代数系统（五）

代数格

南京大学计算机科学与技术系

内容提要

- 代数格的定义
- 格的对偶原理
- 子格
- 格同态、格同构
- 分配格
- 有界格
- 有补格
- 有补分配格

格（回顾）

- $(S,\preccurlyeq)$的一个（偏序）格，如果下列条件成立：
  - 设$(S,\preccurlyeq)$是偏序集
  - $\forall x, y \in S$, 存在$\{x,y\}$的最小上界**lub**$\{x,y\}$, 记为$x \vee y$。
  - $\forall x, y \in S$, 存在$\{x,y\}$的最大下界**glb**$\{x,y\}$, 记为$x \wedge y$。
- 设$(S, \preccurlyeq)$是格，则$(S, \wedge, \vee)$有下列性质：
  - 结合律：$(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$, $(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)$
  - 交换律：$a \wedge b = b \wedge a$, $a \vee b = b \vee a$
  - 吸收律：$a \wedge (a \vee b) = a$, $a \vee (a \wedge b) = a$

代数格（定义）

- 设**L**是一个集合，$\wedge$和$\vee$是**L**上的二元运算，且满足结合律、交换律、吸收律，则称**(L, $\wedge$, $\vee$)**是代数格。

等　式	名　称
$x\wedge(y\wedge z)=(x\wedge y)\wedge z$ $x\vee(y\vee z)=(x\vee y)\vee z$	结合律
$x\wedge y=y\wedge x$ $x\vee y=y\vee x$	交换律
$x\vee(x\wedge y)=x$ $x\wedge(x\vee y)=x$	吸收律

代数格中的偏序关系

- $\forall\, x, y \in \mathrm{B},\ x \wedge y = x$ *iff* $x \vee y = y$
  - 若 $x \wedge y = x$，则 $x \vee y = (x \wedge y) \vee y = y$ //吸收律
  - 若 $x \vee y = y$，则 $x \wedge y = x \wedge (x \vee y) = x$ //吸收律
- $\forall\, x, y \in \mathrm{B}$，定义 $x \preccurlyeq y$ *iff* $x \wedge y = x$ (即 $x \vee y = y$)
  - 证明这个关系满足自反性、反对称性、传递性。
  - 这个偏序构成一个格。
    - **lub{x,y}** 即为 $x \vee y$。
    - **glb{x,y}** 即为 $x \wedge y$。
- 代数格等同于<u>（偏序）格</u>

格的代数性质

结合律　交换律　吸收律　幂等律

吸收律 $\Rightarrow$ 幂等律

$x \wedge \underline{x} = x \wedge (\underline{x \vee (x \wedge x)}) = x$ （两次应用吸收律）

同理可证：$x \vee x = x$

关于格的对偶命题

- 对偶命题的例子
  - $a \wedge b \preccurlyeq a$和$a \vee b \succcurlyeq a$互为对偶命题
- 对偶命题构成规律
  - 格元素名不变
  - $\preccurlyeq$与$\succcurlyeq$，$\wedge$与$\vee$全部互换。

格的对偶原理

- 如果命题P对一切格为真，则P的对偶命题P^*也对一切格为真。
  - 证明思路：证明P^*对任意格$(S, \preccurlyeq)$为真
  - 定义S上的二元关系$\preccurlyeq^*$，$\forall a,b \in S$，$a \preccurlyeq^* b \Leftrightarrow b \preccurlyeq a$，显然$\preccurlyeq^*$是偏序。
  - $\forall a,b \in S$，$a \wedge^* b = a \vee b$，$a \vee^* b = a \wedge b$ 所以$(S, \preccurlyeq^*)$也是格
    - 这里$a \wedge^* b$，$a \vee^* b$分别是a,b关于偏序$\preccurlyeq^*$的最大下界和最小上界。
  - P^*在$(S, \preccurlyeq)$中为真*当且仅当*P在$(S, \preccurlyeq^*)$中为真。
  - P在一切格中为真，$\therefore P^*$在一切格中为真。

子 格

- 子格（sub lattice）是格的子代数。设 $\langle L,\wedge,\vee\rangle$ 是格，非空集合 $S\subseteq L$，若 S 关于 L 中的运算 $\wedge,\vee$ 仍构成格，称 $\langle S,\wedge,\vee\rangle$ 是 L 的子格

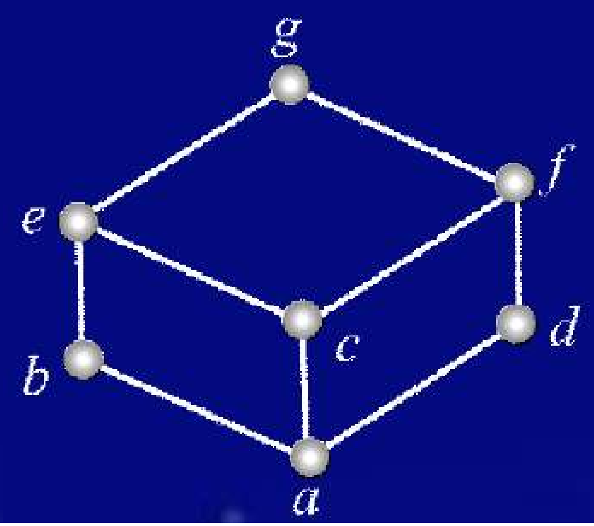
例 13.5 设格 L 如图 3 所示. 令

$$S_1=\{a, e, f, g\}, S_2=\{a, b, e, g\}$$

S_1 不是 L 的子格, 因为

$$e, f\in S_1 \text{ 但 } e\wedge f=c\notin S_1.$$

S_2 是 L 的子格.



格同态

定义 13.5 设 L_1 和 L_2 是格，

$$f: L_1 \to L_2,$$

若 $\forall a,b \in L_1$ 有

$$\boxed{\begin{aligned} f(a \wedge b) &= f(a) \wedge f(b), \\ f(a \vee b) &= f(a) \vee f(b) \end{aligned}}$$

成立，则称 f 为格 L_1 到 L_2 的同态映射，简称格同态.

格同态与格同构

- 设f是格L_1到L_2的映射，
  - (1) 若f为格同态映射，则f保序，即

$$(\forall x, y \in L_1)(x \preccurlyeq y \to f(x) \preccurlyeq f(y))$$

  - (2) 若f为双射，则f为格同构映射（即格同构）当且仅当

$$(\forall x, y \in L_1)(x \preccurlyeq y \Leftrightarrow f(x) \preccurlyeq f(y))$$

格同态的保序性（续）

例　设 $L_1 = <S_{12},D>$, $L_2 = <S_{12},\leq>$是格，其中：

S_{12} 是 12 的所有正因子构成的集合，

D 为整除关系，$\leq$为通常数的小于或等于关系.

令

$$f{:}S_{12}\to S_{12}, f(x) = x$$

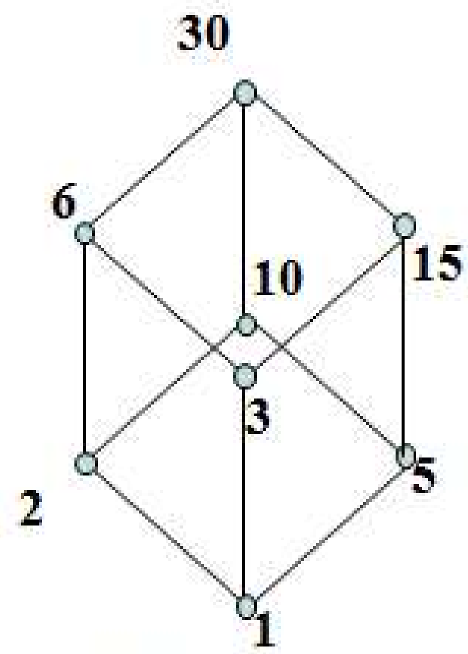
f 是双射，但不是格 L_1 到 L_2 的同构映射.

因为 $f(2) \leq f(3)$，但 2 不整除 3.

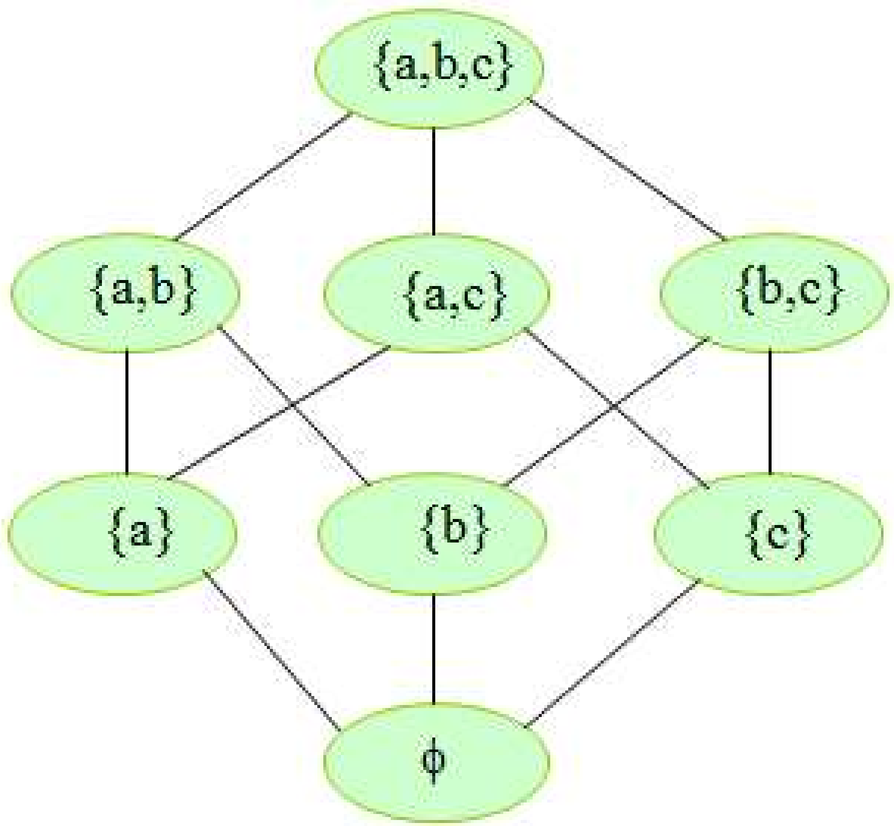
根据上述定理可知 f 不是同构映射

格同构的直观特征

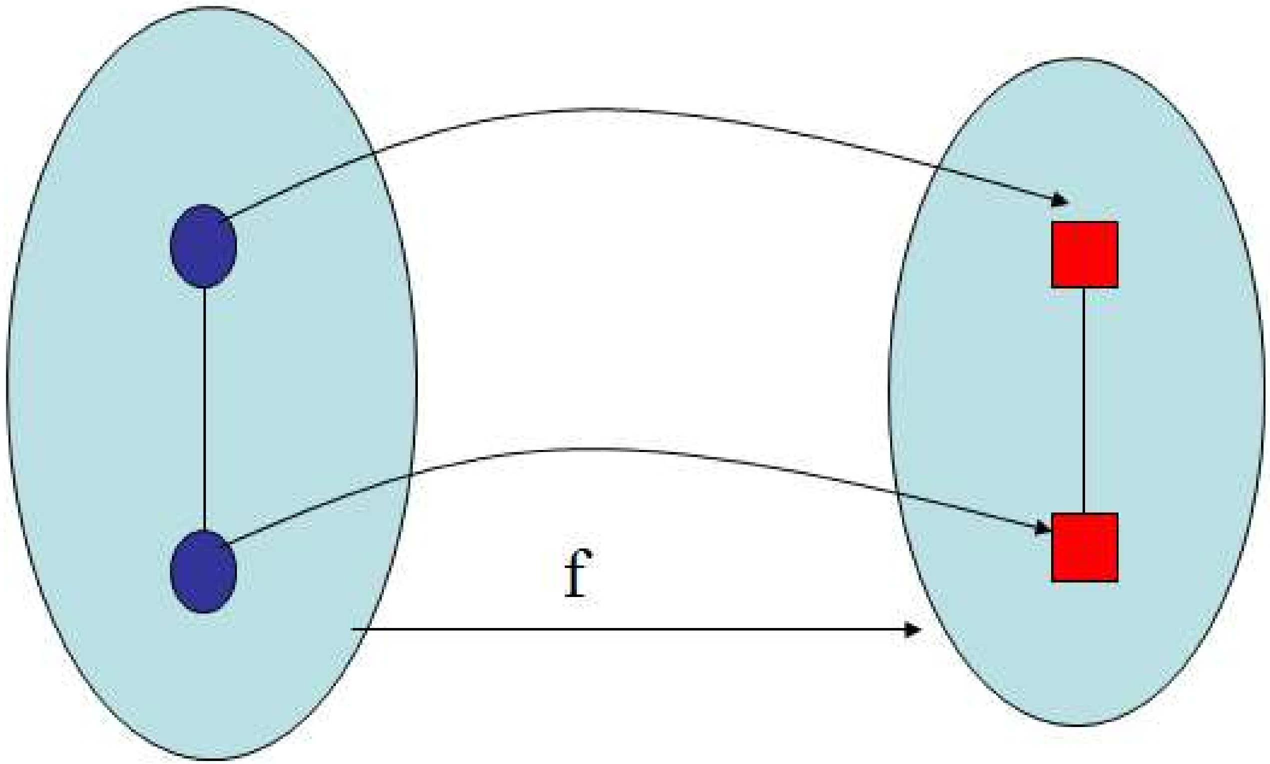
- 观察以下2个格的哈斯图：



D_{30}



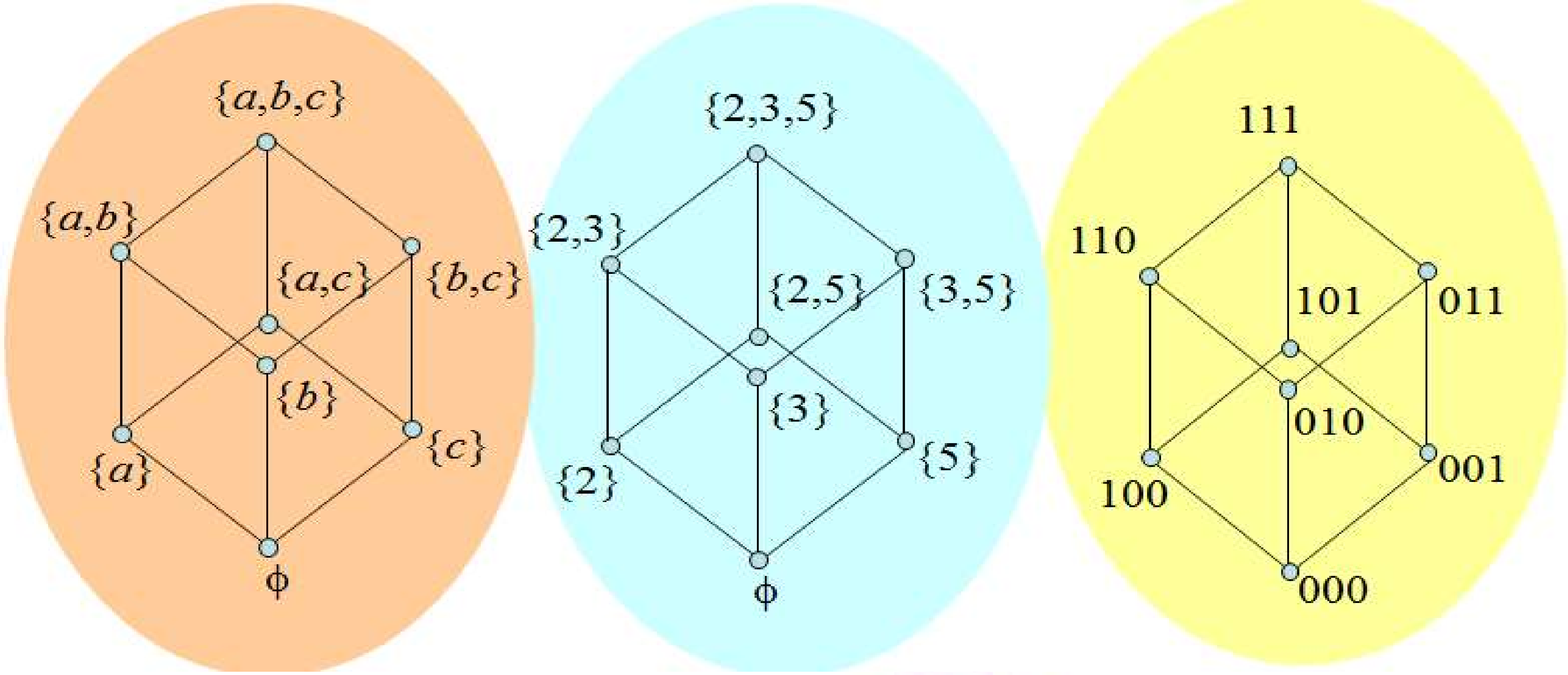
格同构的直观特征（续）



格同构的直观特征（续）

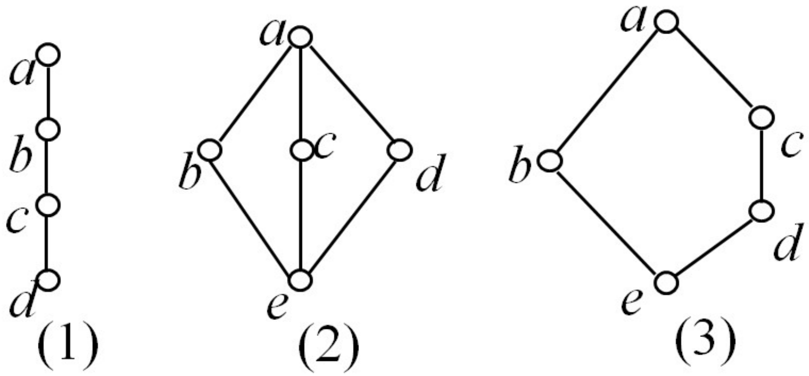
- Iso ⇨ same
- Morph ⇨ shape

⇒ Isomorphic lattices have same Hasse diagrams' shape



几种典型的格

- 定义（三种典型的格）：
  - (1) 链（chain）
  - (2) 钻石格（diamond lattice, M_3）
  - (3) 五角格（pentagon lattice, N_5）



分配格

- 定义（分配格）：设$\langle L, \wedge, \vee \rangle$为格，若$\forall a, b, c \in L$，有

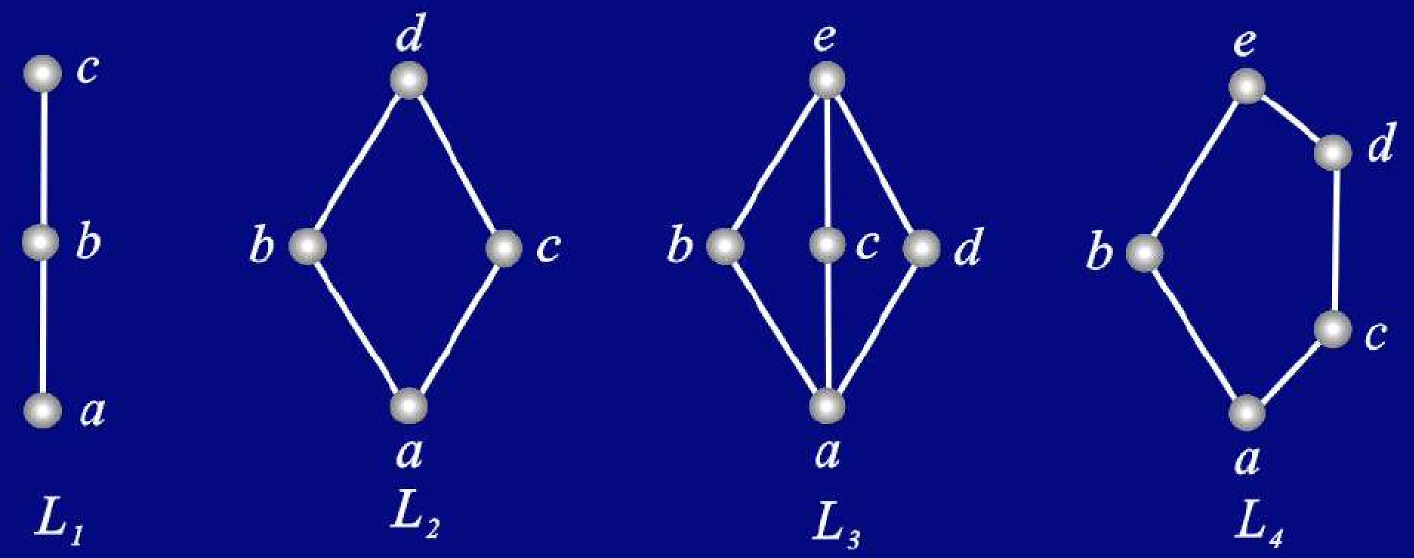
$$\boldsymbol{a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)}$$

$$\boldsymbol{a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)}$$

则称L为分配格（distributive lattice）

分配格（续）

例　参见下图



L_1 和 L_2 是分配格, L_3 和 L_4 不是分配格.　　　　图5

在 L_3 中，$b\wedge(c\vee d)=b\wedge e=b$，$(b\wedge c)\vee(b\wedge d)=a\vee a=a$

在 L_4 中，$c\vee(b\wedge d)=c\vee a=c$，$(c\vee b)\wedge(c\vee d)=e\wedge d=d$

分配格的判定定理

- 定理（分配格判定定理一）：设L为格，则L是分配格当且仅当L不含有与$\boldsymbol{M_3}$（钻石格）或$\boldsymbol{N_5}$（五角格）同构的子格
- 推论：
  - (1)小于五元的格皆为分配格
  - (2)任何链皆为分配格

分配格的判定定理（续）

例　说明图 6 中的格是否为分配格，为什么？

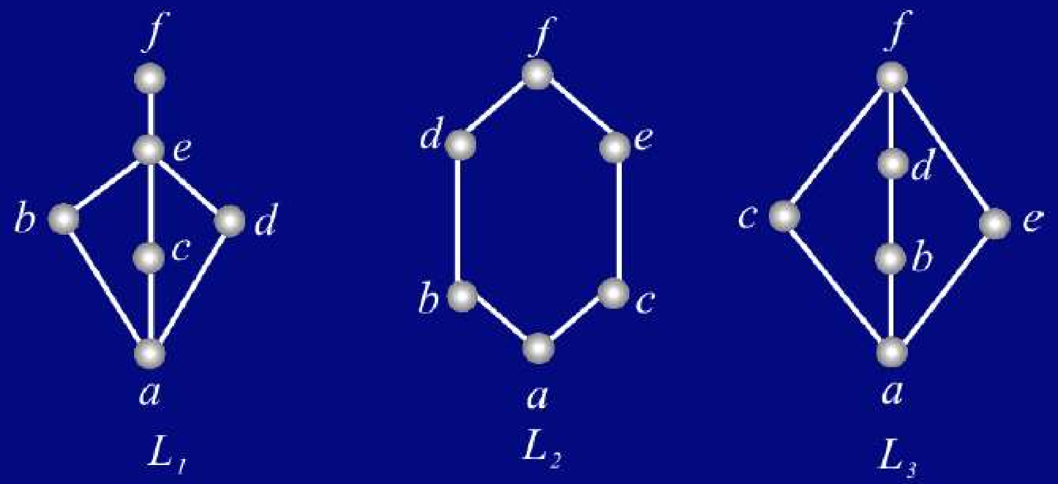


图 6

解　L_1, L_2 和 L_3 都不是分配格.

$\{a, b, c, d, e\}$ 是 L_1 的子格，并且同构于钻石格；

$\{a, b, c, e, f\}$ 是 L_2 的子格，并且同构于五角格；

$\{a, c, b, e, f\}$ 是 L_3 的子格，也同构于钻石格.

分配格的判定定理（续）

- 定理（分配格判定定理二）：设L为格，

  则L是分配格当且仅当

$$(\forall a,b,c \in L)(a \wedge b = a \wedge c \text{且} a \vee b = a \vee c)$$

$$\rightarrow b = c$$

分配格的判定定理（续）

证 必要性. $\forall a,b,c \in L$，有

$b = b \vee (a \wedge b)$	(吸收律,交换律)
$= b \vee (a \wedge c)$	(已知条件代入)
$= (b \vee a) \wedge (b \vee c)$	(分配律)
$= (a \vee c) \wedge (b \vee c)$	(已知条件代入,交换律)
$= (a \wedge b) \vee c$	(分配律)
$= (a \wedge c) \vee c$	(已知条件代入)
$= c$	(交换律,吸收律)

分配格的判定定理（续）

例　以下三个格都不是分配格.

在 L_1 中有 $b \vee c = b \vee d, b \wedge c = b \wedge d$, 但 $c \neq d$

在 L_2 中有 $b \wedge c = b \wedge e, b \vee c = b \vee e$, 但 $c \neq e$

在 L_3 中有 $c \wedge b = c \wedge d, c \vee b = c \vee d$, 但 $b \neq d$

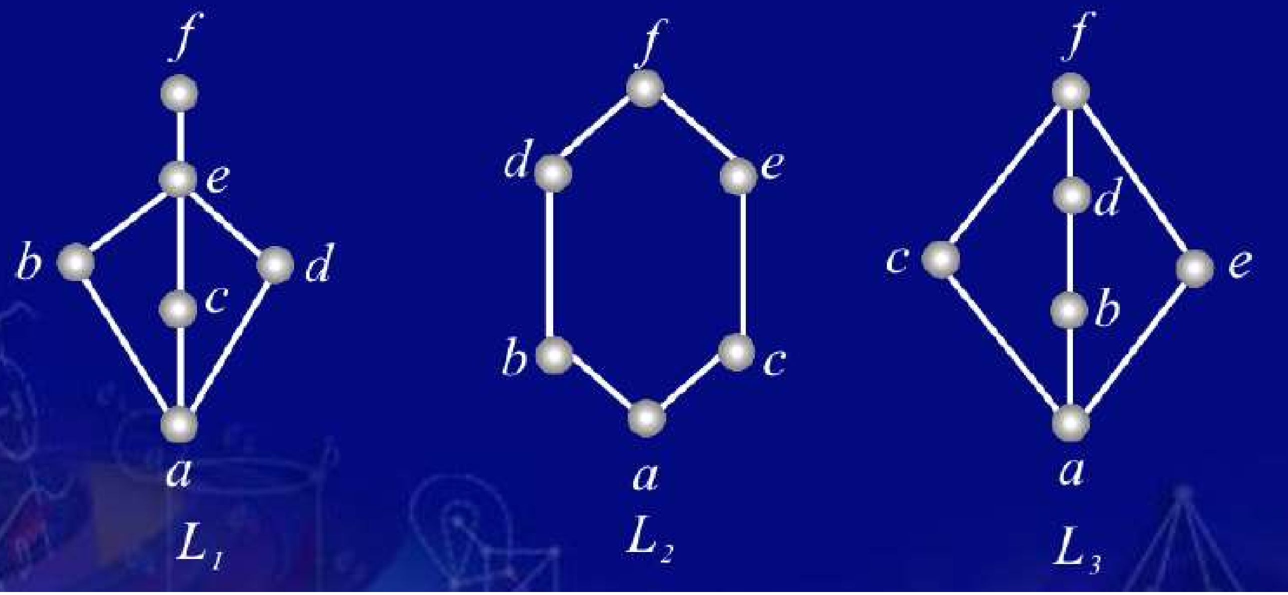


图7

有界格

- 定义（有界格）：设L为格，
  - 若存在$b \in L$，使得$\forall x \in L$有$b \preccurlyeq x$，则称元素b是格L的全下界（bottom）
  - 若存在$t \in L$，使得$\forall x \in L$有$x \preccurlyeq t$，则称元素t是格L的全上界（top）

此时格L称为有界格（bounded lattice）

有界格（续）

- **注意**：
  - 若格L中存在全下界或全上界，则一定唯一
  - 一般将格L的全下界记为$\mathbf{0}$，全上界记为$\mathbf{1}$
  - 有界格L一般记为$\langle \boldsymbol{L}, \wedge, \vee, \mathbf{0}, \mathbf{1} \rangle$
  - 有界格$\langle L, \wedge, \vee, 0, 1 \rangle$满足同一律，即$\forall a \in L$：

$$a \vee \mathbf{0} = a, a \wedge \mathbf{1} = a, a \wedge \mathbf{0} = \mathbf{0}, a \vee \mathbf{1} = \mathbf{1}$$

有界格（续）

- 有界格$\langle L,\wedge,\vee,0,1\rangle$满足同一律、支配律
  - 同一律：$\forall a \in L$，$a \vee \mathbf{0} = a$, $a \wedge \mathbf{1} = a$
  - 支配律：$\forall a \in L$，$a \wedge \mathbf{0} = \mathbf{0}$, $a \vee \mathbf{1} = \mathbf{1}$
  - **0**是关于$\vee$运算的单位元，$\wedge$运算的零元；
  - **1**是关于$\wedge$运算的单位元，$\vee$运算的零元。

有界格（续）

- 事实：
  - 有限格皆为有界格，设$L=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$，则

    $a_1\wedge a_2\wedge\cdots\wedge a_n$是$L$的全下界

    $a_1\vee a_2\vee\cdots\vee a_n$是$L$的全上界
  - 求涉及有界格的命题之对偶命题，须将全下界与全上界对换

有补格

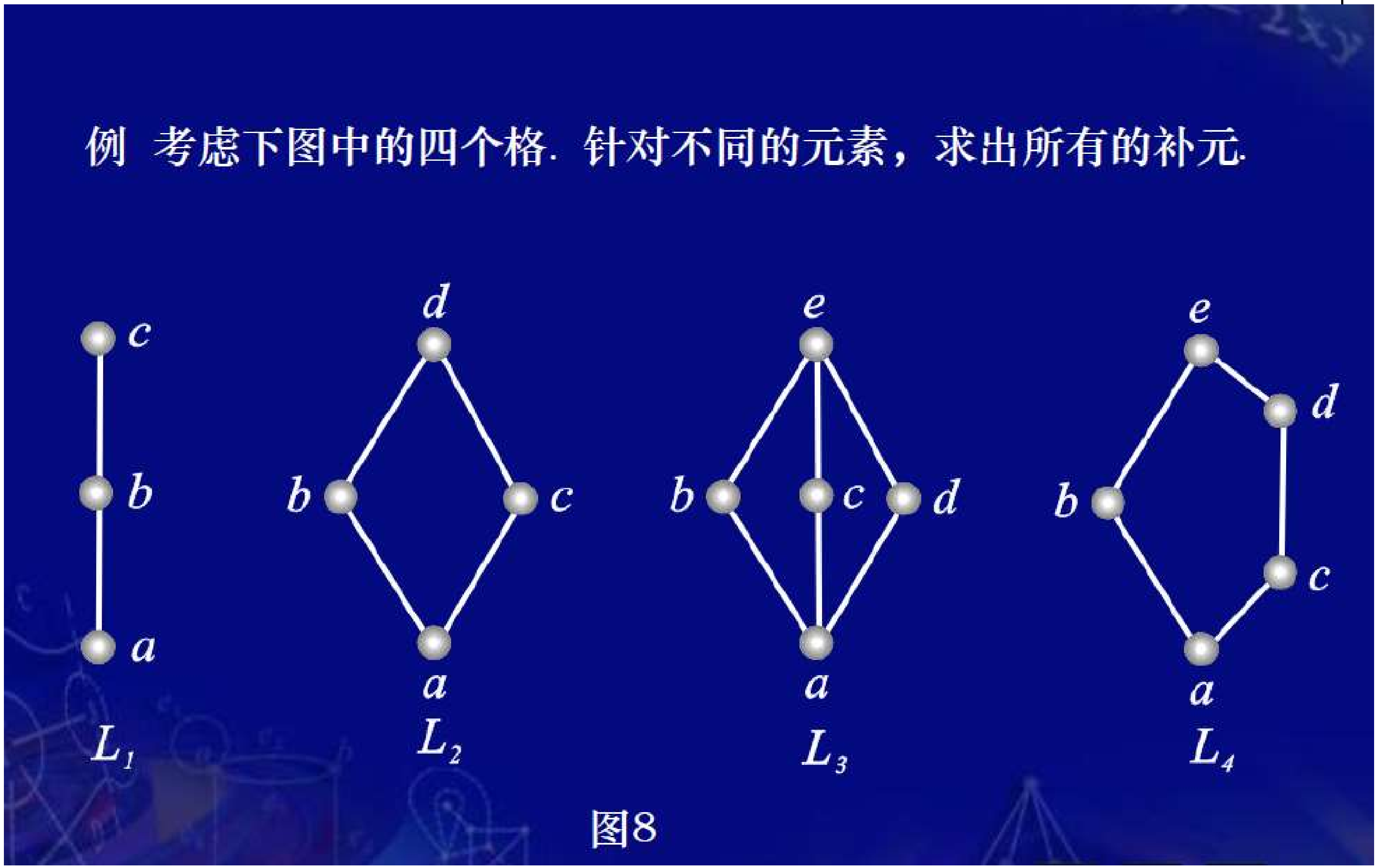
- 定义（有界格的补元）：设$\langle L, \wedge, \vee, 0, 1\rangle$为

  有界格，$a \in L$，若存在$b \in L$使得

$$a \wedge b = \mathbf{0} \text{ 且 } a \vee b = \mathbf{1}$$

成立，则称元素b是a的补元（complement）

有补格（续）


例 考虑下图中的四个格. 针对不同的元素，求出所有的补元.
c
b
a
L_1
d
b
c
a
L_2
e
b
c
d
a
L_3
e
d
b
c
a
L_4
图8

有补格（续）

- 定理（有界分配格的补元唯一）：设 $\langle L, \wedge, \vee, 0, 1\rangle$ 为有界分配格，$a \in L$，若a存在补元则其补元唯一
- 证明：假设b, c皆为a之补元，则有

$$a \vee c = \mathbf{1}, a \wedge c = \mathbf{0}; a \vee b = \mathbf{1}, a \wedge b = \mathbf{0}$$

由于全上界和全下界唯一，从而有$a \vee c = a \vee b$，$a \wedge c = a \wedge b$，由于L是分配格，故$b = c$. □

有补格（续）

- 事实
  - 任何有界格中，全上界1和全下界0互补
  - 对于一般元素，可能存在补元，也可能不存在补元
  - 补元若存在，则可能唯一，也可能有多个
  - 对于有界分配格，补元若存在则唯一

有补格（续）

- 定义（有补格）：设$\langle L,\wedge,\vee,0,1\rangle$为有界格，若$L$中所有元素皆存在补元，则称$L$为有补格（complemented lattice）
- 例：钻石格M_3和五角格N_5皆为有补格

有补分配格

- 代数格：结合律、交换律、吸收律、（幂等律）
- 分配格：分配律
- 有　界：同一律、（支配律）
- 有　补：补　律、（双重补律、德摩根律）

有补分配格（代数性质）

结合律 交换律 分配律 同一律 补律

吸收律 幂等律 支配律 双重补律 德摩根律