



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

Programa de Posgrado en Ciencias Físicas
Facultad de Ciencias

Cuantización Topológica en Teoría de Campos

TESIS

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
DOCTOR EN CIENCIAS (FÍSICA)

PRESENTA:

Gustavo Alfredo Arciniega Durán

DIRECTOR DE TESIS: Dr. Erick Leonardo Patiño Jaidar

Facultad de Ciencias

TUTOR COMITÉ: Dr. Alberto Güijosa Hidalgo

Instituto de Ciencias Nucleares

TUTOR COMITÉ: Dra. Myriam Mondragón Ceballos

Instituto de Física

México D.F. Marzo de 2014



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Resumen

CUANTIZACIÓN TOPOLÓGICA EN TEORÍA DE CAMPOS

Gustavo Alfredo Arciniega Durán

Facultad de Ciencias, Universidad Nacional Autónoma de México

Doctor en Ciencias (Física)

El formalismo de la cuantización topológica es parte de un programa que incluye a) observables, b) estados y c) evolución temporal. Es un formalismo alternativo a las teorías cuánticas que pretende describir y obtener los comportamientos cuánticos por medio de la topología asociada a sistemas clásicos. En esta tesis aplicamos el formalismo de la cuantización topológica, centrándonos en el punto (a) observables, para tres sistemas físicos concretos: i) cuerda bosónica cerrada en un fondo tipo Minkowski, ii) campos bosónicos libres con masa y iii) campos fermiónicos libres con y sin masa. En la primera parte de la tesis se presentan los problemas del modelo estándar más relevantes hasta el momento; se presenta con detalle el caso del monopol magnético dentro de la formulación de haces fibrados y se mencionan distintos formalismos de cuantización existentes. Lo anterior sirve como escenario para motivar el desarrollo de la cuantización topológica. Posteriormente se presenta el formalismo general de la cuantización topológica para obtener condiciones discretas de sistemas físicos por medio de la estructura de haces fibrados. En el capítulo final se presenta la discusión y conclusiones de los resultados obtenidos. Hasta antes de este trabajo de investigación, se tenía una definición dentro del formalismo para lo que es una configuración clásica. Esta definición es uno de los puntos de partida para aplicar el formalismo. Al realizar este trabajo nos dimos cuenta que la definición de configuración clásica debe modificarse para tener una estructura geométrica que sea congruente con la física analizada. Esta es una de las conclusiones más importantes que se derivan de este trabajo en donde, además, se obtuvieron los espectros topológicos de los sistemas físicos para esta tesis.

Abstract

Topological Quantisation of Fields

Gustavo Alfredo Arciniega Durán

Facultad de Ciencias, Universidad Nacional Autónoma de México

Doctor en Ciencias (Física)

The formalism of topological quantisation is part of a program that includes a) observables, b) states and c) temporal evolution. It represents an alternative to the quantum theories aiming to describe and obtain the quantum behaviour by means of the topology associated with classical systems.

In this work we use the formalism of topological quantisation addressing only point (a) above. We consider three particular systems: i) closed bosonic string in a Minkowski background, ii) free massive bosonic fields and iii) free massless and massive fermionic fields.

In the first part of this thesis we present the most relevant issues of the standard model to the present time. We provided a detailed analysis of the magnetic monopole from a fibre bundle point of view. We comment on the various existing quantisation formalisms. This serves as a motivation for the later development of topological quantisation. We present the general formalism of topological quantisation in order to obtain discrete conditions within physical systems by means of the fibre bundle structure.

Finally we discuss our results and provide some closing remarks.

The main result of this work is the redefinition of the classical configuration in the topological quantisation formalism.

Agradecimientos

Esta tesis es la culminación de un largo camino en el que, en ocasiones, parecía que nunca iba a llegar. Y esto no es una frase más, como bien lo habrán creído en algún momento quienes han estado a mi lado desde que ingresé a la Facultad de Ciencias. Siempre he tenido muy presente el momento cuando alguien nos mostró el análisis de egreso de la carrera de física en la UNAM: “0.9 de cada diez aspirantes a convertirse en Físicos logran titularse en el tiempo programado de la carrera”. La cifra aumentaba a 1.2 (creo recordar) en 6.5 años desde su ingreso y crecía a 1.3-1.5 (aproximadamente) si el tiempo de egreso se extendía a 50 años. Los presentes (todos estudiantes de segundo semestre de la carrera) nos miramos incrédulos entre sí y, cuando nos cayó el veinte, cada uno se preguntó en su cabeza quiénes de nosotros lo lograríamos al final. De ese grupo pequeño lo logramos bastantes: cuatro. Lo que implicó (según las estadísticas) condenar aproximadamente a 40 personas a que nunca terminen su carrera. Aún me niego a creer que esas estadísticas sean ciertas. Muchas veces me han tildado de necio (aún lo hacen) pero a mí me gusta más decir que soy perseverante, en fin, sea por necesidad o perseverancia, lo importante es que completé la carrera de Física y de ahí continué hasta el día de hoy, cuando me encuentro escribiendo estas líneas. Las últimas líneas que escribiré como estudiante.

Por lo anterior se entenderá que primero agradezca a mi madre (Rosa Elena Durán Pinales), de quien he aprendido tanto y quien nunca me creyó eso de “ya voy a terminar la carrera (la maestría, el doctorado)” hasta que, efectivamente, lo hice, pero quien tampoco nunca dudó que lo lograría. Su apoyo siempre ha sido incondicional, desinteresado y total, incluso, sacrificado. Igual a mi padre (Marco Antonio Arciniega Camargo), a quien siempre le ha entusiasmado que haya decidido dedicarme a la ciencia y quien siempre me ha tenido paciencia cuando hablamos. Ambos siempre me han apoyado para superarme y convertirme en la persona que soy ahora. Cada uno a su manera pero, también, cada uno con la mejor intención posible. Gracias de nuevo a los dos. Queda aquí asentado por escrito con todo mi cariño.

A mi hermano (Marco Antonio Arciniega Durán), quien siempre me ha cuidado y ha estado pendiente de mi. De él también he apren-

dido mucho a lo largo de nuestras vidas y siempre he contado con su apoyo para cualquier cosa. También le agradezco a él y a Annabella que me hicieran tío de tres hermosos niños: Alexux, Xenia y Aqueleux, a quienes adoro. Con mucho cariño. A mi cuñada Annabella Beni a quien le agradezco que cuide y apoye a mi hermano pues ese apoyo ha servido como un apoyo a mi persona.

A mi prima (Zaida Angélica Montoya Durán), quien con todo cariño y gusto me cedió su habitación, mudándose al cuarto de su madre para que pudiera vivir junto a ellas con comodidad y en un ambiente familiar cuando me vine a vivir al DF. Nunca digo que Zaida es para mí como una hermana menor pero así es y aquí quiero dejarlo escrito.

A mi tía Lucha (Luz María Durán Pinales), quien me dio techo, comida y cariño cuando me acogió en su departamento y quien también me ha apoyado siempre incondicionalmente.

A mi otra familia:

Al señor Gregorio Jaime, quien desde que me conoce se ha mantenido al tanto de mis avances, alentándome a no aflojar el paso y enorgullecerse de cada pequeño logro alcanzado. A la señora Darita González, quien también me ha mostrado un apoyo incondicional a lo largo de estos últimos años. A ambos les agradezco el cariño que me han dado.

A Cecilia Jaime y Adriana Jaime por haberme aceptado en su familia y darme su apoyo en los distintos proyectos en los que hemos trabajado juntos. A ambas les agradezco hacerme tío también de Emilia y Teo, a quienes también adoro. Aquí cabe agradecer a Edgar Pacheco por las buenas pláticas, el apoyo y por Teo.

Al grupo de cuantización topológica:

Así en conjunto, como grupo, por los ricos momentos semanales de convivencia personal y discusión académica (cuando quedaba tiempo después de la plática).

Mención especial se merece mi tutor, Leonardo Patiño, quien por razones inexplicables me tomó como su estudiante hace ya varios años, cuando yo estaba terminando la licenciatura y él apenas estaba terminando su doctorado. Él, a pesar de irme conociendo con los

años, se mantuvo firme a mi lado hasta este punto culminante de mi formación académica llegando a convertirse en uno de mis entrañables amigos.

Hernando Quevedo, el líder del grupo y uno de los mejores ejemplos de humildad, solidaridad y excelente calidad académica que me ha tocado conocer. Su invaluable apoyo durante mi posgrado (personal y académico) merecen mi más profundo agradecimiento.

Pablo Padilla, quien se añadió al grupo después y quien siempre está lleno de ideas y opiniones interesantes. Como Hernando, es otro ejemplo de humildad, calidad humana y académica. En particular quiero agradecerle el tiempo que dedicó personalmente para revisar escrupulosamente la tesis y darme sus comentarios al respecto. Si algo en esta tesis quedó mal escrito, no fue porque él no lo hubiera visto ni me hubiera dicho, seguro que a mí se me pasó incluirlo.

A Francisco Nettel, amigo y compañero con el que he tenido la suerte de poder trabajar estrechamente. Ambos nos acusamos mutuamente de ser necios, aunque a diferencia suya, yo siempre lo he tenido claro. Con él empecé a trabajar terminando su doctorado y continuamos hasta la fecha, durante su postdoctorado, discutiendo los detalles y los cálculos de mi investigación doctoral.

Lo bueno que haya en mí como investigador y como físico se debe, en gran parte, a estas cuatro personas. Por no dejar fuera a los “escuincles” del grupo: Daniel Soto, Daniel Flores y Mario.

Al jurado y a mi comité tutorial:

Myriam Mondragón, Alberto Güijosa, Miguel Socolovsky, Nora Bretón, Rodolfo Martínez y Mariano Chernicoff, quienes evaluaron mi trabajo y me dieron sugerencias importantes y constructivas para mejorar esta tesis. En particular, a Mariano le agradezco la rapidez y la seriedad con la que asumió esta responsabilidad pues gran parte del enriquecimiento final de esta tesis es debida a eso. A Myriam le agradezco además la buena disposición que siempre tuvo para recibir este trabajo y agradezco las opiniones vertidas a lo largo de la investigación. A Alberto le agradezco además sus opiniones y críticas a lo largo de mi camino a Doctor pues me ayudaron a entender la responsabilidad que uno asume cuando busca este grado, sin dejar de

mencionar su apoyo cuando Leonardo no podía ser, formalmente, mi tutor principal y él nos apoyó en este proceso.

A los amigos:

Luis Armando Cortés, Carlos Camacho, Marco(lín) Fuentes, Adrián Sánchez, Mauricio Ruiz de Vivar, Héctor Adrián Martínez, Genaro Vega, Efraín Vega, Óliver López Conde, Héctor Cruz, Carlos Martínez Lara, Lalo León, Roberto Hinojosa, Alessandro Bravetti, Hernando Mendoza y Antonio Peimbert (seguro se me está pasando alguno pero por algo somos amigos y me perdonará quien se sienta agraviado por no leer su nombre en esta lista. Tengo una excusa, son las 3 a.m. y debo imprimir esta tesis a las 8 a.m., pero no debe haber problema pues me disculparé personalmente con quien haya sido omitido), a todos ellos les agradezco de corazón su amistad y apoyo en varios niveles. ¿Ven? Sí se pudo.

Al grupo y seminario de GTD (Geometrotermodinámica):

En especial a los que estuvieron al pie del cañón durante las tres largas sesiones: Daniel Flores, Daniel Soto, Lucía, Hernando Quevedo, Francisco Nettel, César Monsalvo y Luisa Jaime. Gracias a sus comentarios, críticas y sugerencias la presentación final para exponer mi trabajo resultó en lo que es. De verdad les agradezco mucho el tiempo que me dedicaron y ahora me queda claro lo bueno que resulta tener un grupo paciente y feroz que te apoye como lo hicieron conmigo.

A Luisa Jaime:

A quien tengo tanto qué agradecer. Primero mencionaré que ella es todo lo que soy y todo lo que no soy. Es la persona que me hace querer ser mejor, me hace sentir mejor y me impulsa para ser y hacer más en esta vida. No voy a agradecer por aceptarme a su lado pues sabemos que eso era inevitable entre nosotros. Es la persona que más admiro por su calidad humana y su enorme inteligencia. Es mi modelo a seguir en todos los sentidos y no es posible resumir las cosas por las cuales le agradezco tanto. Sólo porque quiero dejar constancia, quiero mencionar que gracias a ella soy feliz en todo momento, por muy difícil que se presente alguna situación.

Índice general

Resumen (español)	I
Resumen (inglés)	II
Agradecimientos	III
1. Introducción	1
1.1. Monopolo magnético	2
1.1.1. Monopolo de Dirac	7
1.2. Cuantización del monopolo magnético y la carga eléctrica	8
1.2.1. Monopolo de Dirac <i>à la</i> Wu-Yang	13
1.3. El significado de la cuantización	18
1.4. El Modelo Estándar y sus problemas	23
1.4.1. Modelo estándar	23
1.4.2. Materia y antimateria en el Universo	25
1.4.3. Materia oscura	28
1.4.4. Constante cosmológica	29
1.4.5. Masa de neutrinos	30

1.4.6. Parámetros del modelo estándar	32
1.4.7. Problema de la jerarquía	34
1.4.8. Gravedad cuántica	34
2. Formalismo	35
2.1. Construcción del haz fibrado principal P	39
2.2. Cuantización topológica inducida e intrínseca	44
3. Cuantización topológica de la cuerda bosónica	49
3.1. Elementos generales de la cuerda bosónica	50
3.2. Cuerda bosónica en un fondo genérico	53
3.3. Cuerda bosónica sobre un fondo tipo Minkowski	56
3.3.1. Espectro topológico para la cuerda bosónica cerrada	59
3.3.2. Espectro topológico de configuraciones particulares	61
3.3.3. Discretización de la energía	67
4. Cuantización topológica del campo escalar libre masivo	71
4.1. El campo escalar en la cuantización canónica	72
4.2. Construcción del formalismo de cuantización topológica para el campo bosónico con masa	75
4.2.1. Construcción de la acción	75
4.2.2. Mapeos armónicos	77
4.2.3. PP-Waves	80

4.2.4. Métrica de fondo y métrica de origen para el campo bosónico libre con masa	84
4.3. Cuantización topológica para la métrica de fondo $G_{\mu\nu}$	87
4.3.1. Cuantización Topológica Intrínseca	87
4.3.2. Aplicación de la Cuantización Topológica . . .	89
4.4. Cuantización topológica de la métrica inducida h	92
4.4.1. Espectro topológico para configuraciones específi- cas	96
4.5. Discretización de la energía	106
5. Cuantización topológica del campo fermiónico libre	109
5.1. Supergravedad	110
5.1.1. Transformando simetrías globales en locales . .	110
5.1.2. Teoría de supercuerdas IIB en un fondo <i>PP-waves</i>	113
5.2. Acción supersimétrica en fondo gravitacional tipo PP- waves	114
6. Discusión	120
6.1. Cuerda bosónica cerrada	120
6.2. Campos bosónicos con masa y sin interacción	124
6.3. Campos fermiónicos con masa y sin interacción	129
6.4. Comentarios generales	130
A. Haces fibrados y clases características	133
A.1. Haz fibrado	133
A.2. Haz fibrado principal P y conexión ω	135

A.3. Sección en el haz fibrado	137
A.4. Derivada exterior covariante y la 2-forma de curvatura	138
A.5. Invariantes topológicos y clases características	139
B. Integración de la forma de Euler. Cuerda bosónica	141
C. Integración de la forma de Euler. Campo bosónico con masa	144

Capítulo 1

Introducción

Esta tesis tuvo como objetivo implementar el formalismo de la cuantización topológica y obtener las condiciones de discretización para las cantidades físicas de tres sistemas físicos particulares: la cuerda bosónica libre, los campos bosónicos con masa y los campos fermiónicos con masa, ambos libres.

En el capítulo 1 se presenta la motivación que dio pie al desarrollo de la cuantización topológica al repasar el monopolo magnético de Dirac (sección 1.1). Más adelante, en ese mismo capítulo, se presentan las razones físicas y epistemológicas que existen actualmente para elegir al formalismo de la cuantización topológica como un tema de investigación relevante al cual enfocarse, en lugar de formalismos alternativos. En el capítulo 2 se presenta el formalismo general de la cuantización topológica que será empleado a lo largo de la tesis. El análisis de la cuerda bosónica libre (trabajo publicado [1]), bajo el

formalismo de la cuantización topológica, es el capítulo 3. El capítulo 4 presenta el formalismo de la cuantización topológica aplicado a los campos bosónicos con masa (trabajo publicado [2, 3]). En el capítulo 5 se presenta el análisis del caso fermiónico con masa y sin masa. Finalmente, en el capítulo 6 se presenta la discusión de los resultados de los capítulos anteriores y las conclusiones de la tesis.

1.1. Monopolo magnético

La primera persona a la que se le reconoce haber realizado un estudio formal sobre las propiedades magnéticas es al francés Pierre Pelerin de Maricourt (mejor conocido en los textos como *Petrus Peregrinus* de Maricourt). En 1269 escribió un tratado sobre sus hallazgos de las propiedades de los imanes [4], la cual mandó a un amigo suyo en forma de carta. En este tratado, también conocido como *Epístola de los Magnetos*, Pierre Pelerin hace una descripción de la brújula y, en particular, de las características magnéticas de los imanes. Pelerin encontró que existen dos puntos en todos los imanes que presentan una mayor fuerza de interacción, a los cuales llamó *polo norte* y *polo sur* en analogía con los polos terrestres. Poco se sabe de su vida más allá del tratado y algunas historias curiosas han surgido a su alrededor, en particular, algunos autores mencionan que Pierre Pelerin es, también, la primera persona que aborda al monopolo magnético [5], sin embargo esta idea no parece tener fundamento al hacer una revisión de la obra original de Pelerin.



Figura 1.1: Título de la página *Epístola de los Magnetos* de la edición de 1558 de Achilles Gasser.

Por otro lado, no parece haber dudas en considerar a Henri Poincaré como la primera persona que analiza formalmente el caso de la dispersión de electrones en un tubo de Crookes [6] en donde llega a modelar a un monopolo magnético al someter un haz de electrones a la interacción de un imán muy largo y muy delgado, de tal forma que, localmente, se observe un único polo del imán. Con este modelo encuentra que un electrón en presencia de un campo magnético, generado por monopolo magnético del imán, describe una trayectoria que se encuentra sobre un cono de revolución. Posteriormente, en 1904, J. J. Thompson analiza el momento angular de un electrón en presencia de un monopolo magnético [7] y en 1928, Boguslavskyi [8], analiza el movimiento de una carga en un campo asociado a un monopolo, derivando la expresión para el potencial vectorial \mathbf{A} . Una exposición unificada y moderna sobre todos estos trabajos se puede encontrar en el libro de Shnir [5].

Por supuesto, entre Pelerin y su tratado de 1269 y Poincaré en 1896, existieron varias aportaciones al electromagnetismo que fundamentaron la teoría electromagnética como la conocemos actualmente y que quedó terminada, como una sólida teoría unificada, con el tratado de Maxwell de 1864 [9].

Por ejemplo, en 1088, Shen Kuo hace la primera descripción de la brújula magnética en su libro *Mengxi Bitan* [10], sin embargo fue Alexander Neckman quien en 1190 presenta a Europa la primera descripción de la brújula magnética en su obra *De naturis rerum* [11]. Posteriormente, Geronimo Cardano, en 1550, publica un tratado de electricidad, *De subtilitate rerum* [12], en donde se especifica, por vez primera, la diferencia entre interacciones magnéticas y eléctricas. En 1600, William Gilbert publica su tratado *De Magnete* [13], en donde concluye que la Tierra es un gran imán. Gilbert descubrió varios efectos eléctricos y magnéticos y por eso es considerado el fundador de la ciencia sobre la electricidad y magnetismo. Robert Boyle, en 1676, encontró que las interacciones eléctricas pueden manifestarse en el vacío y añadió a la resina como una sustancia más en la lista de las que manifiestan propiedades eléctricas. A partir de aquí, entre la segunda mitad del siglo XV y la primera del XVI, nacieron varias aplicaciones de la electricidad, en particular tenemos a los generadores eléctricos. En 1752, Benjamin Franklin [14] encuentra y postula que sólo hay dos tipos de cargas eléctricas y que los rayos son un fenómeno eléctrico. En 1785, Coulomb [15] realiza el experimento de la balanza de torsión con el cual postula la ley que lleva su nombre donde relaciona

CAPÍTULO 1. INTRODUCCIÓN

la fuerza eléctrica que existe entre cuerpos cargados con respecto a la distancia entre ellas. En 1800, Alessandro Volta contruye el primer dispositivo para generar grandes corrientes. Humprey Davy, mentor de Michael Faraday, en 1806 funda las bases de la electroquímica al descomponer a las sustancias en sus constituyentes por medio de electrodos. En 1819, Hans Christian Oersted se da cuenta de que las corrientes eléctricas generan interacciones magnéticas sin ser capaz de dar una explicación teórica al fenómeno. Fue André-Marie Ampere quien, en 1831 [16], encuentra que el flujo magnético que pasa por una curva cerrada es proporcional al flujo de corriente. Ésta es la Ley de Ampere, la cual, en su formulación diferencial se escribe:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}, \quad (1.1)$$

donde \mathbf{B} es el campo magnético, μ_0 es la constante de proporcionalidad, conocida como permeabilidad magnética en el vacío, y \mathbf{J} es la corriente eléctrica. En 1839, Michael Faraday publica sus investigaciones con la electricidad y magnetismo en el libro *Experimental researches in electricity* [17]. Maxwell tomará los experimentos de Faraday, la Ley de Gauss aplicada a campos eléctricos y magnéticos y la Ley de Ampere (1.1) corregida con su Ley de Desplazamiento y hará una única formulación completa de los fenómenos eléctricos y

magnéticos que se describen en cuatro leyes:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{B} &= \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\end{aligned}\tag{1.2}$$

donde \mathbf{E} es el campo eléctrico, ρ la densidad de carga (carga eléctrica por unidad de volumen), \mathbf{B} el campo magnético, \mathbf{J} la densidad de corriente eléctrica, μ_0 la permeabilidad magnética en el vacío y ϵ_0 la permeabilidad eléctrica en el vacío.

Con el trabajo de Maxwell y sus cuatro leyes, todos los fenómenos eléctricos y magnéticos quedan determinados. En particular, la Ley de Gauss para el magnetismo (1.2) nos dice que no existen cargas magnéticas aisladas, es decir, monopolos magnéticos. Esta ley fue postulada por Maxwell sólo basado en la evidencia experimental, es decir, la ausencia visible de detección de los monopolos magnéticos en la naturaleza.

Es notable que, a pesar de que toda la comunidad científica aceptaba como un hecho sólido la ausencia de monopolos magnéticos, Paul Dirac (Poincaré, Thompson y otros necios) postulara la existencia de los monopolos magnéticos como una consistencia en la teoría y que, gracias a eso, la cuantización de la carga eléctrica, por medio de la existencia del monopolo magnético, sea la única explicación teórica que existe al respecto hasta el momento.

1.1.1. Monopolo de Dirac

En 1931, con los principios de la mecánica cuántica establecidos (antes del desarrollo relativista de la misma), Dirac investiga la conexión que hay entre el concepto de *fase no integrable* (fases cuyo valor es dependiente de la trayectoria) y el campo electromagnético, cuyo tratamiento fue iniciado por Hermann Weyl en un intento por unificar la gravedad y el electromagnetismo [18, 19, 20]¹. En estos trabajos de Weyl se define por primera vez el concepto de *libertad de norma* y las transformaciones asociadas a ésta.

Dirac comienza introduciendo una función de onda genérica,

$$\Psi(x, y, z, t),$$

como

$$\Psi = Ae^{i\gamma},$$

donde A y γ son funciones de x , y , z y t y representan la amplitud y la fase de la función de onda, respectivamente.

En general, cuando la partícula representada por Ψ se mueve sobre una trayectoria cerrada, el cambio de la fase γ puede ser distinto de cero, es decir, se tiene una fase no integrable.

En 1931, Paul Adrien Maurice Dirac publicó un artículo [22] que, desde entonces y hasta el día de hoy, ha sido objeto de estudio y de impacto en la física. En este artículo, Dirac hace un análisis del

¹La traducción al inglés de estos artículos de Weyl se encuentra en la referencia [21].

monopolo magnético, llegando a la sorprendente conclusión de que, de existir al menos un solo monopolo magnético en nuestro universo, todas las cargas eléctricas obedecerían un criterio de cuantización. A este criterio se le conoce hoy en día como la condición de cuantización de Dirac. Hasta el momento, el trabajo de Dirac es el único que da una explicación física a la cuantización que presenta la carga eléctrica y, gracias al análisis que hicieron Tai Tsun Wu y Chen Ning Yang en 1975 [23], hoy podemos entender a esta condición de cuantización como consecuencia de la estructura topológica en la que se puede hacer la descripción de ese sistema [24].

A partir de esta idea que relaciona a los espectros cuánticos con la topología, Leonardo Patiño y Hernando Quevedo iniciaron la búsqueda de la cuantización de cantidades físicas por medio del análisis de la estructura topológica que son inherentes a los sistemas físicos. En 2005 salió publicado el primer artículo [25] fruto de esta línea de investigación, la cual inició como proyecto doctoral [26]. En este artículo se sientan las bases matemáticas y físicas de la cuantización topológica, en la manera en la que se expondrá en este trabajo.

1.2. Cuantización del monopolo magnético y la carga eléctrica

Para entender la motivación que dio origen al desarrollo de la cuantización topológica que aquí usaremos, es conveniente estudiar brevemente el trabajo que Paul Dirac publicó en 1931 sobre el

monopolo magnético [22] y su posterior reinterpretación en el formalismo de haces fibrados, realizado por Wu y Yang [23].

La exposición presentada está basada, en gran parte, en las referencias [5, 24, 27].

Comencemos considerando un monopolo magnético estático en el origen, $\mathbf{r} = 0$, con carga magnética $g \neq 0$, cuyo campo magnético asociado, en analogía con el caso eléctrico, está dado por

$$\mathbf{B} = \frac{g}{r^2} \hat{r}. \quad (1.3)$$

Nombremos R al espacio-tiempo sin el origen, $\mathbf{r} = 0$. En estas condiciones no existe un potencial \mathbf{A} sobre R que sea libre de singularidades, es decir, siempre existe, al menos, un punto p sobre R en el cual, el campo vectorial \mathbf{A} , es cero o no está definido. Lo anterior se hace evidente al considerar que, si el campo magnético es el rotacional del potencial,

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}, \quad \text{entonces} \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0,$$

lo que entra en contradicción con la ecuación para el campo del monopolo (1.3), de la cual resulta que

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = g \delta^{(3)}(\mathbf{r}) \neq 0.$$

Esta contradicción nos indica que el potencial vectorial, al menos, no está bien definido en todo el espacio-tiempo R , es decir, el potencial

\mathbf{A} es singular en algún punto $p \in R$.

Una manera de encontrar la singularidad del potencial es aprovechando que $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ tiene simetría esférica, por lo que podemos tomar una esfera de radio arbitrario con centro en el origen, para algún tiempo t , sobre el cual definir de manera continua al campo vectorial \mathbf{A} .

La esfera, así definida, es una variedad cerrada y orientada de dos dimensiones cuyo número de Euler (también llamado “característica de Euler-Poincaré”), χ . Este número se obtiene a través de la triangulación mostrada en la figura 1.2 que muestra cómo una pirámide de 5 caras es topológicamente equivalente a la esfera. Al aplicar la ecuación de la característica de Euler-Poincaré para superficies cerradas de dos dimensiones a la triangulación, por medio de la relación,

$$\chi(M) = \text{No. de vértices} - \text{No. de lados} + \text{No. de caras},$$

obtenemos el número de Euler $\chi(M) = 2$, el cual es una característica de la topología y es una cantidad invariante ante transformaciones topológicas.

Por otro lado, el Teorema de Poincaré-Hopf, sobre singularidades para campos vectoriales en variedades compactas, dice:

Sea S una superficie orientable compacta y sea X un campo vectorial en S con un número finito de singularidades p_1, p_2, \dots, p_k . Entonces

$$\chi(S) = \sum_{n=1}^k I(X, p_n),$$

donde $\chi(S)$ es la característica de Euler-Poincaré e $I(X, p_n)$ es el

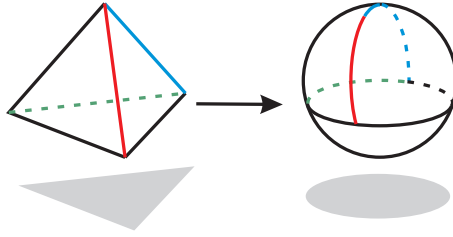


Figura 1.2: Triangulación de la esfera para obtener el número de Euler, $\chi(M)$.

“índice” del campo vectorial X en cada singularidad. El índice $I(X, p_n)$ es una medida del número de vueltas que da el campo vectorial X en torno a cada singularidad p_n [28, 29].

De este teorema concluimos que todo campo vectorial sobre la esfera tiene a) dos puntos singulares de índice 1 ó b) un punto singular de índice 2, como se muestra en la figura 1.3, el cual, repetimos, es un invariante y nos dice que el campo potencial \mathbf{A} es singular, al menos, en uno de los puntos sobre la esfera.

Regresando al monopolo y considerando que \mathbf{B} tiene simetría esférica, podemos escribir

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = -\frac{g}{r} \frac{(1 + \cos\theta)}{\sin\theta} \hat{e}_\phi = -\frac{g}{r} (1 + \cos\theta) \nabla\phi,$$

donde ϕ es el ángulo azimutal en coordenadas esféricas y el cual reproduce a \mathbf{B} en todo el espacio donde \mathbf{A} es regular, excepto en $\theta = 0$.

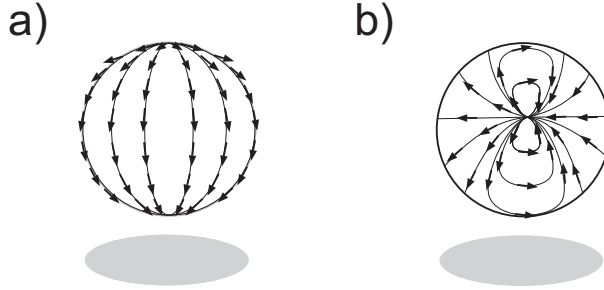


Figura 1.3: Los dos tipos de singularidades en el campo vectorial X sobre una esfera: a) una singularidad en cada polo de la esfera (índice 1 en cada polo) y b) un solo punto singular con índice 2.

Del mismo modo, el potencial

$$\mathbf{A}'(\mathbf{r}) = +\frac{g}{r} \frac{(1 - \cos\theta)}{\sin\theta} \hat{e}_\phi = \frac{g}{r} (1 - \cos\theta) \nabla\phi,$$

reproduce a \mathbf{B} en todo el espacio excepto en $\theta = \pi$, el único punto donde \mathbf{A}' no es regular.

Notamos entonces que tenemos dos regiones: $\theta \in (0, \pi]$ para \mathbf{A} y $\theta \in [0, \pi)$ para \mathbf{A}' , cuya intersección es distinta del vacío y donde \mathbf{B} queda bien definido.

Podemos transformar al potencial \mathbf{A} en \mathbf{A}' en todo el espacio, con excepción de los polos, al tomar $U = \exp(2ieg\phi)$ y hacer

$$\mathbf{A} - \frac{i}{e} U^{-1} \nabla U = \mathbf{A}'$$

Para obtener la condición de cuantización de Dirac debemos considerar que U debe ser una transformación de norma del potencial

electromagnético $U(1)$, $U(\mathbf{r}) = \exp[ie\lambda(\mathbf{r})]$, y la cual, a su vez, es una transformación de norma para la función de onda $\Psi = U(\mathbf{r})\Psi'$. El satisfacer ambas condiciones conlleva a la condición de cuantización de Dirac, sin embargo no seguiremos este camino para obtenerla, la cual puede consultarse en [30]. En lugar de esto tomaremos el formalismo de haces fibrados que nos ayudarán a entender cómo la condición de cuantización del monopolo magnético se relaciona con las cantidades invariantes de la topología del sistema.

1.2.1. Monopolo de Dirac *à la* Wu-Yang

Como pretendemos entender al monopolo magnético en términos de haces fibrados, es necesario estar familiarizado con los elementos básicos que los componen. En el apéndice A se hace una exposición breve de los haces fibrados y las clases características.

Primero construyamos los elementos geométricos que constituyen al caso del monopolo magnético. Tomemos \mathbb{R}^3 y quitemos un único punto: el origen $\{0\}$. El espacio $\mathbb{R}^3/\{0\}$ es homotópico a la esfera unitaria dos-dimensional S^2 , la cual puede ser parametrizada por el ángulo polar $\theta \in [0, \pi]$ y el ángulo azimutal $\phi \in [0, 2\pi]$. A partir de ellas podemos definir una base del espacio tangente $T_p(S^2)$ como las componentes del gradiente $\{\partial/\partial\theta, \partial/\partial\phi\}$ y una base dual del espacio tangente como las 1-formas $\{d\theta, d\phi\}$. De esta manera la derivada exterior es

$$d = d\phi \frac{\partial}{\partial\phi} + d\theta \frac{\partial}{\partial\theta}. \quad (1.4)$$

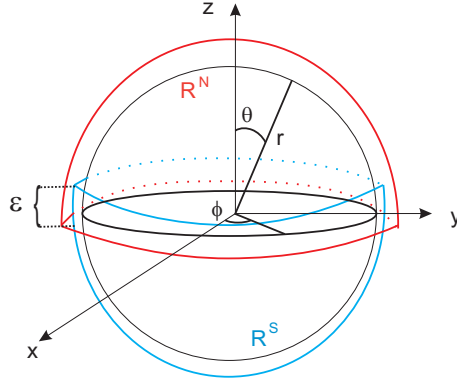


Figura 1.4: La 2-esfera S^2 es cubierta por dos regiones R^N y R^S que se intersectan en una banda alrededor del ecuador de ancho ϵ .

Ahora, podemos cubrir al espacio base por dos hemisferios R^N y R^S (figura 1.4), que son nuestros parches (llamados ‘cartas’) en coordenadas locales sobre la base.

Es conveniente tomar una distancia ϵ en la intersección de las cartas y hacer $\epsilon \rightarrow 0$, es decir, considerar sólo al círculo unitario S^1 en el ecuador.

En este caso, los elementos del grupo abeliano de norma $g = e^{i\alpha}U(1)$ son la fibra del haz fibrado principal sobre $\mathbb{R}^3/\{0\}$. El parámetro del grupo α es una coordenada cíclica a lo largo de la fibra y tenemos dos cartas $R^N \times S^1$ y $R^S \times S^1$ con coordenadas $\{\theta, \phi, \alpha_N\}$ y $\{\theta, \phi, \alpha_S\}$, respectivamente. El *pullback* de la 1-forma de conexión sobre estas

cartas resulta en la 1-forma potencial A :

$$A = A(\theta) \wedge dr = \begin{cases} A^N = g(1 - \cos \theta) d\phi & \text{en } R^N \subset S^2 \\ A^S = -g(1 + \cos \theta) d\phi & \text{en } R^S \subset S^2 \end{cases},$$

cuya derivada exterior da la 2-forma de curvatura:

$$F = dA = g \operatorname{sen} \theta d\theta \wedge d\phi.$$

La 2-forma F , dada por la derivada exterior dA^N y dA^S , está definida sólo localmente en las regiones R^N y R^S , respectivamente. Sin embargo, en la región de traslape $R^N \cap R^S$ los potenciales están conectados por medio de la transformación de norma

$$A^N = U^{-1} A^S U + U^{-1} dU,$$

con $U = e^{i\beta\phi}$.

Los elementos del grupo de estructura $U(1)$ son los que conectan los puntos sobre las fibras por medio de $e^{i\alpha N} = U e^{i\alpha S}$ con $U \in U(1)$, así, el ecuador, que es la región de intersección donde $\theta = \pi/2$, puede parametrizarse por el ángulo azimutal únicamente por medio de los elementos del grupo $U = e^{i\beta\phi}$.

Por otro lado, la función de onda de una partícula cargada en presencia de un campo magnético tampoco puede definirse globalmente, por lo que en cada región se tiene una función univaluada ψ^N y ψ^S , respectivamente. De esta manera, las funciones de onda

CAPÍTULO 1. INTRODUCCIÓN

se pueden ver como secciones en el haz fibrado asociado² donde dos secciones en la región de intersección están relacionadas por medio de la transformación de norma $\psi^N = U\psi^S$. En este caso, el estado de la partícula cargada ψ esta determinado por un estado inicial ψ_0 y por una fase dada por la interacción entre la carga y el potencial 1-forma,

$$\psi = \psi_0 e^{ie \int \mathbf{A}},$$

lo que implica, al considerar el paso de una carta a la otra que

$$\alpha = 2eg.$$

Al tomar en cuenta a los invariantes de Chern (A.4), notamos que el único coeficiente invariante que es distinto de cero es c_1 por lo que, al integrar a este invariante sobre el espacio base S^2 , tenemos,

$$\begin{aligned} \int_{S^2} c_1 &= \frac{1}{2\pi} \int_{S^2} F = \frac{1}{2\pi} \left(\int_{R^S} dA^S + \int_{R^N} dA^N \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{S^1} (A^N - A^S) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} U^{-1} dU = \alpha. \end{aligned}$$

Del hecho de que la integral de las formas de Chern sean un

²Cuando se tiene un haz fibrado principal, P , con estructura de grupo, G , y se sustituye a la fibra del haz principal, F , por otra fibra, F' , sobre la que actúa el mismo grupo, G , se dice que el nuevo haz fibrado es un **haz fibrado asociado**.

número entero (A.5) y del hecho de que $\alpha = 2eg$, tenemos que

$$2eg = n \quad \text{con} \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (1.5)$$

La ecuación anterior es la llamada **condición de cuantización de Dirac**, la cual hemos obtenido como una consecuencia de la topología asociada al monopolo magnético.

Cabe mencionar aquí que, el procedimiento anterior, es equivalente a pedir que la conexión sea regular en todo punto al ir cambiando de carta, sin embargo no haremos ese tratamiento aquí pero puede consultarse en [25].

Una vez que hemos repasado el caso del monopolo magnético podemos notar que, para un sistema físico, sus propiedades topológicas derivan en la imposición de una restricción discreta para algunas cantidades físicas (carga eléctrica y magnética), lo que nos impulsa a preguntarnos:

¿Qué otras cantidades físicas cuánticas provienen de la estructura topológica que poseen las descripciones de los sistemas físicos? Más aún, ¿será que toda la estructura cuántica que conocemos es una consecuencia de estas estructuras topológicas?, o bien, ¿sólo algunos sistemas cuánticos poseen estas características?, y ¿por qué otros no?. Con el fin de investigar e intentar dar respuesta a algunas de estas preguntas es que en [25] se dio inicio a la construcción del formalismo de la cuantización topológica de la manera en la que se presentará más adelante.

El primer trabajo publicado sobre la cuantización topológica³, con la formulación planteada a lo largo de este trabajo, es el realizado en [25]. En él se sientan las bases físicas y matemáticas de la cuantización topológica. El formalismo matemático, de la manera en que fue planteado originalmente, se presentará en la sección 2.

En la siguiente sección revisaremos primero el concepto de “cuantización”, lo cual nos servirá para entender el planteamiento que se tiene al respecto en la cuantización topológica.

1.3. El significado de la cuantización

El término **cuantización**⁴ se ha entendido de distintas formas desde que Planck postuló que la energía total U_N de un sistema de N osciladores idénticos es un múltiplo entero de una cantidad mínima de energía [32], llamada *quantum* [33]. Para Planck, la cuantización de la energía de un oscilador armónico simple es una necesidad para satisfacer las leyes de radiación de calor. Cuando los electrones que hay en los átomos son modelados como osciladores armónicos que interactúan con la radiación, la cuantización equivale a tomar el conjunto de osciladores y analizar estadísticamente su distribución de energía. Los estados vibracionales que aportan a la distribución de energía son únicamente aquellos que son múltiplos enteros de una

³A partir de aquí, cuando nos refiramos a la cuantización topológica, será exclusivamente bajo el formalismo desarrollado en [25]. En el capítulo 2 se hará mención de trabajos que se refieren a la cuantización topológica con diferentes formulaciones.

⁴Una exposición más amplia se puede ver en [31]

mínima cantidad de energía (*quantum*).

Para Bohr, antes del desarrollo de la mecánica cuántica de 1925, la cuantización es una condición mecánica de los electrones confinados en órbitas estables y puede considerarse una generalización de la condición de Planck en donde, además de cuantizar a la energía, también se imponen condiciones de cuantización al momento y al momento angular en sistemas atómicos [34]. Matemáticamente, la cuantización de Bohr-Sommerfeld se puede expresar para cada coordenada periódica q del sistema mecánico como

$$J = \oint p dq = nh, \quad (1.6)$$

en donde p es el momento conjugado que le corresponde a q , h la constante de Planck, J resulta ser un invariante adiabático [35] y la integración se realiza sobre un período.

En el caso de De Broglie, considerando que los electrones pueden tener una descripción ondulatoria, podemos decir que la cuantización corresponde con la condición de que los electrones que se mueven en órbitas cerradas deben cumplir que su trayectoria debe ser un múltiplo entero de la longitud de onda asociada [36].

Schrödinger considera a la cuantización como un problema de valores propios en donde, si la integral de la función hamiltoniana de la función de onda Ψ es estacionaria (es decir, invariante ante variaciones de Ψ), entonces Ψ es una función propia de la función hamiltoniana cuyos valores propios pueden ser un conjunto discreto de valores de la energía [37].

CAPÍTULO 1. INTRODUCCIÓN

Para Heisenberg la cuantización está dada por la naturaleza de las cantidades dinámicas (observables físicos) en la física atómica [38], las cuales están representadas por matrices. La cuantización de Heisenberg, de una forma simplista pues sólo estamos considerando la primera formulación que dio pie al formalismo completo de la mecánica cuántica, es

$$\mathbf{pq} - \mathbf{qp} = -i\hbar/2\pi, \quad (1.7)$$

en donde \mathbf{p} y \mathbf{q} son matrices hermitianas. La condición (1.7) es equivalente a la condición de cuantización de Bohr (1.6), como fue demostrado por Born y Jordan [39]. Por su cuenta, Dirac obtuvo las mismas relaciones de conmutación de Heisenberg a partir de analizar las ecuaciones clásicas de la mecánica hamiltoniana [40].

Es en este punto en donde las relaciones de conmutación de las cantidades dinámicas formalizan la descripción matemática de la cuantización para el movimiento mecánico en el átomo, siendo éste un modelo de cuantización. De este modo, basta con considerar variables conjugadas canónicamente en la formulación hamiltoniana clásica y asociarlas con sus correspondientes variables cuánticas (llamadas números- q) y aplicar la condición de Heisenberg (1.7) para obtener la formulación cuántica.

Fue Dirac, en 1927 [41], quien demostró que la descripción ondulatoria de Schrödinger y la matricial de Heisenberg son representaciones distintas de la misma mecánica cuántica.

A partir de aquí, el procedimiento matemático de cuantización se

vuelve independiente y es necesario, ahora, buscar el significado físico de los resultados de aplicar dicho procedimiento.

Einstein, en 1905 [42], es el primero que propone una cuantización de un campo en lugar de la cuantización de partículas discretas. Para él, la energía de la luz consiste en un número finito de *quanta* de energía localizados en varios puntos del espacio y estos *quanta* pueden ser producidos o absorbidos individualmente. De esta manera, la luz misma está compuesta por *quanta* de energía independientes. Sin embargo, esta cuantización no es propuesta bajo ningún procedimiento matemático sino como una analogía a lo que se utiliza en la cuantización del movimiento mecánico.

Cuantización de Campos

El pasar de obtener el comportamiento discreto de cantidades físicas materiales (por ejemplo la energía en los osciladores armónicos de Planck) a obtener el mismo comportamiento discreto al aplicar el procedimiento matemático desarrollado al campo electromagnético, no es cosa trivial desde el punto de vista ontológico. Sin embargo, Dirac desarrolla el procedimiento matemático necesario para obtener las propiedades cuánticas del campo de radiación con lo que se conoce como **segunda cuantización**[43]. Así, instaure las bases de lo que se conoce como **cuantización canónica**, la cual *promueve* a grado de operadores cantidades que, bajo la mecánica cuántica de la época, tienen el carácter de funciones sobre los que operan los observables de la teoría.

En resumen:

- (Planck) La cuantización es la condición física de que la energía es un múltiplo entero de un valor mínimo de energía.
- (Bohr) La cuantización es la condición mecánica de los electrones en órbitas cerradas. Matemáticamente, que J es un múltiplo entero de un valor mínimo.
- (de Broglie) La cuantización es una condición mecánica de los electrones en órbitas cerradas cuya descripción ondulatoria hace que las trayectorias sean un múltiplo entero de la longitud de onda asociada.
- (Schrödinger) La cuantización es un problema de valores propios en la descripción ondulatoria.
- (Heisenberg, Born y Jordan) La cuantización corresponde con la anticonmutación de los observables físicos que describen a la física atómica.
- (Dirac) La cuantización es el resultado de aplicar la teoría de transformaciones a variables cuánticas y en el caso de campos, promover a operadores a las funciones y aplicar el mismo formalismo aprendido.

Por lo tanto, el concepto de *cuantización* es generalmente entendido en la actualidad como *el procedimiento teórico que se aplica a los sistemas físicos para encontrar los valores discretos de las cantidades*

físicas propias de los sistemas subatómicos, así como su evolución e interacción.

Es de este modo que distintos formalismos han surgido para analizar los sistemas cuánticos o sus propiedades (la cuantización de Gupta-Beuler [44, 45], la cuantización de Segal [46], la de Borel (ver [47]), la cuantización geométrica [48, 49], la cuantización por deformación [50, 51], la de Berezin [52], la de integral de trayectoria de Feynman [53] y la cuantización asintótica [54], por citar algunos⁵). En particular, el formalismo de la **cuantización topológica** es el formalismo en que nos vamos a centrar en esta tesis y que será desarrollado en el capítulo 4. Cabe destacar que, a diferencia de los otros formalismos (hasta el momento), la cuantización topológica se distingue de los anteriores por considerar a los sistemas físicos descritos en su formulación clásica y obtener los comportamientos discretos de las cantidades físicas a partir de sus propiedades topológicas.

1.4. El Modelo Estándar y sus problemas

1.4.1. Modelo estándar

El modelo estándar es considerada una de las teorías más sólidas en física. Fue desarrollada por el trabajo independiente de muchos científicos, logrando su máximo en la década de los 60's por Glashow [56], Weinberg [57] y Salam [58] y tuvo una sólida aceptación durante la década de los 70's con los trabajos de Veltman y t'Hooft [59, 60,

⁵Se pueden revisar algunos de estos formalismos de cuantización en [55]

61, 62]. Es la descripción más exitosa para la física de partículas. Esta teoría, hasta el momento, es la mejor descripción que tenemos para las interacciones electromagnéticas, nucleares débiles y nucleares fuertes.

Esta teoría unifica a las interacciones eléctrica y débil bajo la simetría $SU(2) \times U(1)$ al incorporar a los bosones vectoriales masivos Z , W^+ y W^- junto al fotón γ (que no es masivo) vía el rompimiento de simetría de la teoría basado en el modelo de Goldstone [63, 64] y el mecanismo de Higgs [65, 66, 67] para que los bosones masivos adquieran su masa. Junto a la simetría de color $SU(3)$, que describe las interacciones fuertes que hay para gluones y *quarks*, el modelo estándar logró predecir la existencia de los mismos *quarks*, de los bosones masivos arriba mencionados y del bosón de Higgs (recientemente descubierto), entre otras muchas partículas.

Como toda teoría en el campo de la física que se ha desarrollado hasta ahora, por exitosa que sea, siempre existen preguntas, pertinentes a la propia teoría, que quedan sin poder ser contestadas. Cuando las preguntas se acumulan o alguna predicción fundamental de la propia teoría falla es necesario el replanteamiento de la propia teoría y así, nace la justificación para buscar caminos nuevos en la búsqueda del conocimiento necesario para lograr contestar las preguntas que nos interesan hasta encontrar los nuevos límites o problemas de las nuevas formulaciones y así iniciar otra vez el camino a nuevos planteamientos.

Presentamos, por lo anterior, los problemas que tiene la formu-

lación más exitosa hasta el momento sobre el comportamiento de los sistemas cuánticos como una motivación que justifica el interés por mirar hacia la formulación de la cuantización topológica.

1.4.2. Materia y antimateria en el Universo

De acuerdo al modelo de producción de pares, por ejemplo, la generación de un electrón e^- y un positrón e^+ por medio de un fotón γ ,

$$\gamma \longrightarrow e^+ + e^-,$$

y las simetrías C (conjugación de carga o transformación de las “cargas” físicas por sus contrarias), P (paridad o inversión espacial de coordenadas) y T (temporal o inversión del tiempo) del modelo estándar, la cantidad de materia y de antimateria debe ser la misma (simetría CPT). Sin embargo desde el momento en que miramos a nuestro universo y descubrimos que, en esencia, es materia, se plantea una seria duda respecto a que se respete en la naturaleza esta última simetría. En cosmología, al período de tiempo en donde se “forma” la materia (según el modelo de la Gran Explosión) se conoce como bariogénesis y a este problema se le llama también ‘asimetría bariónica’.

La simetría P fue la primera de la que se tuvo evidencia experimental de su violación. En 1957 se encontró que no se cumplía esta simetría en el decaimiento de mesones [68], en la cadena de decaimiento del pión π^+ [69] y en la desintegración beta polarizada correspondiente a la fuerza débil [70]. Todas en el mismo año.

La violación de la simetría CP se observó por primera vez en 1964

al estudiar en el laboratorio el decaimiento del mesón K_2^0 [71].

Sin embargo, estas dos violaciones no actúan en contra del modelo estándar debido a la hipótesis de Cabibbo sobre la “mezcla de *quarks*” [72], la cual dio pie a lo que ahora conocemos como la matriz CKM (Cabibbo/Kobayashi y Maskawa) [73]. Con esta matriz se determinan los coeficientes de interacción entre los *quarks* y en donde existe un factor que permite que se pueda violar la simetría CP en la fuerza débil.

Por otro lado, la invarianza de la materia ante las tres simetrías (CPT) es algo que toda teoría de campos que sea localmente invariante de Lorentz y cuya función hamiltoniana sea hermitiana debe satisfacer. A esto se le conoce como el “Teorema CPT ” o Teorema Lüders-Pauli, por ser éstos los que dieron una demostración en 1954 [74, 75, 76]. Debido a este teorema, la violación de la simetría CP implica la violación de la simetría T para que permanezca la invarianza de la simetría CPT . Sin embargo, en el modelo de la Gran Explosión es natural empezar con la suposición de que el número inicial de bariones es $B = 0$. En un momento de la expansión en donde el universo tendría una energía kT mucho mayor a la energía necesaria para la formación de hadrones, los bariones y antibariones deberían estar en equilibrio con los fotones por medio de las reacciones inversas de creación y aniquilación de materia tales como

$$p + \bar{p} \rightleftharpoons \gamma + \gamma.$$

A medida que el universo se expandió y la energía fue disminuyendo

se llega a un punto en el que los fotones no tienen suficiente energía para producir los pares $p\bar{p}$ y la densidad de protones y antiprotones disminuye hasta que la aniquilación mutua se vuelve improbable. La energía a la que sucede esto es $kT \approx 20$ MeV y la razón entre bariones/fotones, antibariones/fotones, alcanzan un valor constante que resulta ser

$$\frac{N_B}{N_\gamma} = \frac{N_{\bar{B}}}{N_\gamma} \sim 10^{-18},$$

donde

$$\frac{N_B}{N_{\bar{B}}} = 1.$$

Estos valores tendrían que mantenerse al transcurrir el tiempo, sin embargo resulta que los valores calculados por las observaciones son

$$\frac{N_B}{N_\gamma} \approx 10^{-9}, \quad \frac{N_{\bar{B}}}{N_\gamma} \sim 10^{-13},$$

y $N_B/N_{\bar{B}} \sim 10^{-4}$. Lo que evidencia la falla del modelo.

A partir de aquí se hicieron algunos intentos dentro del modelo estándar para justificar lo que estaba pasando. Por ejemplo, asumir que el número de bariones iniciales B fuera distinto de cero o que el factor de violación de invarianza en la matriz CKM sea mayor, sin embargo, ambas hipótesis implican correcciones poco satisfactorias por lo que es un problema que no puede resolverse con el modelo estándar.

1.4.3. Materia oscura

Evidencia de su existencia

- Cúmulo de galaxias Coma. “Masa perdida” por Zwicky en 1933 [77].
- Determinación de los parámetros cosmológicos en el espectro de potencias de las anisotropías del Fondo Cósmico de Microondas (CMB).
- Curvas de rotación en las galaxias espirales.

La materia oscura es, hasta donde podemos asegurar, una propiedad local en el universo que se manifiesta gravitacionalmente sin ser parte de la materia bariónica del modelo estándar. Aunque existen extensiones del modelo estándar en donde hay candidatos (partículas) que podrían ser lo que hoy llamamos materia oscura (neutralino, axión, por mencionar los más prometedores), estos modelos tienen a su vez una cantidad de preguntas extra qué resolver dentro del mismo modelo (por ejemplo, la cantidad de parámetros de estos modelos son mucho mayores que los del propio modelo estándar, problema que es mencionado más adelante).

1.4.4. Constante cosmológica

La constante cosmológica fue introducida por Einstein en 1917 [78]⁶ en donde, a sus ecuaciones de campo, le añade un término compatible con la teoría al considerar que, en el universo real, *la curvatura del espacio es variable en el tiempo y el lugar, según la distribución de materia, pero podemos aproximarla groseramente por medio de un espacio esférico. (...) Para llegar a esta concepción (...), tuvimos por supuesto que introducir una extensión de las ecuaciones de campo de la gravitación que no está justificada por nuestro conocimiento real de la gravitación.*⁷ La extensión a la que hace referencia Einstein es al término $\Lambda g_{\mu\nu}$ en la ecuación de campo,

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R - \Lambda g_{\mu\nu} = -8\pi GT_{\mu\nu},$$

donde R es el escalar de Ricci, $R_{\mu\nu}$ el tensor de Ricci, $g_{\mu\nu}$ el tensor métrico, G la constante de gravitación de Newton, $T_{\mu\nu}$ el tensor de energía-momento asociado a la materia y radiación y Λ la constante cosmológica.

Como también menciona Einstein, es importante notar que, para que esta extensión a las ecuaciones de campo sean compatibles con la Relatividad General, es necesario que Λ tenga un valor suficientemente pequeño para que esta ecuación sea compatible con las ob-

⁶El título del artículo original es “Kosmologische Betrachtungen zur allgemeinen Relativitätstheorie”, *Sitzungsberichte der Preussischen Akad. d. Wissenschaften*, 1917, el cual fue incluido, posteriormente, en la obra “El Principio de la Relatividad”, sección 6 (Traducción al español).

⁷Albert Einstein [79].

servaciones derivadas del sistema solar, de hecho, las observaciones muestran [80, 81] que

$$\Lambda \sim 10^{-120} l_p^{-2},$$

donde l_p es la longitud de Planck ($l_p = \sqrt{\hbar G/c^3}$).

Debido a que las aportaciones de los componentes del Universo se encuentran codificados en el tensor $T_{\mu\nu}$, es adecuado pensar que el factor de Λ tiene su origen en el vacío, más propiamente, en el vacío cuántico, sin embargo, al hacer las consideraciones teóricas para determinar, por medio de la mecánica cuántica o la teoría cuántica de campos, resulta que el valor asociado al término Λ es del orden ([82, 83])

$$\Lambda \sim 10^{-3} l_p^{-2},$$

lo que muestra una gran diferencia con el valor que presenta Λ y, hasta el momento, no existe una solución en los modelos cuánticos.

1.4.5. Masa de neutrinos

En el modelo estándar, los neutrinos son partículas sin masa. Esto conlleva el problema de no poder distinguir experimentalmente si los neutrinos son de tipo Dirac, los cuales se representan por

$$\nu_L, \nu_R \quad (L = 1),$$

donde L es el número leptónico⁸, y por sus antineutrinos

$$\bar{\nu}_L, \bar{\nu}_R \quad (L = -1),$$

los cuales son distintos a los primeros, o si son de tipo Majorana, para los cuales sus antineutrinos son los propios neutrinos. Los subíndices ν_L, ν_R son para indicar su quiralidad (L=left y R=right). La indistinguibilidad del tipo de neutrinos es debida a que, los neutrinos tipo Dirac en el límite de masa nula, desacopla sus componentes espinoriales y se describen indistintamente como espinores de Majorana.

Sin embargo, ahora sabemos que los neutrinos tienen masa y existe un mecanismo que podría desentrañar la naturaleza espinorial de los neutrinos y es el “Doble decaimiento beta” que consiste en que dos neutrones decaen para dar lugar dos electrones y dos neutrinos, decaimiento que es permitido en el modelo estándar y que se representa por

$$(Z, A) \longrightarrow (Z + 2, A) + 2e^- + 2\bar{\nu}_e,$$

donde (Z, A) representa un núcleo con número atómico Z y número de masa A .

⁸El número leptónico L_I , con $I = e^-, \mu, \tau$ los leptones correspondientes, se define como

$$\begin{aligned} L_e &= N(e^-) - N(e^+) + N(\nu_e) - N(\bar{\nu}_e), \\ L_\mu &= N(\mu^-) - N(\mu^+) + N(\nu_\mu) - N(\bar{\nu}_\mu) \end{aligned}$$

y

$$L_\tau = N(\tau^-) - N(\tau^+) + N(\nu_\tau) - N(\bar{\nu}_\tau),$$

donde $N(\)$ es el número de partículas consideradas.

Por otro lado, si en lugar del proceso anterior se tiene

$$(Z, A) \longrightarrow (Z + 2, A) + 2e^-, \quad (1.8)$$

entonces, dentro del modelo estándar, este proceso puede ocurrir únicamente si los neutrinos son del tipo Majorana con masa distinta de cero aunque bien puede ocurrir que (1.8) se deba a otro mecanismo desconocido que no sea parte del modelo estándar. Aún así, hasta el momento no se ha observado ningún experimento donde se presente el proceso (1.8).

1.4.6. Parámetros del modelo estándar

Cuando se habla de los parámetros del modelo estándar uno se refiere a las constantes adimensionales que aparecen en la teoría cuyos valores no dependen de las unidades en las que se esté trabajando, lo que indica, de alguna manera, que son valores intrínsecos de la teoría. Para el modelo estándar existen 26 parámetros fundamentales de este tipo [84]:

- Masas de seis tipos de quarks: up (u), down (d), charmed (c), strange (s), top (t) y bottom (b).
- Masas de tres leptones: electrón (e^-), muón (μ^-) y tauón (τ^-).
- Masas de los bosones W y Z , responsables de la interacción débil.
- Masa del bosón de Higgs H .

Estas masas, divididas entre la masa de Planck ($m_p = \sqrt{\hbar c/G}$) forman doce parámetros adimensionales.

Las constantes de acoplamiento:

- Electromagnética, dada por la constante de estructura fina $\alpha = e^2/(\hbar c)$, que describe la fuerza de interacción del campo electromagnético.
- La constante de acoplamiento fuerte g , la cual describe la fuerza de interacción de la fuerza fuerte, responsable de mantener los quarks unidos por los gluones.
- Los parámetros de la matriz CKM, responsable de la mezcla de quarks, arroja cuatro números independientes.
- Tres neutrinos masivos (ν_e , ν_μ y ν_τ) que nos dan tres masas adimensionales.
- Cuatro parámetros dados por la matrix de Pontecorvo-Maki-Sakata [85, 86], responsables de mezclar los tres neutrinos análogamente a la matriz CKM para los quarks.
- Finalmente, algunos autores consideran [84] que la constante cosmológica Λ , responsable de la expansión acelerada del universo, puede considerarse un parámetro extra si su naturaleza debe ser explicada por el modelo estándar. Dado que el modelo estándar está formulado en ausencia de gravedad, la constante cosmológica no forma parte, para la mayoría de la comunidad, como uno de los parámetros a explicar por el modelo estándar.

Al considerar todos estos parámetros tenemos 25 cantidades (26 si se quiere considerar a Λ) que son parte del modelo estándar pero cuyos valores no son determinados por el modelo mismo sino que hay que determinarlos a partir de los resultados de los experimentos.

1.4.7. Problema de la jerarquía

El problema de la jerarquía puede expresarse, de forma sencilla, diciendo que se trata de la falta de alguna explicación sobre las grandes diferencias entre los valores de algunos de los parámetros fundamentales; por ejemplo, la diferencia entre la magnitud de la fuerza débil y la fuerza gravitacional (10^{32} órdenes de magnitud de diferencia)[87].

1.4.8. Gravedad cuántica

El describir el comportamiento cuántico de la teoría gravitacional es el objetivo principal de la gravedad cuántica y cualquier intento por encontrar una formulación completa ha sido infructuoso. La historia de estos intentos se remontan a 1930 con un trabajo de Rosenfeld [88] y no han terminado hasta la fecha, aunque la Teoría de Cuerdas y la Teoría Cuántica de Lazos son los principales candidatos, actualmente, para dar respuesta a este problema. Una revisión del tema se puede ver en [89, 90].

Capítulo 2

Formalismo

...Einstein fue bastante hostil a la mecánica cuántica. ¿Cómo puede uno entender esto? Creo que es muy fácil de entender porque Einstein procedió en diferentes líneas, líneas de geometría pura. Él desarrolló teorías geométricas y obtuvo enormes éxitos. Es natural que él pensara que problemas futuros de la física fueran resueltos por futuros desarrollos de ideas geométricas. ¿Cómo, tener $a \times b$ distinto de $b \times a$ es algo que no encaja bien con ideas geométricas? De ahí su hostilidad.

P. A. M. Dirac (1989)

En este capítulo presentamos los elementos necesarios para aplicar la cuantización topológica así como el procedimiento general para aplicar el formalismo. La exposición está basada, principalmente, en los trabajos anteriores que existen sobre el tema [25, 26, 91, 92, 93].

El trabajo de Dirac sobre la discretización de la carga eléctrica [22] dio inicio a diferentes trabajos sobre la cuantización topológica como una alternativa para entender la naturaleza discreta de los sistemas físicos. El concepto de cuantización topológica, como idea fundamental, se ha utilizado en diferentes contextos, por ejemplo: el caso de la cuantización de la carga en teorías de Yang-Mills [94], el estudio de configuraciones de instantones y monopolos [95, 96], modelos topológicos electromagnéticos [97], cuantización de corrientes de nanoestructuras [98], la teoría de superconductores [99, 100], la relación con la cohomología [101] o en libros de texto donde la formulación es aplicada a sistemas físicos descritos por haces fibrados lineales hermitianos [102]. En la mayoría de estos trabajos, la cuantización topológica empleada es similar a la cuantización de Dirac en donde las condiciones discretas se obtienen a partir del invariante de Chern o, equivalentemente, de la condición de regularidad de la conexión. Se distingue con la cuantización topológica formulada en [25], principalmente, en que esta última formulación, además de incluir el formalismo a la Dirac, extiende el formalismo a haces fibrados tangentes y considera las propiedades topológicas globales del sistema y no sólo algunos aspectos cuánticos particulares que se pueden describir mediante propiedades geométricas y/o topológicas dentro de la teoría bajo consideración. Otra manera de decirlo es que la cuantización topológica que consideramos es capaz de obtener condiciones discretas y/o cuánticas sin hacer uso de ninguno de los elementos propios de la mecánica cuántica o teoría cuántica de campos estándar como

lo son el espacio de Hilbert, la promoción de operadores o las condiciones de conmutación, los cuales son parte de cualquiera de los otros formalismos en mayor o menor medida.

Siguiendo la exposición que aparece en [26], la aplicabilidad del método de cuantización topológica requiere de dos elementos importantes: (1) contar con una teoría que se pueda describir por medio de un haz fibrado principal (configuraciones gravitacionales, sistemas mecánicos, teoría de Yang-Mills, etc.) y (2) que ésta presente una topología no trivial¹ para poder obtener condiciones de discretización² [103].

Los elementos principales con los que debe contar cualquier descripción de un sistema físico son: observables, estados invariantes de norma y evolución, por lo tanto, es de esperarse que la cuantización topológica tenga definidos estos elementos.

En el caso de los observables, la cuantización topológica parte de la definición clásica para definirlos, es decir, un observable \mathcal{O} es una función que va del espacio de configuraciones a los reales, $\mathcal{O} : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}$,

¹En topología, un haz fibrado (principal) P es trivial si éste puede describirse globalmente como el producto exterior del espacio base M y la fibra F (el grupo de estructura G),

$$P = M \times F \quad (P = M \times G).$$

²Utilizamos aquí el término “discretización” en lugar del término “cuantización” para dejar claro que, hasta el momento, lo más que podemos esperar es obtener condiciones en las que los parámetros de interés asuman valores discretos que pueden no coincidir con los valores discretos de la cuantización canónica usual y, por lo mismo, pueden no tener un sentido físico claro. Debido al nombre que tiene el formalismo ocurrirá frecuentemente que ocupemos el término “cuantización” el cual, a partir de esta aclaración, no debe generar confusión respecto a lo que nos referiremos en adelante.

o del espacio fase a los reales, $\mathcal{O} : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$. Estos observables pueden ser continuos (como es el caso de la partícula libre) o discretos. En cualquiera de los dos casos, quien determinará su comportamiento es lo que se llama **espectro topológico**, el cual será definido más adelante pero podemos adelantarnos a la definición y mencionar que el espectro topológico son las condiciones discretas que nacen de la topología y que, más allá de la definición formal que se dará, en el caso del monopolo de Dirac corresponde con lo que llamamos “condiciones de cuantización de Dirac” (1.5).

El caso de la definición de estados en la cuantización topológica es un tema que sigue bajo investigación [104, 105]. Sin embargo podemos mencionar que, en las teorías de norma, los campos de materia se pueden ver como secciones de un haz fibrado asociado cuyo grupo de estructura G corresponde con el grupo de Lie de las simetrías internas. En el caso de la mecánica cuántica, las funciones de onda se pueden ver como secciones locales, como se hizo en el capítulo anterior, al construir el haz fibrado asociado para el monopolo magnético. Una discusión más amplia, respecto a las funciones de onda y su tratamiento como secciones locales, puede revisarse en la referencia [102]. Todavía es prematuro decir que, en efecto, las secciones sobre el haz fibrado resultan ser las representaciones adecuadas para los estados físicos en la cuantización topológica. Aquí, solamente, estamos esbozando las ideas germinales que existen al respecto en la literatura pero estamos conscientes de que falta mucho camino por recorrer y lo que queremos resaltar es el estado actual de dicha línea de investi-

gación. Por otro lado, sobre la cuestión de la evolución de los estados hay poco que decir hasta el momento y no comentaremos nada sobre esta cuestión pues las ideas que se tienen siguen siendo prematuras y es muy aventurado mencionar algo sobre este tema. Si la definición de estados termina correspondiendo con lo que mencionamos arriba, es fácil ver que la evolución debería corresponder con algún operador que actúe sobre las secciones, de tal manera que conecte distintas secciones que se correspondan con la noción de evolución de los estados.

La presente tesis se ha centrado en obtener y analizar los comportamientos discretos de observables para sistemas físicos particulares: cuerda bosónica sobre un fondo tipo Minkowski, campo escalar libre masivo y campo fermiónico libre masivo y no masivo. A pesar de que parecería urgente resolver elementos del formalismo que aún no han investigados (estados y evolución temporal), nos parece importante estudiar los espectros topológicos de los primeros sistemas físicos de la teoría cuántica de campos estándar pues todavía hay aspectos de los observables que consideramos cruciales entender. Cabe mencionar que toda formulación nueva se ve obligada, de cualquier manera, a dar respuesta dentro de su formalismo a estos sistemas físicos.

2.1. Construcción del haz fibrado principal P

Lo primero que necesitamos hacer es mencionar cómo construir un haz fibrado principal P que represente al sistema físico y una 1-forma de conexión ω que tome valores en el álgebra de Lie.

La mayoría de los sistemas físicos tienen una variedad base sobre las que están descritos y es posible construir una 1-forma de conexión, en caso de que no estén dotados de una. Por ejemplo, en el caso electromagnético, la variedad base es el espacio de Minkowski M_4 y la 1-forma de conexión es el potencial \mathbf{A} . En el caso de campos gravitacionales, la variedad base es una variedad semi-Riemanniana³ M_G cuya conexión está dada por la conexión de Levi-Civita Γ o la conexión de espín ω . En el caso de sistemas mecánicos clásicos es posible definir varios espacios base, sin embargo, en [91] se muestra que para sistemas clásicos conservativos con un número finito de grados de libertad existe una variedad Riemanniana M_C y una conexión ω que se obtiene a partir de la llamada métrica de Jacobi.

Existe un teorema, llamado el Teorema de la Reconstrucción [106, 107], que dice:

Teorema 2.1 (Reconstrucción). *Un haz fibrado (E, M, F, π, G) está especificado de manera única por el espacio base M , la fibra estándar F , el grupo de estructura G y la familia de funciones $g_{ij} \in G$ cuyos valores en el grupo satisfacen la condición de cociclos⁴.*

Este teorema da los elementos necesarios para construir el haz fibrado. En particular, como estamos interesados en haces fibrados

³Una variedad semi-Riemanniana (también llamada *seudo-Riemanniana*) es una variedad diferencial dotada de una métrica \mathbf{g} con signatura $\text{sign} = (-, +, +, +)$.

⁴La ecuación de cociclos establece que si $g_{ij} \in G$, donde G es un grupo de Lie y $g_{ij} : U_i \cap U_j \mapsto G$, entonces se satisface

$$g_{ij} = g_{ik}g_{kj}.$$

principales P , la fibra F es isomorfa al grupo de estructura G . Por otro lado, una vez que se han definido las funciones de transición, es posible construir un mapeo proyección $\pi : P \rightarrow M$ (ver [25]) y sólo faltaría especificar a G para tener todos los elementos que constituirán al haz fibrado. En el caso de la cuantización topológica, como se mencionó anteriormente, el grupo de estructura G corresponde con el grupo de simetrías internas del sistema físico con lo que concluimos que siempre que tengamos una variedad diferencial base M y un grupo de simetrías internas G , podemos construir un haz fibrado principal P que resulta único.

Una vez que tenemos definido el haz fibrado P , es necesario contar con una 1-forma de conexión ω definida sobre este haz fibrado para aplicar el formalismo de la cuantización topológica, para lo cual haremos uso del Teorema de Existencia de la conexión ω sobre el haz fibrado principal P [24]:

Teorema 2.2 (Existencia y unicidad). *Dada una cubierta de abiertos $\{U_i\}$ sobre el espacio base M , una familia local de 1-formas ω_i que toma sus valores en el álgebra de Lie \mathfrak{g} que satisfacen la condición de compatibilidad*

$$\omega_i = \Lambda_{ij}\omega_j\Lambda_{ij}^{-1} + \Lambda_{ij}d\Lambda_{ij}^{-1},$$

donde $\Lambda_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow G$ son elementos del grupo G , y un conjunto de secciones locales $s_i : U_i \rightarrow \pi^{-1}(U_i)$ que satisfacen $s_i = \Lambda_{ij}s_j$ sobre $U_i \cap U_j$, entonces existe y es única una conexión ω sobre P , tal que $\omega_i = s_i^*\omega$, con s_i^* el pull-back inducido por s_i .

El teorema anterior nos dice que sólo necesitamos definir conexiones locales ω_i sobre cada abierto U_i para tener una 1-forma ω única que esté definida en el haz fibrado P . En el caso de los sistemas físicos, algunos tienen ya definidas las conexiones locales, como es el caso del electromagnetismo. En otros, aunque no tengan una conexión dada, están dotados de una métrica g con la cual se puede definir una 1-forma de conexión ω_g que es compatible con la métrica (como la conexión de espín en los sistemas gravitacionales o la conexión de Einstein-Cartan en el caso de torsión).

Existe un teorema más, el cual se basa en los teoremas anteriores y es el teorema en el que descansa el formalismo de la cuantización topológica. Para enunciarlo, primero veamos la siguiente definición y la proposición que le continúa.

Definición 2.1 (Configuración clásica). *Sea M una variedad Riemanniana (semi-Riemanniana) y ω una 1-forma de conexión definida sobre M . La estructura geométrica (M, ω) se le denomina “configuración clásica”.*

Proposición 2.1. *a) Sean M y M' dos variedades Riemannianas (semi-Riemannianas) y ω una 1-forma de conexión definida sobre M y sobre M' . Si M es isomorfa a M' (i.e. existe una función biyectiva $f : M \mapsto M'$ tal que f es un isomorfismo) entonces las configuraciones clásicas (M, ω) y (M', ω) representan la misma estructura geométrica (i.e. son la misma configuración clásica).*

b) *La configuración clásica (M, ω) es única, módulo isomorfismos.*

Teorema 2.3. *Sea (M, ω) una configuración clásica que representa a un sistema físico y G un grupo de simetrías de Lie que actúa sobre los elementos de M , entonces existe y es único un haz fibrado principal P con conexión $\tilde{\omega}$, tal que M es el espacio base, G la fibra y $\omega_i = s_i^* \tilde{\omega}$ el pullback s_i^* inducido por la sección local s_i .*

Demostración. La demostración descansa en el teorema 2.1 y en el teorema 2.2 al considerar a M como espacio base, a G como fibra y también como el grupo de estructura cuyos elementos satisfacen la ecuación de cociclos y a las secciones locales $s_i : U_i \rightarrow \pi^{-1}(U_i)$ sobre las que está definida la conexión ω , una vez definido el mapeo proyección π dado por el teorema 2.1.

El teorema anterior es en el que se basa la cuantización topológica para construir haces fibrados sobre las configuraciones clásicas que representen a los sistemas físicos y obtener los espectros topológicos a partir de las clases características.

A partir de la naturaleza de la conexión, se distinguen dos tipos de haces fibrados sobre los cuales se puede aplicar el formalismo de la cuantización topológica: haces con una conexión de norma extrínseca a la métrica y haces fibrados con conexión métrica. Esto, a su vez, permite clasificar a la cuantización topológica en dos tipos: aquella donde la configuración que se analiza se cuantiza por efectos del campo de norma extrínseco a la métrica o aquella donde se obtienen los comportamientos discretos a partir de la geometría misma. Para distinguir ambos tipos de cuantización topológica se les han llama-

do ‘inducida’ ‘intrínseca’, respectivamente y abundaremos un poco sobre ellas en la siguiente sección.

2.2. Cuantización topológica inducida e intrínseca

La **cuantización topológica inducida** es aquella que da lugar al espectro topológico (condiciones discretas) al requerir que la conexión de norma \mathbf{A} , extrínseca a la geometría, se encuentre bien definida sobre todos los puntos del espacio base M . En caso de que la conexión \mathbf{A} no sea univaluada o presente divergencias en los puntos del espacio base M , de tal manera de que no exista una transformación de norma que quite las divergencias o haga univaluada a la conexión, el espectro topológico no será trivial y se presentarán espectros discretos en los parámetros físicos de la teoría. Para obtener las condiciones discretas, en este caso, es necesario tener una cubierta de abiertos $\{U_i\}$, de la variedad base M , sobre los cuales tener bien definidas conexiones locales \mathbf{A}_i . Las funciones de transición $g_{ij} \in G$ que relacionan a las distintas conexiones \mathbf{A}_i y \mathbf{A}_j , por medio de una transformación de norma, dan origen a las condiciones discretas al imponer que las conexiones locales queden bien definidas y univaluadas en toda la variedad base M .

Las condiciones discretas que aparecen sobre los parámetros de las funciones de transición, o sobre los parámetros de la transformación de norma, es a lo que se le llama “**espectro topológico**”.

La **cuantización topológica intrínseca** es aquella en donde se da lugar a la cuantización de los parámetros que aparecen en la métrica debido a la topología que la misma métrica g induce en el haz fibrado P a través de la conexión métrica ω_g por medio de imponer las condiciones de unicidad en la conexión o, equivalentemente, calculando los invariantes topológicos del haz fibrado.

En la cuantización topológica intrínseca, se cuenta con una variedad Riemanniana o semi-Riemanniana (M, g) , donde M es una variedad diferencial m -dimensional y g es la métrica de M . En esta variedad se pueden construir un conjunto de 1-formas ortonormales e^a , $a = 0, \dots, m-1$ (también llamadas “base no-ortonormal”, “*m-Beine*” o “polítradas”), definidas por la relación $e^a = e_\nu^a dx^\nu$ y que cumplen con [27]

$$\begin{aligned} e_\mu^a g^{\mu\nu} e_\nu^b &= \eta^{ab} \\ e_\mu^a e_a^\nu &= \delta_\mu^\nu, \end{aligned}$$

donde $\eta^{ab} = \text{diag}(+, +, \dots, +, -, -, \dots, -)$ y x^ν , $\nu = 0, \dots, m-1$, son las coordenadas locales de la variedad M . Además, si la variedad es libre de torsión (es decir, torsión $T = 0$), se puede introducir una 1-forma de conexión ω (conexión de espín) vía la primera estructura de Cartan que tiene la siguiente expresión:

$$De^a := de^a + \omega_b^a \wedge e^b = 0, \tag{2.1}$$

donde d es la derivada exterior y D la derivada exterior covariante.

Demandando que ω sea una conexión métrica, i.e. localmente $D\eta_{ab} = d\eta_{ab} + \omega_{ab} + \omega_{ba} = 0$, implica la antisimetría de las componentes de la conexión. Por otro lado, usando la segunda estructura de Cartan se construye la 2-forma de curvatura Ω como

$$D\omega_b^a := \Omega_b^a = d\omega_b^a + \omega_c^a \wedge \omega_b^c,$$

cuyas componentes, en términos del marco ortonormal local

$$\Omega_b^a = (1/2)R_{bcd}^a e^c \wedge e^d,$$

determinan al tensor de curvatura.

Como se mencionó en la introducción, los invariantes topológicos están dados por la integración sobre todo el espacio base M de las clases características $C(P)$:

$$\int_M C(P) = n, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (2.2)$$

En general, las clases de Chern y Pontrjagin están dadas por los coeficientes del polinomio característico en términos de la dos-forma de curvatura Ω [103]:

$$\begin{aligned} \det\left(1 + \frac{i\Omega}{2\pi}\right) &= \sum_{j=0}^m C_{m-j}(\Omega) \quad (\text{Chern}), \\ \det\left(1 - \frac{\Omega}{2\pi}\right) &= \sum_{i=0}^m P_{m-j}(\Omega) \quad (\text{Pontrjagin}), \end{aligned} \quad (2.3)$$

en donde C_i son las i -formas del polinomio de Chern que se les llama “clases de Chern”, P_i son las i -formas del polinomio de Pontrjagin (las cuales son diferentes de cero para $m - j = 2k$, con $k \in \mathbb{Z}$), el número imaginario i se ha puesto frente a Ω para mantener reales a los coeficientes y el factor $1/2\pi$ es un factor de normalización.

En el caso en que el grupo de estructura G es $SO(k)$, con $k = 2m$, entonces la clase de Euler $e(P)$ del haz fibrado P , está dada por medio de las clases de Pontrjagin:

$$e(P) \wedge e(P) = P_{2m}(\Omega),$$

la cual se puede escribir como

$$e(P) = \frac{(-1)^m}{2^{2m} \pi^m m!} \epsilon_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{2m}} \Omega_{\alpha_2}^{\alpha_1} \wedge \Omega_{\alpha_4}^{\alpha_3} \wedge \dots \wedge \Omega_{\alpha_{2m}}^{\alpha_{2m-1}}, \quad (2.4)$$

donde $\epsilon_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{2m}}$ es el símbolo de permutación de Levi-Civita.

Ahora, dado que las clases características pueden obtenerse a partir de la dos-forma de curvatura Ω , la cual, a su vez, se obtiene por medio de la conexión métrica ω_g , entonces la clase característica está dada en función de algunos de los parámetros a_i de la métrica g que son parte de la descripción física del sistema, por lo que podemos escribir a (2.2) como

$$f(a_i) = n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Estos parámetros definen los valores discretos de lo que hemos

llamado el espectro topológico.

Así, si el haz fibrado principal que se construye con estos elementos, vía el Teorema de la Reconstrucción, admite una sección global, entonces el haz es globalmente trivial y una sola sección puede ser definida sobre todo P . Los espacios base que no son globalmente triviales (*i.e.* no son contraíbles) necesitan ser cubiertos por más de un subconjunto abierto y, consecuentemente, aparecen funciones de transición que se convierten en condiciones no triviales de cuantización como en el caso del monopolo magnético [22].

Finalmente, cabe mencionar que ambos tipos de cuantización topológica resultan en condiciones de discretización que se complementan entre sí. En el caso en el que exista un sistema físico sobre el cual es posible aplicar ambos tipos de cuantización topológica y se obtengan relaciones discretas para el mismo parámetro físico, estas condiciones discretas no deberían entrar en contradicción. Desde el punto de vista de la física, el tomar la cuantización topológica intrínseca o inducida es cuestión de decidir qué parámetros físicos tienen un interés discreto. Es decir, los parámetros que aparecen en la conexión de norma o los parámetros de la métrica del espacio base.

Capítulo 3

Cuantización topológica de la cuerda bosónica

En este capítulo analizaremos a la cuerda bosónica libre que se propaga en un fondo tipo Minkowski y mostraremos el procedimiento explícito para el cálculo del espectro topológico de este sistema. Parte de la construcción también se encuentra en [108] y el artículo, resultado de este trabajo, se encuentra en la referencia [1].

Hasta el momento, como se mencionó en la sección 1.4.8, el problema de conciliar a la mecánica cuántica con la teoría de gravedad es un problema abierto, sin embargo los principales candidatos para dar respuesta a este problema son la teoría de cuerdas y la teoría cuántica de lazos (*loop quantum gravity*) las cuales hacen uso de las herramientas de la cuantización canónica siguiendo las prescripciones de la teoría cuántica de campos usual. En particular, la teoría de cuer-

CAPÍTULO 3. CUANTIZACIÓN TOPOLÓGICA DE LA CUERDA BOSÓNICA

das es una teoría con un rico contenido geométrico en sus entrañas cuyos elementos son un escenario natural para aplicar la cuantización topológica y analizar sus consecuencias.

La cuerda bosónica es el elemento básico que dio origen a la teoría de cuerdas¹ y que es, en términos básicos, la primera extensión al concepto de partícula.

3.1. Elementos generales de la cuerda bosónica

La acción de Nambu-Goto (N-G)[109, 110] describe a la cuerda bosónica libre moviéndose sobre un espaciotiempo. La cuerda, al ser un ente unidimensional, describe al moverse lo que se llama una *hoja de mundo*, que es una superficie de dos dimensiones. Considerando lo anterior, tomemos una variedad diferencial de dos dimensiones \mathcal{M} parametrizada por x^a , $a = 1, 2$, que representará a la hoja de mundo. Tomemos, además, una variedad \mathcal{N} de D dimensiones con coordenadas X^μ , $\mu = 0, \dots, D - 1$, dotada de una métrica \mathbf{G} . Sea $X : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ un mapeo suave de la hoja de mundo \mathcal{M} al espaciotiempo \mathcal{N} . Este mapeo induce una métrica sobre la hoja de mundo encajada en el espaciotiempo dada por el pullback de \mathbf{G} a través del mapeo X , $\mathbf{g} = X^*\mathbf{G}$, cuyas componentes son

$$g_{ab} = \frac{\partial X^\mu}{\partial x^a} \frac{\partial X^\nu}{\partial x^b} G_{\mu\nu}. \quad (3.1)$$

¹En realidad, la cuerda bosónica, considerada como elemento fundamental, sólo tiene ese carácter en los inicios de la teoría pues más adelante, con el desarrollo de la teoría, la cuerda bosónica se convirtió en un elemento que es consecuencia de las excitaciones de algo más fundamental conocido como *el campo de cuerdas*.

CAPÍTULO 3. CUANTIZACIÓN TOPOLÓGICA DE LA CUERDA BOSÓNICA

La acción N-G, en términos de la métrica inducida, es

$$S_{NG} = -T \int d^2x \sqrt{|g|}, \quad (3.2)$$

donde T es la tensión de la cuerda y $g \equiv \det(g_{ab})$. Esta acción presenta dos simetrías: la invarianza ante difeomorfismos sobre la hoja de mundo $x'^a = x'^a(x)$ y la invarianza ante difeomorfismos del espacio tiempo $X'^\mu = X'^\mu(X)$.

Para estudiar a la cuerda bosónica libre se utiliza, en lugar de N-G, la acción de Polyakov², la cual es equivalente clásicamente a la acción (3.2) pero ésta hace uso de una métrica auxiliar γ que se introduce sobre la hoja de mundo:

$$S_P = -\frac{1}{4\pi\alpha'} \int d^2x \sqrt{|\gamma|} \gamma^{ab} g_{ab}, \quad (3.3)$$

donde α' es una constante asociada a la tensión de la cuerda por medio de la relación $T = 1/2\pi\alpha'$ y se relaciona con la longitud de la cuerda l_s por medio de la relación $l_s = \hbar c \sqrt{\alpha'}$. La acción de Polyakov, desde el punto de vista matemático, es un *mapeo armónico* (llamado también *modelo sigma*)[115]. Abundaremos un poco más al respecto en la sección (4.2.2). Cabe destacar que la acción de Polyakov, además de las dos simetrías que presenta N-G, tiene una simetría más debido

²La acción N-G está dada en términos de la raíz cuadrada del determinante de la métrica inducida y, aunque clásicamente esta acción es equivalente a la de Polyakov, cuánticamente el procedimiento de cuantización arroja resultados distintos para ambas acciones. Esto dice que las acciones, a nivel cuántico, no son equivalentes y, de hecho, se han encontrado que difieren incluso para sistemas simples como el oscilador armónico o el campo escalar [111, 112, 113, 114].

CAPÍTULO 3. CUANTIZACIÓN TOPOLÓGICA DE LA CUERDA BOSÓNICA

a la introducción de la métrica auxiliar. Esta simetría se conoce como *invarianza de Weyl* que es una invarianza ante reescalamientos de la métrica γ , $\gamma' = e^{\omega(x)}\gamma$.

Ahora, al realizar la variación de la acción de Polyakov con respecto a la métrica γ ,

$$T_{ab} = \frac{4\pi}{\sqrt{\gamma}} \frac{\delta S_P}{\delta \gamma^{ab}},$$

obtenemos al tensor de energía-momento para la hoja de mundo

$$T_{ab} = g_{ab} - \frac{1}{2}\gamma^{cd}g_{cd}\gamma_{ab} = 0,$$

que podemos entender como una constricción que nos sirve para probar la equivalencia entre las acciones (3.2) y (3.3). De esta ecuación (3.4), tenemos

$$g_{ab} = \frac{1}{2}\gamma^{cd}g_{cd}\gamma_{ab},$$

la cual, al dividir entre $\sqrt{-g}$, con $g = \det(g)$ y aplicar las propiedades de los determinantes al calcular el determinante de la ecuación anterior, se obtiene

$$\frac{g_{ab}}{\sqrt{-g}} = \frac{\gamma_{ab}}{\sqrt{|\gamma|}},$$

que, al sustituir la métrica γ_{ab} y su determinante en la acción de Polyakov, nos regresa a la acción de Nambu-Goto.

Para obtener las ecuaciones de movimiento que determinan la dinámica de la cuerda tenemos que realizar la variación de la acción de Polyakov con respecto a las coordenadas del espacio tiempo X^μ ,

CAPÍTULO 3. CUANTIZACIÓN TOPOLÓGICA DE LA CUERDA BOSÓNICA

cuyo resultado nos arroja las ecuaciones

$$\frac{1}{\sqrt{|\gamma|}}\partial_a \left(\sqrt{|\gamma|} \gamma^{ab} \partial_b X^\mu \right) + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \gamma^{ab} \partial_a X^\alpha \partial_b X^\beta = 0, \quad (3.4)$$

donde hemos definido $\partial_a \equiv \frac{\partial}{\partial x^a}$ y $\Gamma_{\nu\gamma}^\mu = \frac{1}{2}G^{\mu\delta}(\partial_\nu G_{\delta\gamma} + \partial_\gamma G_{\delta\nu} - \partial_\delta G_{\nu\gamma})$. En el caso de que la métrica de fondo (\mathbf{G}) sea la métrica de Minkowski (η), es decir, una cuerda que se propaga libremente sobre el espaciotiempo plano, las ecuaciones (3.4) se reducen a

$$\partial_a \left(\sqrt{|\gamma|} \gamma^{ab} \partial_b X^\mu \right) = 0, \quad (3.5)$$

en coordenadas cartesianas.

Éste es el sistema que queremos estudiar en este capítulo de la tesis bajo el formalismo de la cuantización topológica. Para llevarlo a cabo, como se desprende del capítulo donde se presentó el formalismo (2), necesitamos encontrar soluciones exactas a estas ecuaciones de movimiento pues de esta manera determinamos el encaje de la hoja de mundo dentro del espaciotiempo y encontramos los parámetros de la métrica que serán cuantizados por este método.

3.2. Cuerda bosónica en un fondo genérico

Para aplicar el formalismo de la cuantización topológica, como se mencionó en la sección 2, tenemos que construir un haz fibrado principal para la cuerda bosónica sobre un fondo genérico. Para iniciar este procedimiento es natural considerar a la hoja de mundo \mathbf{M} ,

CAPÍTULO 3. CUANTIZACIÓN TOPOLÓGICA DE LA CUERDA BOSÓNICA

que está encajada dentro del espaciotiempo \mathbf{N} , como el espacio base provisto de la métrica inducida \mathbf{g} y de este modo podemos tomar a la configuración (\mathbf{M}_g, ω) como la variedad del espacio base con ω la conexión métrica \mathbf{g} . Como fibra del haz tomaremos al grupo de invarianza de los difeomorfismos que es isomórfico al grupo de estructura ya que ésta es la simetría fundamental de la acción 2-dimensional. El grupo de difeomorfismos sobre \mathbf{M} se puede reducir al grupo ortonormal al introducir en el espacio base al marco ortonormal $\{e_i\}$ con $i = 1, 2$. Esta base forma un marco orientable sobre la hoja de mundo que cumple con la condición de ortonormalidad bajo la métrica inducida, $\mathbf{g}(e_i, e_j) = \eta_{ij}$ y se transforma ante distintas bases como $e'_i = e_j(\Lambda^{-1})^j_i$, donde $\Lambda \in SO(1, 1)$. Podemos usar la base de 1-formas $\{\theta^i\}$ duales a e_j para escribir a la métrica como $\mathbf{g} = \eta_{ij} \theta^i \otimes \theta^j$. De esta manera queda reducido el grupo de simetría de la hoja de mundo a $SO(1, 1)$. Finalmente, con estos elementos, podemos construir al haz fibrado principal \mathcal{P} a partir de la configuración (\mathbf{M}_g, ω') , donde ω' es la conexión de espín que toma sus valores en el álgebra de Lie $so(1, 1)$, y al grupo de estructura $SO(1, 1)$.

La presente construcción nos permite enunciar el siguiente teorema:

Teorema 3.1. *Una cuerda bosónica, descrita con la acción de Nambu-Goto, que se propaga sobre un fondo tipo Minkowski $(\mathcal{N}, \mathbf{G})$ es representada por un único haz fibrado principal \mathcal{P} con una variedad semi-Riemanniana $(\mathcal{M}, \mathbf{g})$ como espacio base, $SO(1, 1)$ como grupo de estructura (isomorfo a la fibra estándar) y con una conexión métrica ω ,*

CAPÍTULO 3. CUANTIZACIÓN TOPOLÓGICA DE LA CUERDA BOSÓNICA

compatible con \mathfrak{g} , la cual toma valores en el álgebra de Lie $so(1,1)$.

La demostración de este teorema es completamente análoga a la que aparece en los trabajos [25, 93] y descansa en el Teorema de la Reconstrucción [106, 107] y el Teorema de existencia de la conexión sobre el has fibrado principal \mathcal{P} (capítulo 2).

Como se mencionó en el capítulo anterior, tenemos que calcular primero la clase característica de Euler (2.4) en un espacio base 2-dimensional, lo cual resulta en

$$e(\mathcal{P}) = -\frac{1}{2\pi} R_2^1.$$

La expresión explícita de la 2-forma de Euler la obtenemos al tomar la norma conforme, $\mathfrak{g} = f(x^a)\eta$, donde $f(x^a)$ es el factor conforme y el cual, nombrando a las coordenadas $x^a = \tau, \sigma$, resulta de la ecuación (3.1) $f(\tau, \sigma) = g_{\sigma\sigma}$, la cual queda como

$$e(\mathcal{P}) = -\frac{1}{4\pi} \left[\partial_\tau \left(\frac{1}{g_{\sigma\sigma}} \partial_\tau g_{\sigma\sigma} \right) - \partial_\sigma \left(\frac{1}{g_{\sigma\sigma}} \partial_\sigma g_{\sigma\sigma} \right) \right] d\tau \wedge d\sigma. \quad (3.6)$$

De esta manera el cálculo del espectro topológico se reduce ahora a determinar al factor conforme $g_{\sigma\sigma}$ y calcular la integral

$$\int_M e(\mathcal{P}) = n \in \mathbb{Z}.$$

CAPÍTULO 3. CUANTIZACIÓN TOPOLÓGICA DE LA CUERDA BOSÓNICA

3.3. Cuerda bosónica sobre un fondo tipo Minkowski

Consideremos una cuerda bosónica sobre un fondo plano, $G_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ en la ecuación (3.1), descrita por un conjunto de funciones de encaje $\{X^\mu\}$ que satisfacen las ecuaciones de movimiento

$$(-\partial_\tau^2 + \partial_\sigma^2) X^\mu(\tau, \sigma) = 0,$$

las cuales tienen la solución general

$$X^\mu(\tau, \sigma) = F^\mu(\tau + \sigma) + G^\mu(\tau - \sigma),$$

donde se ha tomado la norma conforme para escribir ésta y las siguientes expresiones. El conjunto de ecuaciones (3.5) toma la forma

$$\begin{aligned}(\partial_\tau X^\mu \partial_\tau X^\nu + \partial_\sigma X^\mu \partial_\sigma X^\nu) \eta_{\mu\nu} &= 0, \\ \partial_\tau X^\mu \partial_\sigma X^\nu \eta_{\mu\nu} &= 0,\end{aligned}\tag{3.7}$$

a partir del cual se calcula el factor conforme de la métrica inducida. Con la norma conforme hemos fijado la simetría de Weyl pero falta fijar las libertades de norma de los difeomorfismos para lo que consideremos primero una clase de normas dadas por [116]

$$\begin{aligned}\hat{n} \cdot \mathbf{X}(\tau, \sigma) &= \alpha'(\hat{n} \cdot \mathbf{p})\tau, \\ (\hat{n} \cdot \mathbf{p})\sigma &= 2\pi \int_0^\sigma d\tilde{\sigma} \hat{n} \cdot \mathbf{P}^\tau(\tau, \tilde{\sigma}),\end{aligned}\tag{3.8}$$

CAPÍTULO 3. CUANTIZACIÓN TOPOLÓGICA DE LA CUERDA BOSÓNICA

donde \hat{n} es un vector unitario que fija la relación entre los parámetros de la hoja de mundo con las coordenadas del espaciotiempo (figura 3.1), donde $\hat{n} \cdot \mathbf{X} = \hat{n}^\mu X^\nu \eta_{\mu\nu}$, \mathbf{P}^τ es la densidad de momento a lo largo de la cuerda y \mathbf{p} es el cuadrimomento total de la cuerda. Tomando al vector unitario \hat{n} como

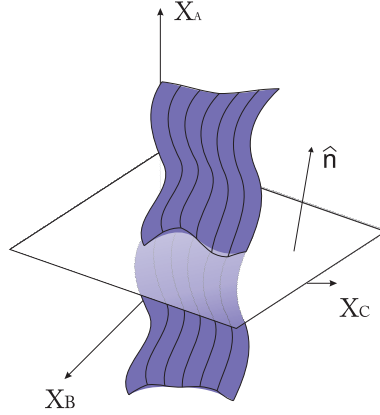


Figura 3.1: Esquema de la elección de norma a partir del vector unitario \hat{n} .

$$n^\mu = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \dots, 0 \right),$$

quedan definidas las coordenadas del cono luz para el espacio de fondo

$$\begin{aligned} X^+ &= \frac{X^0 + X^1}{\sqrt{2}}, \\ X^- &= \frac{X^0 - X^1}{\sqrt{2}}, \\ X^I &= X^I, \quad \text{con } I = 2, \dots, D-1, \end{aligned} \tag{3.9}$$

CAPÍTULO 3. CUANTIZACIÓN TOPOLÓGICA DE LA CUERDA BOSÓNICA

y el elemento de línea, para el espaciotiempo de Minkowski, toma la forma

$$ds_G^2 = -2dX^+dX^- + dX^I dX^J \delta_{IJ},$$

y las ecuaciones (3.8) que determinan la norma quedan finalmente como

$$\begin{aligned} X^+(\tau, \sigma) &= \beta \alpha' p^+ \tau, \\ p^+ \sigma &= \frac{2\pi}{\beta} \int_0^\sigma d\tilde{\sigma} P^{\tau+}(\tau, \sigma), \end{aligned} \quad (3.10)$$

donde $\beta = 1$ para cuerda cerrada y $\beta = 2$ para cuerda abierta, $\hat{n} \cdot P^\tau$ es constante a lo largo de la cuerda y por lo tanto lo es también p^+ . Con esto, todas las libertades de la acción quedan fijadas y las ecuaciones de restricción (3.7) quedan como

$$\begin{aligned} \partial_\tau X^- &= \frac{1}{2\alpha' p^+} (\partial_\tau X^I \partial_\tau X^J + \partial_\sigma X^I \partial_\sigma X^J) \delta_{IJ}, \\ \partial_\sigma X^- &= \frac{1}{\alpha' p^+} \partial_\tau X^I \partial_\sigma X^J \delta_{IJ}, \end{aligned} \quad (3.11)$$

en donde observamos que la componente X^- queda determinada una vez que las componentes transversales $X^I(\tau, \sigma)$, $I = 2, \dots, D - 1$, estén resultas; de hecho, X^+ y X^- no representan grados dinámicos de libertad para la acción. Para obtener el espectro topológico, al integrar la forma de Euler (3.6), primero debemos encontrar al factor conforme de la métrica inducida $g_{\sigma\sigma}$ la cual, dadas las restricciones (3.11), se reduce a

$$g_{\sigma\sigma} = \partial_\sigma X^I \partial_\sigma X^J \delta_{IJ}.$$

CAPÍTULO 3. CUANTIZACIÓN TOPOLÓGICA DE LA CUERDA BOSÓNICA

Ahora es claro que el factor conforme depende únicamente de la dinámica de la cuerda, es decir, del sector transversal X^I .

3.3.1. Espectro topológico para la cuerda bosónica cerrada

Para el caso de la cuerda cerrada debemos de imponer las condiciones periódicas en la frontera:

$$\begin{aligned} X^\mu(\tau, \sigma_1) &= X^\mu(\tau, \sigma_2) \\ \partial_\sigma X^\mu(\tau, \sigma_1) &= \partial_\sigma X^\mu(\tau, \sigma_2) \\ \gamma_{ab}(\tau, \sigma_1) &= \gamma_{ab}(\tau, \sigma_2), \end{aligned}$$

donde $\sigma_1 = 0$ y $\sigma_2 = 2\pi$. La solución general a las ecuaciones de movimiento que satisfacen estas condiciones de frontera son [109]:

$$\begin{aligned} X^\mu(\tau, \sigma) &= x_0^\mu + \sqrt{2\alpha'}\alpha_0^\mu\tau + \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\omega_k}} \left(\alpha_k^\mu e^{-i\omega_k(\tau-\sigma)} \right. \\ &\quad \left. + \alpha_k^{\mu*} e^{i\omega_k(\tau-\sigma)} + \tilde{\alpha}_k^\mu e^{-i\omega_k(\tau+\sigma)} + \tilde{\alpha}_k^{\mu*} e^{i\omega_k(\tau+\sigma)} \right), \end{aligned} \quad (3.12)$$

donde los coeficientes de los modos de oscilación, $\{\tilde{\alpha}_k^\mu\}$ y $\{\alpha_k^\mu\}$, se interpretan como amplitudes de modos de onda que se mueven hacia la izquierda y hacia la derecha, respectivamente. A lo largo de esta sección, $\mu = 0, \dots, D-1$ y $\omega_k = k$ y la condición de periodicidad sobre σ implica que los modo cero son iguales, es decir $\tilde{\alpha}_0^\mu = \alpha_0^\mu$. En términos de las componentes dinámicas $X^I(\tau, \sigma)$ y considerando

CAPÍTULO 3. CUANTIZACIÓN TOPOLÓGICA DE LA CUERDA BOSÓNICA

la notación polar para los coeficientes de los modos de oscilación, $\alpha_k^I = r_k^I e^{-i\gamma_k^I}$ y $\tilde{\alpha}_k^I = \tilde{r}_k^I e^{-i\tilde{\gamma}_k^I}$, las soluciones (3.12) se escriben como

$$X^I(\tau, \sigma) = x_0^I + \sqrt{2\alpha'} \alpha_0^I \tau + \sqrt{2\alpha'} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\omega_k}} \left[r_k^I \cos \omega_k(\tau - \sigma + \gamma_k^I) + \tilde{r}_k^I \cos \omega_k(\tau + \sigma + \tilde{\gamma}_k^I) \right].$$

De este modo, la función métrica $g_{\sigma\sigma}$ que determina a la clase característica de Euler (3.6) es una suma infinita de modos de oscilación

$$g_{\sigma\sigma}(\tau, \sigma) = 2\alpha' \sum_{k,l=1}^{\infty} \sqrt{\omega_k \omega_l} \left[r_k^I \sin \omega_k(\tau - \sigma + \gamma_k^I) - \tilde{r}_k^I \sin \omega_k(\tau + \sigma + \tilde{\gamma}_k^I) \right] \times \left[r_l^J \sin \omega_l(\tau - \sigma + \gamma_l^J) - \tilde{r}_l^J \sin \omega_l(\tau + \sigma + \tilde{\gamma}_l^J) \right] \delta_{IJ}.$$

Esto implica que la integración del correspondiente invariante topológico involucra la manipulación de una serie infinita de términos. Debido a las dificultades técnicas, en lo siguiente, se tomarán configuraciones particulares con pocos modos de oscilación distintos de cero con el objetivo de obtener expresiones concretas del espectro topológico correspondiente. Esto implica que los espectros topológicos que obtengamos se restringen a configuraciones particulares de la cuerda bosónica cerrada. En la discusión (capítulo 6) se dará una propuesta para el caso general.

CAPÍTULO 3. CUANTIZACIÓN TOPOLÓGICA DE LA CUERDA BOSÓNICA

3.3.2. Espectro topológico de configuraciones particulares

Para analizar cómo afectan las propiedades geométricas del haz fibrado principal los diferentes modos de oscilación, vamos a considerar el caso de un único modo derecho $\alpha_k^{J_1} \neq 0$ en la dirección J_1 y un único modo izquierdo en una dirección diferente J_2 , $\tilde{\alpha}_l^{J_2} \neq 0$. Los únicos términos transversales, X^I , que son diferentes de cero en los términos oscilatorios son

$$\begin{aligned} X^{J_1} &= x_0^{J_1} + \sqrt{2\alpha'}\alpha_0^{J_1}\tau + \sqrt{2\alpha'}\frac{r_k^{J_1}}{\sqrt{\omega_k}}\cos\omega_k(\tau - \sigma + \gamma_k^{J_1}), \\ X^{J_2} &= x_0^{J_2} + \sqrt{2\alpha'}\alpha_0^{J_2}\tau + \sqrt{2\alpha'}\frac{\tilde{r}_l^{J_2}}{\sqrt{\omega_l}}\cos\omega_l(\tau + \sigma + \gamma_l^{J_2}), \end{aligned} \quad (3.13)$$

donde hemos expresado a los coeficientes en la notación polar. Las demás direcciones transversales, $J \neq J_1, J_2$, describen únicamente el movimiento de su centro de masa, $X^J(\tau, \sigma) = x_0^J + \sqrt{2\alpha'}\alpha_0^J\tau$. En este caso particular, el factor conforme de la métrica inducida es

$$\begin{aligned} g_{\sigma\sigma} &= 2\alpha' \left[\omega_k (r_k^{J_1})^2 \sin^2 \omega_k (\tau - \sigma + \gamma_k^{J_1}) \right. \\ &\quad \left. + \omega_l (\tilde{r}_l^{J_2})^2 \sin^2 \omega_l (\tau + \sigma + \gamma_l^{J_2}) \right], \end{aligned}$$

CAPÍTULO 3. CUANTIZACIÓN TOPOLÓGICA DE LA CUERDA BOSÓNICA

y la clase característica de Euler es

$$\begin{aligned}
 e(\mathcal{P}) &= \left\{ \omega_k^2 \omega_l^2 (r_k^{J_1} \tilde{r}_l^{J_2})^2 \sin 2\omega_k(\tau - \sigma + \gamma_k^{J_1}) \sin 2\omega_l(\tau + \sigma + \tilde{\gamma}_l^{J_2}) \right\} \\
 &\times \left\{ \frac{1}{\pi \left[(r_k^{J_1})^2 \sin^2 \omega_k(\tau - \sigma + \gamma_k^{J_1}) + (\tilde{r}_l^{J_2})^2 \sin^2 \omega_l(\tau + \sigma + \tilde{\gamma}_l^{J_2}) \right]^2} \right\} \\
 &\times (d\tau \wedge d\sigma). \tag{3.14}
 \end{aligned}$$

Para integrar la forma Euler (3.14) debemos especificar los límites del dominio de integración. El parámetro σ corre dentro del intervalo $[0, 2\pi]$ mientras que τ , al observar su comportamiento en la forma de Euler, resulta ser periódica también y, por lo tanto, podemos escoger un ciclo completo en τ lo cual nos permite aplicar el Teorema de Gauss-Bonnet sobre la variedad en la región periódica³. Para realizar el cálculo de la integral es conveniente utilizar cartas que cubran el dominio de integración en coordenadas nulas (ver el apéndice B). Re-alizada la integración de la forma de Euler, para este caso particular, resulta que la clase de Euler es nula, $\int_M e(\mathcal{P}) = 0$, lo que implica que no existe una relación discreta entre los parámetros $r_k^{J_1}$ y $\tilde{r}_l^{J_2}$. Esto

³En el caso de variedades compactas con frontera, el Teorema de Gauss-Bonnet dice,

$$\int_M C(M) d\tau \wedge d\sigma + \int_{\partial M} \kappa ds = 2\pi \chi(M),$$

donde $C(M)$ es la clase característica de la variedad M y κ la curvatura geodésica en la frontera de la variedad ∂M . Cuando la variedad tiene la misma orientación en la frontera y sus valores coinciden (como es el caso periódico) la curvatura geodésica $\kappa = 0$ lo que hace que en casos como el que estamos tomando no tengamos que preocuparnos por dicho término de frontera.

CAPÍTULO 3. CUANTIZACIÓN TOPOLÓGICA DE LA CUERDA BOSÓNICA

nos dice que la interacción entre modos de oscilación entre direcciones perpendiculares del espaciotiempo es nula.

Consideremos ahora el caso de dos modos de oscilación no nulos que estén en la misma dirección transversal, esto es un k -modo derecho, α_k^J , y un l -modo izquierdo, $\tilde{\alpha}_l^J$. La coordenada del encaje relevante en este caso, $I = J$, es

$$X^J(\tau, \sigma) = x_0^J + \sqrt{2\alpha'}\alpha_0^J\tau + \sqrt{2\alpha'} \left[\frac{r_k}{\sqrt{\omega_k}} \cos \omega_k(\tau - \sigma + \gamma_k) + \frac{\tilde{r}_l}{\sqrt{\omega_l}} \cos \omega_l(\tau + \sigma + \tilde{\gamma}_l) \right], \quad (3.15)$$

donde hemos utilizado de nuevo la notación polar, $\alpha_k^J = r_k e^{-i\gamma_k}$ y $\tilde{\alpha}_l^J = \tilde{r}_l e^{-i\tilde{\gamma}_l}$. En las otras direcciones transversales, $I \neq J$, tenemos la descripción únicamente de su centro de masa, el cual depende únicamente del parámetro τ por lo que estas direcciones no intervienen en el factor conforme. Con esto, el factor conforme de la métrica inducida queda

$$g_{\sigma\sigma}(\tau, \sigma) = 2\alpha' \left[\sqrt{\omega_k} r_k \sin \omega_k(\tau - \sigma + \gamma_k) - \sqrt{\omega_l} \tilde{r}_l \sin \omega_l(\tau + \sigma + \tilde{\gamma}_l) \right]^2,$$

CAPÍTULO 3. CUANTIZACIÓN TOPOLÓGICA DE LA CUERDA BOSÓNICA

y la forma de Euler es

$$\begin{aligned}
 e(\tau, \sigma) = & \left\{ -2(\omega_k \omega_l)^{\frac{3}{2}} r_k \tilde{r}_l \cos \omega_k(\tau - \sigma + \gamma_k) \cos \omega_l(\tau + \sigma + \tilde{\gamma}_l) \right\} \\
 & \times \left\{ \frac{1}{\pi \left[\sqrt{\omega_k} r_k \sin \omega_k(\tau - \sigma + \gamma_k) - \sqrt{\omega_l} \tilde{r}_l \sin \omega_l(\tau + \sigma + \tilde{\gamma}_l) \right]^2} \right\} \\
 & \times (d\tau \wedge d\sigma). \tag{3.16}
 \end{aligned}$$

El espectro topológico lo obtenemos al integrar esta expresión sobre $\sigma \in [0, 2\pi]$ y un período en τ . En nuestro caso particular, utilizamos la transformación de coordenadas (B.2) y cubrimos la región completa (figura 3.2) como se explica en el apéndice (B). Para las regiones *I* y

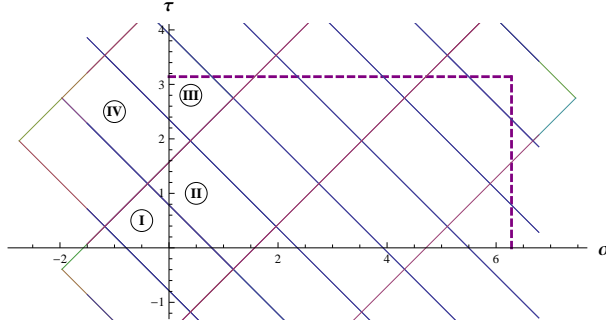


Figura 3.2: Dominio de integración para el caso de un modo derecho $k = \omega_k = 1$ en la dirección J_1 y un modo izquierdo $l = \omega_l = 2$ en la dirección J_2 . Las diferentes regiones corresponden a diferentes cambios de coordenadas, *I* a *IV*, explicados en el apéndice B.

CAPÍTULO 3. CUANTIZACIÓN TOPOLÓGICA DE LA CUERDA BOSÓNICA

IV, la forma de Euler se escribe como

$$e(x, y) = -\frac{1}{\pi} \frac{r_k \tilde{r}_l \sqrt{\omega_k \omega_l}}{(\sqrt{\omega_k} r_k x - \sqrt{\omega_l} \tilde{r}_l y)^2} dx \wedge dy,$$

mientras que para las regiones *II* y *III* tenemos

$$e(x, y) = -\frac{1}{\pi} \frac{r_k \tilde{r}_l \sqrt{\omega_k \omega_l}}{(\sqrt{\omega_k} r_k x + \sqrt{\omega_l} \tilde{r}_l y)^2} dx \wedge dy.$$

La integración de $e(x, y)$ en estas regiones arroja una relación discreta entre las amplitudes de los modos de oscilación r_k y \tilde{r}_l , dada por la expresión

$$\frac{4}{\pi} \omega_k \omega_l \ln \left[\frac{(\sqrt{\omega_l} \tilde{r}_l + \sqrt{\omega_k} r_k)^2}{(\sqrt{\omega_l} \tilde{r}_l - \sqrt{\omega_k} r_k)^2} \right] = n, \quad (3.17)$$

donde n es un entero. Esta última ecuación es el espectro topológico para el caso de dos modos de oscilación distintos de cero (izquierdo y derecho) en la misma dirección de la cuerda bosónica cerrada sobre un fondo plano. Es decir, en esta configuración de la cuerda resulta que los modos de oscilación α y $\tilde{\alpha}$ guardan una relación discreta entre ellos, $\alpha = \alpha(\tilde{\alpha}, n)$. En la figura 3.3 se muestran los valores permitidos para r_k y \tilde{r}_l de acuerdo con la relación (3.17).

Una vez que hemos obtenido el espectro topológico para los dos casos más sencillos, podemos tomar el caso que sigue en complejidad al añadir, al caso anterior con $I = J_1$, $\alpha_k^{J_1}$, $\tilde{\alpha}_l^{J_1}$, un tercer modo k distinto de cero en una dirección independiente $I = J_2$, $\alpha_k^{J_2}$ ⁴. En este

⁴El caso de incluir un modo izquierdo en lugar del modo derecho es tratado de manera similiar.

CAPÍTULO 3. CUANTIZACIÓN TOPOLÓGICA DE LA CUERDA BOSÓNICA

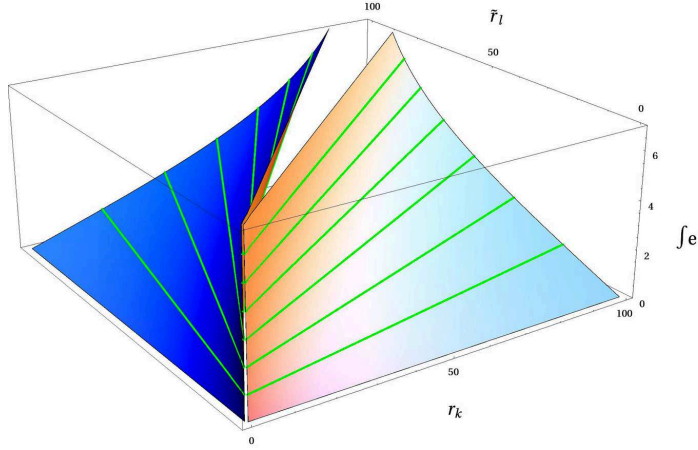


Figura 3.3: Gráfica del espectro topológico para el caso de dos modos de oscilación distintos de cero (izquierdo y derecho) que apuntan en la misma dirección del espaciotiempo. Las líneas sobre la superficie muestran los valores de r_k y \tilde{r}_l que satisfacen las relaciones discretas para $k = \omega_k = 1$ y $l = \omega_l = 1$.

caso, las componentes relevantes son

$$\begin{aligned}
 X^{J_1}(\tau, \sigma) &= x_0^{J_1} + \sqrt{2\alpha'}\alpha_0^{J_1} \\
 &+ \sqrt{2\alpha'} \left[\frac{r_k^{J_1}}{\sqrt{\omega_k}} \cos \omega_k(\tau - \sigma + \gamma_k^{J_1}) + \frac{\tilde{r}_l^{J_1}}{\sqrt{\omega_l}} \cos \omega_l(\tau + \sigma + \tilde{\gamma}_l^{J_1}) \right], \\
 X^{J_2}(\tau, \sigma) &= x_0^{J_2} + \sqrt{2\alpha'}\alpha_0^{J_2} + \sqrt{2\alpha'} \frac{r_k^{J_2}}{\sqrt{\omega_k}} \cos \omega_k(\tau - \sigma + \gamma_k^{J_2}). \quad (3.18)
 \end{aligned}$$

Integrando como en los casos anteriores obtenemos el espectro

CAPÍTULO 3. CUANTIZACIÓN TOPOLÓGICA DE LA CUERDA BOSÓNICA

topológico que generaliza a la relación (3.17)

$$\frac{4}{\pi} \omega_k \omega_l \ln \left[\frac{\omega_k \left(r_k^{J_2} \right)^2 + \left(\sqrt{\omega_k} r_k^{J_1} + \sqrt{\omega_l} \tilde{r}_l^{J_1} \right)^2}{\omega_k \left(r_k^{J_2} \right)^2 + \left(\sqrt{\omega_k} r_k^{J_1} - \sqrt{\omega_l} \tilde{r}_l^{J_1} \right)^2} \right] = n. \quad (3.19)$$

Si se agrega un modo izquierdo l en la dirección $I = J_2$ a los modos del caso anterior y calculamos el espectro topológico, encontramos que se satisface la siguiente relación discreta,

$$\frac{4}{\pi} \omega_k \omega_l \ln \left[\frac{\left(\sqrt{\omega_k} r_k^{J_2} + \sqrt{\omega_l} \tilde{r}_l^{J_2} \right)^2 + \left(\sqrt{\omega_k} r_k^{J_1} + \sqrt{\omega_l} \tilde{r}_l^{J_1} \right)^2}{\left(\sqrt{\omega_k} r_k^{J_2} - \sqrt{\omega_l} \tilde{r}_l^{J_2} \right)^2 + \left(\sqrt{\omega_k} r_k^{J_1} - \sqrt{\omega_l} \tilde{r}_l^{J_1} \right)^2} \right] = n, \quad (3.20)$$

dándonos así la pista para la generalización del espectro topológico para el caso de más modos distintos de cero en cada dirección espaciotemporal.

3.3.3. Discretización de la energía

Averigüemos ahora cómo se reflejan en las cantidades físicas, como la función hamiltoniana, las restricciones discretas del espectro topológico que encontramos.

Empecemos por el primer caso no trivial, es decir la primera configuración con espectro topológico no nulo ($\int_M e(\mathcal{P}) \neq 0$), el cual es el de dos modos (derecho e izquierdo) en la misma dirección (3.15) cuyo espectro topológico está dado por la relación (3.17). La densidad

CAPÍTULO 3. CUANTIZACIÓN TOPOLÓGICA DE LA CUERDA BOSÓNICA

hamiltoniana, en la norma del cono de luz, es

$$\mathcal{H} = \frac{1}{4\pi\alpha'} [\partial_\tau X^K \partial_\tau X^L + \partial_\sigma X^K \partial_\sigma X^L] \delta_{KL},$$

de tal forma que la función hamiltoniana $H = \int_0^{2\pi} \mathcal{H} d\sigma$ para esta configuración particular es

$$H = H_0 + \omega_k r_k^2 + \omega_l \tilde{r}_l^2, \quad H_0 = \sum_K (\alpha_0^K)^2,$$

donde H_0 es el estado base de la cuerda dado por la suma de los modos cero de oscilación.

Al considerar la condición de discretización dada por el espectro topológico (3.17), podemos reescribir la relación discreta en términos de $\omega_k r_k^2 + \omega_l \tilde{r}_l^2$. Al reemplazarla en el hamiltoniano anterior,

$$H = H_0 - 2\sqrt{\omega_k \omega_l} r_k \tilde{r}_l \left(\frac{1 + e^{n/\omega_{kl}}}{1 - e^{n/\omega_{kl}}} \right), \quad \omega_{kl} = \frac{4}{\pi} \omega_k \omega_l, \quad (3.21)$$

o, equivalentemente para $\sqrt{\omega_k} r_k > \sqrt{\omega_l} \tilde{r}_l$,

$$H = H_0 + \omega_k r_k^2 \left[1 + \left(\frac{1 - e^{n/2\omega_{kl}}}{1 + e^{n/2\omega_{kl}}} \right)^2 \right], \quad (3.22)$$

y para $\sqrt{\omega_k} r_k < \sqrt{\omega_l} \tilde{r}_l$,

$$H = H_0 + \omega_k r_k^2 \left[1 + \left(\frac{1 + e^{n/2\omega_{kl}}}{1 - e^{n/2\omega_{kl}}} \right)^2 \right]. \quad (3.23)$$

CAPÍTULO 3. CUANTIZACIÓN TOPOLÓGICA DE LA CUERDA BOSÓNICA

A partir de esto podemos concluir que la cuantización topológica conlleva una discretización para la función Hamiltoniana. De hecho, para cualquier configuración dada de la cuerda bosónica, es decir, para valores determinados de las frecuencias de oscilación y sus amplitudes, la función hamiltoniana puede tomar únicamente aquellos valores que son permitidos por la relación discreta (3.22, 3.23) que dependen explícitamente de un entero n . Éste es el principal resultado de nuestro análisis en este capítulo. Es interesante, además, hacer notar que el espectro de la hamiltoniana no es equidistante, lo que puede ser interpretado como el resultado de la interacción de los distintos modos de oscilación. Así, para valores grandes de n , el valor de la hamiltoniana tiende a un valor constante

$$H_\infty = H_0 - 2\sqrt{\omega_k\omega_l} r_k \tilde{r}_l = H_0 + 2\omega_k r_k^2. \quad (3.24)$$

Este comportamiento se muestra en la figura 3.4 para ambos casos y en la figura 3.5 para $\sqrt{\omega_k} r_k > \sqrt{\omega_l} \tilde{r}_l$.

En el capítulo 6 daremos la discusión de los resultados y haremos la propuesta general del espectro topológico.

CAPÍTULO 3. CUANTIZACIÓN TOPOLÓGICA DE LA CUERDA BOSÓNICA

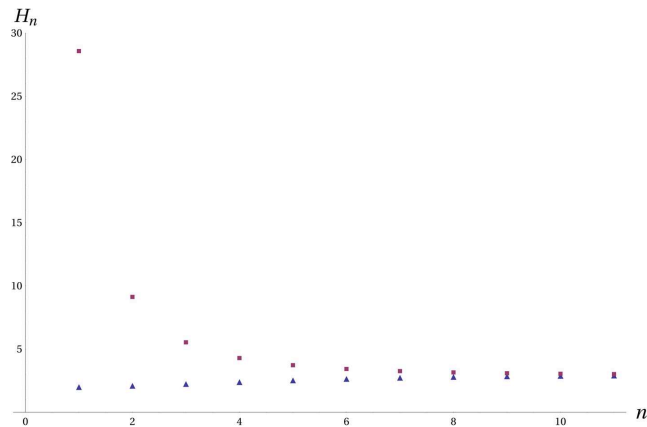


Figura 3.4: Gráfica de la función hamiltoniana con $k = \omega_k = 1$, $l = \omega_l = 1$, $H_0 = 1$ y $r_k = 1$, mostrando el comportamiento discreto. Los casos $\sqrt{\omega_l \tilde{r}_l} > \sqrt{\omega_k r_k}$ y $\sqrt{\omega_l \tilde{r}_l} < \sqrt{\omega_k r_k}$ están representados por cuadrados y triángulos, respectivamente.

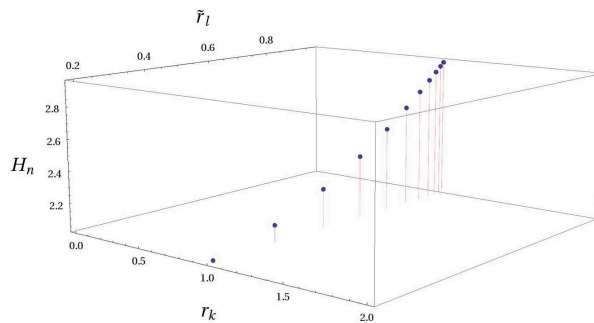


Figura 3.5: Gráfica de la función hamiltoniana para el caso $\sqrt{\omega_k r_k} > \sqrt{\omega_l \tilde{r}_l}$ con $k = \omega_k = 1$, $l = \omega_l = 1$, $H_0 = 1$ y $r_k = 1$, mostrando el comportamiento discreto.

Capítulo 4

Cuantización topológica del campo escalar libre masivo

Cuando tenemos un mapeo f entre variedades, es posible asociar bajo ciertas condiciones una función de energía $E(f)$ con el mapeo f . Así, cualquier deformación de f que aumente las irregularidades topológicas aumentará, en general, el valor de la energía $E(f)$.

F. B. Fuller (1954)

En este capítulo analizamos el caso del campo escalar libre con masa. Posteriormente damos la formulación de mapeos armónicos y la formulación de los campos bosónicos masivos descritos como un

CAPÍTULO 4. CUANTIZACIÓN TOPOLÓGICA DEL CAMPO ESCALAR LIBRE MASIVO

mapeo armónico. A partir de esto mostramos la construcción de los haces fibrados que utilizamos para obtener la información topológica a partir de los invariantes correspondientes y, finalmente, obtenemos los espectros topológicos de los parámetros físicos. Los resultados de este capítulo se encuentran en [2]

4.1. El campo escalar en la cuantización canónica

A partir del trabajo de Pauli y Weisskopf [117], publicado en 1934, se comprendió el significado del campo escalar real libre como aquél que describe a partículas que siguen una estadística de Bose-Einstein, ya que antes de este trabajo las energías negativas no dejaban de lado las controversias. Los mismos autores publicaron este trabajo como una “curiosidad” teórica debido a que no se conocían partículas elementales con espín 0 en aquella época.

Como sabemos, el campo escalar real libre, interpretado como densidad del campo bosónico libre en teoría cuántica de campos, tiene asociada la densidad lagrangiana \mathcal{L} dada por

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - m^2 \phi^2)$$

en donde ϕ es el campo escalar que depende de las coordenadas x^μ , es decir $\phi = \phi(x^\mu)$, m es la masa asociada al campo y, como es usual, $\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu}$. A partir de la densidad lagrangiana podemos construir la acción del sistema, dada por

CAPÍTULO 4. CUANTIZACIÓN TOPOLÓGICA DEL CAMPO ESCALAR LIBRE MASIVO

$$S = \int L dt = \int dt \int \mathcal{L} d^3x,$$

es decir

$$S = \int \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - m^2 \phi^2) d^4x$$

Al hacer la variación de la acción respecto al campo ϕ y aplicar el principio de Hamilton, obtenemos la ecuación de movimiento

$$(\partial^\mu \partial_\mu + m^2)\phi = 0. \quad (4.1)$$

que es la llamada ecuación de Klein-Gordon.

La cuantización de este campo es un procedimiento estándar en la literatura [118, 119, 120] y en los cursos introductorios que se imparten sobre la teoría cuántica de campos.

Posteriormente se define la densidad del momento conjugado a ϕ como

$$\pi \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}}$$

donde $\dot{\phi} \equiv \partial_t \phi$ y se promueven a ϕ y a π como operadores a los que se les imponen las relaciones de conmutación

$$\begin{aligned} [\phi(x), \pi(y)] &= i\delta^{(3)}(x - y), \\ [\phi(x), \phi(y)] &= [\pi(x), \pi(y)] = 0, \end{aligned}$$

CAPÍTULO 4. CUANTIZACIÓN TOPOLÓGICA DEL CAMPO ESCALAR LIBRE MASIVO

donde x, y son puntos del espacio.

Lo que implica, al tomar osciladores independientes en el espacio de Fourier como soluciones a las ecuaciones de movimiento (4.1):

$$\begin{aligned}\phi(x) &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_p}} (a_p + a_{-p}^\dagger) e^{ip \cdot x}, \\ \pi(x) &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} (-i) \sqrt{\frac{\omega_p}{2}} (a_p - a_{-p}^\dagger) e^{ip \cdot x},\end{aligned}$$

donde se ha considerado $\phi^*(p) = \phi(-p)$ para que $\phi(x)$ sea real y ω_p es la frecuencia del oscilador dada por la relación,

$$\omega_p = \sqrt{|\mathbf{p}|^2 + m^2}.$$

El parámetro p es el momento conjugado dado por la transformación de Fourier

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} - i\omega_p t} \tilde{\phi}(\mathbf{p}, t).$$

Los modos de oscilación del espacio de Fourier, a_p y su complejo conjugado a_{-p}^\dagger , han sido promovidos al rango de operadores, definidos por medio de las relaciones

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2\omega}} (a + a^\dagger); \quad p = -i \sqrt{\frac{\omega}{2}} (a - a^\dagger),$$

que obedecen, a su vez, las relaciones de conmutación

$$[a_p, a_{p'}^\dagger] = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(p - p').$$

CAPÍTULO 4. CUANTIZACIÓN TOPOLÓGICA DEL CAMPO ESCALAR LIBRE MASIVO

Con estos operadores, llamados de ‘creación’ y ‘aniquilación’, se puede expresar al hamiltoniano como,

$$H = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \omega_p (a_p^\dagger a_p + \frac{1}{2} [a_p, a_p^\dagger]).$$

4.2. Construcción del formalismo de cuantización topológica para el campo bosónico con masa

4.2.1. Construcción de la acción

Como ya se hizo mención en el capítulo 2, el formalismo de la cuantización topológica se aplica a cualquier sistema físico en el que se pueda representar con un haz fibrado principal, lo que implica encontrar una variedad base M , una conexión ω y un grupo de estructura G ; elementos mínimos para construir el haz fibrado principal \mathcal{P} , como se mencionó en el teorema 3 de la sección 3.2.

En el caso de los campos (sistemas físicos con un número infinito de grados de libertad), tenemos una función (campo) ϕ que, a cada punto del espaciotiempo, le asigna una cantidad: escalar, vectorial, tensorial o espinorial (figura 4.1), y se tiene la métrica de Minkowski para las coordenadas del espaciotiempo. El campo escalar libre masivo es un sistema físico invariante ante las transformaciones de Lorentz, las cuales tienen al grupo $SO(1, 3)$. Este grupo es una variedad de Lie, por lo que es natural considerarlo como el grupo de

CAPÍTULO 4. CUANTIZACIÓN TOPOLÓGICA DEL CAMPO ESCALAR LIBRE MASIVO

estructura del haz fibrado que queremos construir para los campos escalares, sin embargo, no resulta obvio, hasta el momento, quién es el espacio base M ni la conexión del haz ω ya que no contamos con una estructura geométrica para el campo ϕ .

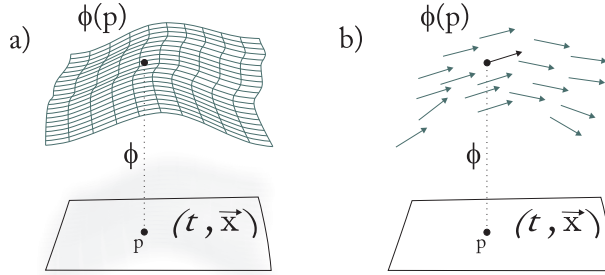


Figura 4.1: a) Campo escalar y b) Campo vectorial

Por otro lado, no podemos considerar únicamente al espaciotiempo, aunque tengamos los elementos para formar un haz fibrado ahí (el espaciotiempo es una variedad diferencial M , dotado de una métrica plana η , para el que se le puede considerar al grupo de estructura $SO(1, 3)$ para construir el haz) pues necesitamos codificar, de alguna manera, la información del campo escalar en el espaciotiempo. Por lo tanto, queda claro que el problema a resolver primero es el de encontrar una estructura geométrica para el campo escalar. Para hacer ésto, veamos primero a los mapeos armónicos.

CAPÍTULO 4. CUANTIZACIÓN TOPOLÓGICA DEL CAMPO ESCALAR LIBRE MASIVO

4.2.2. Mapeos armónicos

La primera persona que definió los mapeos¹ armónicos fue Fuller en un artículo publicado en 1954 [121]. En este trabajo mostró que es posible asignar una cantidad de energía asociada al mapeo cuando el mapeo es, al menos, de segunda clase C^2 . Las variedades entre las que se realiza el mapeo están dotadas, cada una y de manera independiente, de una métrica asociada. Posteriormente Charles Misner, en su trabajo publicado en 1978 [115], explora los mapeos armónicos para encontrar sistemas físicos a los cuales aplicarlos. La idea original de Fuller, que él llama “energía”, es en realidad la funcional de acción S del mapeo armónico.

Formalmente, cuando tenemos dos variedades diferenciales N y M tales que N está dotada de una métrica g y coordenadas locales $x^{a=1\dots n}$, y M con una métrica G y coordenadas locales $X^{\mu=1\dots m}$, y entre ellas existe un mapeo ϕ de clase C^2 , entonces se dice que el mapeo es un mapeo armónico (figura 4.2) si es punto crítico de la acción

$$S = \int d^n x \sqrt{g} g^{ab} \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu G_{\mu\nu}, \quad (4.2)$$

en donde $g = \det(g_{ab})$. Las ecuaciones de movimiento, resultantes de variar esta acción respecto a X^μ , son

¹Por usos y costumbres, llamamos “mapeo” a lo que, formalmente, se le llama “aplicación” en castellano.

**CAPÍTULO 4. CUANTIZACIÓN TOPOLÓGICA DEL
CAMPO ESCALAR LIBRE MASIVO**

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \partial_a (g^{ab} \partial_b X^\mu) + \Gamma_{\nu\gamma}^\mu \partial_a X^\nu \partial_b X^\gamma g^{ab} = 0. \quad (4.3)$$

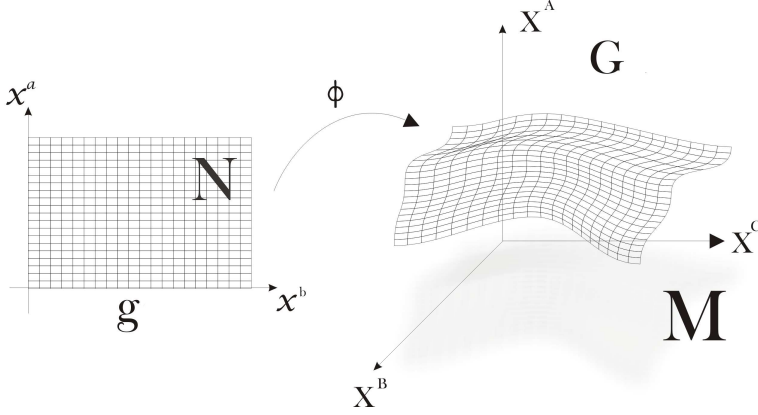


Figura 4.2: Mapeo armónico

Para el caso $\Gamma = 0$ (por ejemplo, si $G_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$), la ecuación anterior se reduce a

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \partial_a (g^{ab} \partial_b X^\mu) = 0,$$

dando lugar a la ecuación para *funciones armónicas* X de donde proviene el nombre del mapeo.

Las métricas, g y G , son independientes entre sí, sin embargo, cuando la métrica g resulta ser la métrica inducida, $g_{ab} = \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu G_{\mu\nu}$, la acción (4.2) se reduce a

CAPÍTULO 4. CUANTIZACIÓN TOPOLÓGICA DEL CAMPO ESCALAR LIBRE MASIVO

$$S = \int d^n x \sqrt{g} g^{ab} \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu G_{\mu\nu} = \int d^n x \sqrt{g} g^{ab} g_{ab} = n \int d^n x \sqrt{g},$$

en donde n es la dimensión de la variedad N , la cual llamaremos espacio origen, y $d^n x \sqrt{g}$ es el elemento de volumen de la hipersuperficie encajada en la variedad M , llamada espacio de fondo.

Algunos resultados conocidos de los mapeos armónicos [122] son:

- Si N , el espacio origen, es \mathbb{R} , *i.e.* ϕ , el mapeo entre N y M es una curva en M , entonces el mapeo armónico es una geodésica de M .
- Si $N = \mathbb{R}^n$, con la métrica euclidiana, entonces es un mapeo armónico sí y sólo si ϕ es una función armónica (*i.e.* es solución a la ecuación de Laplace).
- Toda subvariedad mínima (extremal de la acción) de N en M , es un encaje armónico de N en M .

Lo anterior nos permite evidenciar la analogía geométrica que tienen los mapeos armónicos con el caso de la acción de Maupertuis en los trabajos de la cuantización topológica para sistemas clásicos conservativos con un número finito de grados de libertad [91, 92, 93] en donde ahora, extremizar la acción, equivale, geoméricamente, a extremizar el hipervolumen del encaje.

Ahora, aunque no hemos logrado resolver todavía el problema, podemos ver que la ecuación (4.3) guarda parecido a la ecuación de

CAPÍTULO 4. CUANTIZACIÓN TOPOLÓGICA DEL CAMPO ESCALAR LIBRE MASIVO

movimiento para m campos escalares libres con masa (4.1), ϕ^A . Es decir, el haz fibrado será fácilmente construido si podemos ver al sistema físico como un encaje a un espacio en que los campos $\{X^A\}_{A=1}^m$ toman sus valores. Si esto es así, el problema, entonces, se transforma en encontrar a las métricas g y G , que hacen que las ecuaciones provenientes de minimizar la acción armónica (4.2), correspondan a las del campo escalar libre con masa. Para resolver esto se pueden tomar dos caminos: 1) resolver las ecuaciones de movimiento (4.3) para que sea igual a la ecuación (4.1), o bien, 2) proponer desde el principio a las métricas adecuadas.

Afortunadamente, existe en la literatura un caso en el que tenemos un encaje de una variedad mínima de dos dimensiones en una variedad de diez dimensiones que representa, como un mapeo armónico, a campos escalares libres con masa [123]. Antes de pasar a mostrar este encaje, revisaremos en la siguiente sección lo que son los espaciotiempo tipo ondas planas pues será relevante para la construcción del encaje.

4.2.3. PP-Waves

Los espacios *PP-waves*² (propagación de ondas planas, por sus siglas en inglés) son soluciones exactas a las ecuaciones de Einstein en espacio vacío, *i.e.* $G_{\mu\nu} = 0$, con $G_{\mu\nu}$ el tensor de Einstein. Estas soluciones representan ondas gravitacionales que no se expanden.

En general, las *PP-waves* describen frentes de onda planos con

²La primera parte de la exposición de esta sección está basada en [124], p. 323

CAPÍTULO 4. CUANTIZACIÓN TOPOLÓGICA DEL CAMPO ESCALAR LIBRE MASIVO

rayos paralelos que pueden ser ondas gravitacionales, ondas electromagnéticas, algunas formas de materia o una combinación de estos. Geométricamente, estas ondas quedan descritas por la propiedad de que admiten un campo vectorial constante covariante y nulo, k .

La primera persona que analizó los espaciotiempo del tipo *PP-wave* fue Brinkmann [125, 126] en 1924. En 1959, Peres [127] da una interpretación al trabajo de Brinkmann en términos de ondas gravitacionales. Estas ondas gravitacionales fueron estudiadas originalmente por el propio Einstein [128] y posteriormente por Rosen y Einstein [129, 130]. Rosen concluyó, equivocadamente, que las soluciones de onda no son físicas. Posteriormente, distintos autores [131, 132, 133, 134] analizaron las soluciones de onda plana bajo la consideración de simetría plana, las cuales son una clase particular de *PP-waves*.

El elemento de línea para una onda plana de este tipo, en coordenadas de Rosen y para 4 dimensiones, está dado por

$$ds^2 = -2dudv + g_{ij}dx^i dx^j, \quad i, j = 1, 2.$$

En donde u y v son coordenadas nulas. Bondi, Pirani y Robinson [134] mostraron que la métrica admite un grupo de isometrías de 5 parámetros generados por cinco vectores de Killing y cuya estructura de onda plana gravitacional es equiparable a la estructura de onda plana electromagnética en espacio plano. Esta analogía justifica la interpretación de onda plana gravitacional para estos espacios.

Roger Penrose estudió las soluciones de onda plana y encontró que estos espacios no pueden contener una hipersuperficie global

CAPÍTULO 4. CUANTIZACIÓN TOPOLÓGICA DEL CAMPO ESCALAR LIBRE MASIVO

de Cauchy [135], lo que implica que no es posible fijar condiciones iniciales para la onda plana en cualquier hipersuperficie global tipo espacio. Esto implica que tal hipersuperficie debe estar completamente en el pasado o en el futuro del cono de luz de un punto sobre la superficie que está sobre el espaciotiempo.

Posteriormente, el mismo Penrose encuentra que cualquier espaciotiempo tiene un espaciotiempo de onda plana en el límite [136]. La idea surge al considerar el concepto de espacio tangente en un punto p sobre una variedad M . Intuitivamente, uno puede imaginarse vecindades cada vez más pequeñas de p en M que pueden expandirse por factores cada vez más grandes. En el límite, lo que se obtiene es el espacio tangente T_p sobre M en el punto p . Al aplicar el procedimiento correspondiente a cualquier geodésica nula γ propiamente encajada en cualquier espacio tiempo, lo que resulta en el límite es justamente un espacio curvo de onda plana.

La interpretación física de este procedimiento fue descrita por el mismo Penrose [136]:

Hay una interpretación 'física' del procedimiento matemático descrito arriba, la cual es la siguiente. Imaginemos una sucesión de observadores viajando en el espaciotiempo M , cuyas líneas de mundo se aproximan a la geodésica nula γ cada vez más cerca de ella. Así podemos pensar que estos observadores están viajando a velocidades cada vez más grandes, aproximándose a la de la luz. Mientras su velocidad aumenta, los observadores deben recalibrar sus

CAPÍTULO 4. CUANTIZACIÓN TOPOLÓGICA DEL CAMPO ESCALAR LIBRE MASIVO

relojes de manera correspondiente para que corran cada vez más rápido (suponiendo que todas las medidas del espaciotiempo están referidas a medidas de relojes de la manera estándar), así, en el límite, la medición de los relojes miden al parámetro afín x^0 a lo largo de γ . (Sin la recalibración de relojes podría resultar en una métrica degenerada.) En el límite, los observadores miden el espaciotiempo con una estructura de onda plana.

En 2002, Blau, Figueroa, Hull y Papadopoulos [137] mostraron, en particular, que los espacios máximamente supersimétricos *Hpp-wave* (propagación de ondas planas homogéneas, por sus siglas en inglés) pueden obtenerse a partir del procedimiento límite de Penrose aplicado al fondo gravitacional $\text{AdS}_5 \times S^5$ que es solución de la teoría de supercuerdas IIB en 10 dimensiones. En estas teorías de supergravedad existen otros campos además de la métrica, tales como el dilatón Φ y potenciales de norma o p -formas A_p que generan un campo de fuerza $F_{p+1} = dA_p$ que es invariante ante transformaciones de norma.

La métrica que se obtiene, con el procedimiento límite de Penrose y en coordenadas de Brinkmann, toma la forma

$$ds^2 = 2dx^+ dx^- + \left(\sum_{i,j=1}^8 H_{ij}(x^+) (x^i x^j) \right) (dx^+)^2 + \sum_{i=1}^8 dx^i dx^j, \quad (4.4)$$

donde $H_{ij}(x^+)$ son constantes y x^+ y x^- son las coordenadas del cono

CAPÍTULO 4. CUANTIZACIÓN TOPOLÓGICA DEL CAMPO ESCALAR LIBRE MASIVO

de luz.

La solución particular a la métrica (4.4) para que resulte en un espaciotiempo de onda plana es lo que emplearemos en las siguientes secciones para calcular el espectro topológico de los campos bosónicos y fermiónicos.

4.2.4. Métrica de fondo y métrica de origen para el campo bosónico libre con masa

Vamos a mostrar cómo se describen como un mapeo armónico ocho campos bosónicos con masa que no interactúan.

Tomemos a N como la variedad 2-dimensional, parametrizada por τ y σ , dotada de la métrica $g_{ab} = \eta_{ab}$ (la métrica de Minkowski), y a M como una variedad 10-dimensional, parametrizada por X^A , $A = 1, \dots, 10$. Elijamos la parametrización del cono de luz, es decir, X^+ y X^- como las coordenadas que describen al cono de luz (3.9)³, como se hizo en la sección 3.3, tal que $X^+ = \alpha' p^+ \tau$ con α' y $p^+ > 0$ constantes. Definamos a la métrica G_{AB} como

³Recordemos que las coordenadas del cono de luz X^+ y X^- son la combinación lineal entre la coordenada temporal y alguna coordenada espacial, usualmente la coordenada X^1 , de la siguiente manera

$$\begin{aligned} X^+ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(X^0 + X^1) \\ X^- &= \frac{1}{\sqrt{2}}(X^0 - X^1). \end{aligned}$$

CAPÍTULO 4. CUANTIZACIÓN TOPOLÓGICA DEL CAMPO ESCALAR LIBRE MASIVO

$$ds^2 = -2 dX^+ dX^- - \mu^2 \left(\sum_{I=1}^8 X^I X_I \right) (dX^+)^2 + \sum_{I=1}^8 dX^I dX^I, \quad (4.5)$$

en donde el índice A ahora corre sobre $+, -, 1, \dots, 8$ y donde I nos indica las coordenadas espaciales, $I = 1, \dots, 8$ ($ds^2 = G_{\mu\nu} dX^\mu dX^\nu$). Esta métrica es la de una *PP-wave* en 10 dimensiones con $\mu = \text{constante}$ (4.4).

En este caso, donde el encaje es 2-dimensional, a la acción (4.2) se le conoce como acción de Polyakov y a la superficie encajada, hoja de mundo.

Ahora, sustituyendo los valores $G_{\mu\nu}$, de la ecuación (4.5), en la acción del mapeo armónico (4.2), tenemos

$$S = \frac{1}{4\pi\alpha'} \int d^2\sigma g^{ab} (-\partial_a X^+ \partial_b X^- - \partial_a X^- \partial_b X^+ - \mu^2 X_I^2 \partial_a X^+ \partial_b X^+ + \partial_a X^I \partial_b X^I) \quad (4.6)$$

donde el factor $\frac{1}{4\pi\alpha'}$ aparece para hacer coincidir las unidades.

Al hacer la variación de la acción respecto a la métrica g_{ab} y tomar

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta g_{\tau\sigma}} = 0, \quad \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta g_{\tau\tau}} = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta g_{\sigma\sigma}} = 0.$$

Encontramos las constricciones para $\partial_a X^-$,

CAPÍTULO 4. CUANTIZACIÓN TOPOLÓGICA DEL CAMPO ESCALAR LIBRE MASIVO

$$\partial_\sigma X^- = \frac{1}{2\alpha p^+} \partial_\sigma X^I \partial_\tau X^I$$

$$\begin{aligned} \partial_\tau X^- = \frac{1}{2\alpha p^+} [\partial_\tau X^I \partial_\tau X^I + \partial_\sigma X^I \partial_\sigma X^I \\ - (\mu\alpha' p^+)^2 X^I X^I] \end{aligned}$$

en donde se ha considerado que $\partial_\tau X^+ = \alpha' p^+$ y $\partial_\sigma X^+ = 0$. Lo que nos indica que, tanto X^+ como X^- , no son variables dinámicas del sistema, por lo que la acción (4.6) no depende, realmente, de estas variables y, por lo tanto, debemos omitir al primer término no dinámico ($\partial_a X^+ \partial_b X^-$) y sustituir el valor de $\partial_\tau X^+ = \alpha' p^+$ en los términos de la acción. De esta manera, la ecuación (4.6), al hacer un reescalamiento en τ y σ por $\alpha' p^+$ y considerar las condiciones periódicas para σ , se reescribe como

$$S = \frac{1}{4\pi\alpha'} \int d\tau \int_0^{2\pi\alpha' p^+} d\sigma [\partial_\tau X^I \partial_\tau X^I - \mu^2 X_I^2 - \partial_\sigma X^I \partial_\sigma X^I], \quad (4.7)$$

que resulta ser la acción para ocho campos bosónicos X^I libres con masa μ .

De esta forma hemos mostrado un mapeo armónico entre N y M que reproduce la acción del sistema que buscamos y que contiene toda la información geométrica necesaria para aplicar el formalismo de la cuantización topológica.

4.3. Cuantización topológica para la métrica de fondo $G_{\mu\nu}$

4.3.1. Cuantización Topológica Intrínseca

Revisemos el formalismo indicado en el capítulo 2. Lo primero que hacemos es escribir a las componentes de la conexión en términos de una base de uno-formas semi-ortonormales e_μ^a (ecuación 2.1) que satisfacen:

$$\begin{aligned} e_\mu^a g^{\mu\nu} e_\nu^b &= \eta^{ab} \\ e_\mu^a e_a^\nu &= \delta_\mu^\nu, \end{aligned} \quad (4.8)$$

donde $a = 1, \dots, m$ es el índice de la base semi-ortonormal, $\mu = 0, \dots, m$ es el índice de las coordenadas locales de M y m es la dimensión de la variedad M .

A partir de la base semi-ortonormal, las componentes de la conexión de espín (2.1) las podemos obtener vía los símbolos de Christoffel

$$\Gamma_{\nu\gamma}^\mu = \frac{1}{2} G^{\mu\delta} (\partial_\nu G_{\delta\gamma} + \partial_\gamma G_{\delta\nu} - \partial_\delta G_{\nu\gamma}), \quad (4.9)$$

aplicando la transformación

$$(\omega^{ab})_\mu = e_\nu^a \partial_\mu e_b^\nu + e_\nu^a \Gamma_{\mu\gamma}^\nu e_b^\gamma,$$

o bien, alternativamente, las componentes de la conexión de espín puede ser calculada a partir de la base semi-ortonormal, sin necesidad

CAPÍTULO 4. CUANTIZACIÓN TOPOLÓGICA DEL CAMPO ESCALAR LIBRE MASIVO

de hacer uso de los símbolos de Christoffel, por medio de la relación

$$(\omega^{ab})_\mu = \frac{1}{2}[e^{a\nu}(\partial_\mu e_\nu^b - \partial_\nu e_\mu^b) - e^{b\nu}(\partial_\mu e_\nu^a - \partial_\nu e_\mu^a) + e^{a\gamma}e^{b\nu}e_{\mu s}(\partial_\nu e_\gamma^s - \partial_\gamma e_\mu^s)], \quad (4.10)$$

las ecuaciones (4.9) y (4.10) son equivalentes y aquí se presentan las dos por motivos de claridad en el cálculo. Los índices de la base semi-ortonormal se transforman con la métrica plana: $(\omega_b^a)_\mu = \eta_{bc}(\omega^{ac})_\mu$ [138].

El siguiente paso es obtener la 2-forma de curvatura

$$R_b^a = \frac{1}{2}R_{b\mu\nu}^a dX^\mu \wedge dX^\nu$$

que, en términos de la conexión de espín, se expresa como

$$R_{b\mu\nu}^a = \partial_\mu \omega_{b\nu}^a - \partial_\nu \omega_{b\mu}^a + \omega_{c\mu}^a \omega_{b\nu}^c - \omega_{c\nu}^a \omega_{b\mu}^c. \quad (4.11)$$

para, posteriormente, obtener con esto el invariante topológico de Euler [103]

$$\frac{1}{2}e(M) = \frac{(-1)^k}{2^{2k} \pi^k k!} \epsilon_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{2k}} R_{\alpha_2}^{\alpha_1} \wedge R_{\alpha_4}^{\alpha_3} \dots R_{\alpha_{2k}}^{\alpha_{2k-1}} \quad (4.12)$$

donde $\epsilon_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{2k}}$ es el tensor de Levi-Civita y $2k = m$, donde m es la dimensión de la variedad.

CAPÍTULO 4. CUANTIZACIÓN TOPOLÓGICA DEL CAMPO ESCALAR LIBRE MASIVO

Finalmente, la generalización del teorema de Gauss-Bonnet nos dice que el invariante topológico de Euler está dado por

$$\int_M e(M) = \xi(M), \quad \xi(M) \in \mathbb{Z}, \quad (4.13)$$

con el que obtendremos las condiciones de cuantización de los parámetros de la métrica para posteriormente analizar el sentido físico de estas condiciones de cuantización.

4.3.2. Aplicación de la Cuantización Topológica

Consideremos al espacio de fondo M de 10 dimensiones, con coordenadas $\{X^I\}$, $I = +, -, 1, \dots, 8$, dotado de la métrica

$$\begin{aligned} G_{-+} = G_{+-} &= -1, & G_{++} &= \mu^2 \sum_{I=1}^8 X_I X^I, \\ G_{IJ} &= \delta_{IJ}, & I, J &= 1, \dots, 8, \end{aligned} \quad (4.14)$$

donde μ es un parámetro constante que se puede interpretar como la masa en la ecuación (4.7). Tomemos también al grupo $SO(1, 9)$ como el grupo de estructura. La conexión ω la podemos calcular a partir de la métrica (4.14), como se indica en el capítulo 2.

Una base semi-ortonormal para este fondo es

CAPÍTULO 4. CUANTIZACIÓN TOPOLÓGICA DEL CAMPO ESCALAR LIBRE MASIVO

$$\frac{1}{2}e^a = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{\mu X^I X_I} & 0 & \cdots & 0 \\ \mu X^I X_I & -\frac{1}{\mu X^I X_I} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & & 1 \end{pmatrix} \quad (4.15)$$

Una rápida inspección a la ecuación (4.10) nos permite darnos cuenta de que los términos donde aparecen las parciales de la base semi-ortonormal para este fondo son nulas. Esto implica que

$$\frac{1}{2}(\omega_b^a)_\mu = 0 \quad (4.16)$$

para todas sus entradas, lo que implica, inmediatamente, que la forma de Euler también se anula,

$$e(M) = 0. \quad (4.17)$$

Lo anterior implica que el haz fibrado que construimos no presenta discretización para el parámetro de la métrica μ , el cual es el único parámetro en la métrica que es susceptible a tener algún comportamiento discreto. Es decir, el haz fibrado que construimos resulta ser un haz fibrado con topología trivial para este caso y no es posible encontrar relaciones discretas en esta configuración geométrica.

Por otro lado, como ya se mencionó, la métrica (4.14) forma parte de una solución completa para las ecuaciones de movimiento para Supergravedad IIB en un fondo gravitacional *PP-wave* [136, 139, 140].

CAPÍTULO 4. CUANTIZACIÓN TOPOLÓGICA DEL CAMPO ESCALAR LIBRE MASIVO

Esto quiere decir que para la misma variedad base M , tenemos un campo de norma que nos permite construir otro haz fibrado principal para el cual aplicar el formalismo de la cuantización canónica.

La solución completa contiene, además de la métrica (4.14), una 5-forma

$$F_{+1234} = F_{+5678} = 2\mu \quad (4.18)$$

y un campo dilatónico constante

$$\phi = cte. \quad (4.19)$$

Esto nos permite considerar a la 5-forma como una interacción del tipo electromagnético. De esta manera, el parámetro μ está sujeto a la discretización tipo Dirac [141, 142, 143], por medio de la 5-forma, al aplicársele la cuantización topológica inducida, análogamente a lo que se hizo con el monopolo magnético en donde la fibra está dada por $U(n)$,

$$\mu = \phi \sqrt{n(\pi/2)}, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (4.20)$$

Esta ecuación nos da las condiciones de discretización para el parámetro de la métrica μ en términos del valor constante del dilatón.

De esta manera observamos que el haz fibrado con grupo de estructura $SO(N)$ no presenta condiciones discretas para los parámetros físicos (4.17), en cambio, el haz fibrado con grupo de estructura $U(n)$ presenta un espectro discreto para μ (4.20).

**CAPÍTULO 4. CUANTIZACIÓN TOPOLÓGICA DEL
CAMPO ESCALAR LIBRE MASIVO**

4.4. Cuantización topológica de la métrica inducida h

Gracias a que el sistema físico que estamos estudiando proviene de un mapeo armónico de dimensión mayor a uno, existen diferentes métricas con las cuales construir haces fibrados a los cuales aplicarles el formalismo de la cuantización topológica (figura 4.3):

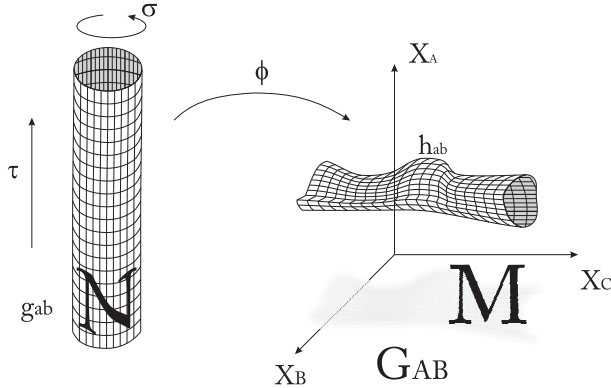


Figura 4.3: Mapeo armónico de un espacio dos-dimensional N , dotado de una métrica g_{ab} , en el espacio de campos M , con métrica G_{AB} y la métrica inducida por el encaje, h_{ab} .

- La métrica de fondo $G_{\mu\nu}$,
- La métrica de la hoja de mundo g_{ab} ,
- La métrica inducida $h_{ab} = G_{\mu\nu} \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu$.

La métrica de fondo fue tratada en la sección 4.3. La métrica de la hoja de mundo g_{ab} es una métrica en donde los coeficientes no

CAPÍTULO 4. CUANTIZACIÓN TOPOLÓGICA DEL CAMPO ESCALAR LIBRE MASIVO

tienen parámetros con información física y, por lo tanto, su cuantización topológica arroja el resultado trivial para el espectro topológico $f(a_i) = 0$, en donde a_i son los parámetros de la métrica.

La métrica inducida es aquella estructura que nos permite relacionar distancias sobre la hoja de mundo a partir del espacio de fondo X^μ y está dada por la expresión

$$h_{ab} = \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu G_{\mu\nu}$$

donde, en nuestro caso, $\{a, b\} = \{\tau, \sigma\}$ y G_{AB} , $A, B = 1, \dots, 8$, es la métrica de fondo (4.14), por lo que la métrica inducida \mathbf{h} queda,

$$h = f^2 \eta = f^2 \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (4.21)$$

donde $f^2 = \sum_{I=1}^8 \partial_\sigma X^I \partial_\sigma X^I$.

Al ser una variedad dos-dimensional con invarianza ante reparametrizaciones de la hoja de mundo, tenemos al grupo de estructura $SO(1, 1)$ y a ω , la conexión de espín compatible con la métrica.

Al aplicar el formalismo de la cuantización topológica a este haz fibrado se encuentra que, el invariante de Euler (4.13), queda expresado como

$$e(TM) = -\frac{1}{2\pi} \epsilon_\mu^\nu \mathbf{R}_\nu^\mu, \quad (4.22)$$

donde ϵ_μ^ν es el tensor de Levi-Civita y \mathbf{R}_ν^μ es la dos-forma de curvatura $R_{\nu ab}^\mu d\sigma^a \wedge d\sigma^b$, cuyas componentes están dadas por la ecuación (4.11).

CAPÍTULO 4. CUANTIZACIÓN TOPOLÓGICA DEL CAMPO ESCALAR LIBRE MASIVO

Al utilizar las componentes de la métrica inducida en la ecuación para el invariante de Euler (4.22), queda

$$\int e(M) = \frac{1}{2\pi} \int \frac{1}{2} \left[\partial_\sigma \left(\frac{\partial_\sigma f}{f} \right) - \partial_\tau \left(\frac{\partial_\tau f}{f} \right) \right].$$

Por lo tanto, para calcular la integración del invariante de Euler necesitamos conocer la forma explícita del factor conforme f , el cual está dado en términos de los campos bosónicos X^I . Tenemos, entonces, que resolver las ecuaciones de movimiento que salen de la variación de la acción (4.7) respecto a los campos X^I

$$(\partial_\tau^2 - \partial_\sigma^2 - \mu^2)X^I = 0, \quad (4.23)$$

considerando las condiciones de frontera,

$$X^I(\sigma + 2\pi\alpha' p^+) = X^I(\sigma). \quad (4.24)$$

De hecho X^\pm satisfacen la misma condición de frontera, en particular, de $X^+ = \alpha' p^+ \tau$ es evidente que X^+ satisface esta condición.

Las soluciones más generales a las ecuaciones (4.23), con condiciones (4.24), son

$$\begin{aligned} X^I = & x_0^I \cos \mu \tau + \frac{p_0^I}{\mu p^+} \sin \mu \tau + \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\omega_n}} \left[\alpha_n^I e^{\frac{-i}{\alpha' p^+} (\omega_n \tau + n \sigma)} \right. \\ & \left. + \tilde{\alpha}_n^I e^{\frac{-i}{\alpha' p^+} (\omega_n \tau - n \sigma)} + \alpha_n^{\dagger I} e^{\frac{+i}{\alpha' p^+} (\omega_n \tau + n \sigma)} + \tilde{\alpha}_n^{\dagger I} e^{\frac{+i}{\alpha' p^+} (\omega_n \tau - n \sigma)} \right], \quad (4.25) \end{aligned}$$

CAPÍTULO 4. CUANTIZACIÓN TOPOLÓGICA DEL CAMPO ESCALAR LIBRE MASIVO

en donde

$$\omega_n = \sqrt{n^2 + (\mu\alpha'p^+)^2}, \quad n \geq 0,$$

y α y $\tilde{\alpha}$ son los modos de movimiento derechos e izquierdos, respectivamente.

De esta manera, resulta que los valores que asignemos a los modos de oscilación α y $\tilde{\alpha}$ son los que determinan al invariante de Euler $e(TM)$ y, por lo tanto, a su integral sobre la hoja de mundo M

$$\int_M e(TM) = \chi_{TM},$$

donde $\chi_{TM} = \chi_{TM}(\alpha, \tilde{\alpha})$ es función de estos modos y frecuencias.

Debido a que la hoja de mundo M no es compacta, debemos de considerar una región finita de ésta, así como la contribución de la frontera de esta región finita al valor del invariante de Euler. Para variedades M_F con frontera ∂M_F , el invariante, derivado de la relación de Gauss-Bonnet, es

$$\chi_{TM} = \int_{M_F} e(TM) + \frac{1}{2\pi} \int_{\partial M_F} \kappa ds, \quad (4.26)$$

donde κ es la curvatura geodésica de la frontera y ds es la longitud de arco propia a lo largo de ésta.

CAPÍTULO 4. CUANTIZACIÓN TOPOLÓGICA DEL CAMPO ESCALAR LIBRE MASIVO

4.4.1. Espectro topológico para configuraciones específicas

Ahora podemos proceder a calcular la forma explícita de

$$\chi_{TM}(\alpha, \tilde{\alpha}) \in \mathbb{Z},$$

extraer el espectro topológico y analizar el contenido físico.

Aunque parezca natural intentar integrar la ecuación (4.23) en su expresión más general sobre M , hay que notar que esto implica manejar sumas infinitas de infinitos números de modos de oscilación, haciendo que la integración represente un problema técnico mayor. En lugar de intentar lo anterior, tomaremos los casos más sencillos que son las configuraciones que podemos resolver de manera exacta e intentaremos obtener los espectros topológicos para configuraciones particulares de los campos.

El primer caso, de lo más sencillo a lo más complejo, es considerar las soluciones (4.25) con el menor número de coeficientes distintos de cero que resulten en un valor no trivial para $\chi_{TM}(\alpha, \tilde{\alpha})$. Tomemos el caso con sólo los modos α_1^1 y $\tilde{\alpha}_1^2$ distintos de cero, tal que los demás campos $X^{i \neq \{1,2\}}$ describen, a lo más, el movimiento de su centro de masas $X^i = x_0^i \cos(\mu\tau) + \frac{p_0^i}{\mu p^+} \sin(\mu\tau)$, mientras que X^1 y X^2 son

CAPÍTULO 4. CUANTIZACIÓN TOPOLÓGICA DEL CAMPO ESCALAR LIBRE MASIVO

$$\begin{aligned}
 X^1 &= x_0^1 \cos(\mu\tau) + \frac{p_0^1}{\mu p^+} \sin(\mu\tau) + \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \frac{2r}{\sqrt{\omega_1}} \cos \left[\frac{1}{\alpha' p^+} (\omega_1 \tau + \sigma) + \gamma \right], \\
 X^2 &= x_0^2 \cos(\mu\tau) + \frac{p_0^2}{\mu p^+} \sin(\mu\tau) + \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \frac{2\tilde{r}}{\sqrt{\omega_1}} \cos \left[\frac{1}{\alpha' p^+} (\omega_1 \tau - \sigma) + \tilde{\gamma} \right].
 \end{aligned} \tag{4.27}$$

La forma de Euler para esta configuración de campos es

$$\begin{aligned}
 e(M) &= \left\{ r^2 \tilde{r}^2 \left[(\omega_1^2 - 1) \cos 2 \left(\frac{\omega_1 \tau + \sigma}{\alpha' p^+} + \gamma \right) - \cos 2 \left(\frac{\omega_1 \tau - \sigma}{\alpha' p^+} + \tilde{\gamma} \right) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \omega_1^2 \cos 2 \left(\frac{\omega_1 \tau - \sigma}{\alpha' p^+} + \tilde{\gamma} \right) - 2\omega_1^2 \cos \left(2(\gamma - \tilde{\gamma}) + \frac{4\sigma}{\alpha' p^+} \right) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + 2 \cos \left(2(\gamma + \tilde{\gamma}) + \frac{4\omega_1 \tau}{\alpha' p^+} \right) \right] - 2r^4 (\omega_1^2 - 1) \sin^2 \left(\frac{\omega_1 \tau + \sigma}{\alpha' p^+} + \gamma \right) \right. \\
 &\quad \left. - 2\tilde{r}^4 (\omega_1^2 - 1) \sin^2 \left(\frac{\omega_1 \tau - \sigma}{\alpha' p^+} + \tilde{\gamma} \right) \right\} \\
 &\quad \div \left\{ 4\pi (\alpha' p^+)^2 \left[r^2 \sin^2 \left(\frac{\omega_1 \tau + \sigma}{\alpha' p^+} + \gamma \right) + \tilde{r}^2 \sin^2 \left(\frac{\omega_1 \tau - \sigma}{\alpha' p^+} + \tilde{\gamma} \right) \right]^2 \right\} \\
 &\quad d\tau \wedge d\sigma.
 \end{aligned}$$

como en el caso de la cuerda bosónica, hemos tomado la expresión polar para los coeficientes de los modos de oscilación, $\alpha_1^1 = r e^{-i\gamma}$ y $\tilde{\alpha}_1^2 = \tilde{r} e^{-i\tilde{\gamma}}$.

Para calcular a χ_{TM} sin tener que preocuparnos por los posibles términos de frontera que aparezcan al considerar una región finita M_F de la variedad M , notemos que la métrica inducida es periódica

CAPÍTULO 4. CUANTIZACIÓN TOPOLÓGICA DEL CAMPO ESCALAR LIBRE MASIVO

en τ y esto implica que también lo sea la curvatura geodésica κ . Al considerar M_F cubierta por un número entero de períodos tenemos que un extremo en τ cancelará de manera exacta la contribución del otro extremo pues los valores de κ son iguales en cada extremo pero con orientación opuesta en la frontera. De esta manera, considerando que M_F cubre exactamente un período, el espectro topológico (4.26) se reduce a

$$\int_{M_F} e(TM) \in \mathbb{Z}. \quad (4.28)$$

Para realizar la integración de esta expresión sobre M_F , tomamos el cambio de variables (ver apéndice C),

$$x = \sin\left(\frac{\omega_1\tau + \sigma}{\alpha'p^+} + \gamma\right) \quad y = \sin\left(\frac{\omega_1\tau - \sigma}{\alpha'p^+} + \tilde{\gamma}\right),$$

en términos de las cuales, la forma de Euler se escribe como

$$e(TM) = \left(\frac{r^4x^2(\omega_1^2 - 1) + \tilde{r}^4y^2(\omega_1^2 - 1) + r^2\tilde{r}^2x^2(4y^2 - 1)(\omega_1^2 - 1)}{4\pi\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}\omega_1(r^2x^2 + \tilde{r}^2y^2)^2} - \frac{r^2\tilde{r}^2[y^2(\omega_1^2 - 1) + 4xy\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}(\omega_1^2 + 1)]}{4\pi\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}\omega_1(r^2x^2 + \tilde{r}^2y^2)^2} \right) dx \wedge dy.$$

La integral de la forma de Euler depende del orden de integración, de hecho, si integramos primero con respecto a x y después con respecto a y , obtenemos en este caso

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 e(TM) dx dy = \frac{(1 - \omega_1^2) r}{2\omega_1 \tilde{r}}, \quad (4.29)$$

CAPÍTULO 4. CUANTIZACIÓN TOPOLÓGICA DEL CAMPO ESCALAR LIBRE MASIVO

mientras que, en el orden inverso, obtenemos

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 e(TM) dy dx = \frac{(1 - \omega_1^2) \tilde{r}}{2\omega_1 r}. \quad (4.30)$$

Esta no-conmutatividad en el orden de integración se debe a los puntos singulares que hay en el interior de la región de integración, por lo tanto, para garantizar la existencia de tales integrales, se hace necesario definir alguna vecindad $B_\epsilon(p_0)$ de radio ϵ alrededor de los puntos singulares p_0 e integrar sobre la región $M_F - B_\epsilon(p_0)$, sumando la contribución debida a la integral de la curvatura geodésica κ sobre la frontera $\partial B_\epsilon(p_0)$ de la vecindad $B_\epsilon(p_0)$ y tomar el límite $\epsilon \rightarrow 0$.

Después de realizar el procedimiento anterior, encontramos que el invariante, de hecho, corresponde al valor medio entre la suma de las dos clases características de Euler (4.29) y (4.30), es decir

$$\begin{aligned} \chi_{TM} &= \frac{1}{2} \left(\int_M e(TM) dx dy + \int_M e(TM) dy dx \right) \\ &= \frac{(\alpha' p^+ \mu)^2}{4\omega_1} \left(\frac{r}{\tilde{r}} + \frac{\tilde{r}}{r} \right). \end{aligned} \quad (4.31)$$

Para probar la consistencia del resultado (4.31), realizamos las correspondientes integraciones de forma numérica: integrando sobre la región M_F e integrando sobre la frontera $\partial B_\epsilon(p_0)$ y sumando el resultado de cada una. Debido a que es una integración numérica, es necesario verificar la convergencia de la integral. Para esto realizamos la integración numérica para valores fijos de r y \tilde{r} , con ϵ yendo desde 0.01 hasta 10^{-6} . Lo anterior nos confirmó la convergencia de la

CAPÍTULO 4. CUANTIZACIÓN TOPOLÓGICA DEL CAMPO ESCALAR LIBRE MASIVO

integración alrededor de las singularidades al aproximar la región de integración a los puntos singulares. Como un ejemplo de este proceso de verificación, mostramos en la figura 4.4 el valor de la suma de las integrales como función de ϵ para $r = \tilde{r} = 1$. En la figura 4.5 se muestra la derivada, respecto a ϵ , de la función mostrada en la figura 4.4 en donde es claro el comportamiento convergente de la integral del invariante de Euler.

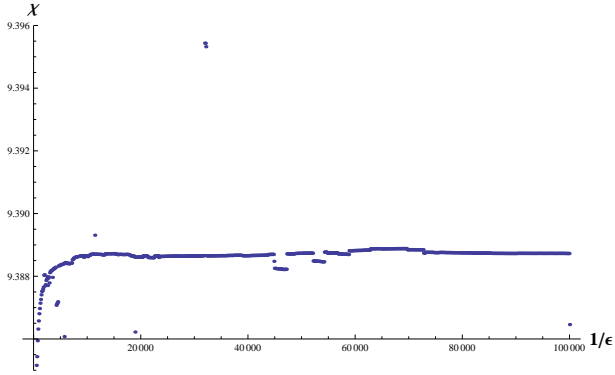


Figura 4.4: Gráfica del invariante de Euler $N[\chi_{TM}](r, \tilde{r})$ utilizando el método numérico mencionado en el texto y con $r = \tilde{r} = 1$, $\omega_1 = 2$, $p^+ = 1$ y $\alpha' = 1$

En la figura 4.6 mostramos la gráfica para el invariante de Euler χ_{TM} como función de r y \tilde{r} calculado utilizando (a) la expresión analítica (4.31) y (b) el método numérico de integración para $\epsilon = 0,001$.

De la figura 4.6, podemos ver que el comportamiento de ambas gráficas es muy similar, módulo el error numérico introducido por $\epsilon \neq 0$.

CAPÍTULO 4. CUANTIZACIÓN TOPOLÓGICA DEL CAMPO ESCALAR LIBRE MASIVO

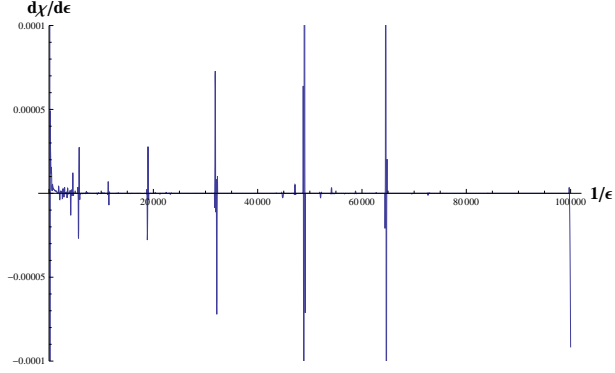


Figura 4.5: Gráfica de la derivada del invariante de Euler $N[\chi_{TM}](r, \tilde{r})$ como función de ϵ , tomando $r = \tilde{r} = 1$, $\omega_1 = 2$, $p^+ = 1$ y $\alpha' = 1$

Con esto estamos listos para aplicar el teorema de Gauss-Bonnet a la ecuación (4.31), es decir, $\chi_{TM} = k \in \mathbb{Z}$, y obtener la condición de cuantización que se puede escribir como

$$r = \frac{1}{(\alpha' p^+ \mu)^2} \left(2\omega_1 k \pm \sqrt{(2\omega_1 k)^2 - (\alpha' p^+ \mu)^4} \right) \tilde{r}. \quad (4.32)$$

De esta relación observamos que, para una masa μ del campo bosónico, la razón entre las amplitudes r/\tilde{r} no es arbitraria sino que únicamente puede tomar valores discretos que dependen del entero k .

Una vez que hemos entendido cómo calcular el invariante de Euler, podemos considerar una pareja de modos arbitrarios, derecho α_m^1 e izquierdo $\tilde{\alpha}_n^2$, para los campos X^1 y X^2 , respectivamente,

CAPÍTULO 4. CUANTIZACIÓN TOPOLÓGICA DEL CAMPO ESCALAR LIBRE MASIVO

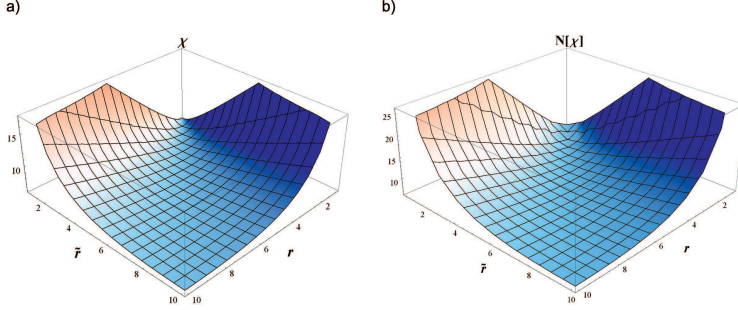


Figura 4.6: Gráfica del invariante de Euler $\chi_{TM}(r, \tilde{r})$ calculada usando **a)** la expresión (4.31) y **b)** el método numérico descrito en el texto con $\omega_1 = 2$, $p^+ = 1$ y $\alpha' = 1$

$$\begin{aligned}
 X^1 &= x_0^1 \cos(\mu\tau) + \frac{p_0^1}{\mu p^+} \sin(\mu\tau) \\
 &\quad + \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \frac{2r_m}{\sqrt{\omega_m}} \cos\left[\frac{1}{\alpha' p^+} (\omega_m \tau + m\sigma) + \gamma_m\right], \\
 X^2 &= x_0^2 \cos(\mu\tau) + \frac{p_0^2}{\mu p^+} \sin(\mu\tau) \\
 &\quad + \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \frac{2\tilde{r}_n}{\sqrt{\omega_n}} \cos\left[\frac{1}{\alpha' p^+} (\omega_n \tau - n\sigma) + \tilde{\gamma}_n\right]. \quad (4.33)
 \end{aligned}$$

Ahora, siguiendo la definición de espectro topológico dada en la ecuación (4.31), se obtiene

CAPÍTULO 4. CUANTIZACIÓN TOPOLÓGICA DEL CAMPO ESCALAR LIBRE MASIVO

$$\chi_{TM} = \frac{(\alpha' p^+ \mu)^2}{2(n\omega_m + m\omega_n)} \left(\frac{m\sqrt{\omega_n} r_m}{n\sqrt{\omega_m} \tilde{r}_n} + \frac{n\sqrt{\omega_m} \tilde{r}_n}{m\sqrt{\omega_n} r_m} \right) = k,$$

donde $k \in \mathbb{Z}$. A partir de esta ecuación, la condición de cuantización puede expresarse como

$$r_m = \frac{1}{(\alpha' p^+ \mu)^2} \left[(n\omega_m + m\omega_n)k \pm \sqrt{(n\omega_m + m\omega_n)^2 k^2 - (\alpha' p^+ \mu)^4} \right] \times \left(\frac{n\sqrt{\omega_m}}{m\sqrt{\omega_n}} \right) \tilde{r}_n. \quad (4.34)$$

Este espectro topológico es la generalización del espectro dado en (4.32) y nos indica que la razón r_m/\tilde{r}_n es discreta para cada m y n fijos. Podemos decir también que si fijamos una de las amplitudes de los modos, \tilde{r}_n por ejemplo, entonces r_m puede adquirir únicamente valores discretos. Este comportamiento discreto se ilustra en la figura 4.7.

Otro caso que podemos analizar es cuando tenemos únicamente dos modos excitados con amplitudes α_m^1 y $\tilde{\alpha}_n^1$ sobre un único campo X^1 . La solución en este caso es

CAPÍTULO 4. CUANTIZACIÓN TOPOLÓGICA DEL CAMPO ESCALAR LIBRE MASIVO

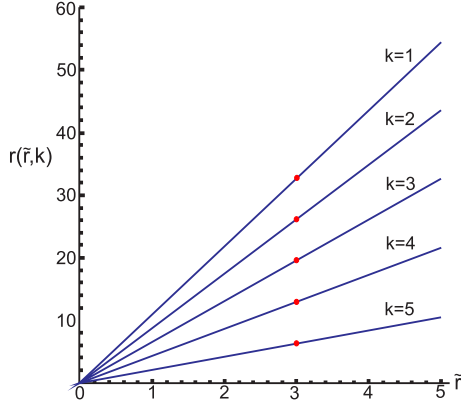


Figura 4.7: Gráfica de r_m contra \tilde{r}_n de la ecuación (4.34) para $n = 1$, $m = 3$, $\mu = 2$, $\alpha' = 1$, $p^+ = 1$ y $k = 1, \dots, 5$. Los puntos rojos indican los posibles valores de r_m considerando $\tilde{r}_n = 3$.

$$\begin{aligned}
 X^1 = & x_0^1 \cos(\mu\tau) + \frac{p_0^1}{\mu p^+} \sin(\mu\tau) \\
 & + \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \frac{2r_m}{\sqrt{\omega_m}} \cos \left[\frac{1}{\alpha' p^+} (\omega_m \tau + m\sigma) + \gamma_m \right] \\
 & + \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \frac{2\tilde{r}_n}{\sqrt{\omega_n}} \cos \left[\frac{1}{\alpha' p^+} (\omega_n \tau - n\sigma) + \tilde{\gamma}_n \right], \quad (4.35)
 \end{aligned}$$

donde, como en los casos anteriores, los campos $X^{i \neq 1}$ describen, a lo más, su centro de masa. El cálculo del invariante de Euler se hace directamente, siguiendo el procedimiento descrito anteriormente, y se llega a

CAPÍTULO 4. CUANTIZACIÓN TOPOLÓGICA DEL CAMPO ESCALAR LIBRE MASIVO

$$\begin{aligned} \chi_{TM} &= \frac{4(nm + \omega_m \omega_n)}{\pi(n\omega_m + m\omega_n)} \left[\operatorname{arctanh} \left(\frac{m\sqrt{\omega_n} r_m}{n\sqrt{\omega_m} \tilde{r}_n} \right) + \operatorname{arctanh} \left(\frac{n\sqrt{\omega_m} \tilde{r}_n}{m\sqrt{\omega_n} r_m} \right) \right] \\ &+ \frac{i}{(n\omega_m + m\omega_n)} \left[(\omega_m^2 - m^2) \frac{m\sqrt{\omega_n} r_m}{n\sqrt{\omega_m} \tilde{r}_n} + (\omega_n^2 - n^2) \frac{n\sqrt{\omega_m} \tilde{r}_n}{m\sqrt{\omega_n} r_m} \right] = k, \end{aligned}$$

donde $k \in \mathbb{Z}$. Notamos que, en este caso, el resultado de la integración es una función compleja por lo que hacemos dos cosas. Primero, utilizamos la relación⁴

$$\operatorname{arctanh} \left(\frac{n\sqrt{\omega_m} \tilde{r}_n}{m\sqrt{\omega_n} r_m} \right) = \operatorname{arctanh} \left(\frac{m\sqrt{\omega_n} r_m}{n\sqrt{\omega_m} \tilde{r}_n} \right) - i\frac{\pi}{2},$$

donde $m\sqrt{\omega_n} r_m > n\sqrt{\omega_m} \tilde{r}_n$, y segundo, demandamos que la parte imaginaria de la ecuación (4.36) sea cero, $\operatorname{Im}(\chi_{TM}) = 0$, lo que arroja la condición

$$r_* \equiv \frac{m\sqrt{\omega_n} r_m}{n\sqrt{\omega_m} \tilde{r}_n} = \frac{(nm + \omega_m \omega_n) \pm \sqrt{(nm + \omega_m \omega_n)^2 - (\mu\alpha' p^+)^4}}{(\mu\alpha' p^+)^2}. \quad (4.36)$$

Por el otro lado, la parte real de (4.36), debe ser la que satisfaga que $\operatorname{Re}(\chi_{TM}) = k \in \mathbb{Z}$, lo que arroja

$$\frac{8(nm + \omega_m \omega_n)}{\pi(n\omega_m + m\omega_n)} \operatorname{ArcTanh}(r_*) = k. \quad (4.37)$$

De esta manera, hemos obtenido una relación discreta implícita

⁴Estamos considerando $m\sqrt{\omega_n} r > n\sqrt{\omega_m} \tilde{r}$. El caso inverso es equivalente, $\operatorname{arctanh}(1/x) = \operatorname{arctanh}(x) - i\pi/2$ cuando $x < 1$, por lo que no se pierde generalidad.

CAPÍTULO 4. CUANTIZACIÓN TOPOLÓGICA DEL CAMPO ESCALAR LIBRE MASIVO

entre r_m y \tilde{r}_n de las ecuaciones (4.36-4.37) que puede escribirse como $r_* = r_*(k)$, *i.e.* $r_m = r_m(\tilde{r}_n, k)$.

Es importante mencionar que la condición (4.36) depende también del momento inicial p^+ del campo X^+ y que siempre es posible encontrar un valor para el momento p^+ que satisfaga esta condición para valores fijos de n , m , μ y $k \in \mathbb{Z}$.

4.5. Discretización de la energía

Analicemos ahora el efecto que tiene el espectro topológico sobre el hamiltoniano de la configuración particular de dos campos X^1 y X^2 , cada uno con un único modo de oscilación distinto de cero (4.27).

A partir de la densidad lagrangiana en la integral de acción (4.7)

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4\pi\alpha'} \sum_{I=1}^8 [-\partial_\tau X^I \partial_\tau X^I + \partial_\sigma X^I \partial_\sigma X^I + \mu^2 (X^I)^2],$$

podemos encontrar a la densidad hamiltoniana haciendo la transformación de Legendre correspondiente, $\mathcal{H} = \sum_I \partial_\tau X^I \Pi_I - \mathcal{L}$, donde el momento conjugado está definido como

$$\Pi_I = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta(\partial_\tau X^I)} = \frac{1}{2\pi\alpha'} \partial_\tau X^I \delta_{JI}.$$

Así, la expresión general de la densidad hamiltoniana, que de-

CAPÍTULO 4. CUANTIZACIÓN TOPOLÓGICA DEL CAMPO ESCALAR LIBRE MASIVO

pende de los campos X^I , es

$$\mathcal{H} = \frac{1}{4\pi\alpha'} \sum_I [\partial_\tau X^I \partial_\tau X^I + \partial_\sigma X^I \partial_\sigma X^I + \mu^2 (X^I)^2],$$

y la función hamiltoniana puede encontrarse al integrar la densidad hamiltoniana sobre la coordenada σ ,

$$H = \int d\sigma \mathcal{H}.$$

La función hamiltoniana, para el caso particular considerado (4.27), se calcula de manera directa y se obtiene

$$H = \omega_m r_m^2 + \omega_n \tilde{r}_n^2, \quad (4.38)$$

la cual, al imponerle la condición de cuantización dada por el espectro topológico (4.34), se escribe como

$$H = [\omega_n + \omega_m f_{m,n}^2(k)] \tilde{r}_n^2,$$

donde

$$f_{m,n}(k) = \frac{1}{(\alpha' p^+ \mu)^2} \left[(n\omega_m + m\omega_n)k + \sqrt{(n\omega_m + m\omega_n)^2 k^2 - (\alpha' p^+ \mu)^4} \right] \frac{n\sqrt{\omega_m}}{m\sqrt{\omega_n}}.$$

Entonces, para un valor fijo de \tilde{r}_n , el hamiltoniano adquiere valores discretos que dependen del entero k , por lo tanto, para ésta

CAPÍTULO 4. CUANTIZACIÓN TOPOLÓGICA DEL CAMPO ESCALAR LIBRE MASIVO

configuración en particular de los campos bosónicos masivos libres, la energía se vuelve discreta, como se muestra en la figura 4.8.

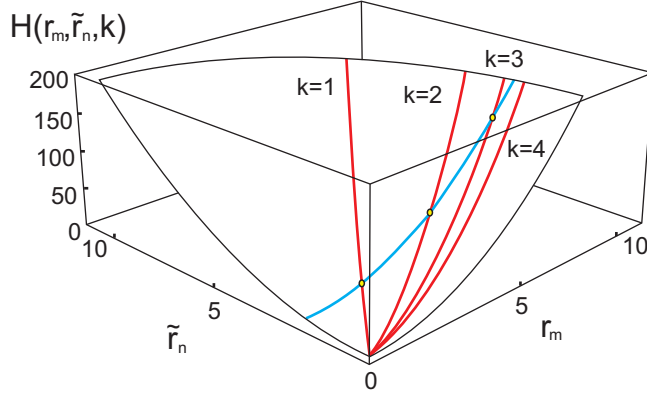


Figura 4.8: Gráfica del hamiltoniano para dos campos (4.33) con $n = 1$, $m = 3$, $\mu = 2$, $\alpha' = 1$ y $p^+ = 1$. Las líneas que intersectan al origen son la que cumplen la condición (4.34) para el hamiltoniano cuando $k = 1, \dots, 4$ y la línea que intersecta a éstas condiciones es para $\tilde{r}_n = 2$. Los puntos son los valores permitidos del hamiltoniano cuando k corre sobre \mathbb{Z} .

Capítulo 5

Cuantización topológica del campo fermiónico libre

La métrica de fondo (4.14), con la cinco-forma \mathbf{F} (4.18) y el campo dilatónico ϕ (4.19), representen ondas planas con propagación paralela (PP-wave) [125, 126, 136, 135] que son solución exacta a la ecuaciones de campo para la teoría IIB de Supergravedad [144, 145, 146]. Esta teoría de supergravedad contiene un sector bosónico (el cual ya analizamos en el capítulo anterior) y un sector fermiónico. Esto nos indica que tenemos un sistema gravitacional curvo (PP-waves) con contenido de campos bosónicos y, además, campos fermiónicos, por lo que es interesante analizar el sector fermiónico en este fondo gravitacional para aplicar el formalismo de la cuantización topológica.

En este capítulo repasamos los elementos básicos de la teoría de supergravedad IIB y la estructura de las ondas-PP. Posteriormente

CAPÍTULO 5. CUANTIZACIÓN TOPOLÓGICA DEL CAMPO FERMIÓNICO LIBRE

proponemos una métrica para el sector bosónico y analizamos las consecuencias de los fermiones sin masa sobre un espacio dos-dimensional bajo el formalismo de la cuantización topológica.

5.1. Supergravedad

Las teorías de supergravedad son la generalización de la teoría de Relatividad General cuando se le añade supersimetría.

Las transformaciones supersimétricas son aquellas que transforman partículas bosónicas en fermiónicas y viceversa. A los generadores de estas transformaciones supersimétricas se les llama supercargas (Q) y son, a su vez, fermiones. Es decir, denotando como ϕ a los bosones y ψ a los fermiones, la transformación infinitesimal supersimétrica se puede escribir, esquemáticamente, como,

$$\delta\phi = \bar{\epsilon}\psi \quad \delta\psi = \epsilon\partial\phi, \quad (5.1)$$

donde ϵ es el parámetro infinitesimal de la simetría y ∂ es la derivada parcial sobre las coordenadas del espaciotiempo.

5.1.1. Transformando simetrías globales en locales

Para entender las consecuencias de añadir supersimetría a la relatividad general, recordemos el caso del campo escalar complejo no masivo, cuya densidad lagrangiana está dada por

$$\mathcal{L} = \partial_\mu\phi \partial^\mu\bar{\phi}, \quad (5.2)$$

CAPÍTULO 5. CUANTIZACIÓN TOPOLÓGICA DEL CAMPO FERMIÓNICO LIBRE

la cual es invariante ante la simetría global $U(1)$ y actúa como una transformación de la fase del campo escalar ϕ ,

$$\phi(x) \rightarrow e^{i\Lambda} \phi(x). \quad (5.3)$$

Cuando, a la transformación, se le pide que sea local $\Lambda \rightarrow \Lambda(x)$, entonces la densidad lagrangiana (5.2) deja de ser invariante ante la transformación (5.3) por lo que se requiere definir una derivada covariante sobre el haz fibrado por medio de una conexión local $A_\mu(x)$,

$$D_\mu \phi(x) \equiv \partial_\mu \phi(x) - iA_\mu(x)\phi(x). \quad (5.4)$$

Al sustituir esta derivada covariante por las derivadas ordinarias en la lagrangiana (5.2), el resultado es la densidad lagrangiana

$$\mathcal{L} = D_\mu \phi D^\mu \bar{\phi}, \quad (5.5)$$

la cual es invariante ante transformaciones locales de $U(1)$. Es decir, añadir a la lagrangiana términos para mantener las simetrías locales, en este caso, implica añadir un término de Maxwell, $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$, que captura la dinámica del campo de norma local para que la invarianza ante $U(1)$ sea consistente.

En general, cuando se promueve una simetría global, con parámetro Λ , a ser simetría local, $\Lambda(x)$, los términos cinéticos de la acción dejan de ser invariantes y aparecen nuevos términos en la variación de la

CAPÍTULO 5. CUANTIZACIÓN TOPOLÓGICA DEL CAMPO FERMIÓNICO LIBRE

acción

$$\delta S = \int d^D x j^m \partial_m \Lambda, \quad (5.6)$$

donde $j^m(x)$ es una corriente de Noether de la simetría global, por lo que, para restaurar la simetría en la acción se deben añadir campos de norma que cancelen la variación δS , añadiendo, además, los términos de acoplamiento entre la corriente de Noether y el campo de norma

$$S' = -\alpha \int d^D x j^m A_m, \quad \delta A_m = \frac{1}{\alpha} \partial_m \Lambda + \dots \quad (5.7)$$

Pero, al hacer lo anterior, generalmente aparece un nuevo término derivado de la variación δj^m , el cual, de nuevo, debe compensarse al añadir más términos en la acción y, posiblemente, a las reglas de transformación previas bajo la simetría local.

Éste es el llamado procedimiento de Noether, el cual, después de un número finito de pasos, resulta en una acción simétrica con simetrías locales.

En el caso supersimétrico, la transformación de simetría es, a su vez, un espinor y todo el contenido de campos, relacionados por transformaciones supersimétricas, forman un supermultiplete. Cuando el supermultiplete contiene gravitones (partículas con espín 2), se le llama multiplete supergravitacional.

En el caso de las teorías de supergravedad se tiene, entonces, una teoría de gravedad relativista y un contenido de campos e interacciones acopladas con el gravitón, es decir, en términos de la densidad

CAPÍTULO 5. CUANTIZACIÓN TOPOLÓGICA DEL CAMPO FERMIÓNICO LIBRE

lagrangiana,

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{EH} + \mathcal{L}(\phi, \psi, \dots), \quad (5.8)$$

en donde

$$\mathcal{L}_{EH} = -\frac{1}{4}\sqrt{|g|} R, \quad (5.9)$$

es la lagrangiana de Einstein-Hilbert y $\mathcal{L}(\phi, \psi, \dots)$ es la lagrangiana de los campos y sus acoplamientos con la métrica.

5.1.2. Teoría de supercuerdas IIB en un fondo *PP-waves*

La teoría de supercuerdas IIB es una teoría supersimétrica en 10 dimensiones cuyo contenido son cuerdas cerradas. Los campos bosónicos y fermiónicos son excitaciones de estas cuerdas. El contenido de campos y partículas bajo estas excitaciones está dado por: un gravitón asociado a la métrica $G_{\mu\nu}$, un campo dilatón ϕ , un campo Kalb-Ramond que se puede considerar como una generalización del potencial electromagnético, $B_{\mu\nu}$, y un campo de norma autodual, $A_{\mu,\nu,\rho,\gamma}$, formando el sector bosónico. En el sector fermiónico tenemos 32 campos fermiónicos ψ , dos transformaciones simétricas globales (de ahí el II del nombre de la teoría)¹ y 32 supercargas Q_i , que son las 16 componentes espinoriales de cada espinor de Majorana-Weyl.

Cuando tomamos el límite de bajas energías de la teoría de su-

¹Las teoría de supercuerdas tipo I está basada en cuerdas abiertas y reducen la supersimetría del espaciotiempo a $N = 1$, de ahí el I en la nomenclatura.

CAPÍTULO 5. CUANTIZACIÓN TOPOLÓGICA DEL CAMPO FERMIÓNICO LIBRE

percuerdas IIB, es decir, cuerdas cerradas libres, obtenemos Supergravedad IIB. A nivel de la hoja de mundo tenemos campos bosónicos y dos espinores de Majorana-Weyl, $\psi^{I=1,2}$ con la misma quiralidad², que es lo que vamos a aprovechar en esta sección.

Algo que vale la pena mencionar, después de haber revisado el método de simetrización de la acción en el tema anterior, es que esta teoría supersimétrica no puede obtenerse con el procedimiento de simetrización de Noether pues no existe una acción manifiestamente covariante [144].

Hasta antes del 2002 sólo se conocían dos soluciones supersimétricas de supergravedad IIB [137]: una en el espacio plano de Minkowski en 10 dimensiones y la otra, la solución $AdS_5 \times S^5$. En [137] se presenta una nueva solución máximamente supersimétrica (i.e. con 32 vectores de killing) para supergravedad IIB en un fondo gravitacional de ondas planas en 10 dimensiones con una 5-forma de flujo Ramond-Ramond.

5.2. Acción supersimétrica en fondo gravitacional tipo PP-waves

La acción supersimétrica, para campos bosónicos y fermiónicos con masa sobre una hoja de mundo dos-dimensional, se puede obtener por medio de la construcción de un superespacio con 10 coordenadas bosónicas, 16 fermiónicas y otras 16 complejas conjugadas de las fermiónicas, a partir de las cuales se construye una acción co-

²Tomar espinores con quiralidad opuesta entre ellos es el caso de supercuerdas tipo IIA.

CAPÍTULO 5. CUANTIZACIÓN TOPOLÓGICA DEL CAMPO FERMIÓNICO LIBRE

mo modelo sigma dos dimensional sobre el superespacio *coset*³. Esta acción, sobre un fondo de ondas-PP, está dada por [139, 123]

$$S = \int d^2\sigma \partial_a X^I \partial^a X^J \delta_{IJ} - \mu^2 \sum_{I=1}^8 X^I X_I - i\bar{\psi} \rho^a \partial_a \psi + i\mu \bar{\psi} \Pi \psi. \quad (5.10)$$

en donde ρ^a son matrices de Dirac 2×2 ,

$$\rho^0 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \rho^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (5.11)$$

las cuales cumplen con el álgebra de Clifford,

$$\{\rho^a, \rho^b\} = 2\eta^{ab}. \quad (5.12)$$

El campo ψ es un espinor dos-dimensional con componentes escalares de Grassmann en dos dimensiones ψ^i ,

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi^{1\alpha} \\ \psi^{2\alpha} \end{pmatrix}, \quad (5.13)$$

donde $\psi^{1\alpha}$ y $\psi^{2\alpha}$, $\alpha = 1, \dots, 8$, son, a su vez, espinores con 8 componentes reales y donde $\bar{\psi} = \psi^T \rho^0$ con ψ^T , la operación transpuesta del espinor ψ y la matriz $\Pi = \sigma_3 \otimes 1_{4 \times 4}$, con $\sigma_3 = \text{diag}(-1, 1)$.

La acción (5.10) tiene, claramente, un sector bosónico S_B y un sector fermiónico S_F , tal que $S = S_B + S_F$, y donde S_B es la acción

³Para el interesado, la construcción detallada se puede ver en la referencia de la bibliografía [123]

CAPÍTULO 5. CUANTIZACIÓN TOPOLÓGICA DEL CAMPO FERMIÓNICO LIBRE

que vimos en el capítulo anterior, ecuación (4.7). Podemos escribir a la acción del sector fermiónico S_F como

$$S_F = -i \int d^2\sigma \eta^{ab} \bar{\psi} \rho_a \partial_b \psi - \mu \bar{\psi} \Pi \psi, \quad (5.14)$$

en donde observamos que, dado que ρ_a son matrices que obedecen el álgebra de Clifford y, en particular, $\rho_0^2 = -1$ y $\rho_1^2 = 1$, entonces, S_F la reescribimos como

$$S_F = -i \int d^2\sigma \eta^{ab} \left(\bar{\psi} \rho_a \partial_b \psi - \frac{1}{2} \mu \bar{\psi} \Pi \rho_a \rho_b \psi \right). \quad (5.15)$$

Lo anterior nos permite definir una métrica, \hat{g} , en la acción del sector fermiónico como

$$\hat{g}_{ab} \equiv \frac{1}{2} \left(\bar{\psi} \rho_{(a} \partial_{b)} \psi - \mu \bar{\psi} \Pi \rho_{(a} \rho_{b)} \psi \right). \quad (5.16)$$

donde los paréntesis en los subíndices indican la simetrización respecto a ellos, es decir

$$\begin{aligned} \bar{\psi} \rho_{(a} \partial_{b)} \psi &= \bar{\psi} \rho_a \partial_b \psi + \bar{\psi} \rho_b \partial_a \psi, \\ \text{y} & \\ \mu \bar{\psi} \Pi \rho_{(a} \rho_{b)} \psi &= \mu \bar{\psi} \Pi \rho_a \rho_b \psi + \mu \bar{\psi} \Pi \rho_b \rho_a \psi. \end{aligned} \quad (5.17)$$

Al tener la métrica \hat{g} , podemos construir una base semi-ortonormal, como en los casos anteriores, y construir la conexión métrica ω para calcular el invariante topológico y obtener el espectro topológico del

CAPÍTULO 5. CUANTIZACIÓN TOPOLÓGICA DEL CAMPO FERMIÓNICO LIBRE

sistema. Para eso, necesitamos la solución de los campos fermiónicos a la ecuación de movimiento que sale de la variación de la acción,

$$\begin{aligned}(\partial_0 + \partial_1)\psi^1 - \Pi\psi^2 &= 0, \\(\partial_0 - \partial_1)\psi^2 - \Pi\psi^1 &= 0.\end{aligned}\tag{5.18}$$

La solución general para cada uno de los 8 campos fermiónicos, considerando las condiciones de periodicidad $\psi(\sigma + 2\pi, \tau) = \psi(\sigma, \tau)$, resulta ser

$$\begin{aligned}\psi^1 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(e^{-i\mu\tau} \psi_0 + e^{i\mu\tau} \psi_0^\dagger \right) + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \left[e^{-i\frac{\omega_n\tau - n\sigma}{\alpha'p^+}} \psi_n^1 + e^{i\frac{\omega_n\tau - n\sigma}{\alpha'p^+}} (\psi_n^1)^\dagger \right] \\ &\quad + i \sum_{n=1}^{\infty} c_n \frac{\omega_n - n}{\alpha'p^+ + \mu} \left[e^{-i\frac{\omega_n\tau - n\sigma}{\alpha'p^+}} \Pi\psi_n^2 + e^{i\frac{\omega_n\tau - n\sigma}{\alpha'p^+}} (\psi_n^2)^\dagger \right], \\ \psi^2 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(ie^{-i\mu\tau} \psi_0 - ie^{i\mu\tau} \psi_0^\dagger \right) + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \left[e^{-i\frac{\omega_n\tau - n\sigma}{\alpha'p^+}} \psi_n^2 + e^{i\frac{\omega_n\tau - n\sigma}{\alpha'p^+}} (\psi_n^2)^\dagger \right] \\ &\quad - i \sum_{n=1}^{\infty} c_n \frac{\omega_n - n}{\alpha'p^+ + \mu} \left[e^{-i\frac{\omega_n\tau - n\sigma}{\alpha'p^+}} \Pi\psi_n^2 + e^{i\frac{\omega_n\tau - n\sigma}{\alpha'p^+}} (\psi_n^2)^\dagger \right],\end{aligned}\tag{5.19}$$

donde los coeficientes c_n están definidos como

$$c_n = \frac{\sqrt{\mu\alpha'p^+}}{\sqrt{\omega_n + \mu\alpha'p^+ - n}}.\tag{5.20}$$

Los campos fermiónicos, en este caso, resultan estar acoplados, lo que complica en alto grado el cálculo del espectro topológico por lo

CAPÍTULO 5. CUANTIZACIÓN TOPOLÓGICA DEL CAMPO FERMIÓNICO LIBRE

que se analizará el caso $\mu = 0$, donde las ecuaciones de movimiento (5.18) se reducen a

$$\begin{aligned}(\partial_0 + \partial_1)\psi^1 &= 0, \\(\partial_0 - \partial_1)\psi^2 &= 0,\end{aligned}\tag{5.21}$$

y cuya solución está dada por

$$\begin{aligned}\psi^{1\alpha}(\tau, \sigma) &= \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n^\alpha e^{-2in(\tau-\sigma)}, \\ \psi^{2\alpha}(\tau, \sigma) &= \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{\psi}_n^\alpha e^{-2in(\tau+\sigma)}.\end{aligned}\tag{5.22}$$

La acción (5.15) se reduce a

$$S_F = -\frac{i}{2} \int d^2\sigma \eta^{ab} \bar{\psi} \rho_{(a} \partial_{b)} \psi,\tag{5.23}$$

y la métrica \hat{g} es

$$\hat{g}_{ab} \equiv \frac{1}{2} \bar{\psi} \rho_{(a} \partial_{b)} \psi,\tag{5.24}$$

cuyo determinante es

$$\det(\hat{g}_{ab}) = 4(\psi^{1\alpha})^T \partial_\sigma \psi^{1\alpha} (\psi^{2\alpha})^T \partial_\sigma \psi^{2\alpha}.\tag{5.25}$$

Del determinante de la métrica \hat{g} podemos ver que es necesario que ambos fermiones ($\psi^{1\alpha}$ y $\psi^{2\alpha}$) sean distintos de cero para que la métrica esté bien definida. Esto hace que el caso plano para fermiones sea, de entrada, tan complicado como el caso bosónico con masa. Sin

CAPÍTULO 5. CUANTIZACIÓN TOPOLÓGICA DEL CAMPO FERMIÓNICO LIBRE

embargo, al analizar el escalar de curvatura de Ricci, $R = \hat{g}^{ab} R_{ab}$, resulta que éste es nulo,

$$R = 0,$$

independientemente de la configuración particular de los fermiones.

Debido a que la clase característica está dada en términos de la dos-forma de curvatura (2.3) entonces el espectro topológico también resulta ser trivial por lo que no hay condiciones discretas para este sistema físico bajo el formalismo de la cuantización topológica.

Capítulo 6

Discusión

En esta tesis logramos desarrollar y aplicar el método de la cuantización topológica para obtener los espectros topológicos de tres sistemas físicos: la cuerda bosónica cerrada sobre un fondo tipo Minkowski, configuraciones particulares de campos bosónicos masivos y libres, y el caso de fermiones libres sin masa.

En cada caso se construyó el haz fibrado correspondiente aplicando el teorema de la reconstrucción. Posteriormente se le calculó sus invariantes topológicos y, finalmente, se obtuvieron los espectros de energía para los casos en los que el invariante topológico no fue nulo.

6.1. Cuerda bosónica cerrada

En el caso de la cuerda cerrada, el haz fibrado se construyó utilizando a la hoja de mundo como espacio base M , a las fibras como el grupo de simetría $SO(1, 1)$ y la conexión métrica ω a partir de la

métrica inducida sobre la hoja de mundo de acuerdo con el teorema 2.3 para configuraciones clásicas.

Para calcular el invariante topológico correspondiente se requirió conocer la solución específica del encaje de la hoja de mundo en el espacio-tiempo 26-dimensional. La solución del encaje fue dada en términos de una serie de Fourier que representa a un número infinito de osciladores independientes cuyos modos de oscilación son coeficientes complejos (3.12). En el caso de teoría de cuerdas, estos coeficientes tienen la calidad de operadores que siguen las reglas de conmutación usual de la teoría cuántica de campos. Esta es una distinción importante entre lo que se realiza en teoría de cuerdas y lo que se realiza en el formalismo de la cuantización topológica. En este último caso, los modos de oscilación no cambian su carácter de coeficientes con el álgebra usual de los complejos y esto mismo es lo que hace que no sea válido querer hacer una interpretación de los elementos del formalismo con los elementos de teoría de cuerdas.

Una vez que se construyó el haz fibrado principal y se obtuvo la solución del encaje, calculamos el espectro topológico (3.6) para algunas configuraciones particulares en un espaciotiempo de fondo tipo Minkowski. Estas configuraciones consistieron en tomar sólo una o dos direcciones de propagación de la cuerda con uno o dos modos de oscilación distintos de cero. Esto derivó en relaciones discretas entre las amplitudes de los modos de oscilación que describen la dinámica de la cuerda. Es decir, cuando se considera una única dirección de propagación con dos modos de oscilación (izquierdo y derecho, ecuación

3.15) o cuando se consideran dos direcciones con más de un modo de oscilación (izquierdo y derecho) en alguna de sus direcciones (3.18), las amplitudes de oscilación quedan relacionadas funcionalmente entre sí con un número entero. Esto implica que los modos de oscilación de la cuerda están relacionados de manera discreta, situación que no se presenta en teoría de cuerdas.

Debido a la complejidad para calcular la integral de la forma de Euler es que los espectros discretos fueron obtenidos para un número limitado de osciladores. Las expresiones que fueron resultando para el espectro topológico (3.17, 3.19, 3.20) en cada una de las diferentes configuraciones de cuerda analizadas derivan en relaciones discretas para la energía. El hamiltoniano para la cuerda bosónica cerrada está dado explícitamente en términos de las amplitudes de los modos de oscilación (sección 3.3.3), mismos modos que presentan la relación discreta. De esta manera las condiciones discretas de los espectros topológicos logran presentarse como relaciones discretas en la energía.

Es interesante mencionar que el espectro de energías obtenido para la cuerda cerrada tiene un comportamiento que no es equidistante entre sus niveles. La forma del hamiltoniano para una configuración particular está dada en las relaciones (3.22, 3.23). Además, para valores grandes del entero n (niveles de energía grandes), el valor del hamiltoniano tiende a un valor constante determinado por las frecuencias y el valor de amplitud de oscilación de uno de los modos (3.24).

Debido a la estructura algebraica que fue apareciendo, tanto en el

espectro topológico como en la función hamiltoniana, nos atrevemos a conjeturar un espectro topológico y un espectro de energías que es general para el caso del encaje de la cuerda que se propaga en dos direcciones.

Por un lado, el hamiltoniano general para la cuerda cerrada es

$$H = H_0 + \sum_I \sum_k \omega_k (r_k^I)^2 + \sum_J \sum_l \omega_l (\tilde{r}_l^J)^2 . \quad (6.1)$$

Por el otro lado, de la relación (3.20), podemos inferir el espectro topológico

$$\frac{4}{\pi} \prod_{kl} \omega_k \omega_l \ln \left[\frac{\sum_I (\sum_k \sqrt{\omega_k} r_k^I + \sum_l \sqrt{\omega_l} \tilde{r}_l^I)^2}{\sum_I (\sum_k \sqrt{\omega_k} r_k^I - \sum_l \sqrt{\omega_l} \tilde{r}_l^I)^2} \right] = n , \quad (6.2)$$

el cual se reduce, consistentemente, a los espectros (3.17), (3.19), y (3.20), en los correspondientes casos límite. Más aún, si consideramos el caso de un único modo de oscilación encendido en una única dirección, o el caso de un único oscilador en diferentes direcciones, el argumento del logaritmo se reduce al valor uno, es decir $n = 0$, con lo que ninguna condición de discretización aparece. Esto nos indica que oscilaciones en direcciones transversales no interactúan entre sí y, en cambio, configuraciones con, al menos, dos diferentes modos de oscilación en la misma dirección resultan con un espectro topológico no trivial lo que implica que siempre existan relaciones discretas entre los distintos modos de oscilación.

El espectro general (6.2) puede usarse para reescribir el hamiltoni-

ano (6.1) de tal modo que se discretice la energía, como en el hamiltoniano de la ecuación (3.21), considerando que la expresión final para el hamiltoniano va a depender de la relación entre los diferentes modos de oscilación, como en (3.22).

Como se logra ver, el espectro de energías derivado de la cuantización topológica para la cuerda cerrada no se parece en nada al espectro de energías que se obtiene en teoría de cuerdas (6.1) donde las amplitudes de los modos obedecen las reglas de conmutación usual de la teoría cuántica de campos. Esto no debe considerarse un problema del formalismo de la cuantización topológica puesto que ambos tratamientos son muy diferentes por lo que es de esperarse que no reproduzcan el mismo comportamiento discreto. Por lo tanto, el espectro de energías (6.2) con las condiciones (6.2) son la propuesta de este formalismo para el caso de la cuerda cerrada.

6.2. Campos bosónicos con masa y sin interacción

En el caso de los campos bosónicos masivos y sin interacción, lo que obtuvimos fueron dos variedades diferenciales que sirven como espacio base: el fondo geométrico *PP-waves* y el encaje de la hoja de mundo.

Para el caso del fondo se construyeron dos configuraciones clásicas (M, ω) :

- 1) espacio base *PP-waves*, fibra $SO(9, 1)$ y conexión métrica ω ,

- 2) espacio base *PP-waves*, fibra $U(1)$ y como conexión de norma una 4-forma A_4 .

Para el primer caso (fibra $SO(9,1)$ y conexión métrica ω), el espectro topológico resultó trivial, lo que implica que no existen condiciones discretas para este haz fibrado. El segundo caso resultó más interesante pues se obtuvo un espectro topológico para el parámetro μ que aparece en la métrica del fondo *PP-waves* que no es trivial. Esto implica que μ obedece condiciones discretas en función del valor del campo dilatónico constante (4.20), el cual es parte de la solución de supergravedad IIB de donde se obtiene el flujo electromagnético. Cabe mencionar que en este caso se aplicó la cuantización topológica inducida (*à la Dirac*) para obtener el espectro topológico de μ .

El significado físico de este resultado no está claro hasta el momento pues todavía no sabemos lo que son los estados de un sistema físico bajo este formalismo. Es por esto que no nos aventuramos a dar una interpretación aquí y esperaremos a que el programa de la cuantización topológica esté más avanzado para intentar dar una respuesta a este punto.

En el caso del encaje de la hoja de mundo, la configuración geométrica fue dada por la hoja de mundo como espacio base M y conexión métrica ω . El haz fibrado se hizo al considerar al grupo de simetrías $SO(1,1)$ como fibra estándar. El encaje fue realizado al considerarlo como un mapeo armónico con el espacio *PP-waves* como espacio de fondo y un espaciotiempo 2-dimensional con una coordenada compacta como espacio origen (fuente) con métrica tipo

Minkowski, análogo a una cuerda cerrada.

En este caso se trabajó de manera similar al caso de la cuerda cerrada, es decir, se dio una solución al encaje como osciladores armónicos independientes (4.25) y se utilizó la métrica inducida (4.21) sobre la hoja de mundo para construir la conexión métrica ω .

Una vez que se tuvo determinado el haz fibrado principal, se calcularon los espectros topológicos de las configuraciones de campo más sencillas. Para estas configuraciones particulares encontramos que existen relaciones discretas entre los modos de oscilación, r_m y \tilde{r}_n , de las soluciones a las ecuaciones de campo, de manera similar al caso de la cuerda bosónica, sin embargo, mientras que en la cuerda bosónica se encontraron espectros topológicos triviales para modos de oscilación en direcciones transversales, en el caso de los campos masivos se encontró un espectro topológico no trivial si el modo de uno de los campos es izquierdo y el modo del otro campo es derecho¹ (4.33). De nuevo, el comportamiento discreto de los modos de oscilación derivó en un espectro discreto de energía. El hamiltoniano para este caso, en términos del espectro topológico, se dio en (4.34).

Para el caso de un campo con dos modos excitados (4.35) se obtuvo una expresión similar para el hamiltoniano (4.38) con sus propias amplitudes y frecuencias pero, en este caso, la discretización de la energía está dada en términos de $p^+(k)$, ecuación (4.36), por lo que otra vez tenemos que $H = H(r_m, \tilde{r}_n, k)$ obedece un comportamiento discreto.

¹Si los modos excitados van en la misma dirección (un solo modo de oscilación por cada dirección), el sistema se degenera y no hay solución.

El hecho de que p^+ también tenga un espectro discreto es una característica interesante pues sólo, hasta donde tenemos conocimiento, se da bajo este formalismo.

Lamentablemente, para este sistema físico no pudimos resolver de manera analítica más configuraciones particulares que nos permitieran conjeturar el comportamiento general, como se hizo en el caso de la cuerda cerrada. Sin embargo, notando que para este sistema existe espectro topológico no trivial en cada configuración que trabajamos (lo cual no sucedió en el caso de cuerda cerrada²), concluimos que para el hamiltoniano de los campos bosónicos masivos y libres siempre se presenta un comportamiento discreto como función de $k \in \mathbb{Z}$.

Para este sistema físico, además, encontramos una característica interesante del invariante de Euler, la cual es el hecho de que la integración de este invariante no conmuta bajo el intercambio de las variables de integración. Esto significa que podemos ver a las integrales

$$\int () dx \equiv F_x \quad \text{and} \quad \int () dy \equiv G_y \quad (6.3)$$

como operadores tales que obedecen la relación

$$F_x G_y - G_y F_x \neq 0, \quad (6.4)$$

donde F_x y G_y , son funciones de α y $\tilde{\alpha}$ lo que, de cierta manera,

²En el caso de la cuerda cerrada, no existe un espectro topológico no trivial cuando la configuración está dada por dos direcciones de propagación transversales, cada una con un único modo de oscilación.

nos relaciona, como una consecuencia de la topología del sistema, el carácter no conmutativo que se impone a mano en la teoría cuántica de campos estándar para estos coeficientes. Es claro que un análisis más detallado será necesario para aclarar adecuadamente este resultado interesante de la cuantización topológica. Sin embargo es importante enfatizar que el hecho de que no conmute la integral de la clase característica respecto al orden de integración, nos obligó a proponer una expresión más general que fuera consistente para el Teorema de Gauss-Bonnet (4.31):

$$\int_M e(M)dV = \frac{1}{2} \left(\int_M e(M)dxdy + \int_M e(M)dydx \right) = \chi \in \mathbb{Z}. \quad (6.5)$$

Por otro lado, el hecho de que la métrica de fondo (4.14), con la cinco-forma \mathbf{F} (4.18) y el campo dilatónico ϕ (4.19), representen un fondo *PP-wave* [125, 126, 136, 135], que son solución exacta a la ecuaciones de campo para la teoría IIB de Supergravedad, abrió la posibilidad de entender los espectros topológicos para los campos bosónicos por medio de la correspondencia norma/gravedad que tiene este fondo gravitacional [139, 140]. Sin embargo, aunque la correspondencia AdS/SYM N=4 esté extensamente trabajada por la comunidad, el caso de la correspondencia *PP-waves*/SYM N=4 está escasamente desarrollada, a pesar de los esfuerzos de una parte de la misma comunidad [147, 148, 149, 150, 151]. Al estudiar las propiedades de este fondo gravitacional resulta que la estructura causal no es estable o es marginalmente causal. Es decir, ante pequeñas perturbaciones del

fondo, eventos que no estaban relacionados causalmente se ven ahora relacionados por el traslape de los conos de luz de los eventos ante la perturbación. Este comportamiento hace que pierda importancia el fondo para la correspondencia norma/gravedad pues en esta correspondencia lo que uno hace, típicamente, son perturbaciones en el fondo gravitacional que logren llegar a la frontera en donde es dual a la teoría de campos.

6.3. Campos fermiónicos con masa y sin interacción

Para el caso de los fermiones con masa y sin interacción, pudimos definir una métrica a partir de la acción supersimétrica, lo que permitió construir una conexión métrica ω y tomar al grupo $SO(1,1)$ como fibra para el haz. Este sistema resultó demasiado complicado para los métodos de cálculo que se utilizaron en la tesis por lo que consideramos, primero, implementar el formalismo de la cuantización topológica al caso no masivo. En este sistema con $\mu = 0$ encontramos que, dado que el escalar de curvatura es cero, el espectro topológico también es nulo, lo que implica que no hay constricciones discretas para los fermiones en esta configuración geométrica.

El caso de fermiones con masa ($\mu \neq 0$) se volvió inmanejable con los métodos utilizados para calcular su espectro por lo que se consideró, finalmente, si abordar este problema hasta resolverlo o dejarlo como tema para un futuro. La pertinencia de utilizar el tiempo

y energía en encontrar un espectro para una configuración geométrica que no coincide con la información discreta que se obtiene de la teoría de campos cuántica, no es clara. Así, dado que el caso de fermiones sin masa resultó trivial bajo este formalismo y el caso de bosones con masa arrojó resultados con una interpretación física inesperada, decidimos abocarnos a estudiar la teoría dual de las ondas planas PP con Super Yang-Mills $N=4$ e intentar entender las consecuencias de la cuantización topológica bajo esta dualidad.

De aquí nos queda claro que sería necesario, en caso de querer estudiar los fermiones bajo el formalismo de la cuantización topológica, construir una configuración geométrica que incluya ambos sectores al mismo tiempo (supervariiedad), sin embargo este trabajo queda fuera de los alcances de esta tesis.

6.4. Comentarios generales

Finalmente, una de las conclusiones más importantes que obtuvimos con la investigación de esta tesis es que nos dimos cuenta que no toda configuración geométrica es adecuada para obtener las consecuencias físicas a partir de su topología. Es decir, puede suceder que se tengan dos configuraciones clásicas, (M, ω) y (M', ω') , que representen al mismo sistema físico³ y que no tengan una topología trivial,

³Como un ejemplo de este caso podemos considerar al campo bosónico con masa trabajado en esta tesis. En este caso se podría resolver la ecuación de movimiento (4.3) para las métricas \mathfrak{g} y \mathfrak{G} , que seguramente resultarían en un fondo geométrico y un espacio fuente (origen) diferentes a los considerados en este trabajo.

lo que resulta en diferentes condiciones discretas de los parámetros físicos para ambas configuraciones. La pregunta, entonces, es si podemos saber *a priori* cuál configuración geométrica es la que va a arrojar resultados que sean realmente físicos (en el sentido de poder enfrentar con los experimentos). La respuesta que daremos aquí es que, hasta donde sabemos, no nos es posible garantizar cuál es la configuración correcta pero sí creemos saber cuando la configuración geométrica arrojará resultados sin sentido físico. Esto es así porque no existe una demostración matemática que nos garantice esto en un sentido o en otro. Sin embargo, al revisar el trabajo realizado antes de esta tesis y al compararlo con lo que se hizo aquí, nos encontramos con que en el caso de sistemas gravitacionales y en el de sistemas clásicos conservativos con n grados de libertad, las configuraciones geométricas son prácticamente los mismos sistemas físicos. En el caso de los campos bosónicos con masa nos encontramos con un fondo geométrico de 10 dimensiones cuya acción tiene más simetrías que el sistema físico representado. Esto nos hace proponer lo siguiente:

Proposición 6.1. *Existe una configuración geométrica (M, ω) que representa a un sistema físico y cuyas simetrías y grados de libertad se corresponden con las del sistema físico asociado, de tal forma que los espectros discretos obtenidos, vía el formalismo de la cuantización topológica, se corresponden con los espectros discretos cuánticos.*

Con la propuesta anterior, tenemos que modificar un poco la definición de configuración clásica dada en la definición 2.1 del formalismo (capítulo 2):

Definición 6.1 (Configuración clásica (fiel)). *Una configuración clásica es una pareja (M, ω) , donde M es una variedad Riemanniana (pseudo-Riemanniana) y ω una 1-forma de conexión definida sobre M que es fiel (en el sentido de la proposición 6.1).*

Si aceptamos lo anterior, entonces no es de extrañar que los espectros discretos de energía para los campos bosónicos con masa no se correspondan con los espectros del mismo sistema obtenidos en teoría cuántica de campos estándar. Sin embargo, no hay que olvidar que quien al último decide la validez de uno u otro espectro será siempre el experimento.

Para cerrar esta tesis cabe recordar que este formalismo forma parte de un programa de cuantización más ambicioso que incluye dos elementos importantes que siguen bajo investigación: el concepto de estado cuántico (topológico) y el de evolución cuántica (topológica). Esperemos que contemos pronto con las primeras respuestas a estos puntos.

Apéndice A

Haces fibrados y clases características

A.1. Haz fibrado

Un haz fibrado es una estructura matemática (E, M, F, π, G) que contiene los siguientes elementos y satisface las siguientes propiedades:

- 1.- Una variedad diferenciable E , llamada **espacio total**.
- 2.- Una variedad diferenciable M , llamada **espacio base**.
- 3.- Una variedad diferenciable F , llamada **fibra**.
- 4.- Un mapeo $\pi : E \rightarrow M$, llamado **proyección**, cuya imagen inversa $\pi^{-1}(p) = F_p$ es la fibra en $p \in M$.
- 5.- Un grupo de Lie G , llamado **grupo de estructura**.

APÉNDICE A. HACES FIBRADOS Y CLASES CARCTERÍSTICAS

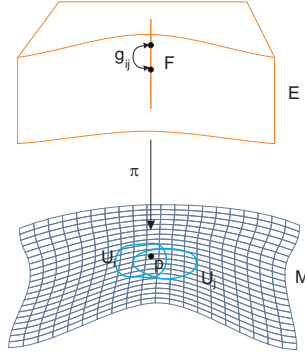


Figura A.1: Esquema que muestra algunos de los elementos principales que constituyen a un haz fibrado: E el espacio total, M el espacio base, F la fibra, π el mapeo proyección, U_i y U_j cartas que se intersectan y que contienen al mismo punto $p \in M$ y la función de transición $t_{ij} \in G$.

- 6.- Un conjunto de abiertos $\{U_i\}$, llamados **cartas**, que cubren a M y que tienen un difeomorfismo $\phi_i : U_i \times F \rightarrow \pi^{-1}(U_i)$ tal que $\pi\phi_i(p, f) = p$, donde $p \in M$ y $f \in F$. A este mapeo ϕ_i se le llama **trivialización local** (figura A.1).
- 7.- Denotando $\phi(p, f) \equiv \phi_{i,p}(f)$; el mapeo $\phi_{i,p} : F \rightarrow F_p$ es un difeomorfismo. En $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, $t_{ij}(p) \equiv \phi_{i,p}^{-1}\phi_{j,p} : F \rightarrow F$ es un elemento de G . Esto último da una relación entre ϕ_i y ϕ_j por el mapeo suave $t_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow G$ de la siguiente manera (figura A.2) :

$$\phi_j(p, f) = \phi_i(p, t_{ij}(p)f). \quad (\text{A.1})$$

A $\{t_{ij}\}$ se les llama **funciones de transición**.

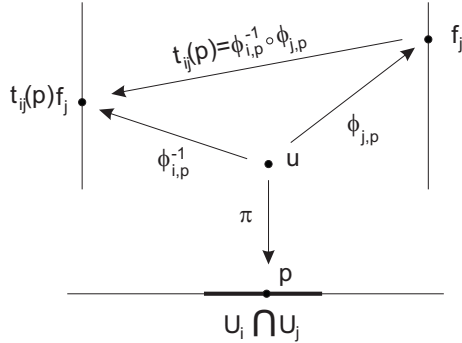


Figura A.2: Región de intersección $U_i \cap U_j$, donde dos elementos de la fibra $f_i, f_j \in F$ son asignados al punto $u \in \pi^{-1}(p)$, $p \in U_i \cap U_j$. Ambos elementos están relacionados por la función de transición t_{ij} por medio de $f_i = t_{ij}(p)f_j$.

A.2. Haz fibrado principal P y conexión ω

Un **haz fibrado principal** P , es aquel cuya fibra corresponde con el grupo de estructura de Lie, $F = G$. Dado que, en física, las variedades de Lie (grupos de Lie) son los representantes de las simetrías continuas, los haces fibrados principales son la estructura diferencial que usaremos a lo largo de este trabajo, a menos, claro, que se especifique lo contrario.

Una **conexión**, sobre el haz fibrado principal P , es la separación única del espacio tangente en el haz principal $T_u P$ con $u \in P$, en un subespacio vertical $V_u P$ y un subespacio horizontal $H_u P$, tal que (figura A.3),

$$i) \quad T_u P = H_u P \oplus V_u P.$$

APÉNDICE A. HACES FIBRADOS Y CLASES
CARACTERÍSTICAS

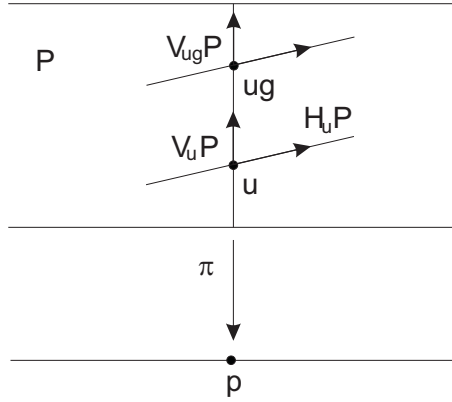


Figura A.3: El subespacio horizontal $H_{ug}P$ se obtiene de $H_u P$ por medio de la acción derecha del grupo.

- ii) Un campo vectorial suave X sobre P , es separado en dos campos vectoriales $X^H \in H_u P$ y $X^V \in V_u P$ como $X = X^H + X^V$.
- iii) $\exists R_{g*} : F \rightarrow F$, tal que $H_{ug} P = R_{g*} H_u P$, mapeo lineal que va de la fibra F a la fibra F . Este mapeo es inducido por la acción derecha del grupo.

La conexión también se puede definir como una uno-forma $\omega \in \mathfrak{g} \otimes T^* P$ que toma sus valores en el álgebra de Lie. Esta conexión es una proyección del haz tangente en sus componentes verticales del haz fibrado $V_u P \simeq \mathfrak{g}$, donde \mathfrak{g} es el álgebra de Lie del grupo de estructura G y $T^* P$ es el haz contangente del haz fibrado principal.

A.3. Sección en el haz fibrado

Una **sección** $s : M \rightarrow P$ es un mapeo suave que satisface $\pi s = id_M$, es decir, el mapeo proyección actuando sobre la sección es la identidad sobre el espacio base M . Una **sección local** es una sección s_i definida sobre un abierto $U_i \in M$.

Si $\{U_i\}$ es una cubierta de M y s_i es una sección local definida sobre cada U_i , conviene definir una uno-forma con valores en el álgebra de Lie A_i sobre U_i como

$$A_i \equiv s^* \omega \in \mathfrak{g} \otimes \Omega^1(U_i),$$

donde s_i^* es el pullback de s_i y $\Omega^1(U_i)$ es el espacio de las uno-formas sobre U_i .

Se puede mostrar que si s_i y s_j son dos secciones locales definidas sobre U_i y U_j , respectivamente, tal que su intersección es no vacía, $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, entonces

$$A_j = t_{ij}^{-1} A_i t_{ij} + t_{ij}^{-1} dt_{ij},$$

donde $t_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow G$ son las llamadas funciones de transición. A la ecuación anterior se le llama **condición de compatibilidad** y es lo que, en física, se le llama una **transformación de norma**.

A.4. Derivada exterior covariante y la 2-forma de curvatura

La derivada exterior covariante D de una uno-forma ω , está definida por

$$D\omega = d\omega + A \wedge \omega, \tag{A.2}$$

donde A es la conexión. Si en lugar de aplicar la derivada exterior D sobre una uno-forma arbitraria, se realiza sobre la uno-forma de conexión A , lo que se obtiene es la definición de la dos-forma de curvatura F :

$$F \equiv DA = dA + A \wedge A. \tag{A.3}$$

Es importante definir la dos-forma de curvatura F porque esto nos permite clasificar la topología de distintos haces fibrados de acuerdo a las clases de equivalencias de los haces.

Primero es necesario considerar al espacio de todas las formas cerradas $Z^r = \{\omega \mid d\omega = 0\}$, las cuales contienen al subespacio de todas las formas exactas $B^r = \{\omega \mid \omega = d\alpha\}$. El espacio cociente $H^r = Z^r/B^r$ nos clasifica las clases de equivalencia de las formas diferenciales y, además, sus elementos $[\omega]$ forman un grupo llamado **grupo de cohomología de DeRham**. Cada una de estas clases está formada por las diferentes uno-formas de conexión que corresponden a la misma curvatura.

A.5. Invariantes topológicos y clases características

Una cantidad que es invariante ante el álgebra de Lie \mathfrak{g} de la fibra, es el llamado **polinomio característico**:

$$\det(1 + \Omega) = 1 + \text{tr}\Omega + \frac{1}{2}[(\text{tr}\Omega)^2 - \text{tr}\Omega^2] + \dots$$

Este polinomio nos permite definir a una forma diferencial sobre el espacio base M , llamada **forma de Chern**:

$$\det\left(1 + \frac{\lambda}{2\pi}F\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k c_k,$$

donde F es la dos-forma de curvatura con valores en el álgebra de Lie, y el factor $1/2\pi$ se introduce para tener una normalización conveniente. Los coeficientes c_k son formas cerradas invariantes sobre M . Explícitamente, los primeros coeficientes son:

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{1}{2\pi} \text{tr}F, \\ c_2 &= \frac{1}{8\pi^2} [\text{tr}F \wedge \text{tr}F - \text{tr}(F \wedge F)], \\ c_3 &= \frac{1}{48\pi^3} [\text{tr}F \wedge \text{tr}F \wedge \text{tr}F - 3\text{tr}(F \wedge F) \wedge \text{tr}F + 2\text{tr}(F \wedge F \wedge F)]. \end{aligned} \tag{A.4}$$

APÉNDICE A. HACES FIBRADOS Y CLASES CARACTERÍSTICAS

Estos coeficientes c_k , cumplen con la condición:

$$\int_M c_k = n, \quad \text{con } n \in \mathbb{Z}. \quad (\text{A.5})$$

Ésta es la generalización del teorema de Gauss-Bonnet, el cual relaciona estos números enteros con la característica de Euler de M cuando el grupo de estructura es $SO(n)$ y se llama clase de Pontrjagin¹ cuando el grupo de estructura es $O(n)$. La clase de Chern es, entonces, cuando el grupo de estructura es $U(n)$ y los números enteros son las características topológicas del haz, de acuerdo con Gauss-Bonnet.

¹Pontrjagin o Pontryagin se presenta indistintamente según la translación que cada autor hace del alfabeto cirílico al latino

Apéndice B

Integración de la forma de Euler. Cuerda bosónica

Para integrar la forma de Euler (3.14) se deben especificar los límites de integración.

Como se ha mencionado en la sección 3.3.2, debido a que la hoja de mundo M no es compacta, debemos de considerar una región finita de ésta, así como la contribución de la frontera de esta región finita al valor del invariante de Euler. Para variedades M_F con frontera ∂M_F , el invariante, derivado de la relación de Gauss-Bonnet, es

$$\chi_{TM} = \int_M e(TM) + \frac{1}{2\pi} \int_{\partial M_F} \kappa ds, \quad (\text{B.1})$$

donde κ es la curvatura geodésica de la frontera y ds es la longitud de arco propia a lo largo de ésta.

Para el parámetro σ el intervalo donde toma sus valores es $[0, 2\pi]$,

APÉNDICE B. INTEGRACIÓN DE LA FORMA DE EULER. CUERDA BOSÓNICA

mientras que τ tiene un comportamiento periódico en la expresión para la forma de Euler, por lo que es necesario considerar a τ en un ciclo completo. Se toma, además, la integración en coordenadas nulas bajo la siguientes transformaciones,

$$\begin{aligned}
 \eta = x_I &= \sin \omega_k(\tau - \sigma + \gamma_k^{J_1}) & \text{y} & & \xi = y_I &= \sin \omega_l(\tau + \sigma + \tilde{\gamma}_l^{J_2}), \\
 x_{II} &= \sin \omega_k(\tau - \sigma + \gamma_k^{J_1}) & \text{y} & & y_{II} &= -\sin \omega_l(\tau + \sigma + \tilde{\gamma}_l^{J_2}), \\
 x_{III} &= -\sin \omega_k(\tau - \sigma + \gamma_k^{J_1}) & \text{y} & & y_{III} &= \sin \omega_l(\tau + \sigma + \tilde{\gamma}_l^{J_2}), \\
 x_{IV} &= -\sin \omega_k(\tau - \sigma + \gamma_k^{J_1}) & \text{y} & & y_{IV} &= -\sin \omega_l(\tau + \sigma + \tilde{\gamma}_l^{J_2}),
 \end{aligned}
 \tag{B.2}$$

donde los cuatro tipos de regiones utilizadas cubren completamente el dominio de integración, como se ve en la figura B.1.

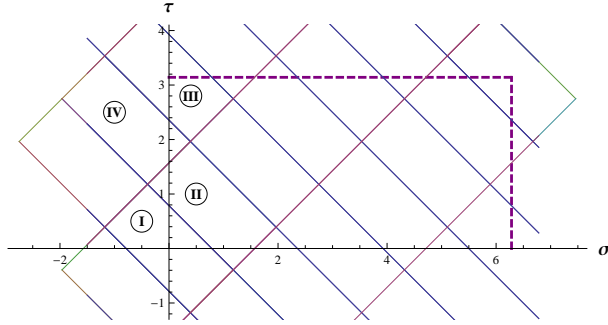


Figura B.1: Dominio de integración para el caso de un modo derecho $k = \omega_k = 1$ en la dirección J_1 y un modo izquierdo $l = \omega_l = 2$ en la dirección J_2 . Las diferentes regiones corresponden a diferentes cambios de coordenadas, I to IV.

La forma de Euler se escribe, en esta norma, de la siguiente man-

APÉNDICE B. INTEGRACIÓN DE LA FORMA DE EULER. CUERDA BOSÓNICA

era

$$e(\mathcal{P}) = \pm \frac{2}{\pi} \frac{(r_k^{J_1} \tilde{r}_l^{J_2})^2 \omega_k \omega_l x y}{\left[\omega_k (r_k^{J_1})^2 x^2 + \omega_l (\tilde{r}_l^{J_2})^2 y^2 \right]^2} dx \wedge dy, \quad (\text{B.3})$$

donde el signo positivo es para las regiones *I* y *IV* y el negativo para las *II* y *III*. Los parámetros toman los valores en el intervalo $x \in [-1, 1]$ y $y \in [-1, 1]$. Para cubrir toda la región de integración es necesario considerar $2kl$ regiones del tipo *I* y *IV* y el mismo número de regiones del tipo *II* y *III*.

En este caso particular de un modo de oscilación en una sola dirección, para cualquier tipo de región, la integral de la clase de Euler es nula,

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 dx dy e(x, y) = 0. \quad (\text{B.4})$$

Este procedimiento para calcular la integral de la clase de Euler es el usado en las otras configuraciones particulares consideradas.

Apéndice C

Integración de la forma de Euler. Campo bosónico con masa

Consideremos la región de integración en τ, σ . La variable σ corre entre 0 y 2π al igual que lo hace $\omega\tau$, ya que ambas variables entran como argumento en la función seno.

Si tomamos el cambio de variable

$$x = \text{sen} \left(\frac{\omega\tau + \sigma}{\alpha'p^+} \right), \quad y = \text{sen} \left(\frac{\omega\tau - \sigma}{\alpha'p^+} \right), \quad (\text{C.1})$$

entonces, el dominio, tanto de x como de y , es $[-1, 1]$, con lo que vemos que el cambio de variables es invertible en esta región. Para completar la integración es necesario cubrir la región completa por

APÉNDICE C. INTEGRACIÓN DE LA FORMA DE EULER. CAMPO BOSÓNICO CON MASA

cartas de este tipo, es decir, cuyo mapeo a las coordenadas x e y sea invertible. Para determinar con qué signo se deben agregar estos parches para cubrir la región de integración es necesario estudiar la orientación del cambio de variable, lo cual es fácil de hacer explorando la forma en la que se mapea la frontera de tales parches, lo que hacemos a continuación.

Tomemos primero

$$x = -1 \rightarrow \frac{\omega\tau + \sigma}{\alpha'p^+} = -\frac{\pi}{2} \quad (\text{C.2})$$

$$y = -1 \rightarrow \frac{\omega\tau - \sigma}{\alpha'p^+} = -\frac{\pi}{2} \quad (\text{C.3})$$

$$x = 1 \rightarrow \frac{\omega\tau + \sigma}{\alpha'p^+} = \frac{\pi}{2} \quad (\text{C.4})$$

$$y = 1 \rightarrow \frac{\omega\tau - \sigma}{\alpha'p^+} = \frac{\pi}{2} \quad (\text{C.5})$$

Entonces, para $y = 1$, $x \in [-1, 1]$ y de la ecuación (C.5) tenemos que, en $(\omega\tau, \sigma)$

$$\omega\tau = \frac{\pi}{2}\alpha'p^+ + \sigma \quad (\text{C.6})$$

que es una recta con pendiente positiva. Cuando estamos en el punto $(x, y) = (-1, 1)$, se satisfacen simultáneamente las ecuaciones

APÉNDICE C. INTEGRACIÓN DE LA FORMA DE EULER. CAMPO BOSÓNICO CON MASA

$$\frac{\omega\tau + \sigma}{\alpha'p^+} = -\frac{\pi}{2} \quad (\text{C.7})$$

$$\frac{\omega\tau - \sigma}{\alpha'p^+} = \frac{\pi}{2} \quad (\text{C.8})$$

con lo cual, al resolver el sistema, tenemos que

$$(x, y) = (-1, 1) \rightarrow (\omega\tau, \sigma) = (0, -\frac{\pi}{2}\alpha'p^+) \quad (\text{C.9})$$

mientras que, cuando $(x, y) = (1, 1)$, se cumplen simultáneamente las ecuaciones

$$\frac{\omega\tau + \sigma}{\alpha'p^+} = \frac{\pi}{2} \quad (\text{C.10})$$

$$\frac{\omega\tau - \sigma}{\alpha'p^+} = \frac{\pi}{2} \quad (\text{C.11})$$

cuya solución es

$$(x, y) = (1, 1) \rightarrow (\omega\tau, \sigma) = (\frac{\pi}{2}\alpha'p^+, 0) \quad (\text{C.12})$$

con lo cual observamos que el mapeo de este segmento es como el que se observa en la figura (C.1), en donde se indica con las flechas la dirección del mapeo.

**APÉNDICE C. INTEGRACIÓN DE LA FORMA DE
EULER. CAMPO BOSÓNICO CON MASA**

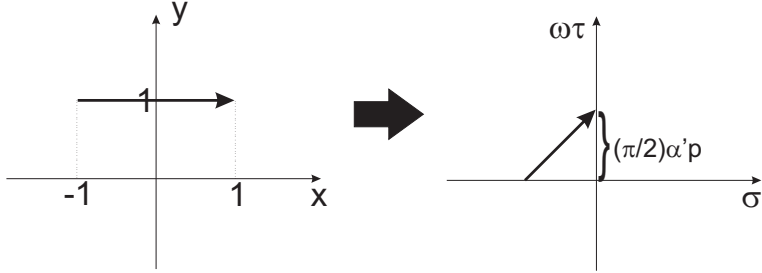


Figura C.1: Mapeo del segmento de recta $y = 1$ en un segmento de recta en (τ, σ) .

Ahora, cuando $x = 1$ constante, tenemos, de la ecuación (C.4)

$$\omega\tau = \frac{\pi}{2}\alpha'p^+ - \sigma \quad (\text{C.13})$$

que es una recta, en $(\omega\tau, \sigma)$, con pendiente positiva.

Al aplicar el mismo análisis a los puntos $(x = 1, y = 1)$ y $(x = 1, y = -1)$ (en esa orientación), llegamos a que

$$(x, y) = (1, 1) \rightarrow (\omega\tau, \sigma) = \left(\frac{\pi}{2}\alpha'p^+, 0\right) \quad (\text{C.14})$$

$$(x, y) = (1, -1) \rightarrow (\omega\tau, \sigma) = \left(0, \frac{\pi}{2}\alpha'p^+\right) \quad (\text{C.15})$$

lo cual podemos observar en la figura C.2.

APÉNDICE C. INTEGRACIÓN DE LA FORMA DE EULER. CAMPO BOSÓNICO CON MASA

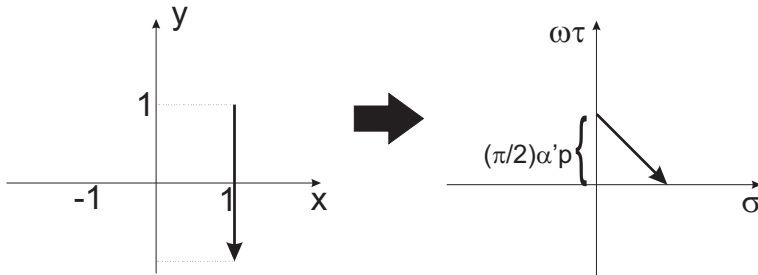


Figura C.2: Mapeo del segmento de recta $x = 1$ en un segmento de recta en (τ, σ) .

Análogamente, las figuras C.3 y C.4 indican el resultado de mapear los otros segmentos.

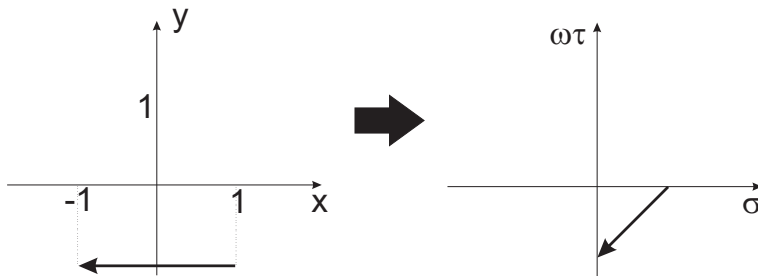


Figura C.3: Mapeo del segmento de recta $y = -1$ en un segmento de recta en (τ, σ) .

APÉNDICE C. INTEGRACIÓN DE LA FORMA DE EULER. CAMPO BOSÓNICO CON MASA

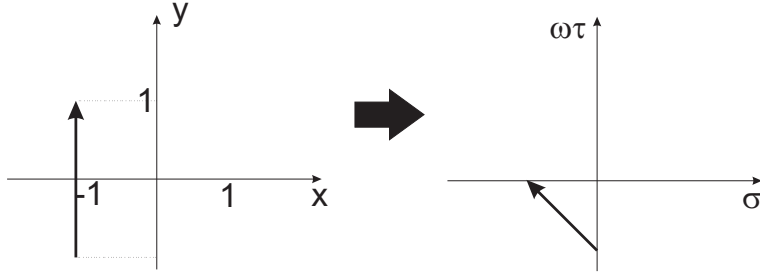


Figura C.4: Mapeo del segmento de recta $x = -1$ en un segmento de recta en (τ, σ) .

Con lo que vemos que, al recorrer la frontera de la región de integración en (x, y) , la región mapeada a $(\omega\tau, \sigma)$ se recorre en el mismo sentido (figura C.5)

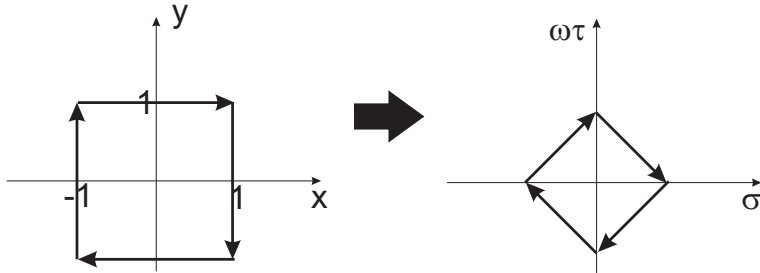


Figura C.5: Mapeo de la frontera de la región en (x, y) en una frontera con la misma orientación en $(\omega\tau, \sigma)$.

Ahora, si tomamos al argumento de la función $x = \text{sen}\left(\frac{\omega\tau + \sigma}{\alpha' p^+}\right)$ que tome los valores entre $\pi/2$ y $3\pi/2$, entonces la orientación de x se invierte pues cuando $\left(\frac{\omega\tau + \sigma}{\alpha' p^+}\right)$ va de $\pi/2$ a $3\pi/2$, x va de 1 a -1.

Al hacer el mapeo de la región en (x, y) , como se hizo anterior-

APÉNDICE C. INTEGRACIÓN DE LA FORMA DE EULER. CAMPO BOSÓNICO CON MASA

mente para cada segmento, se obtiene el mapeo que se observa en la figura C.6, en donde se observa el cambio de orientación de la región.

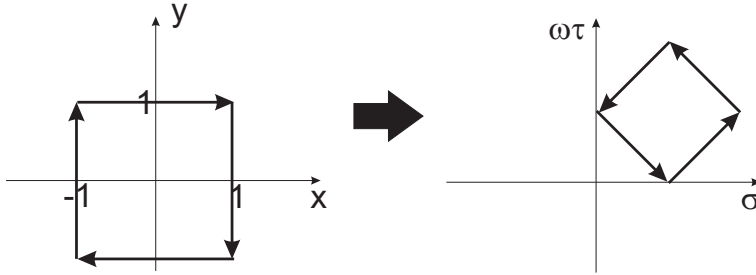


Figura C.6: Mapeo de la frontera de la región en (x, y) en una frontera con orientación inversa en $(\omega\tau, \sigma)$.

De aquí observamos dos cosas: 1) La región la podemos orientar en dirección contraria con lo que nos saca un signo negativo en la integral. 2) El jacobiano J de la transformación va como $\cos\left(\frac{\omega\tau+\sigma}{\alpha'p^+}\right)$, el cual es negativo entre $\pi/2$ y $3\pi/2$ lo que cambia el signo al jacobiano (i.e. $J \rightarrow -J$).

Con esto (la reorientación de la región y el signo del jacobiano) vemos que la integración sobre la región reorientada conserva el signo positivo, por lo que, al considerar las dos regiones, observamos que la integración sobre las dos fronteras se anula en la intersección, haciendo que la integral sobre las fronteras de las dos regiones sea equivalente a integrar sobre la frontera de la región formada por la unión de ambas regiones (figura C.7).

APÉNDICE C. INTEGRACIÓN DE LA FORMA DE EULER. CAMPO BOSÓNICO CON MASA

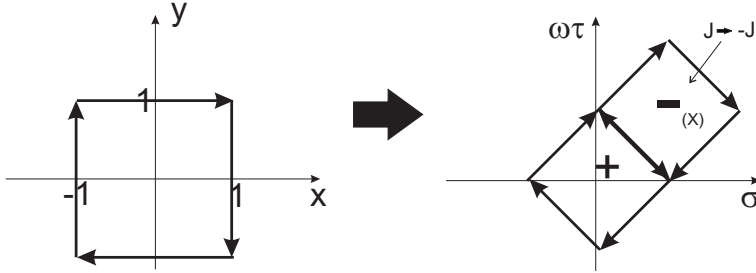


Figura C.7: Mapeo de la frontera de la región en (x, y) dos regiones con frontera orientada en el mismo sentido en $(\omega\tau, \sigma)$.

Al ir cambiando el dominio del argumento podemos teselar a todo el espacio $(\omega\tau, \sigma)$ conservando siempre la misma orientación. Gracias al comportamiento del jacobiano, en cada región donde exista una reorientación existirá un signo en el jacobiano que garantice que se conserve el signo de la integral y poder integrar equivalentemente sobre cada región o sobre la frontera total de las regiones unidas.

De esta manera podemos cubrir la región original en $(\omega\tau, \sigma)$ por k mapeos en (x, y) . En particular, en el ejemplo aquí mostrado, la región original se recupera al utilizar $k = 8$ mapeos de este tipo (figura C.8).

APÉNDICE C. INTEGRACIÓN DE LA FORMA DE EULER. CAMPO BOSÓNICO CON MASA

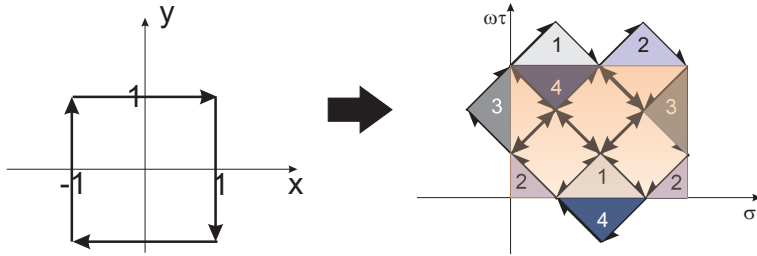


Figura C.8: Mapeo de la región sobre (x, y) a ocho regiones con la misma orientación en $(\omega\tau, \sigma)$ que logra cubrir a la región original sobre $(\omega\tau, \sigma)$ formada por el rectángulo interno.

Bibliografía

- [1] G. Arciniega, F. Nettel, L. Patiño, and H. Quevedo, “Topological discretization of bosonic strings,” *IJPAM, Volume 82, No. 1*, vol. 65, 2013.
- [2] G. Arciniega, F. Nettel, L. Patiño, and H. Quevedo, “Topological quantization of free massive bosonic fields,” *J. Geom. Symmetry Phys.*, vol. 26, 2012.
- [3] G. Arciniega, F. Nettel, L. Patiño, and H. Quevedo, “Topological quantization of free massive bosonic fields,” *Proc. of XXX Int. Conf. on Geo., Int. and Quant.*, 2011.
- [4] P. P. de Maricourt, *The letter of Petrus Peregrinus on the magnet, A.D. 1269*. McGraw Publishing Co., 1904. <http://archive.org/details/letterofpetrusp00pieriala>.
- [5] Y. Shnir, *Magnetic Monopoles*. Springer-Verlag, 2005.
- [6] H. Poincaré, “Remarques sur une expérience de M. Birkeland,” *Comptes Rendus de l’Académie*

- des sciences*, vol. 123, pp. 530–533, 1896.
<http://www.bibnum.education.fr/physique/electricité-electromagnétisme/remarques-sur-une-expérience-de-m-birkeland>.
- [7] J. J. Thompson, “On Momentum in the Electric Field,” *Phil. Mag.*, vol. 8, p. 331, 1904. Reimpreso en *Magnetic Monopoles*. Alfred S. Goldhaber y W. Peter Trower (editores). Am. Assoc. of Phys. Teach. (1990).
- [8] S. A. Boguslavskyi, “Electron paths in electromagnetic fields,” *Selected works on physics*, 1929.
- [9] J. Maxwell, *A treatise on electricity and magnetism*. No. v. 1-2 in *A Treatise on Electricity and Magnetism*, Dover Publications, 1954.
<http://books.google.com.mx/books?id=HbUPAQAAMAAJ>.
- [10] *Science and Civilization in China.*; vol. 4 of *Physics and Physical Technology, Part 3: Civil Engineering and Nautics*.
- [11] R. Lanza, *The earth’s magnetism and introduction for geologists*. Springer, 2006.
- [12] G. Cardano, *De Subtilitate*. 1551.
<http://books.google.com.mx/books?id=C307AAAAcAAJ>.
- [13] W. Gilbert, *De Magnete*. Dover Classics of Science and Mathematics, Dover Publications, 1958.
<http://books.google.com.mx/books?id=YT9EmWITmakC>.

-
- [14] B. Franklin and L. Guerra, *Autobiografía y otros escritos*. Biblioteca de la Literatura y el Pensamiento Universales, Editora Nacional, 1982.
<http://books.google.com.mx/books?id=q8BAAgAACAAJ>.
- [15] T. Pearson, *Coulomb's law*. Square Zero Editions, 1984.
<http://books.google.com.mx/books?id=HvezAAAAIAAJ>.
- [16] J. Jackson, *Classical electrodynamics*. Wiley, 1975.
http://books.google.es/books?id=_7rvAAAAMAAJ.
- [17] M. Faraday, *Experimental Researches in Electricity*, vol. 3 of *Experimental Researches in Electricity*. Bernard Quaritch, 1855.
<http://books.google.com.mx/books?id=Q7sKAAAIAAJ>.
- [18] H. Weyl, "Gravitation und elektrizität," *Sitzungsbericht der Königlich-Preussischen Akademie zu Berlin*, pp. 465–480, 1918.
- [19] H. Weyl, "Gravitation and the electron," *Proceedings of the National Academy of Sciences of the Unated States of America*, vol. 15, no. 4, pp. 323–334, 1929.
<http://www.pnas.org/content/15/4/323.citation>.
- [20] H. Weyl, "Elektron und gravitation," *Z. Phys.*, vol. 56, pp. 330–352, 1929.
- [21] L. O'Raifeiraigh, *The dawning of gauge theory*. Princeton, N.J.: Princeton University Press, 1997.

[http://www.worldcat.org/title/dawning-of-gauge-theory/
oclc/35559195&referer=brief_results](http://www.worldcat.org/title/dawning-of-gauge-theory/oclc/35559195&referer=brief_results).

- [22] P. A. M. Dirac, “Quantised singularities in the electromagnetic field,” *Proc. Roy. Soc. Lond.*, vol. A133, pp. 60–72, 1931.
- [23] T. T. Wu and C. N. Yang, “Concept of nonintegrable phase factors and global formulation of gauge fields,” *Phys. Rev. D*, vol. 12, pp. 3845–3857, Dec 1975.
- [24] M. Göckeler and T. Schücker, *Differential Geometry, Gauge Theories, and Gravity*. Cambridge University Press, 1989.
- [25] L. Patiño and H. Quevedo, “Topological quantization of gravitational fields,” *J. Math. Phys.*, vol. 46, p. 022502, 2005.
- [26] E. L. Patiño Jaidar, *Sobre el problema de la transición campo-partícula*. PhD thesis, Universidad Nacional Autónoma de México, 2003.
- [27] M. Nakahara, *Geometry, Topology and Physics, Second Edition (Graduate Student Series in Physics)*. Taylor & Francis, 2003.
- [28] B. Dubrovin, A. Fomenko, and S. Novikov, *Modern Geometry-Methods and Applications: Part I, the Geometry and Topology of Manifolds*. Graduate texts in mathematics, U.S. Government Printing Office, 1985. <http://books.google.com.mx/books?id=tlzc7xXYKd8C>.

- [29] Óscar Palmas and G. Reyes, *Curso de geometría diferencial. Parte 2. Geometría intrínseca de las superficies*. Las prensas de ciencias, 2006.
- [30] J. Baez, *Gauge Fields, Knots and Gravity*. Knots and everything, World Scientific Pub Co Inc, 1994.
- [31] T. Yu Cao, *Conceptual Developments of 20th Century Field Theories*. Cambridge University Press, 1998.
- [32] M. Planck, “Über das Gesetz der Energieverteilung im Normalspektrum,” *Annalen der Physik*, vol. 4, pp. 564 – 566, 1901. Reimpreso en inglés en el libro *100 years of Planck’s Quantum* de Ian Duck y E. C. G. Sudarshan, editorial World Scientific, página 33.
- [33] M. Planck, “Über die Elementarquanta der Materie und der Electricität,” *Annalen der Physik*, vol. 4, pp. 553 – 563, 1901. Reimpreso en inglés en el libro *100 years of Planck’s Quantum* de Ian Duck y E. C. G. Sudarshan, editorial World Scientific, página 40.
- [34] N. Bohr, *On the Quantum Theory of Line-Spectra*. Dover Publications, 2005. Este libro es la reimpresión del trabajo publicado en tres partes por Andr. Fres. Host & Son, en Copenhage, de 1918 a 1922.
- [35] P. Ehrenfest, “Adiabatic Invariants and the Theory of Quanta,” *Phil. Mag.*, vol. 33, p. 500, 1917. Reimpreso en *Sources*

- of Quantum Mechanics* de B.L. Van der Waerden, Ed. Dover (2007), pág. 79.
- [36] L. de Broglie, “A Tentative Theory of Light Quanta,” *Phil. Mag.*, vol. 47, p. 446, 1924. Reimpreso en inglés en el libro *100 years of Planck’s Quantum* de Ian Duck y E. C. G. Sudarshan, editorial World Scientific, pág. 132.
- [37] E. Schrödinger, *Collected Papers on Wave Mechanics*. Blackie & Son Limited, 1928.
- [38] W. Heisenberg, “Über quantentheoretische Umdeutung kinematischer und mecanischer Beziehungen,” *Z. Phys.*, vol. 33, p. 879, 1925. Reimpreso en inglés en *Sources of Quantum Mechanics* de B.L. Van der Waerden, Ed. Dover (2007), pág. 261.
- [39] M. Born and P. Jordan, “Zur Quantenmechanik,” *Z. Phys.*, vol. 34, p. 858, 1925. Reimpreso en inglés en *Sources of Quantum Mechanics* de B.L. Van der Waerden, Ed. Dover (2007), pág. 277.
- [40] P. A. M. Dirac, “The Fundamental Equations of Quantum Mechanics,” *Proc. Roy. Soc. Lond.*, vol. 109, pp. 642–653, 1925. Reimpreso en *Sources of Quantum Mechanics* de B.L. Van der Waerden, Ed. Dover (2007), pág. 307. En línea en <http://www.jstor.org/pss/94441>.
- [41] P. A. M. Dirac, “The Physical Interpretation of the Quantum

-
- Dynamics,” *Proc. Roy. Soc. Lond.*, vol. 113, pp. 621–641, 1927.
<http://www.jstor.org/pss/94646>.
- [42] A. Einstein, “Concerning an Heuristic Point of View Toward the Emission and Transformation of Light,” *Ann. Phys.*, vol. 17, p. 132, 1905.
http://www.esfm2005.ipn.mx/ESFM_Images/paper1.pdf.
- [43] P. A. M. Dirac, “The Quantum Theory of the Emission and Absorbtion of Radiation,” *Proc. Roy. Soc. Lond.*, vol. 114, pp. 243–265, 1927.
<http://rspa.royalsocietypublishing.org/content/114/767/243.full.pdf+html>.
- [44] S. N. Gupta, “Theory of Longitudinal Photons in Quantum Electrodynamics,” *Proc. Phys. Soc.*, vol. A63, pp. 681–691, 1950.
- [45] K. Bleuler, “A New method of treatment of the longitudinal and scalar photons,” *Helv. Phys. Acta*, vol. 23, pp. 567–586, 1950.
- [46] I. E. Segal, “Quantization of Nonlinear Systems,” *J. Math. Phys.*, vol. 1, pp. 468–488, 1960.
<http://dx.doi.org/10.1063/1.1703683>.
- [47] Q. Zhao, “Quantum kinematics and geometric quantization,” *J. Geom. Phys.*, vol. 21, no. 1, pp. 34–42, 1996.

-
- [48] B. Kostant, *Quantization and unitary representation. Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, 1970.
- [49] J. M. Souriau, *Structure of dynamical systems: a symplectic view of physics*. Birkhauser, 1997.
- [50] M. Gerstenhaber, “On the deformation of rings and algebras,” *Ann. of Math.*, vol. 79, no. 1, 1964.
- [51] B. V. Fedosov, *Deformation Quantization*. Walter De Gruyter Inc, 2002.
- [52] F. A. Berezin, “General Concept of Quantization,” *Comm. in Math. Phys.*, vol. 40, no. 2, pp. 153–174, 1975.
- [53] R. P. Feynman and A. Hibbs, *Quantum Mechanics and Path Integrals*. McGraw-Hill Co., 1965.
- [54] M. V. Karasev and V. P. Maslov, “Asymptotic and geometric quantization,” *Uspekhi Mat. Nauk*, vol. 39, pp. 115–173, 1984.
- [55] S. T. Ali and M. Engliš, “Quantization methods: a guide for physicists and analysts,” *Rev. Math. Phys.*, vol. 17, pp. 391–490, 2005.
- [56] S. Glashow, “Partial Symmetries of Weak Interactions,” *Nucl. Phys.*, vol. 22, pp. 579–588, 1961.
- [57] S. Weinberg, “A model of leptons,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 19, pp. 1264–1266, Nov 1967.
<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.19.1264>.

-
- [58] A. Salam, “Weak and electromagnetic interactions,” *Selected Papers of Abdus Salam*, vol. 76, p. 853, 1994.
- [59] M. Veltman, “Perturbation theory of massive yang-mills fields,” *Nuclear Physics B*, vol. 7, no. 5, pp. 637 – 650, 1968.
- [60] G. 'tHooft, “Renormalization of massless yang-mills fields,” *Nuclear Physics B*, vol. 33, no. 1, pp. 173 – 199, 1971.
- [61] G. Hooft, “Renormalizable lagrangians for massive yang-mills fields,” *Nuclear Physics B*, vol. 35, no. 1, pp. 167 – 188, 1971.
- [62] G. 't Hooft and M. Veltman, “Regularization and renormalization of gauge fields,” *Nuclear Physics B*, vol. 44, no. 1, pp. 189 – 213, 1972.
- [63] J. Goldstone, “Field theories with « superconductor » solutions,” *Il Nuovo Cimento*, vol. 19, no. 1, pp. 154–164, 1961. <http://dx.doi.org/10.1007/BF02812722>.
- [64] J. Goldstone, A. Salam, and S. Weinberg, “Broken symmetries,” *Phys. Rev.*, vol. 127, pp. 965–970, Aug 1962. <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.127.965>.
- [65] F. Englert and R. Brout, “Broken symmetry and the mass of gauge vector mesons,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 13, pp. 321–323, Aug 1964. <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.13.321>.

-
- [66] P. W. Higgs, “Broken symmetries and the masses of gauge bosons,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 13, pp. 508–509, Oct 1964. <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.13.508>.
- [67] G. S. Guralnik, C. R. Hagen, and T. W. B. Kibble, “Global conservation laws and massless particles,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 13, pp. 585–587, Nov 1964. <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.13.585>.
- [68] R. L. Garwin, L. M. Lederman, and M. Weinrich, “Observations of the failure of conservation of parity and charge conjugation in meson decays: the magnetic moment of the free muon,” *Phys. Rev.*, vol. 105, pp. 1415–1417, Feb 1957. <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.105.1415>.
- [69] J. I. Friedman and V. L. Telegdi, “Nuclear emulsion evidence for parity nonconservation in the decay chain $\pi^+ \rightarrow \mu^+ \rightarrow e^+$,” *Phys. Rev.*, vol. 105, pp. 1681–1682, 1957.
- [70] C. S. Wu, E. Ambler, R. W. Hayward, D. D. Hoppes, and R. P. Hudson, “Experimental test of parity conservation in beta decay,” *Phys. Rev.*, vol. 105, pp. 1413–1415, Feb 1957. <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.105.1413>.
- [71] J. H. Christenson, J. W. Cronin, V. L. Fitch, and R. Turlay, “Evidence for the 2π decay of the k_2^0 meson,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 13, pp. 138–140, Jul 1964. <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.13.138>.

- [72] N. Cabibbo, “Unitary symmetry and leptonic decays,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 10, pp. 531–533, Jun 1963. <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.10.531>.
- [73] M. Kobayashi and T. Maskawa, “*cp*-violation in the renormalizable theory of weak interaction,” *Progress of Theoretical Physics*, vol. 49, no. 2, pp. 652–657, 1973. <http://ptp.ipap.jp/link?PTP/49/652/>.
- [74] G. Luders, “On the Equivalence of Invariance under Time Reversal and under Particle-Antiparticle Conjugation for Relativistic Field Theories,” *Kong. Dan. Vid. Sel. Mat. Fys. Med.*, vol. 28N5, pp. 1–17, 1954.
- [75] G. Luders, “Proof of the TCP theorem,” *Annals Phys.*, vol. 2, pp. 1–15, 1957.
- [76] W. Pauli, “On the conservation of the lepton charge,” *Nuovo Cimento*, vol. 6, pp. 204–215, 1957.
- [77] F. Zwicky, “Die Rotverschiebung von extragalaktischen nebeln,” *Helvetica Physica Acta*, vol. 6, pp. 110–127.
- [78] S. W. Hawking and G. F. R. Ellis, *The large scale structure of space-time*. Cambridge Monographs on Mathematical Physics, 1973.
- [79] A. Einstein, *La Gran Ilusión: las grandes obras de Albert Einstein*. Crítica, 2008. Stephen W. Hawking (compilador).

-
- [80] A. G. Riess, A. V. Filippenko, P. Challis, A. Clocchiatti, A. Diercks, P. M. Garnavich, R. L. Gilliland, C. J. Hogan, S. Jha, R. P. Kirshner, B. Leibundgut, M. M. Phillips, D. Reiss, B. P. Schmidt, R. A. Schommer, R. C. Smith, J. Spyromilio, C. Stubbs, N. B. Suntzeff, and J. Tonry, “Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant,” *The Astronomical Journal*, vol. 116, no. 3, p. 1009, 1998. <http://stacks.iop.org/1538-3881/116/i=3/a=1009>.
- [81] S. Perlmutter *et al.*, “Measurements of Omega and Lambda from 42 high redshift supernovae,” *Astrophys. J.*, vol. 517, pp. 565–586, 1999.
- [82] S. Weinberg, “The cosmological constant problem,” *Rev. Mod. Phys.*, vol. 61, pp. 1–23, Jan 1989. <http://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.61.1>.
- [83] Y. B. Zel’dovich, “The cosmological constant and the theory of elementary particles,” *Soviet Physics Uspekhi*, vol. 11, no. 3, p. 381, 1968. <http://stacks.iop.org/0038-5670/11/i=3/a=A13>.
- [84] J. Baez, “How many fundamental constants are there?,” 2011. <http://math.ucr.edu/home/baez/constants.html>.
- [85] Z. Maki, M. Nakagawa, and S. Sakata, “Remarks on the unified model of elementary particles,” *Progress of*

- Theoretical Physics*, vol. 28, no. 5, pp. 870–880, 1962.
<http://ptp.ipap.jp/link?PTP/28/870/>.
- [86] B. Pontecorvo, “Neutrino Experiments and the Problem of Conservation of Leptonic Charge,” *Soviet Journal of Experimental and Theoretical Physics*, vol. 26, p. 984, May 1968.
<http://adsabs.harvard.edu/abs/1968JETP...26..984P>.
- [87] F. Jegerlehner, “The hierarchy problem of the electroweak Standard Model revisited,” 2013.
- [88] L. Rosenfeld, “Zur Quantelung der Wellenfelder,” *Ann. der Phys.*, vol. 397, pp. 113–152, 1930. <http://pubman.mpiwg-berlin.mpg.de/pubman/item/escidoc:643707:3/component/escidoc:644310/P381.PDF>.
- [89] C. Rovelli, “Notes for a brief history of quantum gravity,” pp. 742–768, 2000.
- [90] S. Carlip, “Quantum Gravity: a Progress Report,” *Rept. Prog. Phys.*, vol. 64, p. 885, 2001.
- [91] F. Nettel and H. Quevedo, “Topological spectrum of classical configurations,” *AIP Conf. Proc.*, vol. 956, pp. 9–14, 2007.
- [92] F. Nettel and H. Quevedo, “Topological quantization of the harmonic oscillator,” *Int. J. of Pure and Appl. Math.*, vol. 70, p. 117, 2011.

-
- [93] F. Nettel, H. Quevedo, and M. Rodríguez, “Topological spectrum of mechanical system,” *Rep. Math. Phys.*, vol. 64, p. 355, 2009.
- [94] S. Deguchi, “Atiyah-Singer Index Theorem in an $SO(3)$ Yang-Mills-Higgs system and derivation of a charge quantization condition,” *Prog. Theor. Phys.*, vol. 118, pp. 769–784, 2007.
- [95] A. S. Schwarz, “On Regular Solutions of Euclidean Yang-Mills Equations,” *Phys. Lett.*, vol. B67, pp. 172–174, 1977.
- [96] W.-J. Zhong and Y.-S. Duan, “Topological quantization of instantons in $SU(2)$ Yang-Mills theory,” *Chin. Phys. Lett.*, vol. 25, pp. 1534–1537, 2008.
- [97] A. F. Rañada and J. L. Trueba, “Topological quantization of the magnetic flux,” *Found. Phys.*, vol. 36, pp. 427–436, 2006.
- [98] S. A. Bulgadaev, “Topological quantization of current in quantum tunnel contacts,” *Jetp. Letters, No. 12.*, vol. 83, pp. 563–567, 2006.
- [99] M. Y. Choi, “Bloch oscillation and topological quantization,” *Phys. Rev. B*, vol. 50, pp. 13875–13878, Nov 1994. <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.50.13875>.
- [100] R. Leone and L. Lévy, “Topological quantization by controlled paths: Application to cooper pairs pumps,” *Phys. Rev. B*, vol. 77, p. 064524, Feb 2008. <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.77.064524>.

- [101] O. Alvarez, “Topological quantization and cohomology,” *Comm. Math. Phys.*, No. 2, vol. 100, pp. 279–309, 1985.
- [102] T. Frankel, *The Geometry of Physics: An Introduction*. Cambridge University Press, 2011.
- [103] C. Nash and S. Sen, *Topology and Geometry for Physicists*. Academic Press, 1992.
- [104] D. Flores, “Definición de estados en la Cuantización Topológica para Sistemas Clásicos,” 2015. Tesis de maestría. En progreso.
- [105] J. J. Vega, “Definición de estados en la Cuantización Topológica para Campos,” 2015. Tesis de maestría. En progreso.
- [106] G. Naber, *Topology, Geometry and Gauge Fields*. Springer, 2011.
- [107] S. Kobayashi and K. Nomizu, *Foundations of Differential Geometry*. Wiley Publishers, 1963.
- [108] F. Nettel Rueda, *Espectros topológicos en mecánica clásica, teoría de cuerdas y mapeos armónicos generalizados*. PhD thesis, Universidad Nacional Autónoma de México, 2011.
- [109] J. Polchinski, *String Theory. An Introduction to the Bosonic String*, vol. 1. Cambridge University Press, 2007.
- [110] C. Johnson, *D-Branes*. Cambridge Monographs in Mathematical Physics, 2003.

-
- [111] D. J. Cirilo-Lombardo, “Particle Actions in the Superspace, Square Root Operators and Quartions,” *Rom. J. Phys.*, vol. 50, pp. 875–889, 2005.
- [112] J.-P. Gazeau, M. Lachieze-Rey, and W. Piechocki, “On three quantization methods for particle on hyperboloid,” 2005.
- [113] R. Delbourgo, “A Square root of the harmonic oscillator,” 1995.
- [114] E. Elizalde, “On the concept of determinant for the differential operators of quantum physics,” *JHEP*, vol. 9907, p. 015, 1999.
- [115] C. W. Misner, “Harmonic maps as models for physical theories,” *Phys. Rev. D*, vol. 18, pp. 4510–4524, Dec 1978.
- [116] B. Zwiebach, *A first course in String Theory*. Cambridge University Press, 2009.
- [117] A. I. Miller, ed., *Early Quantum Electrodynamics: A Sourcebook*. Cambridge University Press, October 1995.
- [118] M. E. Peskin and D. V. Schroeder, *An Introduction To Quantum Field Theory (Frontiers in Physics)*. Westview Press, October 1995.
- [119] M. Srednicki, *Quantum Field Theory*. Cambridge University Press, January 2007. <http://www.physics.ucsb.edu/~mark/qft.html>.
- [120] S. Weinberg, *The Quantum Theory of Fields, Volume I: Foundations*. Cambridge University Press, May 2005.

-
- [121] F. B. Fuller, “Harmonic mappings,” *Proc. Nat. Acad. Sci.*, vol. 40, pp. 987–991, Oct 1954. <http://www.jstor.org/stable/89361>.
- [122] J. Eells and L. Lemaire, “A Report on Harmonic Maps,” *Bull. London Math. Soc.*, vol. 20, pp. 385–524, 1988.
- [123] R. Metsaev, “Type IIB Green-Schwarz superstring in plane wave Ramond-Ramond background,” *Nucl. Phys.*, vol. B625, pp. 70–96, 2002.
- [124] J. B. Griffiths and J. Podolský. Cambridge University Press, 2009. <http://dx.doi.org/10.1017/CBO9780511635397>.
- [125] H. W. Brinkmann, “Riemann spaces conformal to Einstein spaces,” *Mathematische Annalen*, vol. 91, pp. 269–278, 1924.
- [126] H. W. Brinkmann, “Einstein spaces which are mapped conformally on each other,” *Mathematische Annalen*, vol. 94, pp. 119–145, 1925. <http://dx.doi.org/10.1007/BF01208647>.
- [127] A. Peres, “Some gravitational waves,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 3, pp. 571–572, Dec 1959. <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.3.571>.
- [128] A. Einstein, “Über Gravitationswellen,” *Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften Berlin*, 1918. <http://echo.mpiwg-berlin.mpg.de/ECHOdocuView?url=/permanent/echo/einstein/>

-
- sitzungsberichte/W7ZU8V1E/index.meta&pn=1. En inglés en The collected papers of Albert Einstein, Vol. 7,.
- [129] N. Rosen, “Plane Polarized Waves in the General Theory of Relativity,” *Phys. Z. Sowjet*, vol. 12, pp. 366–372, 1937.
- [130] A. Einstein and N. Rosen, “On gravitational waves,” *Journal of the Franklin Institute*, vol. 223, no. 1, pp. 43 – 54, 1937.
- [131] O. R. Baldwin and G. B. Jeffery, “The relativity theory of plane waves,” *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character*, vol. 111, no. 757, pp. pp. 95–104, 1926. <http://www.jstor.org/stable/94665>.
- [132] W. B. Bonnor, “I. les ondes gravitationnelles en relativité générale,” *Annales de l’institut Henri Poincaré*, vol. 15, no. 3, pp. 146–157, 1957.
- [133] H. Bondi, “Plane Gravitational Waves in General Relativity,” *Nature*, vol. 179, pp. 1072–1073, May. 1957.
- [134] H. Bondi, F. A. E. Pirani, and I. Robinson, “Gravitational waves in general relativity III. Exact plane waves,” *Proc. Roy. Soc. Lon.*, vol. 251, pp. 519–533, Jun. 1959. <http://http://www.jstor.org/stable/100727>.
- [135] R. Penrose, “A remarkable property of plane waves in general relativity,” *Rev. Mod. Phys.*, vol. 37, pp. 215–220, 1965.

-
- [136] R. Penrose, “Any spacetime has a plane wave as a limit,” *Differential Geometry and Relativity*, pp. 271–275, 1976.
- [137] M. Blau, J. M. Figueroa-O’Farrill, C. Hull, and G. Papadopoulos, “A new maximally supersymmetric background of IIB superstring theory,” *JHEP*, vol. 01, p. 047, 2002.
- [138] R. Wald, *General Relativity*. The University of Chicago Press, 1984.
- [139] R. Russo and A. Tanzini, “The duality between IIB string theory on pp-wave and $N = 4$ SYM: A status report,” *Class. Quant. Grav.*, vol. 21, pp. S1265–2196, 2004.
- [140] D. Sadri and M. M. Sheikh-Jabbari, “The plane-wave / super Yang-Mills duality,” *Rev. Mod. Phys.*, vol. 76, p. 853, 2004.
- [141] J. Polchinski, *Superstring Theory And Beyond*, vol. 2. Cambridge University Press, 1998.
- [142] R. Nepomechie, “Magnetic monopoles from antisymmetric tensor gauge fields,” *Phys. Rev.*, vol. D31, p. 1921, 1985.
- [143] C. Teitelboim, “Monopoles of Higher Rank,” *Phys.Lett.*, vol. B167, p. 69, 1986.
- [144] J. H. Schwarz and P. West, “Symmetries and transformations of chiral $n = 2$, $d = 10$ supergravity,” *Phys. Lett. B*, vol. 126, no. 5, pp. 301 – 304, 1983.

-
- [145] J. H. Schwarz, “Covariant field equations of chiral $n = 2$, $d = 10$ supergravity,” *Nuclear Physics B*, vol. 226, no. 2, pp. 269 – 288, 1983.
- [146] “The complete $n = 2$, $d = 10$ supergravity,” *Nuclear Physics B*, vol. 238, no. 1, pp. 181 – 220, 1984.
- [147] D. Berenstein and H. Nastase, “On light cone string field theory from superYang-Mills and holography,” 2002.
- [148] D. E. Díaz Vázquez, *On AdS/CFT Correspondence beyond SUGRA: plane waves, free CFT’s and double-trace deformations*. PhD thesis, Universidad de Humboldt, 2007.
- [149] H. Dorn and C. Sieg, “Conformal boundary and geodesics for $AdS(5) \times S^{**5}$ and the plane wave: Their approach in the Penrose limit,” *JHEP*, vol. 0304, p. 030, 2003.
- [150] V. E. Hubeny and M. Rangamani, “Causal structures of pp waves,” *JHEP*, vol. 0212, p. 043, 2002.
- [151] D. Marolf and S. F. Ross, “Plane waves: To infinity and beyond!,” *Class. Quant. Grav.*, vol. 19, pp. 6289–6302, 2002.