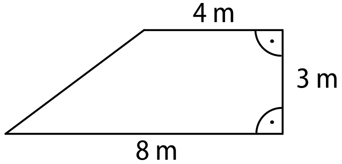
Министарство просвете, науке и технолошког развоја
ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

Окружно такмичење из математике
ученика основних школа

21.03.2021.

VIII разред

1. За основу бетонског стуба, стуб је облика праве призме, потребно је ископати јаму дубоку 1,5 m (основа приказана на слици). За колико сати ће јаму ископати три радника ако сваки од њих ископа 0,75 m^3 за 1 час?



2. Бочна страна правилне тростране пирамиде је једнакокраки троугао са углом од 30° при врху. Дужина бочне ивице је 8 cm. Израчунати површину те пирамиде.

3. Одреди целе бројеве *x* и *y* тако да важи

$$2019x^4 + 2020y^4 = 2021^{2021}.$$

4. Од 10 различитих цветова треба направити букет у коме се налазе бар два цвета. На колико начина се то може направити?

5. Решити једначину

$$|2x + 21| - |x - 20| = 2021.$$

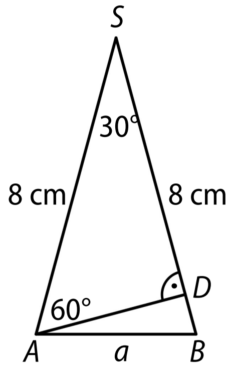
Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.
Израда задатака траје 150 минута.
Решење сваког задатка кратко и јасно образложити.

VIII РАЗРЕД

Признавати сваки тачан поступак који се разликује од кључа.
Бодовање прилагодити конкретном начину решавања.

1. (**МЛ 55/2**) Запремина јаме је $\frac{8\text{ m}+4\text{ m}}{2}\cdot 3\text{ m}\cdot 1{,}5\text{ m}=27\text{ m}^3$ [**10 поена**]. Три радника за један час ископају 2,25 m^3 земље [**2 поена**], па ће читаву земљу ископати за 27 : 2,25 = 12 часова [**8 поена**].

2. Означимо са *a* основну ивицу пирамиде *ABCS*. Површина бочне стране *ABS* једнака је $\frac{BS\cdot AD}{2}=$ 16 cm^2 [**6 поена**], па је површина омотача пирамиде $M = 3 \cdot 16\text{ cm}^2 = 48\text{ cm}^2$ [**2 поена**]. У троуглу *ADS* имамо да је $DS=\sqrt{AS^2-AD^2}=4\sqrt{3}$ cm, па из троугла *ABD* је $a^2=AD^2+DB^2=16+(8-4\sqrt{3})^2=$ $64\cdot(2-\sqrt{3})$ cm^2 [**5 поена**], па је површина основе пирамиде $B=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}=16\cdot(2\sqrt{3}-3)$ cm^2 [**2 поена**],



а површина пирамиде $P=B+M=32\sqrt{3}$ cm^2 [**5 поена**]

3. Последња цифра четвртог степена целог броја може да буде 0, 1, 5 или 6 [**4 поена**], па последња цифра броја $2019x^4$ може да буде 0, 9, 5 или 4 [**4 поена**], а броја $2020y^4$ је 0 [**2 поена**]. Дакле, последња цифра израза $2019x^4 + 2020y^4$ је 0, 9, 5 или 4 [**6 поена**]. Последња цифра броја 2021^{2021} је 1 [**2 поена**], па дата једначина нема решења у скупу целих бројева [**2 поена**].

4. Израчунајмо прво на колико начина се може изабрати 0, 1, 2, ..., 9 или свих 10 цветова. Ако један цвет изаберемо, означимо га са 1, а ако га не изаберемо, означимо га са 0. За сваки цвет постоје две могућности, 0 или 1, па је број избора $\underbrace{2\cdot 2\cdot\ldots\cdot 2}_{10}=2^{10}$ [**6 поена**]. Од овог броја треба да одузмемо оне изборе у којима нема ниједног цвета, а то је само један избор, и оне у којима је по један цвет, а то је десет избора [**6 поена**]. Дакле, укупан број начина на који можемо да изаберемо букет је $2^{10} - 10 - 1 = 1013$ [**8 поена**].

5. Како је $|2x+21|=\begin{cases}2x+21, & x\geq -10,5\\ -2x-21, & x<-10,5\end{cases}$ и $|x-20|=\begin{cases}x-20, & x\geq 20\\ 20-x, & x<20\end{cases}$

[**5 поена**], разликујемо три случаја:

1°) За $x \geq 20$ добијамо једначину $2x + 21 - x + 20 = 2021$, чије је решење $x = 1980$ [**5 поена**].

2°) За $-10,5 \leq x < 20$ добијамо једначину $-2x - 21 - x + 20 = 2021$, чије је решење $x=-\frac{2022}{3}$. Како је $-\frac{2022}{3}<-10,5$ у овом случају немамо решења [**5 поена**].

3°) За $-10,5 < x$ добијамо једначину $-2x - 21 - 20 + x = 2021$, чије је решење $x = -2062$ [**5 поена**].

Дакле, решења једначине су $x \in \{-2062, 1980\}$.