Trabajo Fin de Máster

Propuesta didáctica: Curvas cónicas y lugares geométricos

Teaching proposal: Conical curves and geometric places

Autor

Óscar Iglesias Valiño

Directora

Alejandra S. Córdova Martínez

FACULTAD DE EDUCACIÓN

2020

Contenidos

A. Sobre la definición del objeto matemático a enseñar

1. Nombra el objeto matemático a enseñar.

En este trabajo se estudiará la enseñanza y aprendizaje de las curvas cónicas introducidas desde el concepto de lugar geométrico, así como la determinación de posiciones relativas entre ellas.

2. Indica el curso y asignatura en la que sitúas el objeto matemático.

Este objeto matemático pertenece al currículo de la asignatura de Matemáticas I, enmarcada en el primer curso de Bachillerato como muestra el marco legal, en concreto el Real Decreto 1105/2014 en donde se establece el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria y el Bachillerato. Este objeto matemático aparece en el currículo de esta asignatura, pero sin embargo no aparece en la asignatura de Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales.

En concreto uno de los criterios de evaluación que establece el Real Decreto mencionado anteriormente dice lo siguiente referido a este objeto matemático: “Manejar el concepto de lugar geométrico en el plano. Identificar las formas de los lugares geométricos más usuales, estudiando sus ecuaciones reducidas y analizando sus propiedades métricas.”

3. ¿Qué campo de problemas, técnicas y tecnologías asociadas al objeto matemático pretendes enseñar?

Durante esta unidad didáctica se trabajarán los siguientes campos de problemas:

- Campo 1. Problemas de cálculo de distancias en órbitas de cuerpos celestes.

- Campo 2. Resolución de posición relativa de dos trayectorias con forma de curva cónica.
- Campo 3. Problemas de tiro parabólico.
- Campo 4. Posicionamiento mediante un sistema de localización hiperbólico.
- Campo 5. Ubicación óptima de objetos.
- Campo 6. Reflexión de un rayo de luz con un espejo hiperbólico o una onda sonora en el caso de una parábola.
- Campo 7. Descripción de trayectorias empleando el concepto de lugar geométrico.

En cuanto a las técnicas:

- Tec 1. Hallar la ecuación de una elipse con alguno de sus elementos.
- Tec 2. Calcular los elementos de una elipse a partir de su ecuación.
- Tec 3. Hallar la ecuación de una hipérbola por sus elementos.
- Tec 4. Calcular los elementos de una hipérbola a partir de su ecuación.
- Tec 5. Hallar la ecuación de una parábola por sus elementos.
- Tec 6. Calcular los elementos de una parábola a partir de su ecuación.
- Tec 7. Reconocer la ecuación de una circunferencia.
- Tec 8. Determinar la posición relativa de dos circunferencias.
- Tec 9. Determinar la posición relativa de una recta y una circunferencia.
- Tec 10. Calcular los puntos de corte de una circunferencia y una recta.
- Tec 11. Calcular la ecuación de un lugar geométrico.
- Tec 12. Determinar la posición relativa de dos curvas cónicas con software informático.

Tecnologías:

- Definición de las curvas cónicas mediante el concepto de lugar geométrico.
- Definición de excentricidad y distinción del tipo de cónica según el valor de este parámetro.
- Relación entre las longitudes de los semiejes y la distancia focal en una cónica $a^2 = b^2 + c^2$en el caso de la elipse, $c^2 = b^2 + a^2$ en el caso de la hipérbola.

B. Sobre el estado de la enseñanza-aprendizaje del objeto matemático

1. ¿Cómo se justifica habitualmente la introducción escolar del objeto matemático?

Para evaluar como se suele justificar la introducción de esta unidad didáctica, he decidido analizar un libro de texto que tenga una unidad didáctica dedicada al tema de lugares geométricos y curvas cónicas para ver cómo se introduce este objeto matemático y analizar el tipo de problemas y técnicas asociadas a dicho objeto.

El libro de texto escogido para el análisis es un libro propio del curso de 1º de Bachillerato de la editorial Santillana; De la Prida, Gaztelu, Lorenzo, Pérez y Sánchez, 2015.

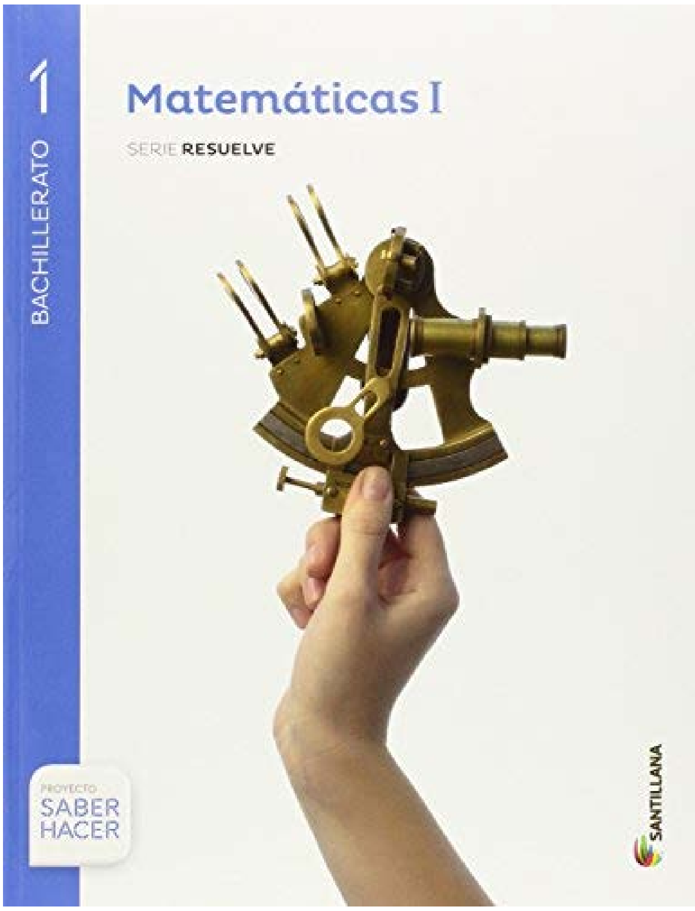


Figura 1. Libro de texto empleado para el análisis de la unidad didáctica.

Este libro realiza la introducción al capítulo tratando de incidir en la aplicación en la vida de estos conceptos creando una incertidumbre sobre cómo funcionan las antenas parabólicas. Lo cierto es que, a pesar de tomar esta medida donde puede parecer que se va a tratar la unidad didáctica desde un punto de vista práctico y donde se introducirán problemas contextualizados a lo largo del contenido, la realidad es que apenas aparecen problemas de estas características a lo largo del texto.

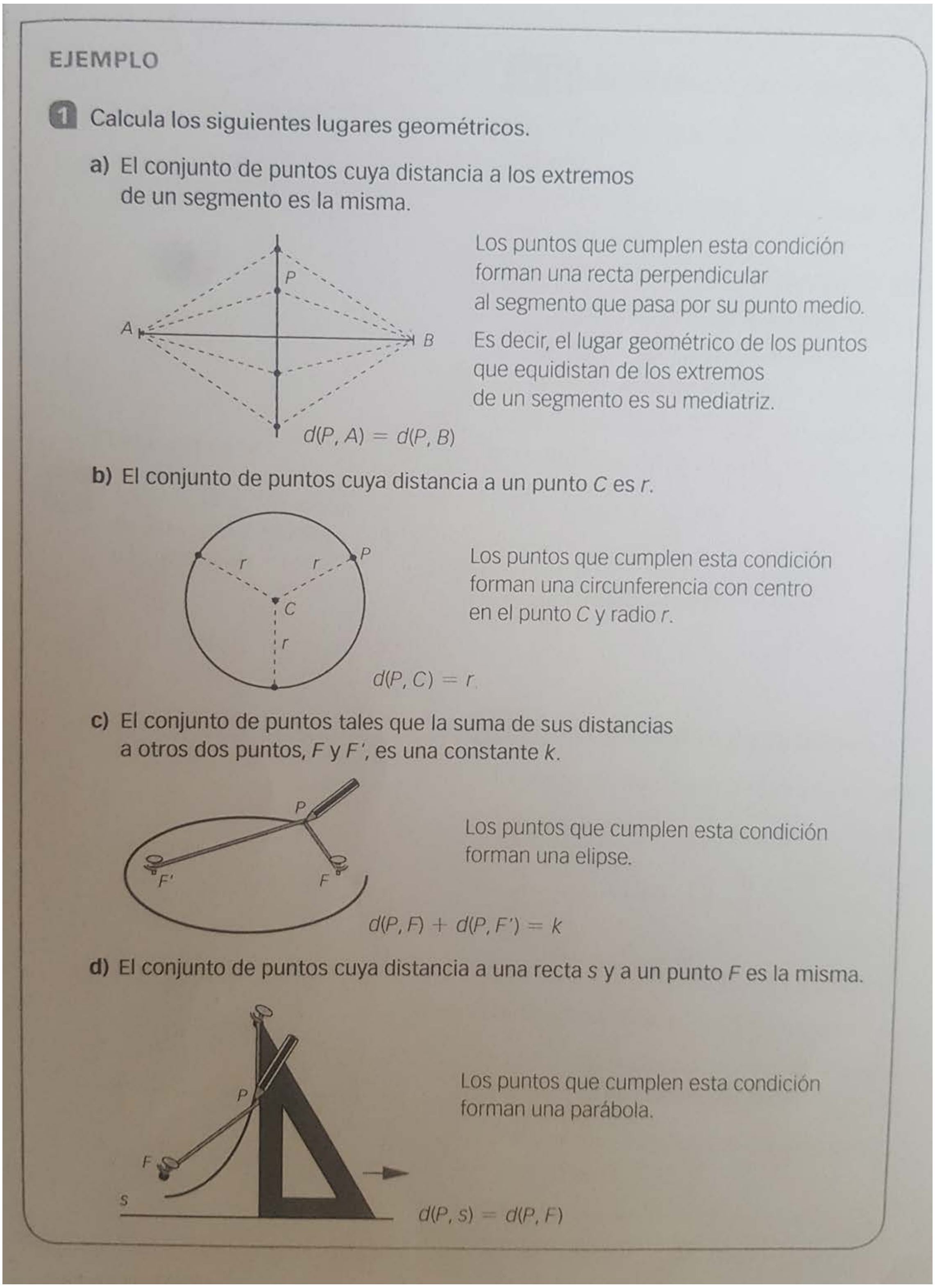


Figura 2. Ejemplos de lugar geométrico.

Esto suele ser lo común en bastantes libros de texto. Como ejemplo, podemos tomar el libro de texto *Curso básico de matemáticas y estadística. Del Bachillerato al grado.* (Cámara, Garrido, Tolmos, & Marcos, 2007) que pretende ser un manual para el alumno de Bachillerato y, donde no aparece ni una sola referencia en más de 300 páginas de este tipo de figuras como curvas del plano. En cambio, se dedica una página a describir qué es una función hiperbólica, una función radical (diciendo que es la inversa de una parábola) y se da la ecuación de una circunferencia. En particular, no se menciona ni la relación de este tipo de curvas del plano entre ellas ni se proporciona una definición mediante el concepto de lugar geométrico, excepto en la circunferencia.

Éste hecho es bastante común en un currículo donde gran parte de los recursos están centrados en la enseñanza de técnicas de análisis matemático con un objetivo claro que es que el alumno sea capaz de resolver problemas de cálculo de áreas y volúmenes mediante las operaciones de derivación e integración de funciones y la geometría se ve un poco desplazada dentro del currículo, centrándose en la geometría del álgebra lineal propia de las matrices.

Volviendo al libro de texto de referencia de Santillana (De la Prida et al., 2015), éste define lugar geométrico como: "conjunto de puntos que cumplen una determinada propiedad geométrica". A partir de esa definición, intenta relacionar algunas de las secciones cónicas con una propiedad geométrica como se muestra en la Figura 2.

Por tanto, las curvas aparecen definidas mediante sus propiedades geométricas haciendo referencia al concepto de lugar geométrico. Sin embargo, no aparecen en este libro suficientes problemas que puedan parecer de interés a alumno, ni aparecen otro tipo de justificaciones sobre el motivo de aparición de estas curvas.

2. ¿Qué campos de problemas, técnicas y tecnologías se enseñan habitualmente?

Es normal que los alumnos conozcan lo que es una circunferencia e incluso una parábola, pero algunas cónicas como la elipse ni siquiera llegan a ser tratadas en algunos institutos (Contreras, Contreras, & García, 2002). En mi opinión, la hipérbola sigue la misma suerte.

En mi experiencia personal, tanto en mi época de alumno como en mi estancia en el centro de enseñanza donde realicé el Prácticum durante este Máster de profesorado, siempre he notado que las cónicas parecían ser un elemento invisible en los centros de educación secundaria, a pesar de pertenecer al currículo de Bachillerato.

Con la finalidad de detectar si éste es un fenómeno que se sigue produciendo en la actualidad en los centros de educación secundaria he creado una encuesta que he trasladado a docentes de diversas partes de la geografía española para conocer las prácticas que suceden en la actualidad. Las preguntas que forman parte de la encuesta se adjuntan como el Anexo I, así como las respuestas predefinidas que he dado como opción, aunque en algunas cuestiones los docentes han respondido de forma libre.

El conjunto de docentes que han realizado la encuesta es variado y limitado, ya que solo he podido comunicarme con algunos centros en las comunidades autónomas de Cantabria y Galicia.

Respecto a ésta familiarización con las curvas cónicas, según la encuesta que he realizado a los docentes, más del 40% del profesorado encuestado afirma que un alumno medio tiene algún problema para reconocer algún tipo de cónica o, puede reconocerlas, pero no trabajarlas con soltura como se puede apreciar en la Figura 3.

Si bien es cierto que la circunferencia es tratada de una forma habitual y un alumno puede trabajar con la ecuación de esta curva, no siempre se trabajan muchos campos de problemas donde se puedan encontrar otro tipo de secciones cónicas justificadas de forma adecuada.

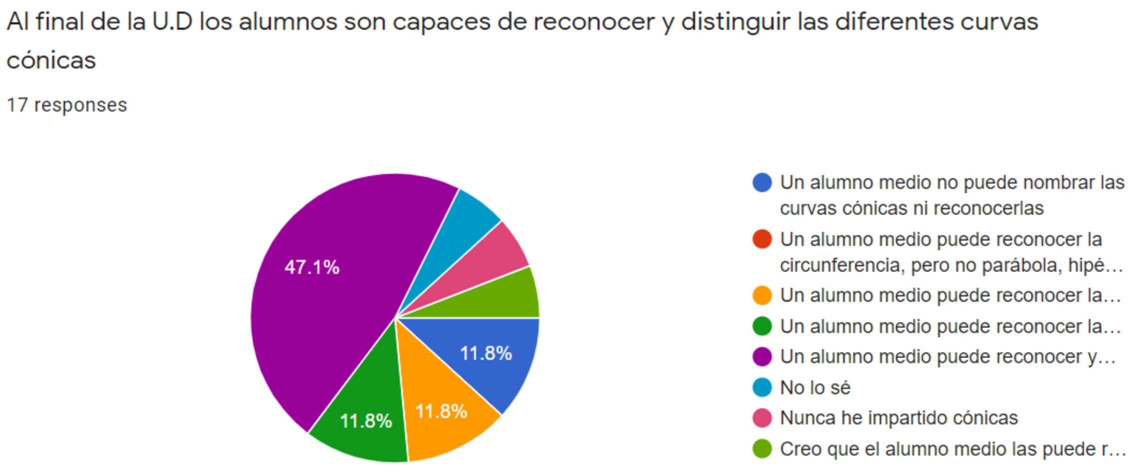


Figura 3. Docentes sobre la capacidad del alumno para distinguir curvas cónicas.

En las últimas páginas de la unidad didáctica en el libro de texto de referencia se introducen unos pocos problemas relacionados con los temas tratados en ésta. En esos problemas se menciona el hecho de que las órbitas de los planetas alrededor del Sol tienen una forma elíptica y plantean problemas en los que arcos de puentes o túneles tienen una forma parabólica, incluso aparece la contextualización de un cable colgando que tiene una forma de parábola (cosa curiosa, ya que si dejamos colgar un cable la forma que toma no es de una parábola, sino de una catenaria).

En resumen, aparecen en el texto un total de 5 problemas contextualizados de un total de 141 ejercicios/problemas que aparecen a lo largo de la unidad didáctica propuestos a los alumnos. Además, cabe añadir que de esos cinco ejercicios en ninguno de ellos aparece un contexto real en el que aparezca la hipérbola, por lo que la justificación de esta curva puede verse dañada y puede hacer que sea entendible que más de un 40% de los docentes encuestados opinen que los alumnos son capaces de reconocer estas curvas, pero no sean capaces de trabajar con alguna de ellas.

La última página de la unidad didáctica se centra en dar respuesta a la pregunta que se había planteado al comienzo de la unidad sobre la utilidad de las antenas parabólicas y su funcionamiento. En esa última parte de la unidad didáctica se habla de la propiedad reflexiva que poseen las parábolas además de dar otros datos técnicos que pueden motivar al alumnado y hacerles ver que la forma de estas figuras es de gran utilidad, aunque tampoco se hace incidencia en que este tipo de propiedad reflexiva tiene también sus equivalentes en elipse o hipérbola. Algún otro libro de texto como el de Stewart, Redlin, & Watson (2007), sí que hace referencia al uso de espejos hiperbólicos en telescopios tipo Cassegrain o a la utilidad de esta curva en sistemas de localización como el LORAN.

En el cuerpo del tema donde se produce la explicación de los conceptos y se enseñan las particularidades de estas figuras geométricas, el único tipo de ejercicios planteados son de tipo repetitivo de las técnicas que se enseñan o actividades de repetición de algoritmos que se han explicitado anteriormente, por ejemplo:

5. Si una antena parabólica mide 1 m de diámetro en su abertura y el receptor, ubicado en el foco, está a 25 cm del vértice, ¿qué profundidad tiene?

La ecuación de la parábola es de la forma: $x^2 = 2py$

$F(0, 25) \rightarrow p = 50 \rightarrow x^2 = 100y$

Como el diámetro es 1 m = 100 cm, uno de los extremos es $x = 50$ cm:

$50^2 = 100y \rightarrow y = 25$ cm

La profundidad de la parábola es de 25 centímetros.

30. Halla la ecuación de la hipérbola con ejes paralelos a los ejes *X* e *Y*, sabiendo que su centro es *C* (4, 0), uno de sus focos es *F* (1, −3) y su excentricidad es 2.

Se traslada el centro $C(4, 0)$ al origen de coordenadas:

$F(1, 0) \rightarrow F''(1-4, 0) = (-3, 0) \rightarrow c = 3$

$e = \frac{c}{a} = \frac{3}{a} = 2 \rightarrow a = \frac{3}{2}$ $\qquad c^2 = a^2 + b^2 \rightarrow b^2 = \frac{27}{4}$

La ecuación de la hipérbola es de la forma:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \rightarrow \frac{4(x-4)^2}{9} - \frac{4y^2}{27} = 1$$

28. Halla la ecuación de una elipse, con ejes paralelos a los ejes *X* e *Y*, de centro *C* (4, 1) y vértices *A*'(1, 1) y *B*'(4, −1).

Se traslada el centro $C(4, 1)$ al origen de coordenadas:

$A'(1, 1) \rightarrow A''(1-4, 1-1) = (-3, 0) \rightarrow a = 3$

$B'(4, -1) \rightarrow B''(4-4, -1-1) = (0, -2) \rightarrow b = 2$

La ecuación de la elipse es de la forma:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \rightarrow \frac{(x-4)^2}{9} + \frac{(y-1)^2}{4} = 1$$

Figura 4. Ejercicios propuestos por el libro de texto de Santillana (p. 170 y 180-181).

Es cierto que en el libro de texto de Santillana se introducen ejercicios para todas las técnicas mencionadas en el apartado A.3, aunque no problemas que hagan relevantes su uso a la vida real.

3. ¿Qué efectos produce dicha enseñanza sobre el aprendizaje del alumno?

El hecho de una falta de problemas contextualizados para algunos de los objetos matemáticos introducidos en esta unidad didáctica podría afectar al aprendizaje del alumno. Según la encuesta realizada a los docentes, no parece haber indicios de que a los alumnos esta unidad didáctica sea de una dificultad mayor o tengan un menor interés del habitual, como opinan la mitad de los docentes según la Figura 5.

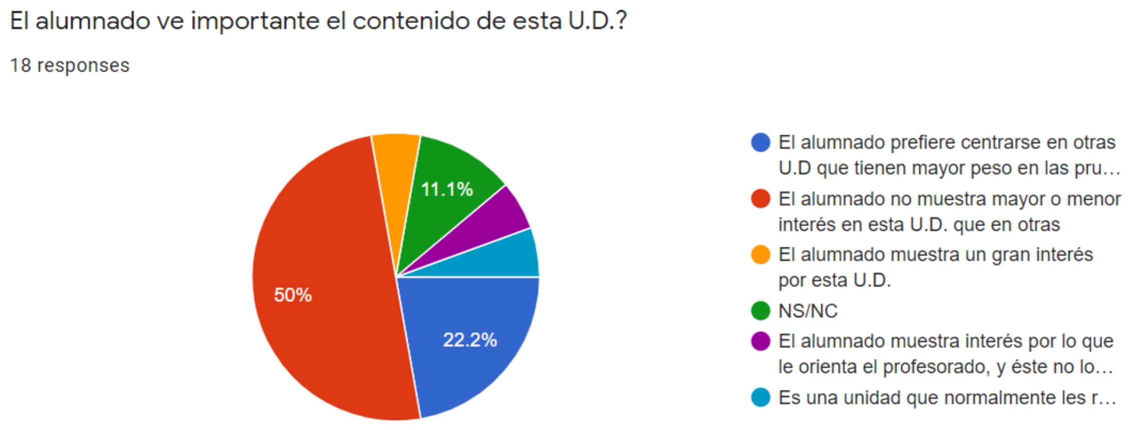


Figura 5. Importancia de la U.D. según el alumnado.

Eso sí, parece particularmente interesante que con la aparición de este objeto matemático dentro de la educación secundaria comienza una importante experiencia matemática para los alumnos, esto es, la mezcla entre geometría sintética y analítica. Estos dos aspectos de la geometría deberían ir de la mano durante toda la educación secundaria, aunque si se mira el contenido del currículo en los diferentes cursos de esta etapa escolar no parece así.

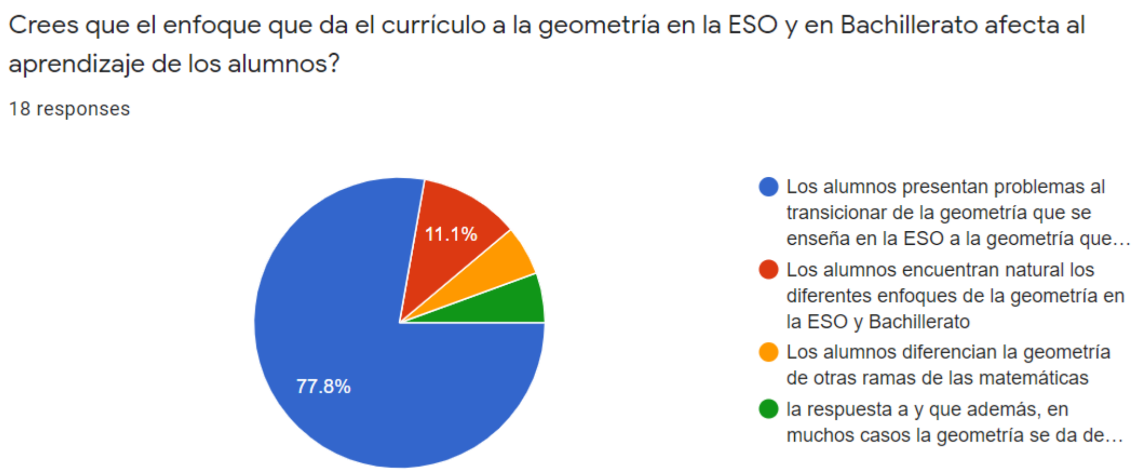


Figura 6. Docentes valoran el acercamiento del currículo a la enseñanza de la geometría.

Como dice Gascón (2002):

…la presunta alternativa entre *geometría sintética* y *geometría analítica* es una falsa alternativa, dada la continuidad y hasta complementariedad que existe entre ambas.… Dado que son precisamente las limitaciones de las *técnicas sintéticas* las que dan sentido (son las razones de ser) a las *técnicas* analíticas, no tiene ningún tipo de justificación hacer aparecer éstas en el Bachillerato, como por arte de magia, sin ningún tipo de continuidad con la problemática de la geometría sintética estudiada en la ESO. (p.24).

Una amplia mayoría de los docentes encuestados opinan del mismo modo que Gascón (2002) y están de acuerdo con que esta separación entre la geometría analítica y la geometría sintética perjudica al aprendizaje de los alumnos (ver Figura 6). Los alumnos, al tener problema en combinar estos dos tipos de geometría, son incapaces de aplicar los conocimientos analíticos adquiridos a problemas propuestos en situaciones puramente geométricas donde el alumno no es capaz de interpretar qué conocimiento debe aplicar para la resolución del problema.

C. Sobre los conocimientos previos del alumno

1. ¿Qué conocimientos previos necesita el alumno para afrontar el aprendizaje del objeto matemático?

Para el estudio de las curvas cónicas se precisa haber realizado un acercamiento a los siguientes objetos matemáticos con anterioridad:

- Es necesario haber trabajado e interpretado el cono y otras figuras geométricas tridimensionales en el aula anteriormente, a ser posible de forma manipulativa e interactiva.
- Lugar Geométrico: Para conocer las propiedades de las cónicas y sus principales elementos (foco, excentricidad, directriz, …) es necesario conocer el concepto de lugar geométrico.
- Visión espacial: Es necesario también que los alumnos hayan practicado y adquirido ciertas habilidades a la hora de interpretar elementos geométricos dentro del espacio tridimensional, ya que esto facilitará la interpretación de la definición de las curvas cónicas como la intersección de un plano con un cono.
- Cálculo de distancias o módulo de vectores: Para la descripción analítica de las ecuaciones de estas curvas es necesario que el alumno haya adquirido las habilidades de cálculo de distancias en el plano para interpretar y deducir estas ecuaciones como traducción de las propiedades de lugar geométrico de las curvas cónicas.

2. La enseñanza anterior, ¿ha propiciado que el alumno adquiera esos conocimientos previos?

Usualmente en la geometría que se puede ver en el currículo de la educación obligatoria no se puede apreciar prácticamente la experimentación con la geometría tridimensional.

En el currículo de la Educación Primaria los alumnos deben haber trabajado los siguientes contenidos:

- Elementos básicos de la circunferencia y círculo, a partir del 3º y 4º curso.
- Identificación de prismas y pirámides y cuerpos redondos (cono, cilindro y esfera), a partir del 4º curso.

En el currículo de la asignatura de Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas aparecen las siguientes actividades relacionadas con la geometría tridimensional:

- Planos de simetría en los poliedros.
- Intersecciones de planos y esferas.
- Medida de longitudes, áreas y volúmenes.
- Razón entre longitudes, áreas y volúmenes de cuerpos semejantes.

Es fundamental que los alumnos puedan adquirir una mayor abstracción y un cierto conocimiento de la traslación de propiedades bidimensionales que se puedan generalizar a una dimensión mayor.

Como menciona Real (2004), los alumnos tienen problemas al tratar de comprender en 2 dimensiones objetos que proceden de un elemento tridimensional como es en este caso el cono. Por ello, métodos como la introducción de objetos tridimensionales manipulativos pueden favorecer la interiorización de estos cuerpos geométricos.

Según la encuesta realizada más del 70% de los profesores que han impartido la docencia de la unidad didáctica de curvas cónicas durante los últimos años no han empleado ningún elemento manipulativo para su enseñanza. Además, un 55,6% está de acuerdo en que los alumnos tienen dificultad al visualizar las curvas cónicas como elementos tridimensionales dentro del cono, ver Figura 7.

Por estos motivos es necesario implementar elementos manipulativos que permitan corregir esas deficiencias, en el caso de que se muestren en los alumnos, sobre todo si no han tenido la posibilidad de experimentar con estos instrumentos durante los cursos escolares previos.

En cuanto al resto de elementos claves necesarios para trabajar la unidad didáctica algunos se plantean durante el mismo curso (cálculo de distancias de puntos en el plano) o ya han sido trabajado anteriormente, como en el caso del cono, ya que en la Educación Secundaria Obligatoria es un elemento sobre el que se debe trabajar, para al menos saber calcular el volumen que contiene y cuál es el área lateral que posee.

En último lugar, el concepto de lugar geométrico se ha trabajado previamente en el currículo con los objetos matemáticos de bisectriz de un ángulo y mediatriz de un segmento, tanto en cursos anteriores de la asignatura de Matemáticas. como en la asignatura de Dibujo Técnico I. Éstos son conceptos y herramientas básicas en el dibujo y se espera que los alumnos tengan una amplia experiencia y estén familiarizados a trabajar con dichos conceptos.

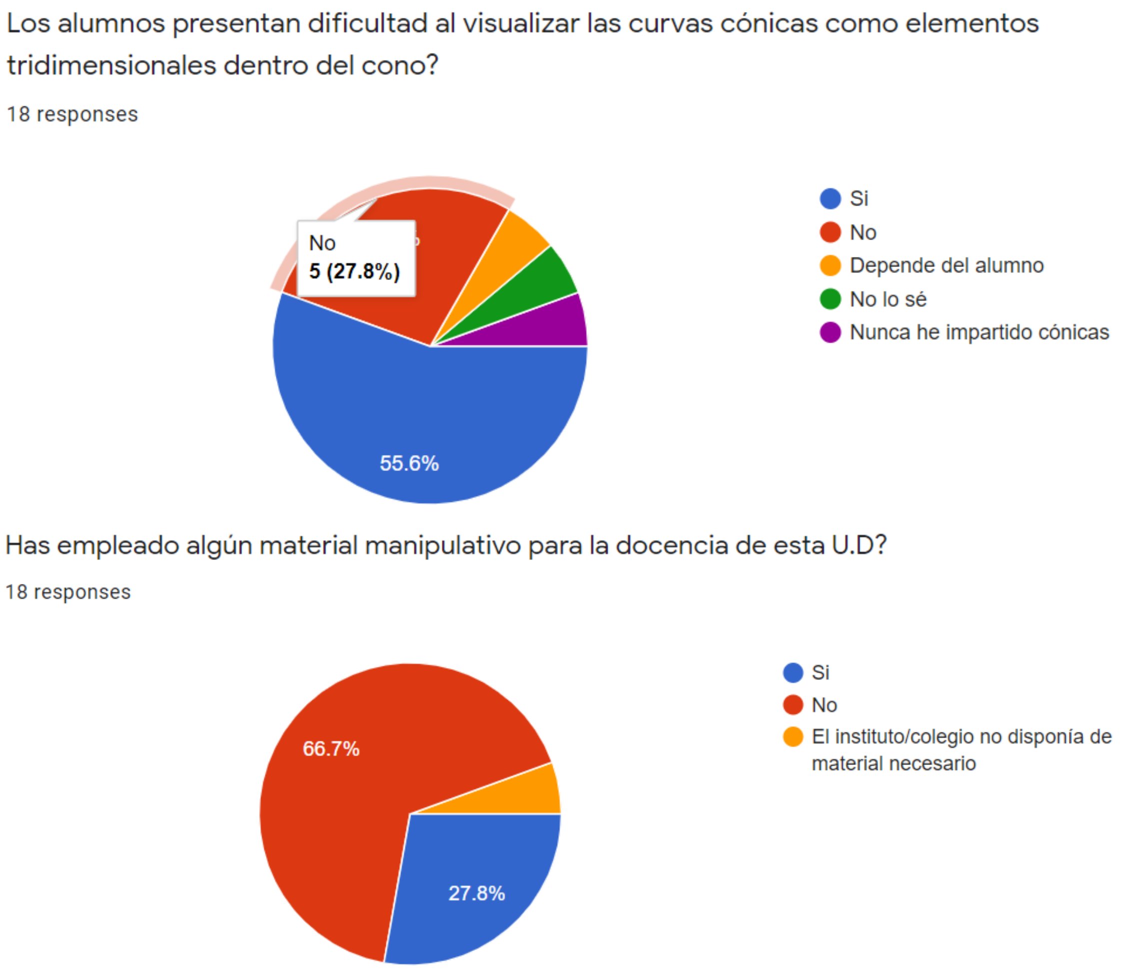


Figura 7. Distintas respuestas de docentes a la encuesta realizada.

3. ¿Mediante qué actividades vas a tratar de asegurar que los alumnos posean esos conocimientos previos?

La comprensión del concepto de lugar geométrico puede ser evaluado a partir de los conceptos de mediatriz y bisectriz, que aparecen en el currículo de forma anterior al curso en el que se enmarcan las curvas cónicas. Además, son conceptos que no solo se han trabajado en la asignatura de matemáticas,

Para ello se propone una sesión inicial en el que los alumnos puedan demostrar o reforzar su familiaridad con el concepto de lugar geométrico. En esta sesión inicial se proponen unos cuantos ejercicios y un problema que introduce una curva cónica partiendo de este concepto de lugar geométrico y un problema contextualizado en el que además los alumnos tendrán que usar un software tecnológico para la visualización del problema y la interpretación de la solución.

Sesión inicial

Ejercicio 0

a) Determina el lugar geométrico de los puntos que distan lo mismo del eje Y y de la recta $y = 3x + 1$

b) Calcula el lugar geométrico de los puntos que distan 5 unidades de la recta $y = 2x + 5$.

c) Halla el lugar geométrico de los puntos que equidistan del siguiente par de rectas: $-2x + 7y + 9 = 0$ y $4x - 14y + 11 = 0$. ¿Qué nombre tiene este lugar geométrico?

Problema. Una escalera, apoyada simultáneamente en la pared y sobre un suelo resbaladizo, se viene abajo con un cubo de agua que se encontraba sobre un peldaño de ella. Emplea GeoGebra para determinar cuál es la trayectoria seguida por el cubo en su caída.

El problema de la escalera se ha extraído del artículo *Una experiencia con Cabri: las curvas cónicas* de García y Arriero (2000). Además, como proponen García y Arriero (2000), se pide a los alumnos que ubiquen el cubo en el punto medio de la escalera para que la curva que describa este cubo durante la caída forme una circunferencia y los alumnos puedan identificar la circunferencia como el lugar geométrico de un punto que describe esa trayectoria.

Este ejercicio se emplea para que los alumnos vean que curvas cónicas aparecen como solución a problemas que pueden darse en la vida común y que por ello estas curvas tienen cierta importancia y deben conocerlas.

D. Sobre las razones de ser del objeto matemático

1. ¿Cuál es la razón o razones de ser que vas a tener en cuenta en la introducción escolar del objeto matemático?

La razón más importante para introducir estas curvas es su utilidad a lo hora de modelizar situaciones que ocurren en la vida real.

Es interesante mostrar a los alumnos las propiedades que poseen este tipo de curvas. En particular, la propiedad de reflexión, hace que diseñar objetos con este tipo de formas sea útil en la vida cotidiana, por ejemplo, el diseño de una antena parabólica está basado en este tipo de propiedad.

Además de este tipo de propiedades, es de un carácter importante la utilidad del conocimiento de la elipse para utilizar como herramienta de modelización de órbitas de planetas, satélites, etc.

Otra situación en la que estas figuras aparecen en la realidad es en la arquitectura. Estas curvas planas geométricas dan lugar a formas tridimensionales de gran valor en la vida real mediante algún proceso de revolución. Algunos ejemplos de construcción de estructuras con superficies basadas en estas curvas cónicas se muestran a continuación:

Figura 8. Edificio con fachada de forma de paraboloide hiperbólico en Valencia.

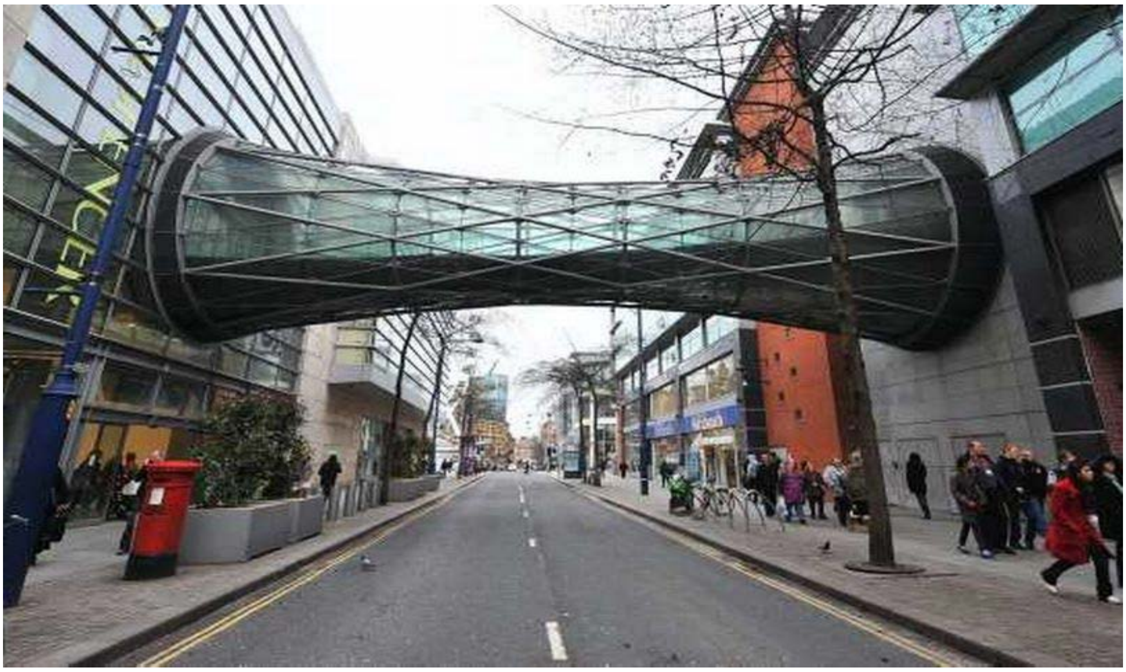


Figura 9. Corporation Street Bridge (puente con forma de hiperboloide, Manchester)

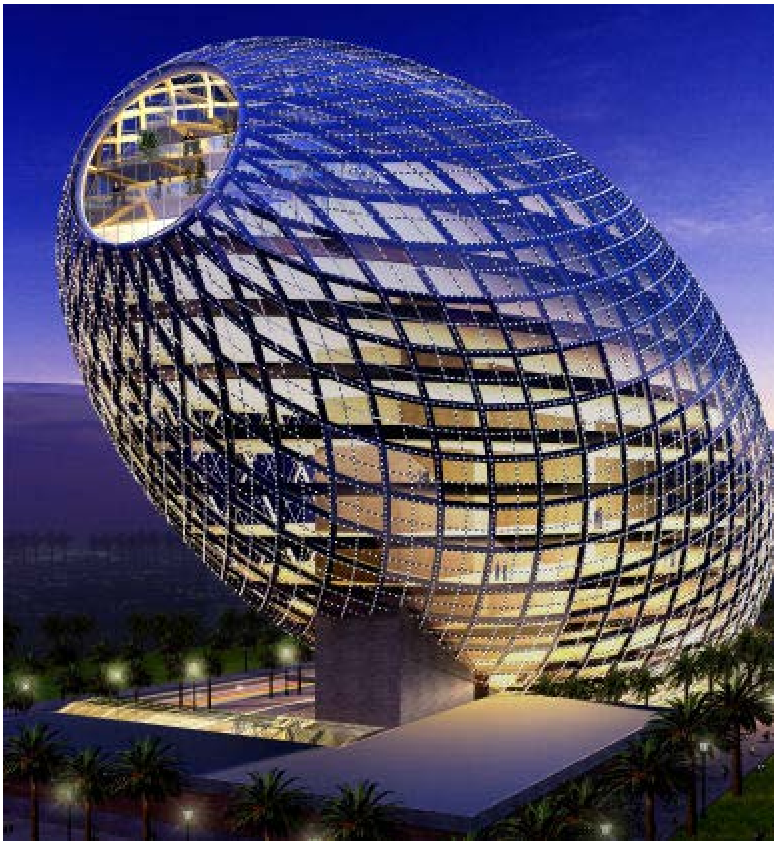


Figura 10. Edificio con forma de elipsoide (Cybertecture Egg en la India).

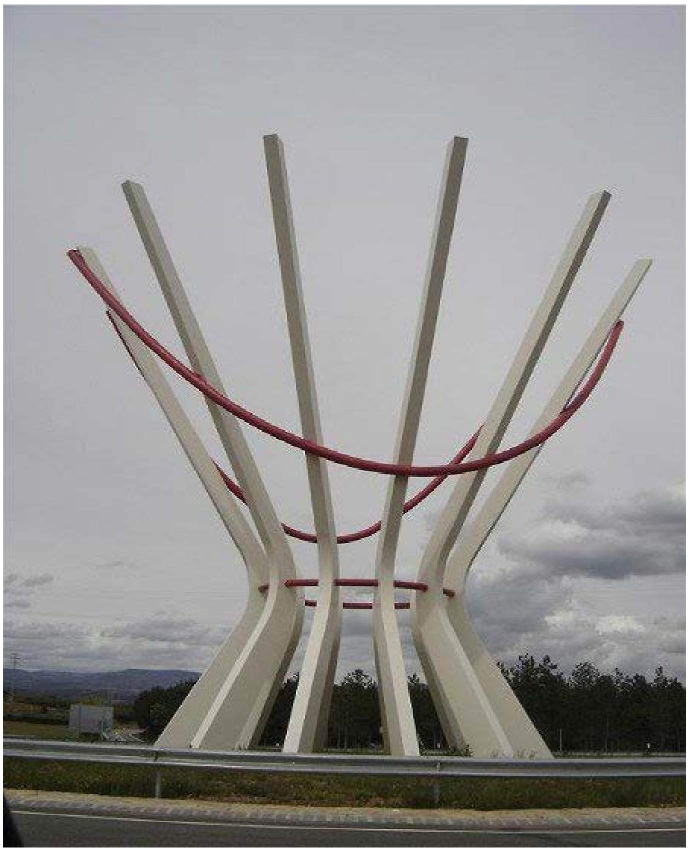


Figura 11. Monumento dedicado a las cónicas en Aragón.

Otras cónicas surgen como solución a algunos problemas de los cuales mostraremos algunos ejemplos durante este trabajo.

2. ¿Coinciden con las razones de ser históricas que dieron origen al objeto?

Evidentemente, una de las razones de ser más interesantes para presentar el estudio de las curvas cónicas es, como su propio nombre indica, su existencia como secciones del cono. Desde la Antigua Grecia se conocieron estas curvas como secciones de un cono y se les dieron nombre.

Estas curvas aparecen como solución de algunos de los problemas que inquietaban a gente de la época como es el caso de Menecmo en el siglo IV a.C. que trabajando en un problema sobre la construcción de un cubo de volumen a otro dado obtiene condiciones que deben cumplir unas curvas que hoy en día llamamos hipérbola y parábola (Guzmán, s.f.). Posteriormente Apolonio escribe un trabajo donde se refiere a las secciones cónicas y estas quedan ya completamente definidas. Durante estos años se trabaja en sobre las propiedades de estas figuras y personajes históricos como Arquímedes o Euclides escriben sobre estas curvas.

A día de hoy su utilidad de modelización de objetos en la vida real es tan relevante que no es necesario acudir a su razón de ser histórica para ver la importancia de este tipo de curvas.

Es importante que los alumnos no solo vean un tipo de presentación de éstas figuras geométricas como una particularidad al ser secciones del cono, sino también su existencia como el lugar geométrico de unos puntos que cumplen cierta condición y la utilidad que pueden tener en el mundo real a la hora de modelizar situaciones en distintos ámbitos como la aeronáutica, diseño gráfico por ordenador, astronomía, etc.

3. Diseña uno o varios problemas que se constituyan en razones de ser de los distintos aspectos del objeto matemático a enseñar.

Debe ser una de nuestras tareas hacer ver al alumnado la alta implicación en la vida cotidiana de los conceptos matemáticos que se introducen dentro del currículo. Para ello, se pretende dar a conocer los objetos matemáticos contextualizados en problemas que modelicen una realidad que acerque al alumno al interés por el conocimiento de las técnicas y tecnologías que aparecen en la unidad didáctica. A continuación, doy un par de ejemplos de problemas que modelizan situaciones de la vida real mediante alguna curva cónica.

Problema 0a. Ubicación óptima de objetos.

Se quiere instalar un gran depósito de agua para abastecer a una empresa y a dos ciudades, una al este y otra al oeste de esta empresa. Han de cumplirse las siguientes condiciones para que su ubicación sea óptima:

- Conviene que el depósito esté lo más cerca posible de la empresa, pero por razones de seguridad, no puede estar a menos de 250 m de un conjunto de máquinas que se encuentran en la empresa. Así que lo situaremos exactamente a 250 m de las máquinas.

- Además, como se ha de trasladar el agua a las ciudades, sin preferencia, se desea que el depósito esté a la misma distancia de las dos ciudades.

¿Dónde habría que situar el depósito? Representa gráficamente tu solución.

Problema 0b. Cálculo de distancias en órbitas de planetas.

El cometa Halley describe una órbita elíptica alrededor del Sol, que se encuentra en uno de sus focos. La distancia máxima entre el Sol y el Halley (afelio) es de aproximadamente $5{,}28.\,10^{12}$m. Calcula cual es la distancia mínima entre el Halley y el Sol si esta elipse tiene un valor de excentricidad de 0,967.

Con el Problema 0a la intención es que los alumnos empleen el concepto de lugar geométrico, y en particular la circunferencia, mediatriz y su intersección para lograr determinar una ubicación en donde deseamos ubicar un objeto en el plano. Se espera que los alumnos puedan comprender la utilidad del concepto de lugar geométrico con ejercicios de este tipo, resolviendo el problema de ubicación óptima hallando la intersección de la circunferencia y la mediatriz.

En el Problema 0b los alumnos deben ver la utilidad de conocer las ecuaciones de la elipse para poder calcular distancias en un modelo de órbitas elípticas que sigue un cometa alrededor del Sol.

Además, propongo una actividad basada en una razón de ser de las curvas cónicas para que los alumnos conozcan su origen como parte del cono y lo visualicen de forma tridimensional.

Creación de un cono cortado por planos, dando lugar a secciones cónicas.

Se plantea tratar de trabajar con el módulo tridimensional de GeoGebra. A la propia utilidad de este módulo como herramienta de modelado tridimensional, se podría añadir además la utilización de elementos de realidad aumentada, como por ejemplo gafas 3d (aunque es improbable que el centro disponga del material necesario). Es particularmente interesante el hecho de poder modelar este tipo de figuras a partir de secciones del cono y exportar estas construcciones para poder realizar una impresión en 3d como plantea Sombra (2019).

Un posible modelo que se podría construir con este software sería un cono “a trozos” que esté dividido por secciones de forma que manifiesten las curvas cónicas en esta construcción. Dos ejemplos de este tipo de construcciones se muestran en la Figura 12. Las imágenes han sido extraídas de material que me ha proporcionado un profesor del departamento de didáctica de las matemáticas. En la primera figura, de madera, se pueden apreciar las secciones que forman la circunferencia y la hipérbola. En la segunda de plástico, aunque en este caso el cono no está dividido en secciones las transparencias permiten identificar dichas curvas cónicas dentro del cuerpo.

Figura 12. Modelos de conos tridimensionales que muestran las curvas cónicas.

Este tipo de aprendizaje mediante la experimentación, modelización y el análisis sobre objetos que ellos puedan tocar e interactuar con ellos motiva su interés. Como decía Charnay (como se citó en Langoni, 2019). “Solo hay aprendizaje cuando el alumno percibe un problema para resolver, es decir, cuando reconoce el nuevo conocimiento como medio de respuesta a una pregunta”

4. Indica la metodología a seguir en su implementación en el aula.

Para el problema 0a se propone que los alumnos se agrupen de tres en tres para que intercambien ideas y lleguen a una solución válida para el ejercicio. Los alumnos deben hacer un esquema en el que se representen adecuadamente las dos ciudades y la fábrica, además de modelizar en el dibujo las condiciones requeridas con respecto a la distancia a la fábrica y que este depósito esté entre las dos ciudades de forma geométrica.

Posteriormente a esta resolución se propone una puesta en común en el aula en donde, a ser posible, se proyectará la resolución del problema mediante el ordenador y donde los alumnos podrán ver la solución de dicho problema y entender la estrategia de resolución que el profesor aplica empleando los requisitos que indica el problema.

En el caso del problema 0b, se pretende que los alumnos trabajen este problema de forma individual, aunque se previsible que el profesor aporte un dibujo de la situación del cometa y el planeta y una indicación sobre qué distancias son las que los alumnos deben calcular.

Una vez la explicación esté clara los alumnos deberán calcular individualmente las distancias que se les piden aplicando los conocimientos sobre la elipse.

Para la actividad del cono, se pedirá a los alumnos que se pongan en grupos de 2 personas para realizar estos diseños mediante el software informático y, a medida que vayan obteniendo las secciones de este cono pediremos a los alumnos que vayan verificando que forman tienen las figuras planas que derivan de estos cortes.

E. Sobre el campo de problemas

1. Diseña los distintos tipos de problemas que vas a presentar en el aula.

Se proponen algunos problemas para modelar las situaciones que aparecen en los campos de problemas que hemos introducido en la sección A. Además, se introduce el Problema 1 que es un problema intrínseco de las matemáticas y que no está contextualizado pero me parece interesante proponer para que los alumnos vean como diferentes partes de la asignatura pueden combinarse para la resolución de problemas.

Problema 1. Problema de cálculo de áreas empleando ecuaciones de curvas cónicas.

Las bisectrices de los cuatro cuadrantes cortan a la parábola $y = x^2 - 3x$ en un número determinado de puntos. Halla cuántos son y el área del polígono que forman.

Problema 2 (Campo 5). Problema de optimización de superficies empleando ecuaciones de curvas cónicas.

Una puerta tiene forma de arco elíptico y su altura máxima sobre el centro es de 3 metros, mientras que su ancho total es de 8 metros. Si queremos introducir por la puerta la caja de un sofá que acabamos de comprar y mide 2 metros de alto. ¿Cuál será el máximo ancho que puede tener la caja para introducirla directamente empujándola sin levantarla del suelo?

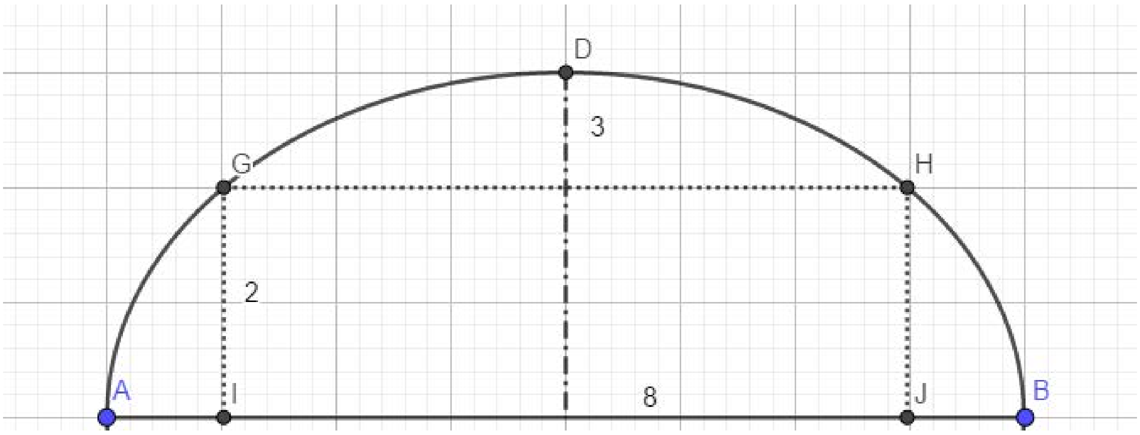


Figura 13. Modelización del problema 2.

Problema 3 (Campo 3). Tiro parabólico en un lanzamiento jugando al baloncesto.

Una jugadora de baloncesto tiene que tirar a canasta y sabe que la mejor trayectoria posible para tirar es la de una parábola. Si la jugadora coloca la pelota para realizar el lanzamiento a un metro y 60 centímetros de altura sobre el suelo, y la canasta está situada a 6 metros de ella y la canasta está situada a una altura de 305 cm. sobre el suelo. Construye una representación que modelice esta situación en GeoGebra. Halla la ecuación de una parábola que deberá seguir la pelota tras el lanzamiento de la jugadora para que pueda encestar de forma aproximada.

Problema 4 (Campo 4). Localización de un barco mediante un sistema de largo alcance basado en hipérbolas

El siguiente ejemplo de problema emplea el concepto de hipérbola para resolver un problema contextualizado de la vida real, basado en el libro de Stewart, Redlin y Watson (2007).

Un barco va navegando por el Mar Mediterráneo y desea conocer su posición de una manera precisa. Este barco dispone de un sistema LORAN, cuyo funcionamiento está basado en el envío y recepción de señales emitidas por unas antenas al barco. El sistema LORAN, como resultado del envío de señales, recibe las ecuaciones de un par de hipérbolas determinadas por la distancia entre el barco y las antenas y la ubicación del barco se encuentra en la intersección de dichas hipérbolas. Emplea un software geométrico que te permita representar gráficamente las hipérbolas con ecuaciones:

$$-56.5x^2 + 7.5y^2 - 30.01y = -56.5 \text{ y}$$

$$-193x^2 + 3y^2 + 193x - 36.05y = -96.12.$$

Halla las coordenadas cartesianas del punto en donde estaría situado el barco.

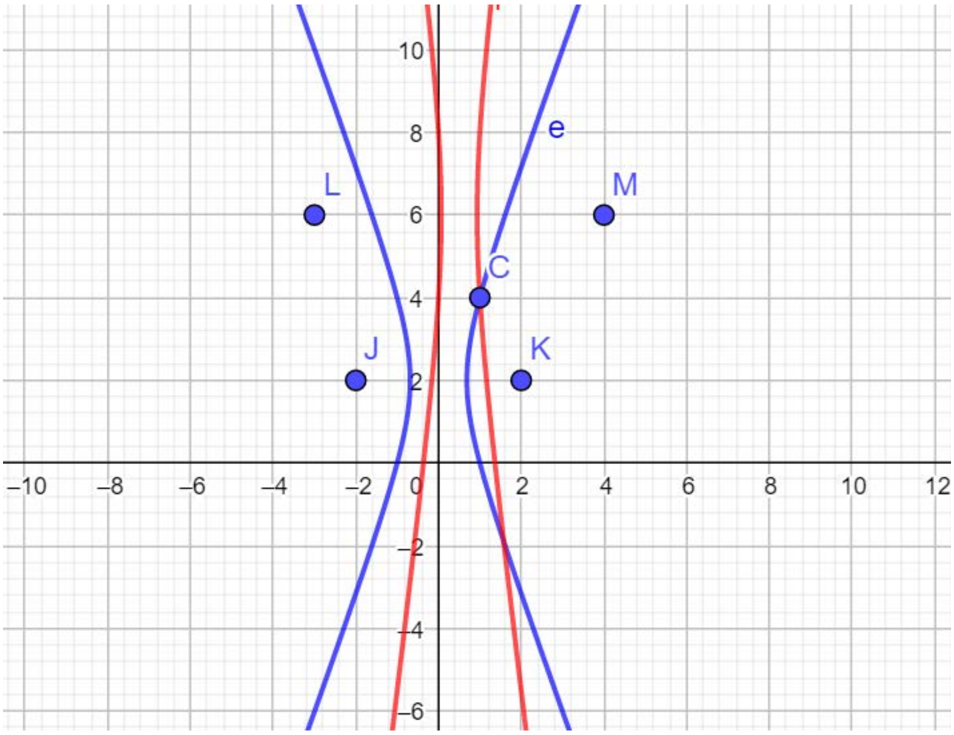


Figura 14. Sistema de localización LORAN, intersección de 2 hipérbolas.

En la Figura 14, los puntos M, L, K y J representan antenas. Calculando el tiempo que se tarda en recibir la señal proveniente de dichas antenas se pueden hallar las hipérbolas (en azul y rojo). Una vez que el sistema ha recibido suficientes señales de las antes se puede calcular la intersección de las hipérbolas, que se produce en el punto C, y ésta representa la localización del barco en dicho momento.

Este problema en el que los alumnos solo deben hallar una intersección de dos curvas mediante algún software que lo permita puede hacer ver a los alumnos que existen ejemplos donde se emplean este tipo de curvas para realizar acciones del día a día, en las que a priori los alumnos no ubican esta aplicación de este tipo de objetos matemáticos.

<u>Problema 5 (Campo 2)</u>. Posición relativa de partículas en el espacio.

Las trayectorias de dos partículas se describen mediante las siguientes circunferencias.

$$C_1: x^2 + y^2 = 5 \quad \text{y} \quad C_2: x^2 + y^2 - 10x + 6y = 0$$

Determina la posición relativa de las trayectorias. ¿Es posible que las partículas se encuentren?

<u>Problema 6 (Campo 1)</u>. Hallar la excentricidad de una órbita elíptica

Se tiene que la ecuación que sigue la trayectoria de la Tierra respecto al Sol es la siguiente $\frac{x^2}{16} + \frac{7^2}{25} = 1$. Halla cual es la excentricidad de esta órbita.

<u>Problema 7 (Campo 6).</u> La central eléctrica que abastece tres ciudades.

Las ciudades A, B y C, por las cuales no puede pasar ninguna carretera recta buscan una ubicación para una central eléctrica que las abastezca. Elige una ubicación óptima para esta central si no quieres que los alcaldes de las ciudades se quejen de que la central está más cerca de una ciudad que de otra.

Problema 8. (Campo 3). Colocación de cañón para la defensa del fuerte.

El ejército de la ciudad debe defender el fuerte colocando un cañón y preparándolo para que el ejército enemigo pueda resultar atacado cuando se encuentra en un campo a 3 km del fuerte. Si sabes que el cañón se sitúa a una altura de 200 metros sobre el nivel del campo, encuentra la ecuación de la parábola que describe la bala que sale del cañón sabiendo que el punto de lanzamiento es el vértice de la parábola.

Problema 9. (Campo 6). Reflexión por una hipérbola.

Para que una lente hiperbólica refleje en la dirección que se desea uno de los focos debe encontrarse a 10 cm del origen y el vértice a 8 cm del origen. Calcula la ecuación general de dicha hipérbola.

Problema 10. (Campo 7). Obtener ecuación de un lugar geométrico.

Realiza con GeoGebra el siguiente experimento. Dibuja una circunferencia y un punto exterior a ella. Halla la curva de puntos que equidistan de la circunferencia y del punto mediante el comando Mediatriz y usando el rastro de puntos. Por último, mediante GeoGebra aproxima una cónica que pase por los puntos de esta curva. Basándote en la ecuación que obtienes, ¿qué curva cónica es?

2. ¿Qué modificaciones de la técnica inicial van a exigir la resolución de dichos problemas?

A lo largo de esta unidad didáctica se plantean unos campos de problemas para los cuales los alumnos no disponen de técnicas previas para un acercamiento a la resolución de dichos problemas. Por ello, se supone que todas las técnicas que se empleen para la resolución de problemas y ejercicios en esta secuencia didáctica serán novedosas para los alumnos.

El profesor mediante los problemas y ejercicios de ejemplo explicará el adecuado uso de las técnicas y que técnicas son adecuadas para resolver qué tipo de problema en función de su campo de problemas. A continuación, indicamos que técnicas se emplean en la resolución de qué problemas y, por tanto, en que campos de problemas inciden:

- Para el Problema 2, que se enmarca en el Campo 5 se emplean las técnicas 10 y 11.
- Para el Problema 3 y Problema 8, en el que se trabaja el Campo 3 se emplean las técnicas 5 y 6.

- Para el Problema 4, que se enmarca en el Campo 4 se emplean las técnicas 3 y 12.
- Para el Problema 5, en el que se trabaja el Campo 2 se utilizan las técnicas 7 y 8.
- Para el Problema 6, en el que se trabaja el Campo 1, se emplean las técnicas 1 y 2.
- Para el Problema 7, en el que se trabaja el Campo 5 se emplean las técnicas 10 y 11.
- Para el Problema 9, ubicado en el Campo 6, se emplean las técnicas 3 y 4.
- Para el Problema 10, que se sitúa en el Campo 7, se emplean las técnicas 11.

3. Indica la metodología a seguir en su implementación en el aula.

	Metodología	Material	Campo de problemas que trabaja
Problema de la prueba inicial	Grupos de 3 alumnos	GeoGebra	Campo 7
Problema 0a	Debate en el aula	Pizarra	Campo 5
Problema 0b	Debate en el aula	Pizarra	Campo 1
Problema 1	Individual	Lápiz y papel	Problema intrínseco no contextualizado
Problema 2	Individual	Lápiz y papel	Campo 5
Problema 3	Trabajo para casa	GeoGebra	Campo 3

Problema 4	Grupos de 2 alumnos	GeoGebra/ Calculadora gráfica	Campo 4
Problema 5	Individual	Lápiz y papel	Campo 2
Problema 6	Individual	Lápiz y papel	Campo 1
Problema 7	Grupo de 3 alumnos	Lápiz y papel	Campo 5
Problema 8	Trabajo para casa	Lápiz y papel	Campo 3
Problema 9	Individual	Lápiz y papel	Campo 6
Problema 10	Trabajo para casa	GeoGebra	Campo 7

Tabla 1. Descripción de las metodologías y campos de los problemas propuestos.

A continuación, explico con un poco de detalle cómo propongo que funcionen las diferentes metodologías:

Individual: El alumno debe tratar por sí mismo de realizar la tarea o problema propuesto para llegar a una solución. Posteriormente el profesor expondrá su versión sobre el problema en la pizarra o pedirá a alguno de los alumnos (que ha podido escoger mientras los alumnos realizaban sus producciones) que salga a la pizarra a resolver el problema.

Trabajos en grupo: El profesor debe cerciorarse durante el trabajo de los alumnos que los alumnos participan en las discusiones de sus grupos y que las soluciones alcanzadas en cada uno de los grupos parten de una discusión en sus miembros. Al mismo tiempo que el profesor resuelve las dudas que pueda haber.

Durante la puesta en común en el aula el profesor debe ejercer un papel de moderador para que los alumnos propongan sus soluciones como válidas y se alcance un quórum sobre cuál o cuáles son soluciones válidas a los problemas propuestos. De esta forma el profesor no corta la espontaneidad del alumnado y permite que estos alumnos pierdan el miedo al compartir sus opiniones ante un público. Finalmente, el profesor realiza algunas apreciaciones a las respuestas que no fueran exactas para que los alumnos puedan modificar sus producciones.

Trabajo para casa: El profesor pide que de forma voluntaria los alumnos intenten buscar la solución a algún problema. El día siguiente el profesor recoge las entregas voluntarias de los alumnos que han intentado resolver el problema. De esta forma se puede evaluar el interés del alumno por la asignatura, además, en el caso de que no obtengan la solución poder ver en qué punto del razonamiento no han podido continuar y tener una especie de "feedback" sobre su proceso de enseñanza.

Si una gran parte del alumnado no ha conseguido llegar a una solución válida el profesor tras revisar las producciones puede exponer en la pizarra una resolución válida el día siguiente a las entregas o escoger que algún alumno exponga su método.

Debate en el aula: El profesor expone un problema a los alumnos y se produce un debate sobre cuáles deben ser las herramientas, técnicas o métodos para resolverlo. El profesor modera el debate y, de forma constructiva, trata de corregir los fallos de los alumnos y guiando la resolución del problema por parte de los alumnos, en ningún momento permitiendo las ridiculaciones ante los fallos de compañeros.

F. Sobre las técnicas

1. Diseña los distintos tipos de ejercicios que se van a presentar en el aula.

A continuación, se proponen algunos ejercicios que formarán parte de la unidad didáctica

Ejercicio 1. Halla la ecuación de una elipse, con ejes paralelos a los ejes X e Y, de centro $C = (4,1)$ y vértices $A' = (1,1)$ y $B' = (7,1)$.

Ejercicio 2. Escribe la ecuación de la circunferencia de centro $C = (1,2)$ y radio $r = 3$.

Ejercicio 3. Halla el área de la corona circular formada por las circunferencias C_1 y C_2.

$$C_1: x^2 + y^2 - 3x + 8y + 5 = 0$$

$$C_2: x^2 + y^2 - 3x + 8y + 9 = 0$$

Ejercicio 4. Empleando la calculadora gráfica o alguna aplicación informática halla la posición relativa de las siguientes cónicas:

$$C_1: x^2 + 3y^2 - 8x - 12 = 0$$

$$C_2: x^2 + y^2 - 8x + 5y - 15 = 0$$

Ejercicio 5. Dados los puntos $F = (-2,0)$ y $F' = (1,-3)$ y la recta $r: x + 2y - 5 = 0$, obtén las ecuaciones de:

a) La elipse de focos F y F' y su constante es 10. ¿Cuál es su excentricidad?

b) La hipérbola de focos F y F' y su constante es 2.

c) La parábola cuyo foco es F y cuya directriz es r.

d) Los puntos de corte de la recta r y la circunferencia con centro en F y pasa por F'. ¿Cuál es su posición relativa?

Ejercicio 6. La parábola de ecuación $y = x^2 + 5x - 2 = 0$ tiene por foco el punto $F = (\frac{1}{3}, \frac{19}{4})$. Halla su directriz.

Ejercicio 7. Determina los focos, vértices, asíntotas y excentricidad de la siguiente hipérbola: $16y^2 - 25x^2 = 1600$.

2. ¿Qué técnicas o modificaciones de una técnica se ejercitan con ellos?

	Técnicas trabajadas	Metodología	
		Agrupación	Materiales
Ejer 0	Tec 11	Debate en el aula	Pizarra y calculadora gráfica para comprobación
Ejer 1	Tec 1	Individual	Lápiz y papel
Ejer 2	Tec 7	Grupo de 2 alumnos	Lápiz y papel
Ejer 3	Tec 8	Debate en clase	Pizarra
Ejer 4	Tec 12	Individual	Calculadora gráfica u otras herramientas informáticas
Ejer 5	Tec 1, Tec 2, Tec 3, Tec 5 y Tec 10.	Grupo de 4 alumnos	Lápiz y papel
Ejer 6	Tec 6	Trabajo para casa (Individual)	Lápiz y papel
Ejer 7	Tec 4	Grupo de 3 alumnos	Lápiz y papel

Tabla 2. Descripción de las metodologías y técnicas asociadas a los ejercicios propuestos.

3. Dichas técnicas ¿están adecuadas al campo de problemas asociado al objeto matemático?

Todas las técnicas mencionadas juegan un papel importante en la resolución de los problemas que encajan en los campos de problemas asociados a las cónicas.

Como ejemplos podemos ver que para hallar una solución al Problema 0a necesitamos emplear la Tec 11. Del mismo modo para dar una solución válida al Problema 2 precisamos hallar la ecuación de la elipse que modela la puerta por la que hay que introducir la caja, y por tanto la Tec 1 es necesaria para la resolución del problema.

Como resumen podemos hacer una tabla en donde se indica que técnicas inciden en que campos de problemas.

Campo de problemas	Técnicas empleadas
Campo 1	1 y 2
Campo 2	8, 9 y 12
Campo 3	5 y 6
Campo 4	3, 4 y 12
Campo 5	10 y 11
Campo 6	3 y 4
Campo 7	1, 3 , 5 y 11

Tabla 3. Asociación de técnicas con campos de problemas.

4. Indica la metodología a seguir en su implementación en el aula.

En el apartado 2 hemos asociado cada ejercicio al tipo de metodología con el que se procederá a implantarlo en el aula. Las metodologías se encuentran detalladas en el apartado E.3.

G. Sobre las tecnologías (justificación de las técnicas)

1. ¿Mediante qué razonamientos se van a justificar las técnicas?

El profesor mediante los problemas y ejercicios de ejemplo explicará el adecuado uso de las técnicas y qué técnicas son adecuadas para resolver qué tipo de problema en función de su campo de problemas.

Desde el acercamiento de triángulos rectángulos donde el Teorema de Pitágoras ya es conocido se propone hacer natural la propiedad de estas distancias en las cónicas para el caso de la elipse$a^2 = b^2 + c^2$ y para el caso de la hipérbola $c^2 = b^2 + a^2$.

Del mismo modo las ecuaciones de las diferentes curvas cónicas se justifican desde el cálculo de distancias en el plano euclídeo. Este cálculo aparece en el currículo de 1º Bachillerato, por tanto, los alumnos tendrán las nociones suficientes para la justificación de las técnicas de esta unidad didáctica.

2. ¿Quién (profesor, alumnos, nadie) va a asumir la responsabilidad de justificar las técnicas?

El profesor dará de forma intuitiva las definiciones y demostraciones que den lugar a las técnicas que los alumnos deben conocer. Impartir estos conocimientos de una forma demasiado rigurosa puede dar lugar a que los alumnos pierdan el foco de importancia de los objetos matemáticos a estudiar y que se distraigan con técnicas o justificaciones que les hagan perder el interés en el objeto matemático.

A partir de estos conceptos surgen las técnicas y el profesor ejemplificará su uso con ejercicios de ejemplo para los diferentes campos.

Del mismo modo, algunos conceptos sencillos se introducirán al alumno y se tratará que el propio alumno alcance algunos conocimientos de forma conjetural. Un ejemplo sería que los alumnos tratasen de obtener la relación pitagórica que se cumple en la hipérbola con respecto a su distancia focal y la de sus semiejes, una vez que el profesor les ha explicado la relación que se cumple en la elipse.

Como ejemplo se puede mencionar cómo a partir de una definición empleando el concepto de lugar geométrico se pueden obtener las ecuaciones generales de estas cónicas. Aunque no se realizará en la totalidad de los casos, solo para alguna de las cónicas ya que es un proceso repetitivo.

3. Diseña el proceso de institucionalización de los distintos aspectos del objeto matemático.

Para facilitar el entendimiento de las definiciones y deducción de las ecuaciones de las secciones cónicas se ejemplificará y trabajará con mayor medida las ecuaciones generales, simplificando la situación de las cónicas en el plano cartesiano. De este mismo modo se introducen las ecuaciones en el libro de texto que se ha tomado de referencia y la mayoría de los ejercicios que se proponen requieren el uso de este tipo de ecuaciones generales.

Del mismo modo, en ciertos ejercicios y problemas se propone trabajar con modificaciones de las ecuaciones generales de las cónicas y, mediante estos ejemplos, se intentará que el alumno sepa calcular ecuaciones de cónicas desplazadas del origen de coordenadas y cuyas directrices no sean paralelas a alguno de los dos ejes cartesianos.

4. Indica la metodología a seguir en su implementación en el aula.

En la mayoría de técnicas la ejemplificación es la metodología que se va a utilizar para que los alumnos aprendan a emplear las técnicas adecuadas en los diferentes problemas.

Además de la ejemplificación se emplearán algunos métodos diferentes en casos específicos. Para que los alumnos experimenten con el concepto de excentricidad se propone una actividad interactiva en el aula donde los alumnos emplearán la herramienta diseñada por el usuario (Dalmau, s.f.) en la versión online de Geogebra y, en donde se puede apreciar que haciendo variar la variable excentricidad (mediante un deslizador) se puede ir pasando de una curva cónica a otra.

Para asimilar otros tipos de propiedades y construcciones de técnicas se propone el uso de la herramienta GeoGebra, como se puede ver en las siguientes 3 prácticas propuestas para la Sesión 8:

Práctica 1. Estudio de la excentricidad y la directriz en las cónicas.

1. Elige un punto O y un punto F, que será un foco de la elipse sobre el eje OXy toma el eje OYcomo directriz de la cónica.
2. Traza por un punto cualquiera Q, a la derecha de F, del eje OX la recta paralela al eje OY.
3. Escribe $d = Distancia[O, Q]$ en Entrada.
4. Escribe $e = 0.8$ en Entrada, que será la excentricidad de la cónica.
5. Traza la circunferencia de centro F y radio el producto ed.
6. Halla los puntos AyB de intersección de tal circunferencia con la recta que pasa por Q.
7. Selecciona la herramienta Lugar Geométrico.
8. Pulsa el punto P y luego el punto Q, haz lo mismo con los puntos P' y Q. De esta forma la herramienta Lugar Geométrico dibuja una elipse de excentricidad $e = 0.8$.
9. Crea un deslizador para el parámetro e y permítele variar entre 0 y 2.
10. Verás que la curva pasa de ser una elipse cuando $e < 1$, es una parábola cuando $e = 1$ y es una hipérbola cuando $e > 1$.

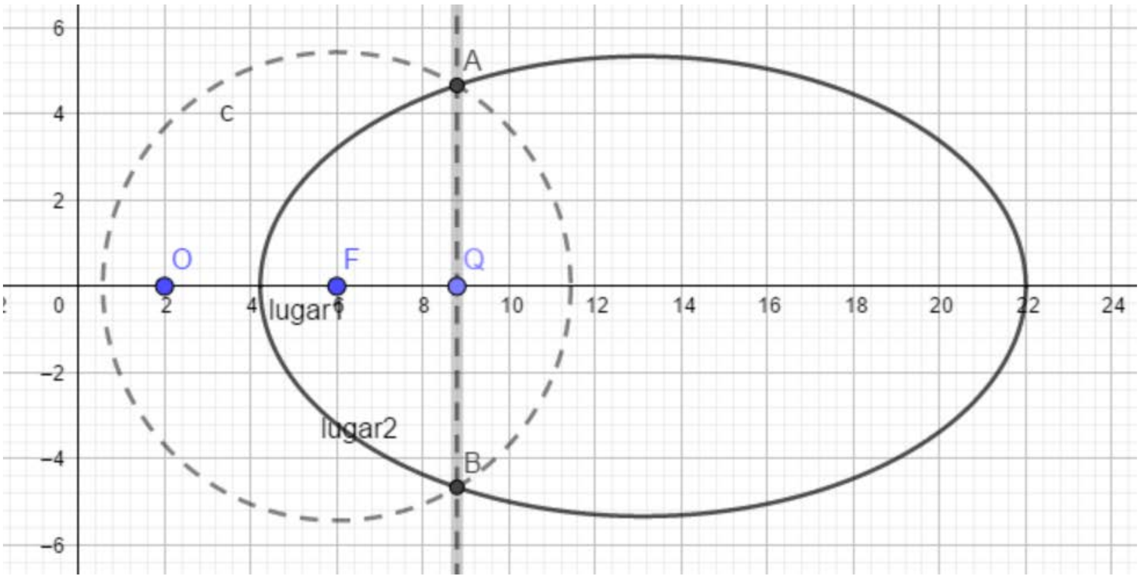


Figura 15. Construcción de la elipse con la Práctica 1.

El objetivo de este trabajo es proponer un tipo de técnicas y actividades que potencien en el alumno tanto el aprendizaje y comprensión de las curvas cónicas, como que conecten el punto de vista geométrico sintético del cual proviene el motivo de su introducción en el currículo (propiedades reflexivas de estas curvas) y el punto de vista analítico, el cual conecta más con el currículo propio durante el bachillerato donde se requiere una mayor abstracción para que el alumno comience a obtener las ecuaciones de las curvas y gráficas que puede dibujar.

Además, el enfoque de las actividades propuestas con Geogebra está en acuerdo con el estándar de aprendizaje 5.2 del Bloque 4 asociado a dicha unidad didáctica según el Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato:

"Realiza investigaciones empleando programas informáticos específicos en los que hay que seleccionar, estudiar posiciones relativas y realizar intersecciones entre rectas y las cónicas estudiadas."

En este caso se espera que los alumnos ya conozcan el software de Geogebra y hayan practicado con el mismo anteriormente. La metodología supuesta para esta práctica sería la entrega de las instrucciones mostradas arriba y que los alumnos interactúen con el software para poder elaborar ellos sus propias curvas cónicas.

Se espera que de este proceso de obtención de las cónicas los alumnos obtengan una mejor interpretación de los elementos básicos de las curvas cónicas como son la directriz y el parámetro excentricidad. Además, el hecho de crear un deslizador para dicho parámetro que permita transformar unas cónicas en otras hará que clasifiquen este tipo de curvas dentro de un tipo y no las entiendan de forma independiente creando un mayor nivel de abstracción.

Práctica 2. Construcción de una hipérbola a partir de sus ejes.

1. Elige los focos F y F'y, entre ellos, los vértices Ay A' sobre el eje OX y simétricos respecto del origen de coordenadas.
2. En Entrada escribe $a = Distancia[O, A]$ y $b = Distancia]$ con $a < b$.
3. En un punto exterior B, construye un segmento de longitud mayor o igual que $2c$.
4. Toma un punto Q de este segmento y escribe $r = Distancia[B, Q]$ en Entrada.
5. Traza las circunferencias de centro F y radio r y la de centro F' y radio $2a + r$. Estas dos circunferencias se intersecan en dos puntos $H_1 y H_2$ que pertenecen a una de las ramas de la hipérbola.
6. Traza las circunferencias de centro F y radio $2a + r$ y la de centro F' y radio r. Estas dos circunferencias se intersecan en dos puntos $H'_1 y H'_2$que pertenecen a la otra rama de la hipérbola.
7. Declara Q como punto móvil, lo utilizaremos como deslizador.
8. Activa el rastro de los puntos H'_1, H_1, H'_2, H_2y mueve el punto Q. La traza de estos puntos dibuja una hipérbola.

- Explica el porqué de que los puntos $H_1 y H_2$ pertenecen a la hipérbola.

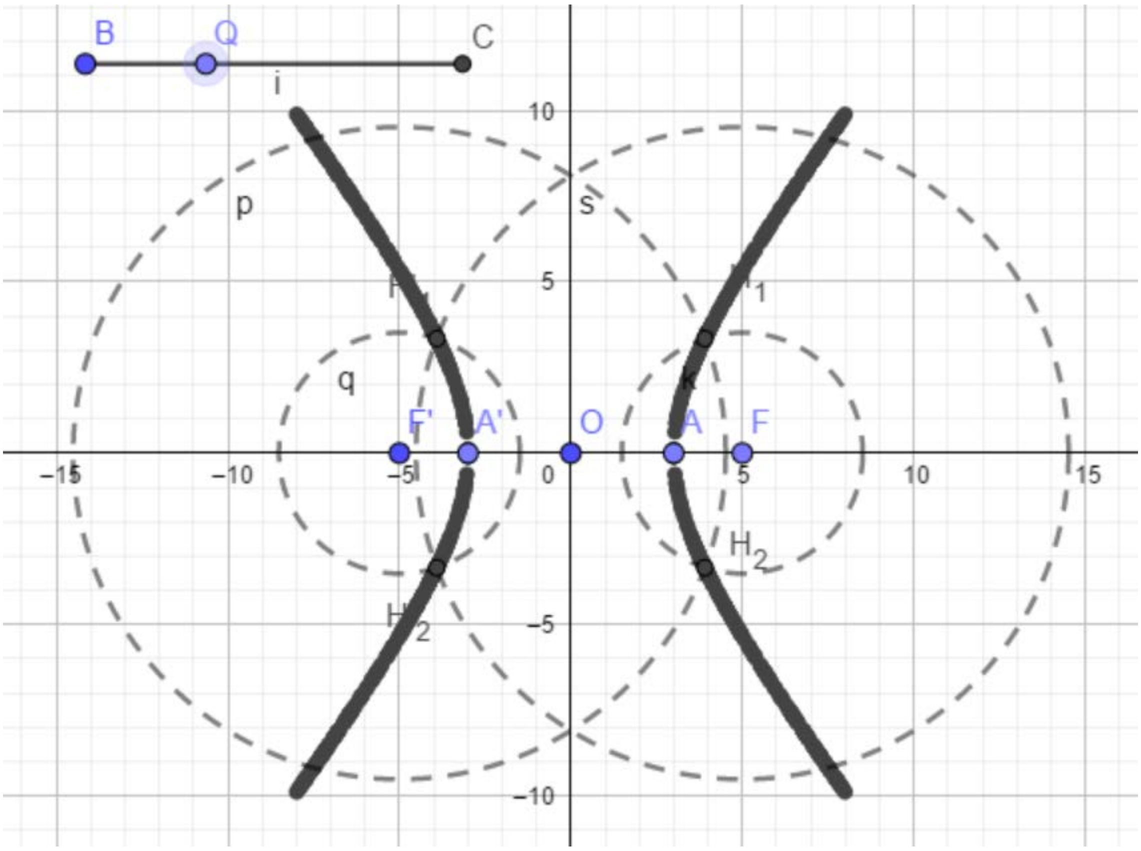


Figura 16. Construcción de la hipérbola a partir de su definición como lugar geométrico.

Este ejercicio es una simple construcción de una hipérbola a partir de su definición como lugar geométrico. Una hipérbola debe que cumplir que la diferencia de distancias de cada uno de sus puntos a los focos es siempre una constante. Construyendo esta curva los alumnos ven como los puntos de la hipérbola son los únicos que cumplen esta propiedad y pueden experimentar con la variación del parámetro a para ver cómo influye en la forma de la hipérbola.

Práctica 3. Definición alternativa de elipse con el concepto de lugar geométrico

1. Lugar geométrico de los puntos que distan de una circunferencia y un punto interior a ella.
2. Dibuja una circunferencia con centro el punto Q y de un radio determinado.
3. Una vez dibujada la circunferencia escoge un punto Rsobre ella.
4. A continuación, crea una semirrecta que parta del centro de la circunferencia y pase por R.
5. Ahora elige un punto cualquiera Sque esté contenida en la circunferencia y no sea el centro.
6. Obtiene la mediatriz de Sy R.
7. Halla la intersección T de la mediatriz que acabas de calcular y la semirrecta creada anteriormente.
8. Activa el rastro del punto Ty mueve el punto R alrededor de toda la circunferencia. Responde a las siguientes preguntas.

- ¿Qué figura has obtenido como lugar geométrico de los puntos que equidistan de la circunferencia y un punto interior a ella?
- ¿Quiénes son en este caso los focos de la elipse?

El resultado de esta práctica debería ser la imagen que se muestra en la Figura 17.

Los alumnos deben identificar este lugar geométrico como una elipse y ver que una curva plana como la elipse puede tener dos definiciones equivalentes.

- La elipse aparece como el conjunto de puntos cuya suma de distancias a dos puntos fijos es constante.
- La elipse es el conjunto de puntos que equidistan de una circunferencia y un punto interior a ella.

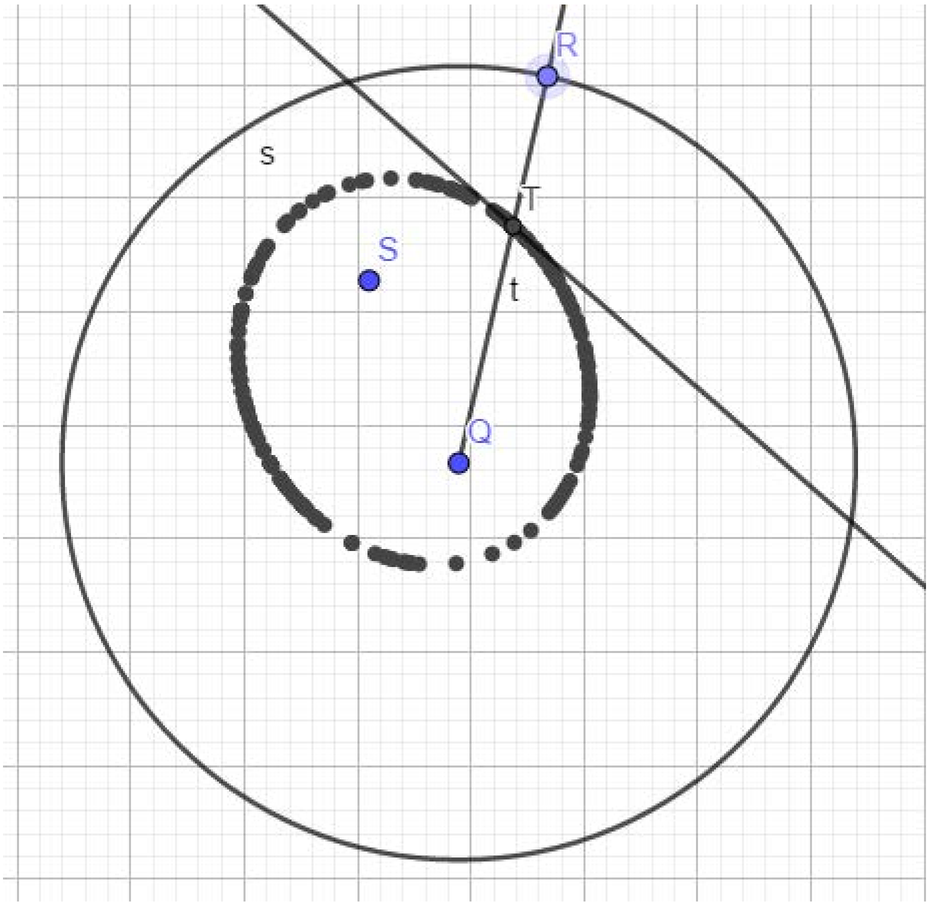


Figura 17. Construcción de elipse mediante definición alternativa.

Cabe destacar que esta actividad es una actividad que se puede realizar de forma presencial y también de forma telemática, ya que es posible que, en años posteriores, algunas de las lecciones tengan que recibirse de forma no presencial o parte del alumnado tenga que seguir la docencia de forma online, por este motivo es importante adaptar las actividades a que puedan trasladarse a los medios informáticos de una forma sencilla.

H. Sobre la secuencia didáctica y su cronograma

1. Indica la secuenciación de las actividades propuestas en los apartados anteriores.

Esta unidad didáctica está contenida en el bloque de geometría de 1º de Bachillerato en la asignatura de Matemáticas I.

La mayoría de libros de texto consultados, del mismo modo que el libro de referencia, ubican el bloque de geometría analítica antes del bloque de análisis y posterior al bloque de álgebra, por tanto, esta parte de la asignatura se situaría en el calendario escolar a comienzos del segundo cuatrimestre después de haber trabajado todo el contenido algebraico. Este libro de texto de 14 unidades dedica solo 2 de ellas al estudio de la geometría analítica, dando una introducción en la primera de ellas y hablando de las curvas cónicas y lugares geométricos en la segunda.

Para esta unidad didáctica se propone una secuenciación de 10 sesiones. Dentro de estas sesiones, se incluye una sesión para la realización de una prueba de contenidos (Sesión 9) y una última sesión que se dedicaría a realizar unas actividades destinadas a la gestión de los resultados y evaluación formativa. La duración exacta de la unidad didáctica puede ser modificada ligeramente por diversos motivos inherentes al desarrollo del curso escolar, aunque se aproximará a la del siguiente cronograma.

Sesión 1	Sesión inicial. Repaso conceptos de lugar geométrico.
Sesión 2	Acercamiento a las cónicas.
Sesión 3	Parábola y circunferencia
Sesión 4	Elipse. Método jardinero y demás propiedades
Sesión 5	Hipérbola. Sistema de localización y telescopio
Sesión 6	Propiedades generales de las cónicas
Sesión 7	Sesión cónicas con herramientas tecnológicas
Sesión 8	Posiciones relativas entre cónicas
Sesión 9	Prueba de evaluación
Sesión 10	Revisión prueba (evaluación formativa)

Tabla 4. Cronograma de la propuesta para la unidad didáctica de curvas cónicas.

A continuación, paso a describir el contenido de estas sesiones haciendo referencia a los problemas y ejercicios incluidos en los apartados anteriores.

Sesión 1. Sesión inicial.

Comenzamos la unidad didáctica con la sesión inicial propuesta en el apartado C.3. De esta forma los alumnos comienzan la unidad didáctica repasando el concepto de lugar geométrico que será fundamental para adquirir los conocimientos adecuados a lo largo de la secuencia didáctica.

<u>Sesión 2</u><u>. Acercamiento a las cónicas.</u>

En esta segunda sesión los alumnos entrarán en contacto con las cónicas mediante la actividad consistente en la presentación del cono de madera o el cono de plástico con transparencias explicada en la sección D.3.

<u>Sesión 3</u><u>. Parábola y circunferencia.</u>

Los alumnos tienen conocimientos básicos de la circunferencia y quizás la parábola previos a la introducción por el profesor de estas curvas, aunque la parábola se ha visto desde el punto de vista funcional.

Se debe por tanto introducir estas curvas desde su punto de vista geométrico. Para ello se propone trabajar con el problema de tiro de la jugadora de baloncesto (Problema 3) y trabajar con los conceptos de directriz y foco para que una vez queden claros sean identificables en las siguientes cónicas que se presentarán en clase.

Además, el profesor explicará cómo llegar a la ecuación general de la parábola partiendo de su definición como el conjunto de puntos del plano, que equidistan del foco y de la directriz.

<u>Sesión 4</u><u>. Elipse. Método jardinero.</u>

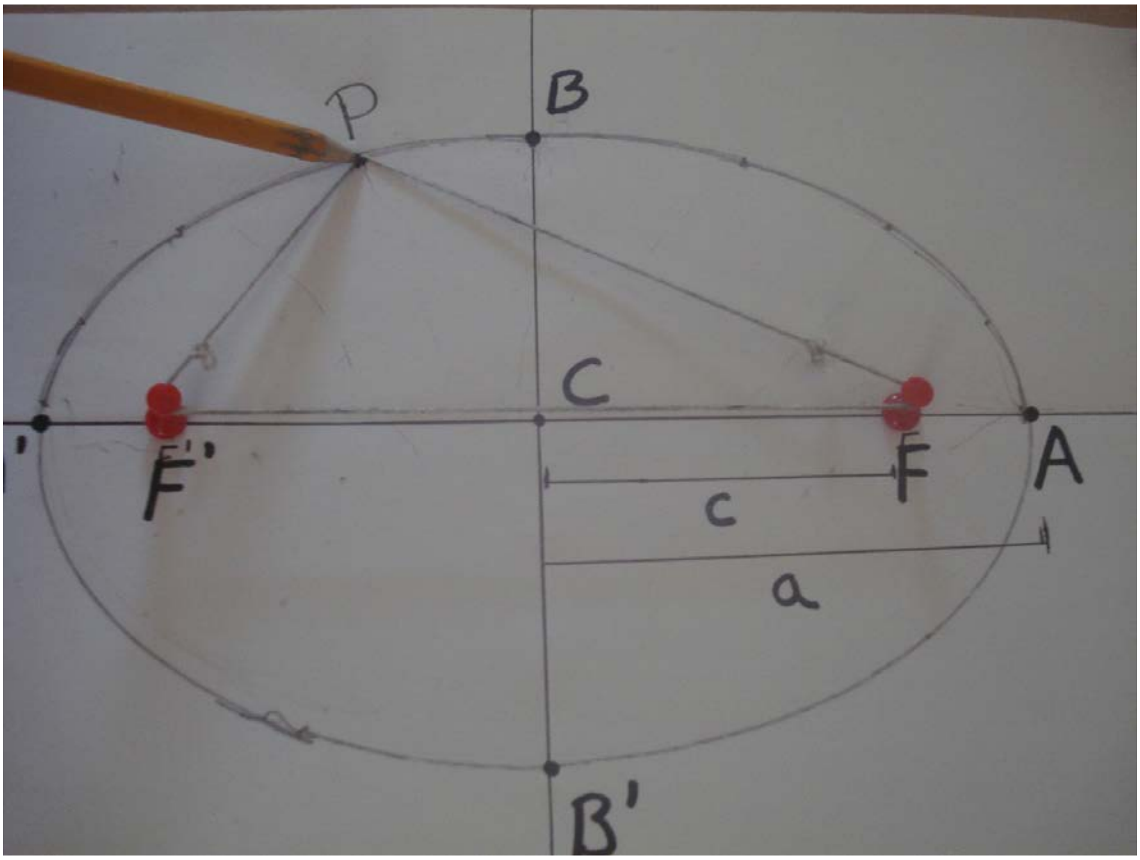


Figura 18. Elipse dibujada mediante método jardinero (Olivares, 2012).

En esta sesión partiendo del método manipulativo del jardinero (Real, 2004) se introduce la elipse como el lugar geométrico de los puntos cuya suma de distancias a dos puntos fijos es constante.

Mediante un par de chinchetas, una cuerda/hilo y un bolígrafo, se permitirá a los alumnos divididos en grupos de 3 personas que creen elipses como se muestra en la Figura 18. El profesor pedirá que después de la experimentación los alumnos creen su propia definición de elipse, a partir de la construcción que acaban de realizar.

Una vez los distintos grupos han llegado a la definición correcta, previa puesta en común en el aula, se introduce la ecuación reducida de la elipse, explicando que esta expresión parte de suponer el centro en el origen de coordenadas y cuyos focos estén situados en los puntos $F = (c, 0)$ y $F' = (-c, 0)$.

Se continúa la clase con la definición algunos elementos propios de la elipse como son los semiejes, vértices, distancia focal, etc. Además, se proponen un par de ecuaciones de elipses con las que los alumnos deben identificar las medidas de los diferentes elementos a partir de la ecuación reducida de dichas elipses.

Para finalizar se propone el problema que se ha introducido en la sección E.1, en donde se pide calcular las dimensiones máximas de la caja para poder introducirla por la puerta de forma elíptica.

En este problema los alumnos deben hacer uso de la ecuación general de la elipse para hallar el ancho máximo que puede medir la caja y dar respuesta a la pregunta que se les plantea.

Es importante hacer ver que la circunferencia es el caso degenerando de la elipse al variar la excentricidad de la misma hasta que los focos se juntan.

Sesión 5. Hipérbola. Sistema de localización y telescopio.

Para la introducción de la hipérbola se emplearán problemas en los que aparezca la hipérbola como una herramienta útil para resolver problemas de la vida real.

Además de problemas de posicionamiento con el sistema LORAN que se han planteado en la sección D.3 también se proponen problemas sobre la propiedad reflexiva que tiene esta curva.

En concreto, se plantea usar la herramienta online que explica el funcionamiento de un telescopio tipo Cassegrain mediante una animación de GeoGebra (Larrosa, 2014).

En este telescopio se puede ver como combinando las reflexiones que se producen en hipérbolas y parábolas colocadas adecuadamente se puede dirigir la luz a un punto que deseamos (el foco). Esta propiedad reflexiva que es generalizable a las distintas cónicas hace que sean curvas o superficies muy útiles en la vida real.

Para finalizar la sesión se propone a los alumnos algún ejercicio en el que deban identificar elementos de hipérbolas dando una serie de ecuaciones.

Sesión 6. Propiedades generales de las cónicas.

En esta sesión, además de proponer ejercicios para que los alumnos asimilen los conceptos aprendidos en las sesiones anteriores sobre las distintas cónicas, también se centrará la atención en explicar las propiedades que tienen estas curvas en el plano, así como plantear ejercicios en los que los alumnos tengan que manejar estas propiedades:

- Excentricidad. Se empleará la aplicación en GeoGebra online que permite la variación de la excentricidad de una cónica donde este parámetro diferencia el tipo de curva cónica que tenemos (Dalmau, s.f.).
- Relación $a^2 = b^2 + c^2$. El profesor introducirá esta propiedad de la elipse y la distinta relación pitagórica que se cumple en la hipérbola.
- Propiedad reflexiva. El profesor hablará de cómo se traslada la propiedad de las cónicas en las diferentes curvas y cómo eso permite que éstas diferentes curvas tengan aplicaciones diferentes en la vida real. Esto se hará siempre mediante ejemplos para que los alumnos se familiaricen con estas propiedades.

Sesión 7. Dibujo de cónicas en Geogebra a partir de sus propiedades

Se pretende realizar una serie de prácticas guiadas de ordenador para que los alumnos se acostumbren a trabajar con cónicas mediante GeoGebra. Ejemplos de las prácticas de GeoGebra que se proponen son las mencionadas al final de la sección G.4.

Sesión 8. Posiciones relativas.

En el libro de texto que se ha tomado de referencia (De la Prida et al., 2015) aparece la Figura 19 indicando un método de determinación para la posición relativa de circunferencias. Atendiendo a esta técnica se comenzará la sesión con la justificación y explicación de la misma para posteriormente mandar a los alumnos realizar una serie de ejercicios en grupos de 3 personas.

Una vez que la mayor parte de los grupos hayan completado los ejercicios, entonces saldrán diferentes alumnos a explicar cómo ellos han realizado el ejercicio y cuál es la solución que han encontrado.

Para verificar dicha solución el profesor empleará el proyector para dibujar las circunferencias y comprobar así si los resultados obtenidos por los alumnos son correctos. Para finalizar la sesión se propondrá que estudien la posición relativa e intersecciones entre dos cónicas cualquiera en este caso con herramientas informáticas. Los alumnos deben aprender a interpretar las soluciones que el software permite alcanzar de una forma sencilla y rápida.

En este ejercicio se deben incluir ejemplos que incluyan varios casos diferentes de la casuística, sino todos, para que los alumnos tras realizar unos cuantos experimentos intenten deducir de forma conjetural que el máximo número de puntos de intersección entre dos cónicas es de 4 puntos.

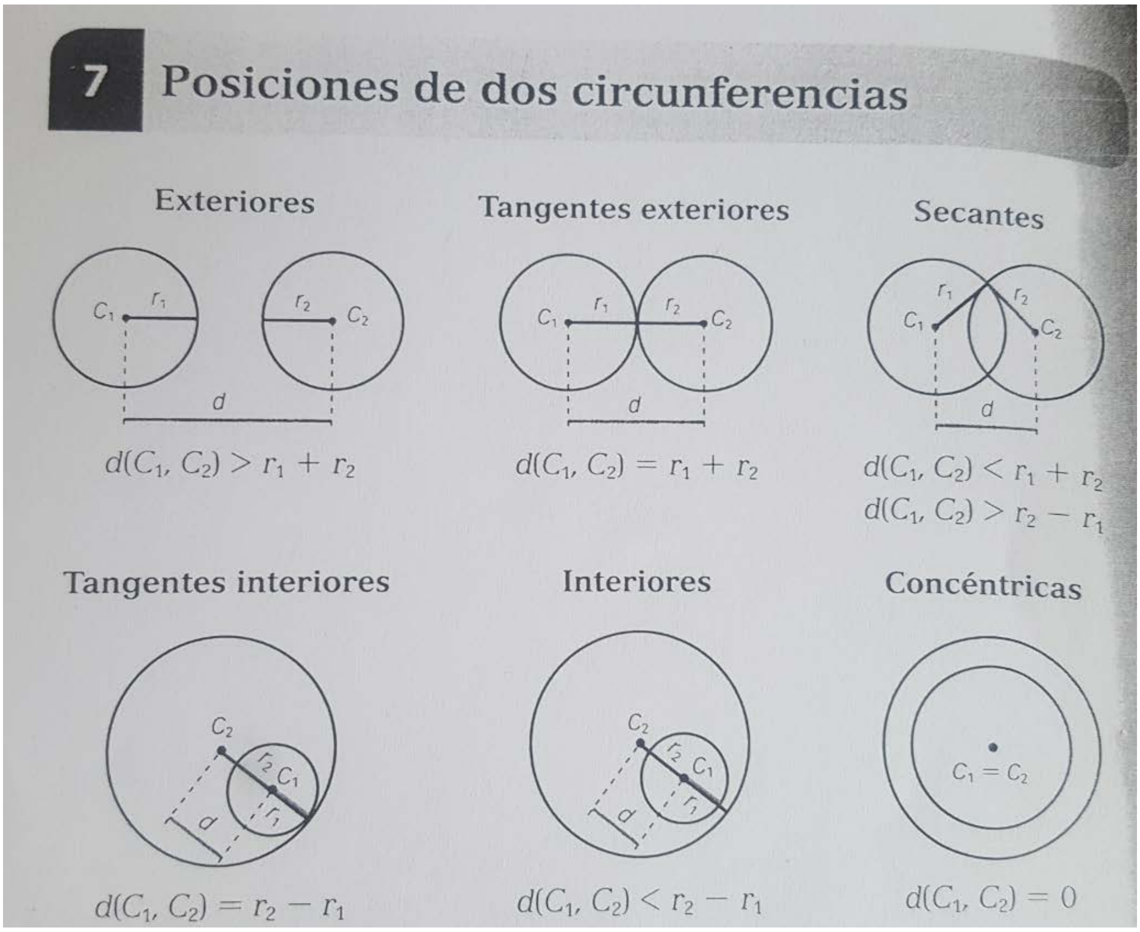


Figura 19. Imagen extraída del libro de texto de Santillana (De la Prida et al. 2015).

Sesión 9. Prueba de evaluación.

Esta sesión se dedicará a que los alumnos realicen la prueba de evaluación que está descrita en la sección I.

Sesión 10. Revisión prueba.

Gestión de los resultados (Evaluación formativa)

Para la gestión de los resultados se propone emplear un método en el que el aprendizaje del alumno no acabe en la sesión previa a la realización del examen, sino que el alumno pueda seguir aprendiendo de la realización del examen y la comunicación de la evaluación. De este modo se pretende llevar a cabo una evaluación formativa.

Con este cometido en la sesión en la que se les dé a los alumnos la corrección individual de cada examen, se propone una actividad de aprovechamiento en la que se resolverán en la pizarra las tareas de la prueba escrita en la que los alumnos han tenido más errores y haciendo comentarios sobre incorrecciones de las respuestas de algunos alumnos (Rochera, Colomina, & Barberá, 2001).

A los alumnos cuya nota no es suficiente para haber aprobado el examen se les plantea la posibilidad de entregar una segunda versión del examen que pueden realizar en su casa de forma individual como una segunda actividad de aprovechamiento.

De esta manera se busca que el foco de la comunicación sea que revisen, clarifiquen y asienten conocimientos, a partir de una corrección de los errores cometidos, a pesar que sea posteriormente a la fecha de un examen (Mauri & Barberà, 2007).

2. Establece una duración temporal aproximada.

Las 10 sesiones que se plantean están creadas para realizarse con una duración máxima de 50 minutos o 1 hora.

Además, se plantea que los alumnos puedan realizar alguna de las tareas propuestas en su casa la finalización de algún problema del que el profesor ha comentado algunas indicaciones durante alguna sesión y no se haya podido acabar durante esos 50 minutos de clase.

I. Sobre la evaluación

1. Diseña una prueba escrita (de una duración aproximada de una hora) que evalúe el aprendizaje realizado por los alumnos.

El examen está diseñado para que se pueda realizar en 50 minutos o 1 hora sin problemas por parte del alumno. En los problemas de cálculo se podrá emplear una calculadora y el problema 5 se propone la utilización de una herramienta informática asociada a la unidad didáctica como puede ser GeoGebra o una calculadora gráfica, en caso de disponerla.

En este examen propuesto planteamos una mezcla de ejercicios teóricos y problemas, tanto contextualizados a la vida real, como problemas propios de las matemáticas de esta unidad didáctica y de diferente dificultad. Además, se introduce un ejercicio a desarrollar con herramientas informáticas.

Examen Curvas Cónicas

1. (1,5 puntos) La órbita de la Luna respecto a la Tierra posee una excentricidad de aproximadamente 0,054. A partir de este dato, y sabiendo que el eje menor mide 400000 km calcula las distancias máxima y mínima entre la Luna y la Tierra a lo

largo de un año, distancias que se denominan apogeo y perigeo respectivamente. Da el resultado redondeando a números enteros.

2. a) (3 puntos) Estudia si las siguientes ecuaciones corresponden a circunferencias. En caso afirmativo, calcula su centro y su radio.

$$x^2 + y^2 - 8x - 9 = 0$$

$$x^2 + y^2 + 8x + 10y + 42 = 0$$

$$x^2 + y^2 + 4x + 2y - 20 = 0$$

   b) (1 punto) En el caso de que al menos dos de ellas sean circunferencias estudia su posición relativa.

3. (1,5 puntos) Un cañón dispara una bala y, ésta, sigue la trayectoria de una parábola. Si la bala aterriza a una distancia horizontal de 1600 metros del cañón y alcanza una altura máxima sobre el suelo de 3200 metros, halla una ecuación que describa la trayectoria de dicha bala.
4. (1,5 puntos) Define las siguientes 3 curvas del plano utilizando el concepto de lugar geométrico. Debes apoyar tu definición mediante un dibujo.
   - Mediatriz de dos puntos.
   - Hipérbola.
   - Parábola.
5. (1,5 punto) Empleando Geogebra dibuja las curvas planas que cumplen las siguientes condiciones y di que tipo de posición relativa existe entre ellas indicando sus puntos de corte si es que existen:
   - Una hipérbola que pasa por el punto $P = (0,3)$ y tiene por focos los puntos $F = (3,3)$ y $F' = (2,4)$.
   - La parábola que tiene como directriz el eje OX y tiene como foco el punto $Q = (3,1)$.

Finalmente, tras el análisis del examen, se propone una gestión de la comunicación de los resultados con dos actividades de aprovechamiento basadas en propuestas de Rochera, Colomina y Barberà (2001) y Mauri y Barberà (2007) como se ha explicado en la sesión 10 de la secuencia didáctica.

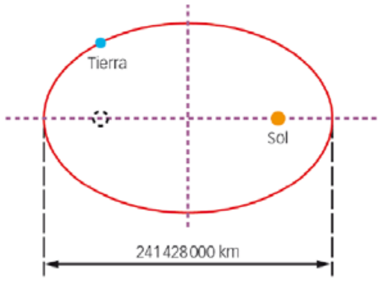
2. ¿Qué aspectos del conocimiento de los alumnos sobre el objeto matemático pretendes evaluar con cada una de las preguntas de dicha prueba?

El problema 1 es un claro ejemplo de problema asociado al cálculo de distancias en órbitas de problemas celestes. Este tipo de problemas es uno de los pocos que sí incluye el libro de texto de referencia dentro de su campo de problemas como se aprecia en la Figura 20.

En el problema 2b se ve reflejada claramente la continuidad de las unidades didácticas en el currículo, ya que un problema de esta unidad didáctica se resuelve empleando métodos aprendidos en la unidad didáctica previa a la que se está analizando actualmente y es una forma de ir comprobando si el alumno va adquiriendo los conocimientos de forma progresiva y es capaz de emplearlos de forma adecuada más adelante.

125. **Los ingenieros de la NASA pretenden enviar una sonda espacial a la Luna. El departamento de ingeniería ha determinado que el mejor momento para lanzar la sonda es cuando la Tierra está en su punto más lejano del Sol.**

Determina la máxima distancia entre la Tierra y el Sol si se sabe que la órbita terrestre alrededor del Sol es una elipse, con el Sol en uno de sus focos, que la longitud del eje mayor es de 241 428 000 kilómetros y que la excentricidad de la órbita es 0,016. Determina también una ecuación de la elipse que representa la órbita de la Tierra.



$2a = 241\,428\,000 \rightarrow a = 120\,714\,000$

$e = 0{,}016 = \dfrac{c}{a} \rightarrow c = 0{,}016 \cdot 120\,714\,000 = 1\,931\,424$

La distancia máxima entre la Tierra y el Sol es cuando la Tierra se sitúa en el eje focal. Su distancia en ese punto es: $a + c = 122\,645\,424$ km

Como $a^2 = b^2 + c^2 \rightarrow b^2 = 14\,568\,139\,397\,332\,224$

Ecuación de la elipse: $\dfrac{x^2}{14\,571\,869\,796\,000\,000} + \dfrac{y^2}{14\,568\,139\,397\,332\,224} = 1$

Figura 20. Problema propuesto por el libro de texto (De la Prida et al., 2015).

El problema 3 ejercita el campo de problemas de tiro parabólico y con ello todas las técnicas que tienen que ver con la obtención de ecuaciones de parábolas.

El ejercicio teórico 4 pretende evaluar si las definiciones básicas de curvas cónicas como lugar geométrico han sido adquiridas y, al mismo tiempo, se pide una representación gráfica para que se compruebe que los alumnos no solo memorizan las definiciones, sino que pueden comprender las propiedades y elementos de cada una de las curvas.

La pregunta número 5 incide en el campo de problemas de estudio de posiciones relativas de curvas cónicas, en este caso se realiza empleando herramientas informáticas.

3. ¿Qué respuestas esperas en cada uno de las preguntas en función del conocimiento de los alumnos?

En el problema 1, se plantea un problema en el que el reto que se le plantea al alumno es la interpretación de distancias en una órbita elíptica en un problema contextualizado a la vida real. El alumno debe deducir que parámetros debe obtener para llegar a la solución del problema, por lo que se considera que no es un problema sencillo de cálculo inmediato, sino que requiere del conocimiento de las propiedades y parámetros de la elipse.

Puede haber algún alumno que tenga problemas al interpretar la máxima distancia de la Luna a la Tierra y la mínima distancia y no logre deducir que se pueden obtener de la siguiente forma:

$$Apogeo = c + a \qquad\qquad Perigeo = a - c$$

aunque este problema no está justificado, ya que se prevé haber resuelto problemas de características similares en el aula previamente al examen.

El alumno no debe únicamente conocer las características principales de esta curva, sino trasladar un problema de cálculo de distancias en la vida real a estos parámetros para la elipse como son la excentricidad y el eje menor.

En el problema 2a se prevé algún problema que tienen que ver con que el alumno mezcle distintas representaciones de la ecuación de una circunferencia y confunda parámetros, lo que conlleve en una mala resolución del ejercicio si simplemente tratan de aplicar un criterio dado, como puede ser el criterio que se encuentra en el libro de texto de referencia (De la Prida et al., 2015), en donde se dice que la ecuación $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ es la de una circunferencia si $A^2 + B^2 - 4C > 0$.

Si el alumno mezcla la ecuación general de la circunferencia

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

con la diferente representación que da el libro de texto

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0,$$

es posible que intente aplicar un criterio con valores obtenidos de forma equivocada.

En el apartado 2b se espera que los alumnos sean capaces de aplicar el criterio reflejado en la Figura 19, suponiendo que lo conocen. En el caso de no conocerlo es también deducible, por lo que se espera que una gran parte de los alumnos resuelvan el problema con ese método. En el caso de que intenten resolverlo por el método algebraico es posible que el hecho de obtener una recta de soluciones les confunda y paren ahí de tratar de resolver el ejercicio.

En el problema 3 se prevé que algunos alumnos no sean capaces de realizar el ejercicio, ya que muchos libros de texto, como ocurre también con la referencia utilizada para analizar la unidad didáctica (De la Prida, Gaztelu, Lorenzo, Pérez, & Sánchez, 2015) se centran en desarrollar problemas donde el foco de la parábola es conocido y los alumnos deben emplear una expresión de la fórmula de la parábola conocido el foco.

En el caso de nuestro problema los alumnos deben atacar el problema desde otro punto de vista y esto puede ser problemático para ellos, aunque no se considera que sea un problema demasiado complicado al estar los datos claramente indicados en el enunciado.

El ejercicio 4 es de carácter teórico, donde no se pide al alumno realizar cálculos, sino que se pide que demuestre si ha adquirido una serie de conceptos relacionados con la idea de lugar geométrico. Por ese mismo motivo, se supone que los alumnos que hayan comprendido la definición de estas curvas no presentarán ningún problema para escribir su definición, excepto puntualmente algún problema relacionado con el uso del lenguaje de las matemáticas.

Por otra parte, se espera que algunos alumnos que no conozcan la definición de estas curvas empleando el concepto de lugar geométrico traten de justificar la definición diciendo que esas curvas se pueden ver como secciones del cono, sin hacer referencia al concepto de lugar geométrico. En dicho caso, la respuesta se dará como errónea.

Además, como se ha hecho en la resolución existen diferentes niveles de lenguaje matemático a los que el alumno podrá expresar dicha definición.

En el ejercicio 5 se espera por parte de los alumnos que realicen de forma correcta la primera parte y se prevé una mayor dificultad en la determinación de la posición relativa de la parábola y la hipérbola.

Se espera que los alumnos den por hecho que estas dos curvas se intersecan solamente en 3 puntos que son los que se pueden apreciar en un área próxima al origen de coordenadas y no justifiquen que no existe intersección en ramas alejadas de la hipérbola con la parábola.

4. ¿Qué criterios de calificación vas a emplear?

A continuación, enumeraremos los estándares de aprendizaje, tanto del bloque 1 (procesos, métodos y actitudes en matemáticas) como del bloque 4 (geometría) que se pretenden evaluar con el examen propuesto:

- (Bloque 1) 8.2. Establece conexiones entre el problema del mundo real y el mundo matemático: identificando el problema o problemas matemáticos que subyacen en él, así como los conocimientos matemáticos necesarios.
- (Bloque 1) 13.4. Recrea entornos y objetos geométricos con herramientas tecnológicas interactivas para mostrar, analizar y comprender propiedades geométricas.
- (Bloque 4) 4.1. Calcula distancias, entre puntos y de un punto a una recta, así como ángulos de dos rectas.
- (Bloque 4) 4.2 Obtiene la ecuación de una recta en sus diversas formas, identificando en cada caso sus elementos característicos.
- (Bloque 4) 5.1. Conoce el significado de lugar geométrico, identificando los lugares más usuales en geometría plana, así como sus características.
- (Bloque 4) 5.2. Realiza investigaciones utilizando programas informáticos específicos en las que hay que seleccionar, estudiar posiciones relativas y realizar intersecciones entre rectas y las distintas cónicas estudiadas.

De forma más concreta, detallamos que estándares de aprendizaje se pretenden evaluar en cada pregunta de la prueba.

- Pregunta 1: Se trabajan los estándares de aprendizaje 8.2 y 5.1
- Pregunta 2: Se trabajan los estándares de aprendizaje 4.1, 5.1 y 5.2
- Pregunta 3: Se trabajan los estándares de aprendizaje 8.2 y 5.1

- Pregunta 4: Se trabajan los estándares de aprendizaje 13.4 y 5.1
- Pregunta 5: Se trabajan los estándares de aprendizaje 13.4, 4.2 y 5.2

Se propone una guía de corrección del examen siguiendo un modelo de tercios (Gairín, Muñoz, & Oller, 2012). Este modelo propone la diferenciación del carácter que tienen las diferentes tareas que debe resolver el alumno para completar la solución del ejercicio que se le propone en diferentes categorías y señalar cual es el máximo de penalización que se le puede aplicar a cada tipo de tareas.

En nuestro caso dividiremos las tareas en los siguientes grupos:

- Tareas principales.
- Tareas auxiliares específicas.
- Tareas auxiliares generales.

La idea es que la penalización máxima que tengan los errores cometidos en tareas auxiliares generales sea a lo sumo un tercio de la puntuación total del ejercicio y las penalizaciones que se correspondan al conjunto de las tareas auxiliares específicas y generales sean de un máximo de dos tercios de la puntuación total del ejercicio. En el caso de que el conjunto de los errores se produzca en las tareas principales el corrector es libre de aplicar una penalización total de la puntuación del ejercicio.

Cabe decir que este modelo ha sido validado en artículos de investigación (Mengual, Gorgorió, & Albarracín, 2013) demostrando que las correcciones siguiendo este modelo tienden a ser más independientes del corrector.

Como se propone la utilización del modelo de tercios, hacemos distinción de las tareas principales, auxiliares específicas y generales para cada uno de los problemas de la prueba y en función del método de resolución. Como ejemplo expresamos en la Tabla 5 la distinción de tareas para la actividad 1 de la prueba.

	Conceptuales	Procedimentales
Tareas principales	- Excentricidad $e = c/a$. - Relación de triángulo rectángulo $a^2 = b^2 + c^2$ - Deducción fórmulas apogeo y perigeo.	
Tareas auxiliares específicas	Eje menor de la elipse	Cálculo de b

Tareas auxiliares generales	Cálculo algebraico y aritmético necesario

Tabla 5. Distribución de tareas para la resolución de la actividad 1.

La distinción de tareas para el resto de actividades en función del método de resolución se encuentra en el Anexo II.

J. Sobre la bibliografía y páginas web

1. Indica los libros, artículos y páginas web revisadas para la realización de este trabajo

Cámara, A., Garrido, R., Tolmos, P., & Marcos, M. (2007). *Curso básico de matemáticas y estadística. Del Bachillerato al grado.* Madrid, España: Delta Publicaciones.

Charnay, R. (1994). Aprender (por medio de) la resolución de problemas. *Didáctica de las matemáticas. Aportes y reflexiones*, 51-64.

Contreras, A., Contreras, M., & García, M. (2002). Sobre la geometría sintética y analítica. La elipse y sus construcciones. *Relime Vol. 5, Núm 2.*, 111-132.

Dalmau, P. (s.f.). *Las cónicas en función de su excentricidad*. Obtenido de geogebra.org: https://www.geogebra.org/m/c9VAcEB7

De la Prida, C., Gaztelu, A. G., Lorenzo, J., Pérez, C., & Sánchez, D. (2015). *Matemáticas I; Serie Resuelve; Saber Hacer.* Madrid, España: Santillana.

Gairín, J. M., Muñoz, J. M., & Oller, A. M. (2012). Propuesta de un modelo para la calificación de exámenes de matemáticas. *Investigación en Educación Matemática XVI. Jaén: SEIEM*, 261-274.

García, I., & Arriero, C. (2000). Una experiencia con Cabri: las curvas cónicas. *Suma, Vol. 34. junio*, 73-80.

Gascón, J. (2002). Geometría sintética en la ESO y analítica en el Bachillerato. ¿Dos mundos completamente separados? *Suma, Vol. 39, febrero*, 13-25.

Guzmán, C. M. (s.f.). *CÓNICAS. PRECEDENTES: MENECMO, ARISTEO, EUCLIDES, ARQUÍMEDES….* Obtenido de http://blogs.mat.ucm.es/catedramdeguzman/conicas-precedentes-menecmo-aristeo-euclides-arquimedes/

Langoni, L., Di Domenicantonio, R., García, M., & Rivera, A. (2019). Problemas en contextos reales implementados para articular materias de Matemática en carreras de Ingeniería. *Unión, Núm. 57 Diciembre,* 99-113.

Larrosa, I. (2014) Telescopio Cassegrain. Grupo XeoDin. Recuperado de http://www.xente.mundo-r.com/ilarrosa/GeoGebra/Telescopio_Cassegrain.html

Mengual, E., Gorgorió, N., & Albarracín, L. (2013). Validación de un instrumento para la calificación de exámenes de matemáticas. *Investigación en Educación Matemática XVII. Bilbao: SEIEM*, 367-381.

Olivares, N. (2012). Método del jardinero para la construcción de la elipse. [Imagen en un blog]. Recuperado de http://elipci.blogspot.com/2012/11/metodo-del-jardinero-para-la.html.

Real, M. (2004). Las cónicas: método de aprendizaje constructivo. *Suma. Vol. 46*, 71-77.

Rochera, M., Colomina, R., & Barberá, E. (2001). Optimizar los aprendizajes de los alumnos a partir de los resultados de la evaluación en Matemáticas. *Revista Investigación en la Escuela, 45*, 33-44.

Sombra, L. (2019). Los mil y un aportes de GeoGebra al estudio de la Geometría Tridimensional. *Épsilon- Revista de Educación Matemática. nº103*, 89-97.

Stewart, J., Redlin, L., & Watson, S. (2007). *Precálculo. 5a edición. Matemáticas para el cálculo.* Ciudad de México, México: Cengage Learning S.A. .

Además, se hace referencia en el texto al marco legal actual que está marcado por los siguientes documentos:

- LEY ORGÁNICA 2/2006, de 3 de mayo, de Educación. (BOE 4/05/2006).
- LEY ORGÁNICA 8/2013, de 9 de diciembre, para la mejora de la calidad educativa. (BOE 10/12/2013).
- Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato (BOE 3/01/2015).
- Orden ECD/65/2015, de 21 de enero, por la que se describen las relaciones entre las competencias, los contenidos y los criterios de evaluación de la educación primaria, la educación secundaria obligatoria y el bachillerato (BOE 29/01/2015).