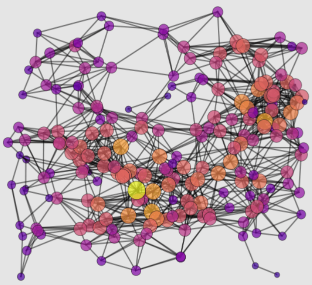
# VÉLETLEN GRÁFOK, HÁLÓZATOK



Székely György József

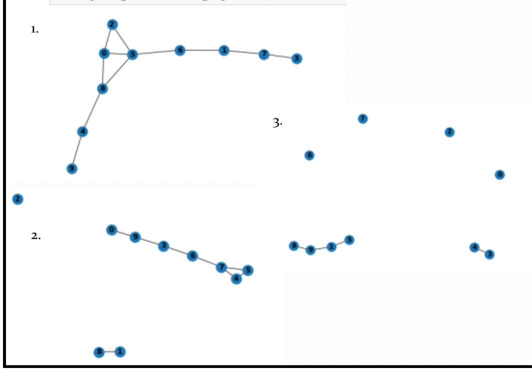
## Koktélparti

- Rendezünk egy partit, 100 meghívott vendéggel, kezdetben senki sem ismeri egymást
- Miközben jól érzik magukat, kialakulnak néhány fős beszélgetések
- Valakinek megemlítjük, hogy melyik a legjobb üveg pezsgő
- Azért hátha nem fogy el… (de, elfog)

## Erdős-Rényi modell

- G(n,p)
- Minden csúcspár p valószínűséggel összekötött
- G(n,m)
- Egyenletes eloszlás szerint egy gráf az összes n csúcsú m élű gráfok közül
- Élek függetlensége miatt gyakrabban használatos az előbbi

```
In [24]: from networkx.generators.random_graphs import erdos_renyi_graph
         n = 10
         p = 0.2
         g = erdos_renyi_graph(n, p)
         nx.draw(g, with_labels=True, font_weight='bold')
```



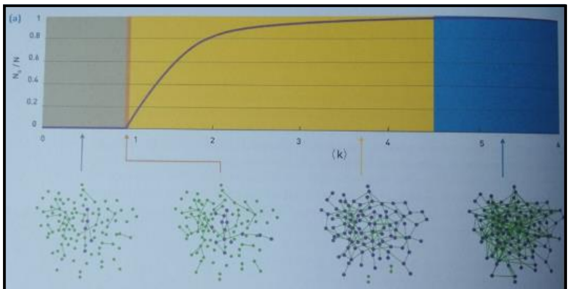

Várható élszám $= p\frac{n(n-1)}{2}$

$$P_l = p^l (1-p)^{\frac{n(n-1)}{2}-l} \binom{\frac{n(n-1)}{2}}{l}$$

- Átlagos fokszám: p(n-1)
- Fokszámeloszlás binomiális
- Ritka hálózatoknál jól közelíthető Poisson-nal: $p_k = e^{-<k>} \frac{<k>^k}{k!}$
- Ez esetben könnyebben számítható a várható érték, szórás, stb
- Lényeg: Poisson-nál csak az átlagos fokszámtól függenek
- Valóságban? Pl emberi kapcsolatok hálója

## Óriáskomponens

- Hogyan változik a legnagyobb összefüggő komponens mérete?
- P=0 üres gráf, legnagyobb komponens mérete 1, bármekkora is a gráfunk
- P=1 teljes gráf, legnagyobb komponens mérete n
- Netán lineáris a változás?
- Ha az átlagos fokszám eléri az 1-et, hirtelen megnő az érték
- Átlagos fokszám értékeit 4 eltérő tulajdonságú részre oszthatjuk




Szubkritikus tartomány, kritikus pont, szuperkritikus tartomány, összefüggő tartomány

**Óriáskomponens megjelenésének feltétele**

Erdős-Rényi (1959): átlagos fokszám 1

Bizonyítás:

$u = 1 - \frac{n_o}{n}$

hogy lehet az $i-$edik pont kívül az óriáskomponensen?

a) i és j közt nincs él ($1-p$ a valószínűsége)

b) i és j közt van él, de egyik sincs $n_o$-ban. ($pu$)

Tehát az i-edik pont $(1-p+pu)$ valószínűséggel nem lesz a j-edik ponton át a része az óriáskomponensnek.

$(1-p+pu)^{n-1}$ nem kacsolódik

u=$(1-p+pu)^{n-1}$

$n_o = n(1-u)$, $(p = \frac{<k>}{n-1})$

$lnu = (n-1)ln[1 - \frac{<k>}{n-1}(1-u)] \approx (n-1)[1 - \frac{<k>}{n-1}(1-u)] = - <k> (1-u)$

$u = e^{-<k>(1-u)}$

$S = \frac{n_o}{n}, S = 1-u, \rightarrow S = 1 - e^{-<k>S}$

deriválva S szerint:

$1 = <k> e^{-<k>S}$

ha S=0, $\rightarrow <k> = 1$.

# Kis világok

- 6 lépésnyi távolság
- Karinthy (Láncszemek)
- Milgram kísérlet(1967)
- Kiválasztott 2 célszemélyt
- Elküldött leveleket random embereknek, hogy ismerik-e őket, arra kérve őket, hogy küldjék tovább a levelet egy olyan ismerősüknek aki nagyobb valószínűséggel ismeri a célszemélyt.
- A visszaérkezett levelek közt az átlagos távolság 5,5 volt
- Wikipédián 2 tetszőleges cikk közt a távolság

---

- Legyen az átlagos fokszám k
- Egy távolságra k db csúcs van
- Két távolságnyira k^2
- D távolságra k^d
- D-nél nem messzebb lévők várható száma:

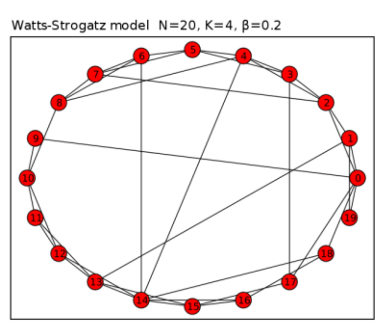
$$N(d) \approx 1 + k + k^2 + \cdots + k^d = \frac{k^{d+1}-1}{k-1}$$

$$k^d \approx n \rightarrow d_{max} \approx \frac{lnn}{lnk}$$

- Tehát ez lényegében azt jelenti, hogy az átlagos úthossz/átmérő logaritmikusan függ a hálózat nagyságától

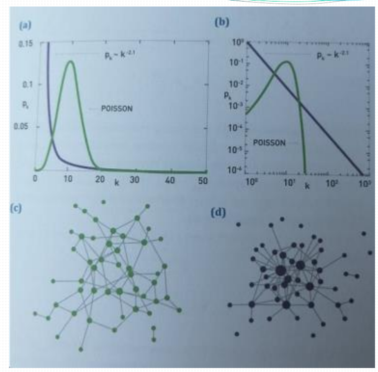
# Watts-Strogatz modell

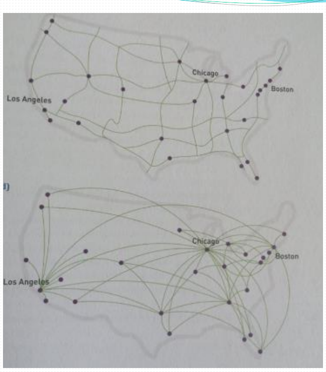
- Legyen k az átlagos fokszám, 0≤β≤1
- A modell egy irányítatlan gráfot hoz létre n csúccsal, nk/2 éllel
- Az n csúcsot körbe helyezzük, egy szabályos rácsot hozunk létre, minden csúcsnak mindkét oldalra (jobbra-balra) k/2 szomszéda van
- β valószínűséggel lecseréljük az élek nagyobb végpontját
- Kis világ tulajdonságú



# Skálafüggetlen hálózatok

- Fokszámeloszlás problémás Poissonnal
- Eddigi modellek alapján nem jellemzőek középpontok, olyan pontok melyeknek sok kapcsolódása van
- Pareto/hatványfüggvény-eloszlás
- 80/20 as szabály
- Jelentősége, hogy sok gyakorlati modell ilyen: pl szociális háló, internet, idegsejtek kapcsolódása, járványok terjedési útvonala




# Barabási-Albert modell

- Középpontok kezelése
- ER modellben a csúcsok száma állandó, kapcsolódásokat pedig véletlenül választjuk ki…
- Valóságban növekednek a hálózataink
- BA modell: kiindulunk m db kezdeti csomópontból, és amíg van a hálózatban legalább 1 kapcsolatok nélküli pont, addig egyesével új kapcsolatokat adok hozzá a hálózathoz.
- Szívesebben kapcsolódnak az új pontok nagyobb kapcsolódású pontokhoz
- Preferenciális kapcsolódás
  $\text{P(i-edikhez kapcsolódik)} = \frac{k_i}{\sum_j k_j}$

- Kezdeti m pont konfigurációja nem precízen meghatározott
- Azt se határozza meg, hogy az új csomóponthoz az m’<m db kapcsolatot egyesével vagy egyszerre adjuk hozzá
- LCD (linearised chord diagram)

LCD szerint $m = 1$ esetben így építjük fel a $G_1^{(t)}$ gráfot:

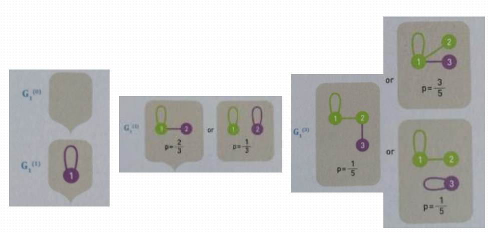
a) kezdünk egy $G_1^{(0)}$-val, ez egy üres gráfnak felel meg. (nincs csúcsa)

b) $G_1^{(t-1)}$ gráfból létrehozzuk a $v_t$ csúcs hozzáadásával $G_1^{(t)}$-t, $v_t$-t összekötjük $v_i$-vel, $v_i$-t a következőképpen választjuk ki:

$p = \frac{k_i}{2t-1}$, ha $1 \leq i \leq t-1$, és $\frac{1}{2t-1}$, ha $i = t$.

Ha $m > 1$, akkor a $G_m^{(t)}$ gráfot úgy építjük fel, hogy az új $v_t$ csúcshoz egyesével adjuk hozzá a kapcsolatokat, így az újonnan létesített kapcsolatok befolyásolják a fokszámot.

- Ezt próbáljuk meg whiteboardon



- Bianconi-Barabási modell: alkalmasság bevezetése
- Az új csúcsoknak így van esélye legyűrni a régebbi csúcsokat
- Tehát a módosított valószínűsége, hogy az új csúcs az i-edik csúcshoz kapcsolódik:

$$\mathrm{P(i\text{-}edikez\ kapcsolódik)} = \frac{\eta_i k_i}{\sum_j \eta_j k_j}$$

- Csúcs fokszáma hogy változik a BA modellben?

$$k_i(t) = m\left(\frac{t}{t_i}\right)^{\beta}$$

β=1/2, azaz lassabb a lineárisnál

- BA modell fokszámeloszlása:

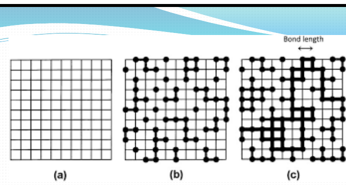
$$p_k \approx 2m^{\frac{1}{\beta}} k^{-\gamma}$$

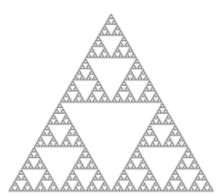
γ=3

$$p_k = \frac{2m(m+1)}{k(k+1)(k+2)}$$

## Perkolációelmélet

- Véletlen gráfok összefüggésével foglalkozik
- Pl: Négyzetrács csomópontjaiba p valószínűséggel kavicsokat teszünk
- Mekkora a legnagyobb összefüggőségi komponens?
- Növeljük p értékét, itt is megfigyelhető, hogy a legnagyobb komponens mérete nem p-vel egyenletesen változik, lesz egy kritikus érték (p_c)
- Perkoláló komponens (klaszter)
- A p=p_c értékű perkoláló klaszter pedig egy véletlenszerű fraktálra is példa



## Tesztkérdés

- Mi NEM jellemző a Barabási-Albert féle modellre?

A) Skálafüggetlen
B) Negatív kitevőjű hatványfüggvény szerint cseng le
C) A csúcsok fokszámának időbeli változása lassabb a lineárisnál
D) Tudja kezelni azt a helyzetet, néha megszűnnek, eltűnnek csomópontok a hálózatból