en general:

- Consideraremos un estadístico $T(X_1,\ldots,X_n,\theta)$ que depende de la muestra $X_1,\ldots,X_n$ y del parámetro que queremos estimar, θ, cuya distribución sea conocida e independiente de dicho parámetro.

- Para dicha distribución, y fijado el nivel de confianza $1-\alpha$, seleccionaremos un intervalo $[a,b]$ del soporte que tenga probabilidad $1-\alpha$.

- En la desigualdad $a \leq T(X_1,\ldots,X_n,\theta) \leq b$ despejamos θ, obteniendo el intervalo deseado.

Naturalmente, como nos interesa obtener intervalos "pequeños" en amplitud, trataremos de elegir el intervalo $[a,b]$ de menor amplitud posible. Hay que señalar que, en los casos en los que la distribución del estadístico sea simétrica, los intervalos que vamos a construir son de amplitud mínima, para un nivel de confianza fijado. En los demás casos, la construcción de un intervalo de amplitud mínima resulta excesivamente complicado y conduce a fórmulas poco manejables en la práctica, y por tanto, los intervalos construidos, lo serán, buscando una mayor sencillez.

Vamos a estudiar algunos de estos estadísticos y a introducir algunas distribuciones importantes, relacionadas con la distribución normal.

7 Distribuciones utilizadas en la construcción de intervalos de confianza

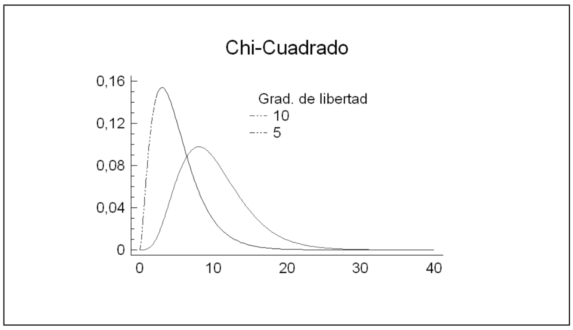
1. **Distribución χ^2_n.**

Definición 6 *Sean $Z_1, \ldots, Z_n$ v.a. con distribución $N(0,1)$ e independientes. Entonces la v.a. $X = Z_1^2 + Z_2^2 + \ldots + Z_n^2$ se dice que tiene una distribución chi-cuadrado con n grados de libertad y se denota por χ^2_n.*

Propiedades 1 *i.* $S_X = [0, \infty)$.

ii. $E(X) = n$ *y* $Var(X) = 2n$.

iii. **Propiedad de reproductividad:** *Si $X_1, \ldots, X_k$ tienen distribuciones $\chi^2_{n_i}$, para $i = 1, \ldots, k$, y son independientes, entonces la variable $X = \sum_{i=1}^{k} X_i$ tiene distribución χ^2_n con $n = \sum_{i=1}^{k} n_i$ grados de libertad.*



iv. Si Z es una v.a. con distribución χ^2_n, X es una v.a. con distribución $\chi^2_{n_1}$ con $n > n_1$, y $Z = X + Y$, siendo X e Y v. a. independientes, entonces Y tiene distribución $\chi^2_{n-n_1}$.

Esta nueva distribución es la que siguen algunos estadísticos que utilizaremos para obtener intervalos de confianza. En particular, el estadístico que describimos a continuación y que se utiliza para construir el intervalo de confianza de la varianza de una v. a. X con distribución $N(\mu, \sigma)$

Proposición 3 *Sea X una v.a. con distribución $N(\mu, \sigma)$ y sea $X_1, \ldots, X_n$ una m.a.s. de esta distribución. Entonces, el estadístico $\frac{n\,S^2}{\sigma^2}$ tiene distribución χ^2_{n-1}.*

Demostración

Vamos a desarrollar

$$\frac{nS^2}{\sigma^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2}{\sigma^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu + \mu - \overline{X})^2}{\sigma^2} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{(X_i - \mu)^2 + (\mu - \overline{X})^2 + 2(X_i - \mu)(\mu - \overline{X})}{\sigma^2} =$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2}{\sigma^2} + \frac{\sum_{i=1}^{n}(\mu - \overline{X})^2}{\sigma^2} + 2(\mu - \overline{X}) \sum_{i=1}^{n} \frac{(X_i - \mu)}{\sigma^2} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{(X_i - \mu)^2}{\sigma^2} + n\frac{(\mu - \overline{X})^2}{\sigma^2} - 2n\frac{(\mu - \overline{X})^2}{\sigma^2} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{X_i - \mu}{\sigma}\right)^2 - \frac{(\mu - \overline{X})^2}{\sigma^2/n}.$$

Por tanto,

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{X_i - \mu}{\sigma}\right)^2 = \frac{nS^2}{\sigma^2} + \frac{(\mu - \overline{X})^2}{\sigma^2/n}.$$

Para cada $i = 1, \ldots, n$, la variable $\frac{X_i - \mu}{\sigma}$ tiene distribución $N(0,1)$. La variable $\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ tiene también distribución $N(0,1)$; por último, aunque no lo demostraremos, las variables $\frac{nS^2}{\sigma^2}$ y $\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ son independientes (ello se debe a que, si X es una v. a. con distribución normal, entonces las variables $\overline{X}$ y S^2 son independientes). Por tanto, $\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i-\mu}{\sigma}\right)^2$ tiene una distribución χ^2_n, mientras que $\frac{(\overline{X}-\mu)^2}{\sigma^2/n}$ tiene distribución χ^2_1. Aplicando la propiedad (iv), se deduce que $\frac{nS^2}{\sigma^2}$ tiene una distribución χ^2_{n-1}.

Observación 4 *Puede observarse que* $\frac{nS^2}{\sigma^2} = \frac{(n-1)S_c^2}{\sigma^2}$ *, de forma que ambas expresiones pueden utilizarse indistintamente para el estadístico.*

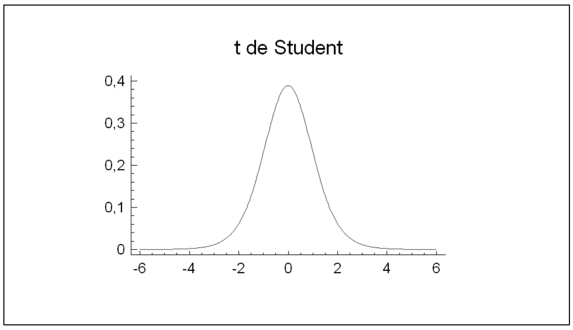
2. **Distribución t de Student.**

Definición 7 *Sea Z una v. a. con distribución $N(0,1)$, y sea Y una v. a. con distribución χ^2_n. Si Z e Y son independientes, la variable $X = \frac{Z}{\sqrt{Y/n}}$ se dice que tiene una distribución t de Student con n grados de libertad. Esta distribución se denota por t_n.*

Propiedades 2 *(a)* $S_X = (-\infty, \infty)$.

(b) $E(X) = 0$ *y* $Var(X) = \frac{n}{n-2}$, *si* $n > 2$.

(c) La distribución es simétrica respecto de $x = 0$, y es similar a la normal (distribución a la que tiende cuando el número de grados de libertad tiende a ∞.) Tiene colas más amplias que la normal.



Esta distribución aparece, por ejemplo, al construir el intervalo de confianza para el parámetro μ de una variable X con distribución $N(\mu, \sigma)$, y σ desconocido. O también, a la hora de estimar el valor de la diferencia de medias $\mu_1 - \mu_2$ de dos v. a. independientes, $X_1 \rightsquigarrow N(\mu_1, \sigma)$ e $X_2 \rightsquigarrow N(\mu_2, \sigma)$, con varianzas desconocidas pero iguales.

Proposición 4 *Sea X una variable aleatoria con distribución $N(\mu, \sigma)$ y sea $X_1, \ldots, X_n$ una m.a.s. de esta distribución. Entonces el estadístico $\frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n-1}}$ tiene distribución t_{n-1}.*

Demostración

En efecto, ya habíamos visto anteriormente que la variable $\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ tiene distribución $N(0,1)$. Por otra parte, la variable $\frac{nS^2}{\sigma^2}$ tiene una distribución χ^2_{n-1} y es independiente de la anterior. Por tanto,

$$\frac{\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}}{\sqrt{\frac{nS^2/\sigma^2}{n-1}}} = \frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n-1}}$$

tiene distribución t_{n-1}.

Observación 5 *Puede observarse que:*

$$\frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n-1}} = \frac{\overline{X}-\mu}{S_c/\sqrt{n}}.$$

Al construir intervalos de confianza pueden utilizarse cualquiera de los dos estadísticos (generalmente, en función de la información disponible, es decir, según que lo que se conozca sea S o S_c.)

Proposición 5 *Sean $X \rightsquigarrow N(\mu_1,\sigma)$ e $Y \rightsquigarrow N(\mu_2,\sigma)$ dos v. a. independientes, con varianzas iguales; si $X_1,\ldots,X_{n_1}$ es una m.a.s. de la variable X, e $Y_1,\ldots,Y_{n_2}$ es una m.a.s. de la variable Y, entonces el estadístico*

$$\frac{\overline{X}-\overline{Y}-(\mu_1-\mu_2)}{\frac{n_1S_1^2+n_2S_2^2}{n_1+n_2-2}\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}},$$

tiene distribución $t_{n_1+n_2-2}$.

Observación 6 *Notar que también se verifica:* $\frac{n_1S_1^2+n_2S_2^2}{n_1+n_2-2} = \frac{(n_1-1)(S_c)_1^2+(n_2-1)(S_c)_2^2}{n_1+n_2-2}$.

3. Distribución F de Fisher-Snedecor

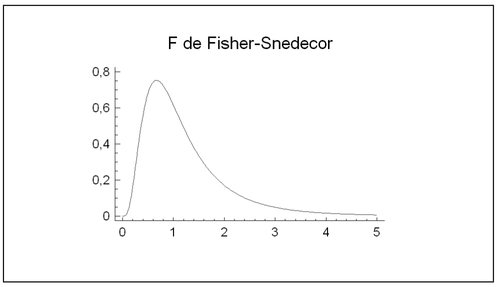
Definición 8 *Sean X e Y dos variables chi-cuadrado con n y m grados de libertad, respectivamente, e independientes. Entonces, la variable $F=\frac{X/n}{Y/m}$ se dice que tiene distribución F de Fisher-Snedecor con n,m grados de libertad. Esta distribución se denota por $F_{n,m}$.*

Propiedades 3 *(a) $S_F=[0,\infty)$.*

(b) $E(F)=\frac{m}{m-2}$, si $m>2$, y
$Var(F)=\frac{2m^2(n+m-2)}{n(m-2)^2(m-4)}$, si $m>4$.

(c) Si X tiene una distribución $F_{n,m}$ e Y tiene una distribución $F_{m,n}$, entonces el punto $x\in I\!R$ para el cual $p(X\leq x)=1-\alpha$, verifica que $p(Y\leq\frac{1}{x})=\alpha$.

(d) La distribución F tiene una gráfica (su función de densidad) similar a la de la chi-cuadrado.



Esta distribución es la que utilizaremos para obtener el intervalo de confianza del cociente de varianzas de variables normales independientes.

Proposición 6 *Sean $X \rightsquigarrow N(\mu_1,\sigma_1)$ e $Y \rightsquigarrow N(\mu_2,\sigma_2)$ dos v. a. independientes. Entonces, el estadístico $\frac{(S_c)_1^2/\sigma_1^2}{(S_c)_2^2/\sigma_2^2}$ tiene distribución F_{n_1-1,n_2-1}.*

En efecto, hemos visto anteriormente que las variables $\frac{(n_1-1)(S_c)_1^2}{\sigma_1^2}$ y $\frac{(n_2-1)(S_c)_2^2}{\sigma_2^2}$ tienen respectivamente distribuciones $\chi^2_{n_1-1}$ y $\chi^2_{n_2-1}$. Además son independientes, por serlo X e Y. Por tanto, la variable

$$\frac{((n_1-1)(S_c)_1^2/\sigma_1^2)}{(n_1-1)} : \frac{((n_2-1)(S_c)_2^2/\sigma_2^2)}{(n_2-1)} = \frac{(S_c)_1^2/\sigma_1^2}{(S_c)_2^2/\sigma_2^2}$$

tiene distribución F_{n_1-1,n_2-1}.

En la Tabla 1, aparecen los estadísticos y principales intervalos de confianza de parámetros de variables con distribución normal.

8 Otros intervalos de confianza

Se pueden construir también intervalos de confianza para algunos parámetros de los que depende la distribución de algunas variables aleatorias no normales, por ejemplo el parámetro p de una variable $\mathcal{B}(p)$, o el parámetro λ de una variable con distribución $\mathcal{P}(\lambda)$. En general, dada una variable aleatoria X cuya media $E(X)=\mu$, el estadístico $\overline{X}$ verifica

$$\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/n} \rightsquigarrow N(0,1)$$

si el tamaño de la muestra, n, es suficientemente grande. Si la varianza de X es conocida, a partir del estadístico anterior podríamos deducir un intervalo de confianza para μ con un nivel de confianza $1-\alpha$:

$$\overline{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\frac{\alpha}{2}} \le \mu \le \overline{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\frac{\alpha}{2}}$$

Si σ es desconocido, se puede sustituir en la expresión del estadístico por una estimación de la misma, obtenida a partir de la m.a.s. En ese caso, el estadístico tiene aproximadamente una distribución $N(0,1)$.

Por ejemplo, si $X \rightsquigarrow \mathcal{B}(p)$, una estimación de p la proporciona el valor de $\overline{X}$, y el estadístico:

$$\frac{\overline{X}-\mu}{\sqrt{\overline{X}(1-\overline{X})/n}} \simeq N(0,1);$$

por tanto, el intervalo de nivel $1-\alpha$ para p es:

$$\overline{X} - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\overline{X}(1-\overline{X})}{n}} \le \mu \le \overline{X} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\overline{X}(1-\overline{X})}{n}}$$

Igualmente, se pueden construir intervalos de confianza para la diferencia de medias de v. a. independientes, no necesariamente normales, a partir de sendas muestras aleatorias simples, siempre que el tamaño de éstas sea lo suficientemente grande.

La Tabla 2 contiene los estadísticos e intervalos de confianza asintóticos más usuales para parámetros de distribuciones no normales.

9 Algunas aplicaciones de los intervalos de confianza.

1. Toma de decisiones:

   Además de servirnos para estimar el valor de un parámetro, proporcionando una medida del error de estimación, los intervalos de confianza permiten tomar ciertas decisiones en cuánto al valor de dichos parámetros; por ejemplo:

- Si un valor determinado podría ser o no el valor del parámetro.
- Si las medias de dos variables pueden ser o no iguales.
- Si las varianzas de dos variables pueden ser o no iguales.
- Si la probabilidad p de una característica en dos poblaciones distintas, puede ser o no igual.

  ...

Todas estas decisiones se basan en el significado del nivel de confianza: si un intervalo tiene nivel $1-\alpha$, sabemos que eso significa que para el $(1-\alpha)100\%$ de los intervalos construidos a partir de muestras de tamaño n, el parámetro estará en el intervalo; cuando seleccionamos una muestra, existe por tanto probabilidad $1-\alpha$ de elegir una de estas muestras "buenas", de forma que si determinado valor no está en el intervalo, parece poco creíble que pudiera ser el valor del parámetro, mientras que si lo está, es admisible que sea el valor del parámetro. La forma de expresar lo anterior no es casual y está llena de matices: no tiene el mismo significado "no ser creíble" que "ser admisible".

Respecto de los ejemplos citados, si quiero decidir si es posible, por ejemplo que las medias de dos variables sean iguales, construiría el intervalo de confianza para la diferencia de medias y si el 0 estuviera en él, concluiría que la igualdad es posible, mientras que si no está concluiría que las medias son diferentes. De la misma forma, si quiero decidir si es posible que las varianzas de dos variables sean iguales, construiría el intervalo de confianza para el cociente de varianzas y si el 1 estuviera en él, concluiría que la igualdad es posible, mientras que si no está concluiría que las varianzas son diferentes.

Se procede igual con los otros ejemplos.

2. Determinación del tamaño muestral para garantizar una precisión en la estimación de un parámetro.

   La precisión de un intervalo simétrico consideramos que es la semilongitud del mismo; para intervalos no simétricos, se considera la longitud del intervalo. En ocasiones se puede determinar qué tamaño de muestra mínimo es necesario para garantizar que la precisión del intervalo es un valor prefijado. Por ejemplo, si X es una variable con distribución $N(\mu,\sigma)$, con σ conocido, y queremos que la precisión del intervalo sea ε, basta despejar n en la desigualdad:

$$\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\, z_{1-\frac{\alpha}{2}} < \varepsilon$$

   (Recordad que el intervalo para μ en este caso tiene la forma: $\overline{X} - z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \overline{X} + z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$)