Matematická analýza KMA/MA2I
Dvojný integrál

1 Problém

Jako byl Riemannův integrál odpovědí na otázku obsahu rovinného obrazce, bude dvojný integrál odpovědí na otázku objemu tělesa. Tentokrát se obejdeme bez historických motivací a přejdeme přímo k formulaci problému:

Úloha 1 Je dána množina $M \subset \mathbb{R}^2$ („rovinný obrazec)“ a funkce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ jejíž definiční obor je právě množina M, přitom f je na M omezená a nezáporná. Ptáme se, jaký objem má těleso

$$T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in M \wedge 0 \leq z \leq f(x, y)\}$$

(nakreslete si obrázek). K řešení přistoupíme podobným způsobem jako v jednodimenzionálním případě (tj. u Riemannova integrálu). V jedné dimenzi jsme „integrovali“ přes interval. My bychom ovšem rádi nyní integrovali přes nejrůznější množiny - čtverce, obdélníky, trojúhelníky, kruhy, elipsy, apod. Takto různorodá škála množin s sebou nese spoustu komplikací. Integrál funkce jedné proměnné jsme definovali pomocí dolních a horních Riemannových součtů, které jsme vypočítali mimojiné pomocí rozsekání intervalu na podintervaly. Rádi bychom tuto myšlenku použili i ve dvou dimenzích. Nejprve se musíme tedy ptát, jak rozsekat množiny v $\mathbb{R}^2$. Ukáže se to jako poměrně obtížný problém - k tomu je třeba definovat třeba Jordanovu míru množiny v $\mathbb{R}^2$ - viz knihu [Hrůza, Brabec: Matematická analýza II., SNTL/ALFA, Praha,1988] na stranách $289 - 301$. My tento problém obejdeme tak, že budeme „vždy“ integrovat přes obdélník (= kartézský součin dvou intervalů).

2 Dvojný integrál přes obdélník

V této kapitole budeme uvažovat dva uzavřené a omezené intervaly $I,J \subset \mathbb{R}$ (pro určitost označíme $I = \langle a, b\rangle$, $J = \langle c, d\rangle$) a funkci $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definovanou a **omezenou** na obdélníku $I \times J$.

Definice 2 Jsou–li $I,J \subset \mathbb{R}$ intervaly, pak kartézský součin $I \times J$ nazýváme (dvojrozměrným, dvoudimenzionálním) intervalem.

Poznámka 3 Jsou–li I, $J \subset \mathbb{R}$ kompaktní (tzn. uzavřené a omezené) intervaly, pak interval $I \times J$ je kompaktní (tzn. uzavřená a omezená) množina v $\mathbb{R}^2$ – budeme mu říkat kompaktní interval.

Definice 4 Nechť jsou dány kompaktní intervaly $I = \langle a, b\rangle$, $J = \langle c, d\rangle$ a jejich dělení

$$D_I = \{x_0, x_1, \dots, x_n\} \in \triangle(I), \quad D_J = \{y_0, y_1, \dots, y_m\} \in \triangle(J).$$

Pro $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m$ definujeme dělící interval

$$D_{ij} = \langle x_{i-1}, x_i\rangle \times \langle y_{j-1}, y_j\rangle.$$

Množinu všech D_{ij} nazýváme síťovým dělením intervalu $I \times J$.

Poznámka 5 Obsah množiny D_{ij} je zřejmě roven $(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})$ a budeme ho značit symbolem $\mu(D_{ij})$.

Poznámka 6 Z definice 4 je asi jasné, proč integrujeme přes dvourozměrný interval - ten si rozsekáme na dvourozměrné intervaly D_{ij}. Hlavní výhoda spočívá v tom, že obsah každého takového intervalu je snadno určitelný - viz poznámku 5.

Definice 7 *Nechť f je omezená funkce na intervalu $I \times J$. Pro síťové dělení $D = \{D_{ij}, i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m\}$ intervalu $I \times J$ definujeme*
(a) dolní Riemannův integrální součet

$$s(f, D) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} m_{ij} \mu(D_{ij}),$$

kde $m_{ij} = \inf_{D_{ij}} f$ pro každé $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m$ a
(b) horní Riemannův integrální součet

$$S(f, D) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} M_{ij} \mu(D_{ij}),$$

kde $M_{ij} = \sup_{D_{ij}} f$ pro každé $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m$.

Poznámka 8 *Důležitý je opět geometrický význam čísel $s(f, D)$ a $S(f, D)$ – nakreslete si obrázek!*

Věta 9 *Nechť f je omezená na kompaktním intervalu $I \times J$, D je síťové dělení intervalu $I \times J$. Pak*

$$m(b-a)(d-c) \le s(f, D) \le S(f, D) \le M(b-a)(d-c),$$

kde

$$m = \inf_{I \times J} f, \quad M = \sup_{I \times J} f.$$

Proveďte důkaz – inspirujte se důkazem z přednášky o R–integrálu funkce jedné proměnné.

Důsledek 10 *Z věty 9 plyne, že množina*

$$\{s(f,D) : D \text{ je síťové dělení } I \times J\}$$

je omezená zdola a množina

$$\{S(f,D) : D \text{ je síťové dělení } I \times J\}$$

je omezená shora. Tedy infima a suprema těchto množin jsou konečná čísla.

Poznámka 11 *Co je vlastně množina*

$$\{s(f,D) : D \text{ je síťové dělení } I \times J\}?$$

Jde o množinu všech dolních odhadů objemu tělesa T z úvodní kapitoly. Je asi jasné, že horkým kandidátem na objem je supremum této množiny. Podobně, horkým kandidátem na objem tělesa T je infimum množiny

$$\{S(f,D) : D \text{ je síťové dělení } I \times J\}.$$

Definice 12 *Nechť f je omezená funkce na kompaktním intervalu $I \times J$. Číslo*

$$\underline{\iint_{I\times J}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \sup\{s(f,D) : D \text{ je síťové dělení } I \times J\}$$

nazýváme dolním Riemannovým integrálem funkce f přes interval $I \times J$. Číslo

$$\overline{\iint_{I\times J}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \inf\{S(f,D) : D \text{ je síťové dělení } I \times J\}$$

nazýváme horním Riemannovým integrálem funkce f přes interval $I \times J$.

Poznámka 13 *Intuitivně očekáváme, že tato čísla jsou stejná a určují (pro $f \geq 0$) objem tělesa T. Ovšem, stejně jako tomu bylo u funkce jedné proměnné, ne vždy to bude platit – viz příklad 14.*

Příklad 14 *Uvažujme funkci $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definovanou předpisem*

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{je–li } x \in \mathbb{Q} \wedge y \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{v opačném případě.} \end{cases}$$

Řešení. *Vypočítejme horní a dolní Riemannův integrál této funkce přes interval $\langle 0,1\rangle \times \langle 0,1\rangle$. Vezmeme libovolné síťové dělení tohoto intervalu $D = \{D_{ij}\}$. Pak*

$$m_{ij} = \inf_{D_{ij}} f = 0, \quad M_{ij} = \sup_{D_{ij}} f = 1$$

pro každé $i = 1,\dots,n$, $j = 1,\dots,m$. Z toho plyne, že

$$\underline{\iint_{\langle 0,1\rangle\times\langle 0,1\rangle}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 0, \quad \overline{\iint_{\langle 0,1\rangle\times\langle 0,1\rangle}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 1.$$

Jde tedy o různá čísla.

Následující příklad ukazuje, že to tak špatné vždy nebude. Je asi jasné, že integrovat funkce typu uvedeného v příkladu 14 nebudeme příliš často – vlastně už se takovými „ošklivými“ funkcemi ani nesetkáme.

Příklad 15 *Pro konstantní funkci $f(x,y)=k$ pro $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ vypočtěte*

$$\underline{\iint_{\langle a,b\rangle\times\langle c,d\rangle}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \quad a \quad \overline{\iint_{\langle a,b\rangle\times\langle c,d\rangle}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Řešení. Vezmeme libovolné síťové dělení $D=\{D_{ij}: i=1,\dots,n, j=1,\dots,m\}$ intervalu $\langle a,b\rangle\times\langle c,d\rangle$. Pak

$$m_{ij}=\inf_{D_{ij}} f = k, \quad M_{ij}=\sup_{D_{ij}} f = k$$

pro každé $i=1,\dots,n$, $j=1,\dots,m$. Z toho plyne, že

$$s(f,D)=\sum_{i,j=1}^{n,m} k\mu(D_{ij}) = k\sum_{i,j=1}^{n,m}\mu(D_{ij}) = k(b-a)(d-c),$$

a

$$S(f,D)=\sum_{i,j=1}^{n,m} k\mu(D_{ij}) = k\sum_{i,j=1}^{n,m}\mu(D_{ij}) = k(b-a)(d-c).$$

Pak

$$\underline{\iint_{\langle a,b\rangle\times\langle c,d\rangle}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \overline{\iint_{\langle a,b\rangle\times\langle c,d\rangle}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = k(b-a)(d-c).$$

V tomto případě jsou hodnoty stejné. Čemu se rovnají? Je–li $k\geq 0$, pak jejich společná hodnota má jednoduchou geometrickou interpretaci. Jde o objem kvádru o délkách hran k, $b-a$ a $d-c$ (nakreslete si obrázek!).

Nyní můžeme definovat (Riemannův) dvojný integrál přes interval (obdélník).

Definice 16 *Nechť f je omezená na kompaktním intervalu $I\times J$. Jestliže*

$$\underline{\iint_{I\times J}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \overline{\iint_{I\times J}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

pak říkáme, že f má na intervalu $I\times J$ (Riemannův) dvojný integrál (je na $I\times J$ integrovatelná). Jejich společnou hodnotu nazýváme (Riemannovým) dvojným integrálem funkce f přes interval $I\times J$ a značíme symbolem

$$\iint_{I\times J} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Ještě uvedeme jednoduchou podmínku, pomocí které můžeme snadno zjistit, jestli je daná funkce na kompaktním intervalu integrovatelná.

Věta 17 *(postačující podmínka integrovatelnosti funkce na intervalu) Spojitá funkce spojitá na kompaktním intervalu je na něm integrovatelná.*

3 Dvojný integrál přes měřitelnou množinu

Jak už jsme ale zmínili, chtěli bychom integrovat funkce na mnohem složitějších množinách než je interval (=obdélník). Rádi bychom integrovali na trojúhelnících, kruzích i na množinách, jejichž hranice je určena grafy funkcí jedné proměnné. Obecně, budeme integrovat (omezené) funkce přes takové množiny, u kterých umíme určit jejich „obsah.“ Obsah omezené množiny $M \subset \mathbb{R}^2$ zde budeme definovat následujícím způsobem:

Definice 18 Řekneme, že množina M má obsah (je rektifikovatelná; má Jordan–Peanův objem; je jordanovsky měřitelná; je měřitelná), jestliže funkce χ_M je integrovatelná na nějakém kompaktním intervalu $I \times J$, pro který platí

$$M \subset I \times J.$$

Obsahem (Jordan–Peanovým objemem; Jordanovou mírou; mírou) množiny M rozumíme číslo

$$\mu(M) = \iint_{I \times J} \chi_M(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Jiný (lepší) způsob definice měřitelné množiny a Jordanovy míry najdete v knize [Brabec, Hrůza:Matematická analýza II, SNTL/ALFA, Praha, 1986] na stranách 289–301 (doporučuji se na to podívat – je to velmi poučné).

Poznámka 19 Připomínám, že pro každou množinu $M \subset \mathbb{R}^2$ definujeme tzv. charakteristickou funkci množiny M předpisem

$$\chi_M(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{pro } (x, y) \in M, \\ 0 & \text{pro } (x, y) \notin M. \end{cases}$$

V následujícím příkladě si alespoň trochu osvětlíme smysl definice 18.

Příklad 20 *Určete obsah kruhu o středu v bodě $(0,0)$ a poloměru $r > 0$ podle definice 18.*
Řešení. Máme tedy určit $\mu(M)$ pro

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq r^2\}.$$

Zřejmě

$$M \subset \langle -r, r\rangle \times \langle -r, r\rangle.$$

V definici 18 jsme definovali obsah množiny M jako

$$\iint_{I \times J} \chi_M(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Jaký je jeho geometrický význam? Po nakreslení grafu funkce χ_M nám to je jasné (kreslete si obrázek!!). Jde o objem válce, jehož podstava je kruh o *poloměru r a výška válce je rovna 1. Ze středoškolského vzorce pro objem válce dostáváme*

$$\mu(M) = \iint_{I \times J} \chi_M(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \pi r^2 \cdot 1 = \pi r^2.$$

Vidíme, že obsah kruhu podle definice 18 odpovídá obsahu kruhu tak, jak jsme se učili na střední škole. Všimněte si, že tato shodnost je zapříčiněna právě zvolením charakteristické funkce χ_M.

Možná si teď říkáte, proč definujeme obsah rovinného obrazce tak složitě, vždyť každá množina má nějaký obsah. To ovšem není pravda. Podívejme se na obsah množiny

$$M = \{(x,y) \in \mathbb{Q}^2 : 0 \le x \le 1 \wedge 0 \le y \le 1\} \subset \mathbb{R}^2.$$

Podíváte–li se na příklad 14, zjistíme, že k množině M nejde podle definice 18 určit obsah. Nakonec je třeba poznamenat, že způsobů měření (obsahů) množin je spousta. Viz např. teorii Lebesgueovy míry.

Poznámka 21 Jak poznat měřitelnou množinu? Dá se dokázat, že

- množina v $\mathbb{R}^2$ jejíž hranice je tvořena křivkou (tzn. obrazem kompaktního intervalu $\langle \alpha, \beta \rangle$ spojitého zobrazení $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$) je měřitelná,
- sjednocení a průnik konečného počtu měřitelných množin je měřitelná množina, rozdíl dvou měřitelných množin je měřitelná množina.

Nyní se podívejme na Riemannův dvojný integrál v plné obecnosti.

Definice 22 *Nechť $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je omezená na měřitelné množině $M \subset \mathbb{R}^2$. Definujeme funkci*

$$f^*(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & \textit{pro } (x,y) \in M, \\ 0 & \textit{pro } (x,y) \notin M. \end{cases}$$

Riemannovým dvojným integrálem funkce f přes množinu M rozumíme integrál

$$\iint_{I \times J} f^*(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

kde $M \subset I \times J$ a značíme ho symbolem

$$\iint_M f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Poznámka 23 *Je asi jasné, že v definici 22 nezávisí na výběru kompaktního intervalu $I \times J$.*

Měřitelná množina M může být poměrně komplikovaná. My budeme v našich příkladech integrovat jen přes tzv. elementární oblasti (což jsou podle poznámky 21 měřitelné množiny).

Definice 24 *Elementární oblastí prvního druhu rozumíme množinu*

$$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : a\le x\le b \wedge g(x)\le y\le h(x)\},$$

kde g, $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ jsou spojité na intervalu $\langle a,b\rangle$, $g(x)\le h(x)$ pro všechna $x\in\langle a,b\rangle$.
Elementární oblastí druhého druhu rozumíme množinu

$$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : c\le y\le d \wedge g(y)\le x\le h(y)\},$$

kde g, $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ jsou spojité na intervalu $\langle c,d\rangle$, $g(y)\le h(y)$ pro všechna $y\in\langle c,d\rangle$.

Poznámka 25 *Elementární oblast prvního druhu M má obsah roven*

$$\mu(M)=\int_a^b (h(x)-g(x))\,\mathrm{d}x$$

a elementární oblast druhého druhu M má obsah roven

$$\mu(M)=\int_c^d (h(y)-g(y))\,\mathrm{d}y.$$

4 Vlastnosti dvojného integrálu

Dvojný integrál má stejné vlastnosti jako integrál funkce jedné proměnné. V následujících větách jsou shrnuty (bez důkazu) ty nejdůležitější.

Věta 26 *Nechť f, g mají na měřitelné množině $M\subset\mathbb{R}^2$ integrál. Pak platí*

- *Pro c, $d\in\mathbb{R}$ platí*

$$\iint_M cf(x,y)+dg(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = c\iint_M f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + d\iint_M g(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

- *Funkce $f\cdot g$ má integrál na M.*
- *Je–li $f\le g$ na M, pak*

$$\iint_M f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \le \iint_M g(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

- *Funkce $|f|$ má integrál na M a platí*

$$\left|\iint_M f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right| \le \iint_M |f(x,y)|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

- *Je–li $\alpha\le f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\le\beta$ pro všechna $(x,y)\in M$, pak*

$$\alpha\mu(M)\le \iint_M f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \le \beta\mu(M).$$

Věta 27 *Jsou–li M_1 a M_2 měřitelné množiny,* $\operatorname{int} M_1 \cap \operatorname{int} M_2 = \emptyset$ *a f má integrál na M_1 i M_2, pak f má integrál na $M = M_1 \cup M_2$ a platí*

$$\iint_M f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_{M_1} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \iint_{M_2} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Věta 28 *(o střední hodnotě) Nechť $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je integrovatelná na souvislé uzavřené množině $\bar{D}$. Pak existuje číslo $c \in \langle m, M\rangle$, kde $m = \inf_{\bar{D}} f$, $M =$* $\sup_{\bar{D}} f$ *tak, že*

$$\iint_{\bar{D}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = c\mu(\bar{D}).$$

Je–li f na $\bar{D}$ spojitá, pak existuje bod $(\xi, \eta) \in \bar{D}$ tak, že

$$\iint_{\bar{D}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = f(\xi,\eta)\mu(\bar{D}).$$

Věta 29 *(postačující podmínka integrovatelnosti) Nechť f je spojitá na uzávěru měřitelné množiny $M \subset \mathbb{R}^2$. Pak f je integrovatelná na M.*

5 Metody výpočtu

V této kapitole se podíváme na efektivní metody výpočtu dvojného integrálu. Nejprve si ukážeme jak spočítat dvojný integrál přes interval a poté si ukážeme, jak počítat dvojný integrál přes elementární množiny prvního a druhého druhu.

Věta 30 *(Fubiniova) Nechť $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je integrovatelná na intervalu $I \times J$. Existuje–li jeden z integrálů*

$$f_1(x) = \int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y \quad \textit{pro každé } x \in \langle a, b\rangle,$$

$$f_2(y) = \int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x \quad \textit{pro každé } y \in \langle c, d\rangle,$$

pak existuje i druhý a platí

$$\iint_{\langle a,b\rangle \times \langle c,d\rangle} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_a^b f_1(x)\,\mathrm{d}x = \int_c^d f_2(y)\,\mathrm{d}y$$

(tzn.

$$\iint_{\langle a,b\rangle \times \langle c,d\rangle} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y$$

Poznámka 31 Je třeba si uvědomit, že

$$\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x$$

je určitý integrál, který závisí na parametru y. To lze chápat jako funkci proměnné x (v tvrzení Fubiniovy věty jsme ji označili symbolem f_1), kterou pak zintegrujeme přes interval $\langle a, b\rangle$. Fubiniova věta říká, že tento výsledek je roven právě integrálu funkce f přes interval $\langle a, b\rangle \times \langle c, d\rangle$. K lepšímu pochopení Fubiniovy je dobré si uvědomit geometrický význam funkčních hodnot funkcí f_1 a f_2.

Obecnější varianta věty pro elementární oblasti je následující.

Věta 32 *(Fubiniova) Nechť f je integrovatelná na měřitelné množině $M \subset re^2$.*
(A) Nechť M je elementární oblast 1. druhu, tj.

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b \wedge g(x) \leq y \leq h(x)\}.$$

Existuje–li pro každé $x \in \langle a, b\rangle$ integrál

$$\int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y)\,\mathrm{d}y,$$

pak platí

$$\iint_M f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_a^b \left(\int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x.$$

(B) Nechť M je elementární oblast 2. druhu, tj.

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : c \leq y \leq d \wedge g(y) \leq x \leq h(y)\}.$$

Existuje–li pro každé $y \in \langle c, d\rangle$ integrál

$$\int_{g(y)}^{h(y)} f(x, y)\,\mathrm{d}x,$$

pak platí

$$\iint_M f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_c^d \left(\int_{g(y)}^{h(y)} f(x, y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y.$$

5.1 Substituce v dvojném integrálu

Někdy může být množina přes kterou integrujeme docela komplikovaná. Sice jde o elementární oblast prvního nebo druhého druhu, ale popis její hranice může být poměrně složitý. Uvažujme třeba množinu

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0 \wedge y \geq 0 \wedge 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\} \tag{1}$$

(nakreslete si obrázek!). Pokud se rozhodneme k integraci s použitím Fubiniho věty, řešení je komplikované na dvou místech. Prvním místem je samotné popsání hranice, a druhým je složitější integrování. Abyste měli představu zkuste vypočítat

$$\iint_M x^2 y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

kde M je daná v (1). Řešením by mohla být transformace na jednodušší oblast. Například si všimněme, že množina M z (1) je obrazem intervalu (což je velmi jednoduchá množina pro integraci pomocí Fubiniovy věty)

$$\langle 1, 2\rangle \times \langle 0, \pi/2\rangle$$

v zobrazení $\Phi(r, \varphi) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi)$ (jde o polární souřadnice). Toto zobrazení je na $\langle 1, 2\rangle \times \langle 0, \pi/2\rangle$ regulární – tento pojem si hned představíme.

Definice 33 Řekneme, že zobrazení $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ je třídy $\mathfrak{C}^1$ [čteme: „třídy cé jedna"] na uzavřené množině $K \subset \mathbb{R}^2$, má–li spojité všechny parciální derivace na nějaké otevřené množině G, která je nadmnožinou K.

Definice 34 Nechť $D \subset \mathbb{R}^2$ je otevřená množina. Zobrazení $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ nazveme regulární na D, jestliže

- Φ je prosté zobrazení na D,
- Φ je třídy $\mathfrak{C}^1$ na $\overline{D}$,
- $\nabla\Phi(x, y)$ je regulární matice pro všechna $(x, y) \in D$ (nebo–li
$$\det(\nabla\Phi(x, y)) \neq 0 \quad \forall (x, y) \in D).$$

Příklad 35 Dokažte, že zobrazení

$$\Phi(r, \varphi) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi)$$

je regulární zobrazení na $D = (1, 2) \times (0, \pi/2)$.
Řešení. Je třeba ověřit vlastnosti regulárního zobrazení.
ad (i) Zobrazení Φ je prosté na D: Dokážeme sporem. Uvažujme

$$(r, \varphi), (r', \varphi') \in D,$$

tak, že

$$\Phi(r, \varphi) = \Phi(r', \varphi').$$

To znamená, že

$$r\cos\varphi = r'\cos\varphi', \quad r\sin\varphi = r'\sin\varphi', \tag{2}$$

pak

$$\operatorname{tg}\varphi' = \operatorname{tg}\varphi$$

což vzhledem k faktu, že φ, $\varphi' \in (0, \pi/2)$ a prostotě funkce tangens na tomto intervalu znamená, že $\varphi = \varphi'$. Odtud a z (2) plyne, že také $r = r'$.
ad (ii) Zřejmě

$$\frac{\partial\Phi}{\partial r}(r, \varphi) = \begin{pmatrix}\cos\varphi\\ \sin\varphi\end{pmatrix} \text{ a } \frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}(r, \varphi) = \begin{pmatrix}-r\sin\varphi\\ r\cos\varphi\end{pmatrix},$$

což jsou spojitá zobrazení na $\mathbb{R}^2$.
ad (iii) Platí

$$|\nabla\Phi(r,\varphi)| = |\frac{\partial\Phi}{\partial r}, \frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}| = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r\cos^2\varphi + r\sin^2\varphi = r \neq 0,$$

protože $r \in (1,2)$.

Poznámka 36 *Dá se dokonce dokázat, že zobrazení*

$$\Phi(r,\varphi) = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix}$$

je regulární na každém intervalu

$$(0,\infty) \times (k, k+2\pi),$$

kde $k \in \mathbb{R}$ je libovolné (dokažte!).

Nyní zformulujeme větu o substituci.

Věta 37 *Nechť zobrazení $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2) =: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ je regulární na měřitelné otevřené množině $D \subset \mathbb{R}^2$. Nechť $N \subset \overline{D}$ je měřitelná množina, $M = \Phi(N)$ a funkce f je omezená a spojitá na M. Pak*

$$\iint_M f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_N f(\Phi_1(u,v), \Phi_2(u,v))|\nabla\Phi(u,v)|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v.$$

Příklad 38 Vypočtěte

$$\iint_M x^2 y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

kde M je daná v (2). *Řešení.* Z příkladu 35 plyne, že vezmeme–li

$$\Phi(r,\varphi) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi), \quad N = \langle 1,2\rangle \times \langle 0, \pi/2\rangle$$

platí

$$\Phi(N) = M,$$

Φ je na $int(N)$ regulární a $\nabla\Phi(r,\varphi) = r$. Z věty 37 tedy dostáváme

$$\iint_M x^2 y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_N r^4 \sin\varphi\cos\varphi\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi.$$

Dále postupujeme podle Fubiniovy věty. Výsledek by měl být (asi) 3, 1.

6 Některé aplikace dvojného integrálu

6.1 Hmotnost tenké desky

Udává–li $\sigma(x,y)$ hustotu tenké (tzn. že hustota je konstantní ve směru osy z) desky $M \subset \mathbb{R}^2$ pak její celková „hmotnost“ je rovna

$$h(M) = \iint_M \sigma(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

6.2 Výpočet obsahu plochy

Je dána plocha

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in M \wedge z = f(x, y)\}$$

kde $M \subset \mathbb{R}^2$ je měřitelná množina, $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je definována na M, má na M spojité parciální derivace prvního řádu. Pak obsah plochy je roven

$$\iint_M \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\right)^2} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y.$$