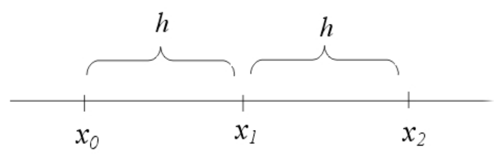
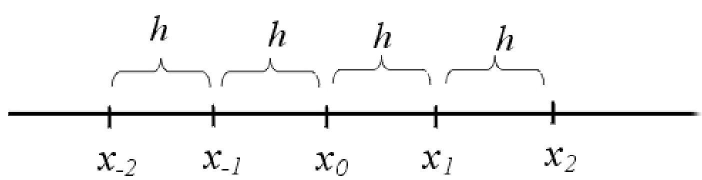
1 Diference a diferenční rovnice

Nechť je dána *ekvidistantní síť uzlů* $x_0, x_1, \ldots, x_n$ tj. $\exists h \in \mathbb{R}$, $h > 0$ takové, že $x_i = x_0 + ih$, $\forall i = 0, 1, \ldots, n$. Číslo h se nazývá krok.



Někdy můžeme uvažovat i *nekonečnou ekvidistantní síť uzlů*, $\{x_i | x_i = x_0 + ih, i \in \mathbb{Z}\}$, $h \in \mathbb{R}, h \neq 0$.



Je-li funkce $f(x)$ definována na ekvidistantní síti uzlů, píšeme $f(x_i) = f_i$

1.1 Přímé a zpětné diference

Definice 1.1. Nechť je dána ekvidistantní síť uzlů $\{x_i | x_i = x_0 + ih, i \in \mathbb{Z}\}$, $h \in \mathbb{R}, h \neq 0$. Nechť funkce $f(x)$ je definována na ekvidistantní síti uzlů. Pak *přímá diference prvního řádu*, neboli první diference vpřed, funkce $f(x)$ v uzlu x_i je definována vztahem

$$\triangle f_i = f_{i+1} - f_i.$$

Přímá diference k-tého řádu, neboli k-tá diference vpřed, funkce $f(x)$ v uzlu x_i je definována vztahem

$$\triangle^k f_i = \triangle^{k-1} f_{i+1} - \triangle^{k-1} f_i \qquad k = 2, 3, \ldots$$

Poznámka 1.1. Při ručním výpočtu, tj. je-li dána konečná ekvidistantní síť uzlů $\{x_i | x_i = x_0 + ih, i = 0, \ldots, n\}$, $h \in \mathbb{R}, h > 0$ je výhodné při výpočtu diferencí zapisovat výsledky do tzv. *diferenční tabulky*.

x_i	f_i	$\triangle f_i$	$\triangle^2 f_i$	$\ldots$	$\triangle^n f_i$
x_0	f_0				
		$\triangle f_0$			
x_1	f_1		$\triangle^2 f_0$		
		$\triangle f_1$			
x_2	f_2				
					$\triangle^n f_0$
x_{n-2}	f_{n-2}				
		$\triangle f_{n-2}$			
x_{n-1}	f_{n-1}		$\triangle^2 f_{n-2}$		
		$\triangle f_{n-1}$			
x_n	f_n				

Uveďmě si příklad na výpočet přímých diferencí pomocí diferenční tabulky:

Příklad 1.1. Vypočítejte přímé diference funkce $f(x) = x^4 + 2x^3 + 4x - 5$ v bodě x_i, kde $i = 0, 1, 2, 3, 4, 5$. Výpočet zaznamenejte do diferenční tabulky.

x_i	f_i	$\triangle f_i$	$\triangle^2 f_i$	$\triangle^3 f_i$	$\triangle^4 f_i$	$\triangle^5 f_i$
0	-5					
		$\triangle f_0 = 7$				
1	2		$\triangle^2 f_0 = 26$			
		$\triangle f_1 = 33$		$\triangle^3 f_0 = 48$		
2	35		$\triangle^2 f_1 = 74$		$\triangle^4 f_0 = 24$	
		$\triangle f_2 = 107$		$\triangle^3 f_1 = 72$		$\triangle^5 f_0 = 0$
3	142		$\triangle^2 f_2 = 146$		$\triangle^4 f_1 = 24$	
		$\triangle f_3 = 253$		$\triangle^3 f_2 = 96$		
4	395		$\triangle^2 f_3 = 242$			
		$\triangle f_4 = 495$				
5	890					

Pro ověření správnosti výpočtů, nebo pro zrychlení výpočtu, nám poslouží v Matlabu krátký M-file:

```
function [D] = vpred(x,y)
% vstup x (vektor uzlů), y (funkční hodnoty v bodech x)
% výstup D je matice, v níž první sloupec tvoří vstupní body x, druhý
% sloupec funkční hodnoty v bodech x a v dalších sloupcích jsou diference vpred
[m,n]=size(x);
[o,p]=size(y);
if n==p
    D(n,n+1)=(zeros);
    D(:,1)=x';
    D(:,2)=y';
    j=3;
    while (j<n+2)
        for i=1:1:n-j+2
            D(i,j)=D(i+1,j-1)-D(i,j-1);
        end
        j=j+1;
    end
else 'počet složek y neodpovídá počtu složek x'
end
end
```

Do Matlabu pak jen postupně zadáme:

```
x=[0 1 2 3 4 5]
y=x.^4 + 2*x.^3 + 4*x - 5
D=vpred(x,y)
```

Poznámka 1.2. *Funkční hodnoty můžeme zadat buď jako vektor, nebo funknčním předpisem, jak je uvedeno výše.*

Věta 1.1. *Nechť je dána ekvidistantní síť uzlů* $\{x_i | x_i = x_0 + ih, i \in \mathbb{Z}\}$, $h \in \mathbb{R}, h \neq 0$ *a nechť* $f(x)$ *je definována v bodech této sítě. Pak platí:*

$$\triangle^k f_i = \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} f_{i+j}.$$

Pomocí M-file v Matlabu ověříme výpočet $\triangle^2 f_3$ dle zadání v Příkladu 1.1.

```
function [f] = kvpred(x,y,a,k)
% vstup x, y (funkční hodnoty v bodech x), parametr a je uzel ve kterém ...
... chceme spočítat k-tou diferenci
% výstup f je k-tá diference vpřed v uzlu a
[m,n]=size(x);
[o,p]=size(y);
if n==p
 i=find(x==a);
 if (k<n-i+1)
   f=0;
   for j=0:k
    f=f+((-1)^(k-j))*(factorial(k)/(factorial(j)*factorial(k-j)))*y(i+j);
   end
 else 'k-tou diferenci vpřed nelze pro tento bod vypočíat'
 end
else 'počet složek y neodpovídá počtu složek x'
end
end
```

Do Matlabu tedy zadáme:

```
x=[0 1 2 3 4 5]
y=x.^4 + 2*x.^3 + 4*x - 5
f=kvpred(x,y,3,2)
```

Definice 1.2. Nechť je dána ekvidistantní síť uzlů $\{x_i | x_i = x_0 + ih, i \in \mathbb{Z}\}$, $h \in \mathbb{R}, h \neq 0$. Nechť funkce $f(x)$ je definována v uzlech této sítě. Pak *zpětná diference prvního řádu*, neboli první diference vzad, funkce $f(x)$ v uzlu x_i je definována vztahem

$$\nabla f_i = f_i - f_{i-1}.$$

Zpětná diference k-tého řádu, neboli k-tá diference vzad, funkce $f(x)$ v uzlu x_i je definována vztahem

$$\nabla^k f_i = \nabla^{k-1} f_i - \nabla^{k-1} f_{i-1} \qquad k = 2, 3, \ldots$$

Poznámka 1.3. Při ručním výpočtu, tj. je-li dána konečná ekvidistantní síť uzlů $\{x_i | x_i = x_0 + ih, i = 0, \ldots, n\}$, $h \in \mathbb{R}, h > 0$ je opět vhodné při výpočtu diferencí zapisovat výsledky do diferenční tabulky

$$\begin{array}{llllll}
x_i & f_i & \nabla f_i & \nabla^2 f_i & \ldots & \nabla^n f_i \\
\hline
x_0 & f_0 & & & & \\
 & & \nabla f_1 & & & \\
x_1 & f_1 & & \nabla^2 f_2 & & \\
 & & \nabla f_2 & & & \\
x_2 & f_2 & & & & \\
 & & & & & \\
 & & & & & \nabla^n f_n \\
 & & & & & \\
x_{n-2} & f_{n-2} & & & & \\
 & & \nabla f_{n-1} & & & \\
x_{n-1} & f_{n-1} & & \nabla^2 f_n & & \\
 & & \nabla f_n & & & \\
x_n & f_n & & & &
\end{array},$$

Příklad 1.2. Vypočítejte zpětné diference funkce $f(x) = x^4 + 2x^3 + 4x - 5$ v bodě x_i, kde $i = 0, 1, 2, 3, 4, 5$. Výpočet zaznamenejte do diferenční tabulky.

x_i	f_i	∇f_i	$\nabla^2 f_i$	$\nabla^3 f_i$	$\nabla^4 f_i$	$\nabla^5 f_i$
0	-5					
		$\nabla f_1 = 7$				
1	2		$\nabla^2 f_2 = 26$			
		$\nabla f_2 = 33$		$\nabla^3 f_3 = 48$		
2	35		$\nabla^2 f_3 = 74$		$\nabla^4 f_4 = 24$	
		$\nabla f_3 = 107$		$\nabla^3 f_4 = 72$		$\nabla^5 f_5 = 0$
3	142		$\nabla^2 f_4 = 146$		$\nabla^4 f_5 = 24$	
		$\nabla f_4 = 253$		$\nabla^3 f_5 = 96$		
4	395		$\nabla^2 f_5 = 242$			
		$\nabla f_5 = 495$				
5	890					

Pro rychlý výpočet zpětných diferencí poslouží opět M-file:

```
function [D] = vzad(x,y)
% vstup x, y (funkční hodnoty v bodech x)
% výstup D je matice, v níž první sloupec tvoří vstupní body x, ...
... druhý sloupec funkční hodnoty v bodech x ...
... a v dalších sloupcích jsou diference vzad
[m,n]=size(x); [o,p]=size(y);
if n==p
    D(n,n+1)=(zeros); D(:,1)=x'; D(:,2)=y';
    j=3;
    while (j<n+3)
        for i=n:-1:j-1
            D(i,j)=D(i,j-1)-D(i-1,j-1);
        end
        j=j+1;
    end
else 'počet složek y neodpovídá počtu složek x'
end
end
```

Věta 1.2. *Nechť je dána ekvidistantní síť uzlů* $\{x_i | x_i = x_0 + ih, i \in \mathbb{Z}\}$, $h \in \mathbb{R}, h \neq 0$ *a nechť* $f(x)$ *je definována v bodech této sítě. Pak platí:*

$$\bigtriangledown^k f_i = \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{k}{j} f_{i-j}.$$

Díky této větě opět můžeme vypočítat k-tou diferenci vzad pouze z funkčních hodnot v daných uzlech, v M-file následovně:

```
function [f] = kvzad(x,y,a,k)
% vstup x, y (funkční hodnoty v bodech x), parametr a je uzel ve kterém ...
...chceme spočítat k-tou diferenci
% výstup f je k-tá diference vzad v uzlu a
[m,n]=size(x);
[o,p]=size(y);
if n==p
    i=find(x==a);
    if (k<i)
            f=0;
            for j=0:k
                f=f+((-1)^j)*(factorial(k)/(factorial(j)*factorial(k-j)))*y(i-j);
            end
    else 'k-tou diferenci vpřed nelze pro tento bod vypočíat'
    end
else 'počet složek y neodpovídá počtu složek x'
end
end
```

Věta 1.3. *Nechť $k \in \mathbb{N}$ a nechť je funkce $f(x)$ definována na ekvidistantní síti uzlů $\{x_i | x_i = x_0 + ih, i \in \mathbb{Z}\}$, $h \in \mathbb{R}, h \neq 0$. Pak platí:*

$$\bigtriangledown^k f_i = \triangle^k f_{i-k}$$

$$\triangle^k f_i = \bigtriangledown^k f_{i+k}$$

Příklad 1.3. Ukažte, že platí vztah $\bigtriangledown^k f_i = \triangle^k f_{i-k}$ na funkci $f(x) = x^4 + 2x^3 + 4x - 5$ v bodě x_i, kde i =0,1,2,3,4,5. Výpočet zaznamenejte do diferenční tabulky.

x_i	f_i	$\triangle f_i$	$\triangle^2 f_i$	$\triangle^3 f_i$	$\triangle^4 f_i$	$\triangle^5 f_i$
0	-5					
		$\triangle f_0$ =7				
1	2		$\triangle^2 f_0$ =26			
		$\triangle f_1$ =33		$\triangle^3 f_0$ =48		
2	35		$\triangle^2 f_1$ =74		$\triangle^4 f_0$ =24	
		$\triangle f_2$ =107		$\triangle^3 f_1$ =72		$\triangle^5 f_0$ =0
3	142		$\triangle^2 f_2$ =146		$\triangle^4 f_1$ =24	
		$\triangle f_3$ =253		$\triangle^3 f_2$ =96		
4	395		$\triangle^2 f_3$ =242			
		$\triangle f_4$ =495				
5	890					

Zpětné diference vypočítáme pomocí vztahu $\bigtriangledown^k f_i = \triangle^k f_{i-k}$.

Pro $k = 1$ dostaneme:

$$\bigtriangledown f_1 = \triangle f_{1-1} = \triangle f_0 = 7$$

$$\bigtriangledown f_2 = \triangle f_{2-1} = \triangle f_1 = 33$$

$$\bigtriangledown f_3 = \triangle f_{3-1} = \triangle f_2 = 107$$

$$\bigtriangledown f_4 = \triangle f_{4-1} = \triangle f_3 = 253$$

$$\bigtriangledown f_5 = \triangle f_{5-1} = \triangle f_4 = 495$$

Pro $k = 2$ dostaneme:

$$\bigtriangledown^2 f_2 = \bigtriangleup^2 f_{2-2} = \bigtriangleup^2 f_0 = 26$$
$$\bigtriangledown^2 f_3 = \bigtriangleup^2 f_{3-2} = \bigtriangleup^2 f_1 = 74$$
$$\bigtriangledown^2 f_4 = \bigtriangleup^2 f_{4-2} = \bigtriangleup^2 f_2 = 146$$
$$\bigtriangledown^2 f_5 = \bigtriangleup^2 f_{5-2} = \bigtriangleup^2 f_3 = 242$$

Pro $k = 3$ dostaneme:

$$\bigtriangledown^3 f_3 = \bigtriangleup^3 f_{3-3} = \bigtriangleup^3 f_0 = 48$$
$$\bigtriangledown^3 f_4 = \bigtriangleup^3 f_{4-3} = \bigtriangleup^3 f_1 = 72$$
$$\bigtriangledown^3 f_5 = \bigtriangleup^3 f_{5-3} = \bigtriangleup^3 f_2 = 96$$

Pro $k = 4$ dostaneme:

$$\bigtriangledown^4 f_4 = \bigtriangleup^4 f_{4-4} = \bigtriangleup^4 f_0 = 24$$
$$\bigtriangledown^4 f_5 = \bigtriangleup^4 f_{5-4} = \bigtriangleup^4 f_1 = 24$$

Pro $k = 5$ dostaneme:

$$\bigtriangledown^5 f_5 = \bigtriangleup^5 f_{5-5} = \bigtriangleup^5 f_0 = 0$$

x_i	f_i	$\bigtriangledown f_i$	$\bigtriangledown^2 f_i$	$\bigtriangledown^3 f_i$	$\bigtriangledown^4 f_i$	$\bigtriangledown^5 f_i$
0	-5					
		$\bigtriangledown f_1 = 7$				
1	2		$\bigtriangledown^2 f_2 = 26$			
		$\bigtriangledown f_2 = 33$		$\bigtriangledown^3 f_3 = 48$		
2	35		$\bigtriangledown^2 f_3 = 74$		$\bigtriangledown^4 f_4 = 24$	
		$\bigtriangledown f_2 = 107$		$\bigtriangledown^3 f_4 = 72$		$\bigtriangledown^5 f_5 = 0$
3	142		$\bigtriangledown^2 f_4 = 146$		$\bigtriangledown^4 f_5 = 24$	
		$\bigtriangledown f_4 = 253$		$\bigtriangledown^3 f_5 = 96$		
4	395		$\bigtriangledown^2 f_5 = 242$			
		$\bigtriangledown f_5 = 495$				
5	890					

Příklad 1.4. Ukažte, že platí vztah $\triangle^k f_i = \triangledown^k f_{i+k}$ na funkci $f(x) = x^4 + 2x^3 + 4x - 5$ v bodě x_i, kde i =0,1,2,3,4,5. Výpočet zaznamenejte do diferenční tabulky.

x_i	f_i	$\triangledown f_i$	$\triangledown^2 f_i$	$\triangledown^3 f_i$	$\triangledown^4 f_i$	$\triangledown^5 f_i$
0	-5					
		$\triangledown f_1 =7$				
1	2		$\triangledown^2 f_2 =26$			
		$\triangledown f_2 =33$		$\triangledown^3 f_3 =48$		
2	35		$\triangledown^2 f_3 =74$		$\triangledown^4 f_4 =24$	
		$\triangledown f_2 =107$		$\triangledown^3 f_4 =72$		$\triangledown^5 f_5 =0$
3	142		$\triangledown^2 f_4 =146$		$\triangledown^4 f_5 =24$	
		$\triangledown f_4 =253$		$\triangledown^3 f_5 =96$		
4	395		$\triangledown^2 f_5 =242$			
		$\triangledown f_5 =495$				
5	890					

Zpětné diference vypočítáme pomocí vztahu $\triangle^k f_i = \triangledown^k f_{i+k}$.

Pro $k = 1$ dostaneme:

$$\triangle f_0 = \triangledown f_{0+1} = \triangledown f_1 = 7$$
$$\triangle f_1 = \triangledown f_{1+1} = \triangledown f_2 = 33$$
$$\triangle f_2 = \triangledown f_{2+1} = \triangledown f_3 = 107$$
$$\triangle f_3 = \triangledown f_{3+1} = \triangledown f_4 = 253$$
$$\triangle f_4 = \triangledown f_{4+1} = \triangledown f_5 = 495$$

Pro $k = 2$ dostaneme:

$$\triangle^2 f_0 = \triangledown^2 f_{0+2} = \triangledown^2 f_2 = 26$$
$$\triangle^2 f_1 = \triangledown^2 f_{1+2} = \triangledown^2 f_3 = 74$$
$$\triangle^2 f_2 = \triangledown^2 f_{2+2} = \triangledown^2 f_4 = 146$$
$$\triangle^2 f_3 = \triangledown^2 f_{3+2} = \triangledown^2 f_5 = 242$$

Pro $k = 3$ dostaneme:

$$\triangle^3 f_0 = \nabla^3 f_{0+3} = \nabla^3 f_3 = 48$$
$$\triangle^3 f_1 = \nabla^3 f_{1+3} = \nabla^3 f_4 = 72$$
$$\triangle^3 f_2 = \nabla^3 f_{2+3} = \nabla^3 f_5 = 96$$

Pro $k = 4$ dostaneme:

$$\triangle^4 f_0 = \nabla^4 f_{0+4} = \nabla^4 f_4 = 24$$
$$\triangle^4 f_1 = \nabla^4 f_{1+4} = \nabla^4 f_5 = 24$$

Pro $k = 5$ dostaneme:

$$\triangle^5 f_0 = \nabla^5 f_{0+5} = \nabla^5 f_5 = 0$$

x_i	f_i	$\triangle f_i$	$\triangle^2 f_i$	$\triangle^3 f_i$	$\triangle^4 f_i$	$\triangle^5 f_i$
0	-5					
		$\triangle f_0 = 7$				
1	2		$\triangle^2 f_0 = 26$			
		$\triangle f_1 = 33$		$\triangle^3 f_0 = 48$		
2	35		$\triangle^2 f_1 = 74$		$\triangle^4 f_0 = 24$	
		$\triangle f_2 = 107$		$\triangle^3 f_1 = 72$		$\triangle^5 f_0 = 0$
3	142		$\triangle^2 f_2 = 146$		$\triangle^4 f_1 = 24$	
		$\triangle f_3 = 253$		$\triangle^3 f_2 = 96$		
4	395		$\triangle^2 f_3 = 242$			
		$\triangle f_4 = 495$				
5	890					

Věta 1.4. *Nechť je dána ekvidistantní síť uzlů* $\{x_i | x_i = x_0 + ih, i \in \mathbb{Z}\}$, $h \in \mathbb{R}, h \neq 0$ *a nechť je funkce* $f(x)$ *definována v bodech této sítě. Pak funkční hodnotu funkce* $f(x)$ *v bodě* x_{i+k}*, resp.* x_{i-k}*, lze vyjádřit jako lineární kombinaci diferencí vpřed, rsp. diferencí vzad, nultého až k-tého řádu funkce* $f(x)$ *v bodě* x_i*, tj.:*

$$f(x_{i+k}) = f_{i+k} = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \triangle^j f_i$$

$$f(x_{i-k}) = f_{i-k} = \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{k}{j} \bigtriangledown^j f_i,$$

přičemž pro diference nultého řádu platí:

$$\triangle^0 f_i = f_i$$

$$\bigtriangledown^0 f_i = f_i.$$

Pomocí této věty můžeme pomocí funkční hodnoty v bodě x_i a první až k-té diference vpřed (resp. vzad) v bodě x_i vypočítat funkční hodnotu v bodě x_{i+k} (resp. x_{i-k}).

Pro usnadnění výpočtů použijeme opět M-file.

```
function [F] = funkcni_vpred(f)
% vstup je vektor f=[f0,f1,f2,f3,..fk] kde f0 je funkční hodnota v bodě i...
...f1 je první diference v bodě i,f2 je druhá diference v bodě i,...
...fk je k-tá diference v bodě i,bod i si předem sami zvolíme
% výstupem je funkční hodnotě v bodě i+k
[l,k]=size(f);
F=0;
for j=0:k-1
    F= F+ (factorial(k-1)/(factorial(j)*factorial(k-1-j)))*f(j+1);
end

function [F] = funkcni_vzad(f)
% vstup je vektor f=[f0,f1,f2,f3,..fk] kde f0 je funkční hodnota v bodě i...
```

```
...f1 je první diference v bodě i,f2 je druhá diference v bodě i,...
... fk je k-tá diference v bodě i,bod i si předem sami zvolíme
% výstupem je funkční hodnotě v bodě i-k
[l,k]=size(f);
F=0;
for j=0:k-1
    F= F+ (factorial(k-1)/(factorial(j)*factorial(k-1-j)))*(-1)^(j)*f(j+1);
end
```

1.2 Poměrné diference

Definice 1.3. Nechť jsou dány vzájemně různé body $x_i, i \in \mathbb{Z}$ a nechť funkce $f(x)$ je definována v těchto daných bodech. *Poměrná diference prvního řádu* funkce $f(x)$ je definována vztahem:

$$f[x_i, x_j] = \frac{f(x_j) - f(x_i)}{x_j - x_i}, \qquad x_i \neq x_j \quad pro \quad i \neq j$$

Poměrná diference k-tého řádu $k \in \mathbb{N}$, $k > 1$, funkce $f(x)$ je definována vztahem:

$$f[x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+k}] = \frac{f[x_{i+1}, \ldots, x_{i+k}] - f[x_i, \ldots, x_{i+k-1}]}{x_{i+k} - x_i}$$

Poznámka 1.4. Počítáme-li poměrné diference ručně, tj. máme $n + 1$ různých bodů $x_0, \ldots, x_n$, lze výpočet zapsat do tabulky.

x_i	f_i	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$	$\ldots$
x_0	f_0			
		$f[x_0, x_1]$		
x_1	f_1		$f[x_0, x_1, x_2]$	
		$f[x_1, x_2]$		
x_2	f_2			
				$f[x_0, x_1, \ldots, x_n]$
x_{n-2}	f_{n-2}			
		$f[x_{n-2}, x_{n-1}]$		
x_{n-1}	f_{n-1}		$f[x_{n-2}, x_{n-1}, x_n]$	
		$f[x_{n-1}, x_n]$		
x_n	f_n			

Příklad 1.5. Vypočítejte poměrné diference funkce $f(x) = x^4 + 2x^3 + 4x - 5$ v bodě x_i, kde $i = 0, 1, 2, 3, 4, 5$. Výpočet zaznamenejte do diferenční tabulky.

x_i	f_i	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, ..., x_{i+2}]$	$f[x_i, ..., x_{i+3}]$	$f[x_i, ..., x_{i+4}]$	$f[x_i, ..., x_{i+5}]$
0	-5					
		7				
1	2		13			
		33		8		
2	35		37		1	
		107		12		0
3	142		73		1	
		253		16		
4	395		121			
		495				
5	890					

Pro poměrné diference vypadá diferenční tabulka pomocí M-file následovně:

```
function [D] = pomerna(x,y)
% vstup x, y (funkční hodnoty v bodech x)
% výstup D je matice, v níž první sloupec tvoří vstupní body x, ...
druhý sloupec funkční hodnoty v bodech x,v dalších sloupcích jsou pomerne diference
[m,n]=size(x);
[o,p]=size(y);
if n==p
    D(n,n+1)=(zeros); D(:,1)=x’; D(:,2)=y’;
    j=3;
    while (j<n+2)
        for i=1:1:n-j+2
            D(i,j)=(D(i+1,j-1)-D(i,j-1))/(D(i+j-2,1)-D(i,1));
        end
        j=j+1;
    end
else ’počet složek y neodpovídá počtu složek x’
end
end
```

Věta 1.5. *Nechť jsou dány body* $x_0, x_1, \ldots, x_n$ *takové, že* $x_i \neq x_j$ *pro* $i \neq j$ *a nechť funkce* $f(x)$ *je definovaná v těchto bodech. Pak poměrnou diferenci* n*-tého řádu funkce* $f(x)$*, tj.* $f[x_0, \ldots, x_n]$ *lze vyjádřit jako lineární kombinaci funkčních hodnot funkce* $f(x)$ *v bodech* $x_i, i = 0, \ldots, n$*, tj.*

$$f[x_0, \ldots, x_n] = \sum_{i=0}^{n} \frac{f(x_i)}{\prod_{j=0, j\neq i}^{n}(x_i - x_j)}.$$

Pomocí této věty umíme vypočítat poslední poměrnou diferenci pro všechny zadané uzly pouze na základě znalosti uzlů a funkčních hodnot v uzlech:

```
function [F] = pomerna_n(x,y)
%vstupem je vektor uzlů x a vektor y funknčních hodnot v uzlech
%výstupem je poměrná diference F v zadaných uzlech x0,...,xn
[m,n]=size(x);
[o,p]=size(y);
if n==p
    F=0;
    for i=1:p
        P=1;
        for j=1:n
            if j~=i
            P=P*(x(i)-x(j));
            end
        end
        F=F+y(i)/P;
    end
else 'počet složek y neodpovídá počtu složek x'
end
```

Věta 1.6. *Nechť je dána ekvidistantní síť uzlů* $\{x_i | x_i = x_0 + ih, i \in \mathbb{Z}\}$*,* $h \in \mathbb{R}, h > 0$ *a nechť funkce* $f(x)$ *je definovaná v bodech této sítě. Pak platí*

$$f[x_i, x_{i+1} \ldots, x_{i+k}] = \frac{\triangle^k f_i}{k! h^k}.$$

2 Lineární diferenční rovnice s konstantními koeficienty

Uvažujme rovnici

$$a_0y_n + a_1y_{n+1} + \ldots + a_ky_{n+k} = 0, \qquad (1)$$

$a_0a_k \neq 0$, $a_i \in \mathbb{R}$, $\forall i = 0, \ldots, k$, kde $n \in M = \{n_0, n_1, \ldots\}$, $n_0 \in \mathbb{Z}$.

Definice 2.1. Rovnici $\sum_{j=0}^{k} a_jx^j = 0$ nazýváme **charakteristickou rovnicí** příslušnou lineární diferenční rovnici (1). Polynomem $\sum_{j=0}^{k} a_jx^j$ nazýváme **charakteristický polynom** příslušný lineární diferenční rovnici (1).

K nalezení fundamentálního systému rovnice (1) nám pomohou následující věty.

Věta 2.1. *Funkce* $\lambda_1^n, \ldots, \lambda_k^n$, $\lambda_i \neq 0$, $i=1, \ldots, k$, $\lambda_i \neq \lambda_j$ *pro* $i \neq j$ *jsou* ***lineárně nezávislé*** *na množině* M, $M = \{n_0, n_1, \ldots\}$, $n_0 \in \mathbb{Z}$, $n_i = n_0 + i$.

Věta 2.2. *Jestliže charakteristický polynom rovnice* (1) *má* ***k*** *různých reálných kořenů* $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$, *pak funkce* $\lambda_1^n, \ldots, \lambda_k^n$ *tvoří* ***fundamentální systém*** *rovnice* (1) *na množině* $M = \{n_0, n_1, \ldots\}$.
Obecné řešení *rovnice* (1) *je tvaru*

$$y_n = C_1\lambda_1^n + \ldots + C_k\lambda_k^n,\ C_i \in \mathbb{R},\ i = 1, \ldots k.$$

Věta 2.3. *Nechť má charakteristická rovnice, příslušná k diferenční rovnici* (1), *dva komplexně sdružené kořeny* $\lambda_{1,2} = r(\cos\omega \pm i\sin\omega)$. *Pak funkce*

$$\varphi_1(n) = r^n \cos n\omega,\ \varphi_2(n) = r^n \sin n\omega$$

jsou lineárně nezávislá ***partikulární řešení*** *rovnice* (1) *a* ***obecné řešení*** *je tvaru*

$$y_n = r^n(C_1 \cos n\omega + C_2 \sin n\omega).$$

Věta 2.4. *Nechť charakteristická rovnice, příslušná k rovnici* (1)*, má* ***s*** *násobný kořen* λ_1 $(\leq s \leq k)$. *Pak funkce*

$$\varphi_1(n) = \lambda_1^n$$
$$\varphi_2(n) = n\lambda_1^n$$
$$\varphi_3(n) = n^2\lambda_1^n$$
$$\vdots$$
$$\varphi_s(n) = n^{s-1}\lambda_1^n$$

jsou lineárně nezávislá ***partikulární řešení*** *rovnice* (1).
Obecné řešení *rovnice* (1) *je potom tvaru*

$$y_n = C_1\lambda_1^n + C_2 n\lambda_1^n + \ldots + C_s\ n^{s-1}\lambda_1^n,\ s{=}k.$$

Poznámka 2.1. Pro nalezení partikulárního řešení nehomogenní lineární diferenční rovnice se speciální pravou stranou $f(x)$ lze použít tzv. **metodu odhadu**. Přitom se využíva toho, že první až např. k-tá diference některých speciálních funkcí jsou funkce téhož typu.

Příklad 2.1. Rovnici $\triangle^2 y_n - 3\triangle y_n = n$ převeďte na tvar neobsahující diference a vypočtěte její obecné řešení.

V prvním kroku převedeme rovnici na tvar neobsahující diference, pomocí definice přímé diference.

$$
\begin{aligned}
\triangle y_{n+1} - \triangle y_n - 3\triangle y_n &= n \\
y_{n+2} - y_{n+1} - (y_{n+1} - y_n) - 3(y_{n+1} - y_n) &= n \\
y_{n+2} - y_{n+1} - y_{n+1} + y_n - 3y_{n+1} + 3y_n &= n \\
y_{n+2} - 5y_{n+1} + 4y_n &= n
\end{aligned}
$$

Z tohoto tvaru vypočteme obecné řešení rovnice. Nejprve vypočteme obecné řešení homogenní rovnice, tj.

$$y_{n+2} - 5y_{n+1} + 4\, y_n = 0.$$

Nyní sestavíme charakteristický polynom $\lambda^2 - 5\lambda + 4$ a řešíme charakteristickou rovnici

$$\lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0.$$

Vyřešením této kvadratické rovnice dostaneme $\lambda_1 = 1$ a $\lambda_2 = 4$. Obecné řešení homogenní rovnice píšeme ve tvaru

$$y_n = C_1 + C_2 4^n,\ C_1,\ C_2 \in \mathbb{R}.$$

Nyní budeme hledat partikulární řešení nehomogenní rovnice z_n a to ve tvaru polynomu prvního stupně, jehož obecný tvar je $z_n = an + b$. Tento obecný tvar dosadíme do upraveného tvaru zadané rovnice.

$$
\begin{aligned}
z_{n+2} - 5z_{n+1} + 4z_n &= n \\
a(n+2) + b - 5(a(n+1) + b) + 4(an + b) &= n \\
-3a &= n
\end{aligned}
$$

Při porovnání koeficientů u jednotlivých mocnin n dostaneme $0 = 1$, tzn. musíme zvýšit stupeň polynomu a hledat partikulární řešení ve tvaru $z_n = an^2 + bn + c$.

$$\begin{aligned} z_{n+2} - 5z_{n+1} + 4z_n &= n \\ a(n+2)^2 + b(n+2) + c - 5(a(n+1)^2 + b(n+1) + c) + 4(an^2 + bn + c) &= n \\ n^2(0) + n(-6a) - a - 3b &= n \end{aligned}$$

Při porovnání koeficientů u jednotlivých mocnin n dostaneme $a = -\frac{1}{6}$ a $b = \frac{1}{18}$. Jelikož koeficient c při výše uvedených úpravách rovnice vždy vypadne, můžeme si jej zvolit libovolně, volme proto $c = 0$. Partikulární řešení nehomogenní rovnice má tvar $z_n = -\frac{1}{6}n^2 + \frac{1}{18}n$.
Obecné řešení nehomogenní rovnice dostaneme jako součet obecného řešení homogenní rovnice a partikulárního řešení nehomogenní rovnice, má tedy tvar

$$u_n = y_n + z_n = C_1 + C_2 4^n - \frac{1}{6}n^2 + \frac{1}{18}n,\ C_1,\ C_2 \in \mathbb{R}.$$

Příklad 2.2. Vypočtěte obecné řešení diferenční rovnice $y_{n+2}-3y_{n+1}+2y_n=1$.
Nejprve vypočteme obecné řešení homogenní rovnice, tj.

$$y_{n+2} \; -3y_{n+1} \; +2y_n = 0.$$

Sestavíme charakteristický polynom $\lambda^2 \; -3\lambda \; +2$ a řešíme charakteristickou rovnici

$$\lambda^2 \; -3\lambda \; +2 = 0.$$

Vyřešením této kvadratické rovnice dostaneme $\lambda_1 = 1$ a $\lambda_2 = 2$. Obecné řešení homogenní rovnice píšeme ve tvaru

$$y_n = C_1 + C_2 2^n, \; C_1, \; C_2 \in \mathbb{R}.$$

Nyní budeme hledat partikulární řešení nehomogenní rovnice z_n a to ve tvaru polynomu nultého stupně, jehož obecný tvar je $z_n = a$. Po dosazení do zadané diferenční rovnice dostaneme

$$\begin{aligned} a - 3a + 2a &= 1 \\ 0 &= 1. \end{aligned}$$

Jelikož jsme dostali $0 = 1$, musíme zvýšit stupeň polynomu a hledat partikulární řešení ve tvaru $z_n = an + b$. Tento obecný tvar opět dosadíme do zadané rovnice.

$$\begin{aligned} z_{n+2} - 3z_{n+1} + 2z_n &= 1 \\ a(n+2) + b - 3(a(n+1) + b) + 2(an + b) &= 1 \end{aligned}$$

Při porovnání koeficientů u jednotlivých mocnin n dostaneme $a = -1$ a $b = 0$. Partikulární řešení nehomogenní rovnice má tvar $z_n = -n$.
Obecné řešení nehomogenní rovnice dostaneme jako součet obecného řešení homogenní rovnice a partikulárního řešení nehomogenní rovnice, má tedy tvar

$$u_n = y_n + z_n = C_1 + C_2 2^n - n, \; C_1, \; C_2 \in \mathbb{R}.$$

Příklad 2.3. Vypočtěte obecné řešení diferenční rovnice $y_{n+1} - 2y_n = -2^n$.
Nejprve vypočteme obecné řešení homogenní rovnice, tj.

$$y_{n+1} - 2y_n = 0.$$

Sestavíme charakteristický polynom $\lambda - 2$ a řešíme charakteristickou rovnici

$$\lambda - 2 = 0.$$

Vyřešením této kvadratické rovnice dostaneme $\lambda = 2$. Obecné řešení homogenní rovnice píšeme ve tvaru

$$y_n = C_1 2^n,\ C_1 \in \mathbb{R}.$$

Nyní budeme hledat partikulární řešení nehomogenní rovnice z_n a to ve tvaru lineární kombinace polynomu nultého stupně a funkce 2^n, jehož obecný tvar je $z_n = a2^n$. Po dosazení do zadané diferenční rovnice dostaneme

$$\begin{aligned} a2^{n+1} - 2a2^n &= -2^n \\ 0 &= -1. \end{aligned}$$

Jelikož jsme dostali $0 = -1$, musíme zvýšit stupeň polynomu a hledat partikulární řešení ve tvaru $z_n = (an + b)2^n$. Tento obecný tvar opět dosadíme do zadané rovnice.

$$(a(n+1) + b)2^{n+1} - 2(an + b)2^n = -2^n$$

Při porovnání koeficientů u funkce 2^n dostaneme $a = -\frac{1}{2}$. Partikulární řešení nehomogenní rovnice má tvar $z_n = -\frac{1}{2}n2^n$.
Obecné řešení nehomogenní rovnice dostaneme jako součet obecného řešení homogenní rovnice a partikulárního řešení nehomogenní rovnice, má tedy tvar

$$u_n = y_n + z_n = C_1 2^n - \tfrac{1}{2}n2^n,\ C_1,\ C_2 \in \mathbb{R}.$$

Příklad 2.4. Vypočtěte obecné řešení diferenční rovnice y_{n+2} + $4y_n$=0.
Nejprve sestavíme charakteristický polynom λ^2 + 4 a řešíme charakteristickou rovnici λ^2 + 4 = 0.
Vyřešením této kvadratické rovnice dostaneme $\lambda_1 = 2i$ a λ_2 = -$2i$. Obecné řešení homogenní rovnice píšeme ve tvaru

$$y_n = 2^n(C_1 \cos\tfrac{\pi}{2} + C_2\sin\tfrac{\pi}{2}),\ C_1,\ C_2 \in \mathbb{R}.$$

Příklad 2.5. Vypočtěte obecné řešení diferenční rovnice $y_{n+2} + y_n = n\cos\frac{n\pi}{4} + 2\sin\frac{n\pi}{4}$.
Nejprve vypočteme obecné řešení homogenní rovnice, tj.

$$y_{n+2} + y_n = 0.$$

Sestavíme charakteristický polynom $\lambda^2 + 1$ a řešíme charakteristickou rovnici

$$\lambda^2 + 1 = 0.$$

Vyřešením této kvadratické rovnice dostaneme $\lambda_1 = +i$ a $\lambda_2 = -i$. Obecné řešení homogenní rovnice píšeme ve tvaru

$$y_n = C_1\cos\tfrac{n\pi}{2} + C_2\sin\tfrac{n\pi}{2},\ C_1,\ C_2 \in \mathbb{R}.$$

Nyní budeme hledat partikulární řešení nehomogenní rovnice z_n a to ve tvaru lineární kombinace polynomu prvního stupně s funkcemi $\cos\frac{n\pi}{4}$, resp. sin $\frac{n\pi}{4}$, jehož obecný tvar je $z_n = (an+b)\cos\frac{n\pi}{4} + (cn+d)\sin\frac{n\pi}{4}$, kde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Po dosazení do zadané diferenční rovnice dostaneme

$$(a(n+2)+b)\cos\tfrac{(n+2)\pi}{4} + (c(n+2)+d)\sin\tfrac{(n+2)\pi}{4} + (an+b)\cos\tfrac{m\pi}{4} + (cn+d)\sin\tfrac{n\pi}{4} = n\cos\tfrac{(n+2)\pi}{4} + 2\sin\tfrac{(n+2)\pi}{4}.$$

Pro zjednodušení rovnice je nutno užít goniometrických vzorců

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta.$$

Těmito úpravami nám některé členy z rovnice vypadnou. Při porovnání koeficientů funkcí $\sin\frac{n\pi}{4}$, $n\sin\frac{n\pi}{4}$, $\cos\frac{n\Pi}{4}$ a $n\cos\,\frac{n\pi}{4}$ dostaneme soustavu čtyř lineárních rovnic o čtyřech neznámých

$$\begin{aligned} c + a &= 1 \\ -(2a + b) + d &= 2 \\ 2c + d + b &= 0 \\ -a + c &= 0. \end{aligned}$$

Vyřešením této soustavy dostaneme $a = \frac{1}{2}$, $b = -2$, $c = \frac{1}{2}$ a $d = 1$. Partikulární řešení nehomogenní rovnice má tvar $z_n = (\frac{1}{2}n - 2)\cos\frac{n\pi}{4} + (\frac{1}{2}n + 1)\sin\frac{n\pi}{4}$.
Obecné řešení nehomogenní rovnice dostaneme jako součet obecného řešení homogenní rovnice a partikulárního řešení nehomogenní rovnice, má tedy tvar

$$u_n = y_n + z_n = C_1\cos\frac{n\pi}{2} + C_2\sin\frac{n\pi}{2} + (\tfrac{1}{2}n - 2)\cos\frac{n\pi}{4} + (\tfrac{1}{2}n + 1)\sin\frac{n\pi}{4},\ C_1,\ C_2 \in \mathbb{R}.$$