Lineární harmonický oscilátor

- síla F je přímo úměrná výchylce x a má opačný směr.

$$F = -kx \tag{1}$$

- potenciální energie $V(x)$ je dána jako

$$V(x) = -\int F(x)\mathrm{d}x = -\int (-kx)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}kx^2 \tag{2}$$

- použijeme vztah

$$k = m\omega_0^2 \tag{3}$$

- potenciál dosadíme do Schrödingerovy rovnice v časově nezávislém tvaru (S2)

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + \frac{m\omega_0^2}{2}x^2\psi(x) = E\psi(x) \tag{4}$$

- protože $\min V(x) = 0$, rovnice bude mít jen řešení s $E > 0$
- pro $x \to \infty$ platí $V(x) \to \infty$ a všechny řešení budou mít charakter vázaných stavů
- proto budeme v dalším považovat za fyzikálně přijatelné jen normovatelné řešení, které zřejmě musí splňovat podmínku

$$\lim_{|x|\to\infty} \psi(x) = 0 \tag{5}$$

- zavedeme bezrozměrnou proměnnou

$$\xi = \frac{x}{x_0}, x_0 = \left(\frac{\hbar}{m\omega_0}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{6}$$

$$\frac{\mathrm{d}\psi(\xi)}{\mathrm{d}\xi} = \frac{\mathrm{d}\psi(x(\xi))}{\mathrm{d}\xi} = \frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\xi} = \frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}(x_0\xi)}{\mathrm{d}\xi} = x_0\frac{\mathrm{d}\psi(x)}{\mathrm{d}x} \tag{7}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\psi(\xi)}{\mathrm{d}\xi^2} = \frac{\mathrm{d}^2\psi(x(\xi))}{\mathrm{d}\xi^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\left[\frac{\mathrm{d}\psi(x(\xi))}{\mathrm{d}\xi}\right] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\left[x_0\frac{\mathrm{d}\psi(x)}{\mathrm{d}x}\right] = x_0\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\underbrace{\left[\frac{\mathrm{d}\psi(x)}{\mathrm{d}x}\right]}_{=f(x)} \tag{8}$$

$$= x_0\frac{\mathrm{d}f(x(\xi))}{\mathrm{d}\xi} = x_0\left(x_0\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\right) = x_0^2\frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}x^2} \tag{9}$$

- rovnice (4) přejde na tvar

$$-\frac{\hbar^{\cancel{2}}}{2\cancel{m}}\frac{\cancel{m}\omega_0}{\cancel{\hbar}}\frac{\mathrm{d}^2\psi(\xi)}{\mathrm{d}\xi^2} + \frac{\cancel{m}\omega_0^{\cancel{2}}}{2}\frac{\hbar}{\cancel{m\omega_0}}\xi^2\psi(\xi) = E\psi(\xi) \tag{10}$$

- převedeme levou stranu na pravou a rovnici vynásobíme $-\dfrac{2}{\hbar\omega_0}$

$$-\frac{\hbar}{2}\omega_0\left(-\frac{2}{\hbar\omega_0}\right)\frac{\mathrm{d}^2\psi(\xi)}{\mathrm{d}\xi^2} + \frac{\omega_0\hbar}{2}\left(-\frac{2}{\hbar\omega_0}\right)\xi^2\psi(\xi) + \left(\frac{2}{\hbar\omega_0}\right)E\psi(\xi) = 0 \tag{11}$$

- označíme (bezrozměrná energie)

$$\lambda = \frac{2E}{\hbar\omega_0} \tag{12}$$

- dostaneme

$$\frac{\mathrm{d}^2\psi(\xi)}{\mathrm{d}\xi^2} - \xi^2\psi(\xi) + \lambda\psi(\xi) = 0 \tag{13}$$

- vytkneme $\psi(\xi)$

$$\frac{\mathrm{d}^2\psi(\xi)}{\mathrm{d}\xi^2} + (\lambda - \xi^2)\psi(\xi) = 0 \tag{14}$$

- diferenciální rovnice (14) patří k typu, který se často vyskytuje v úlohách matematické fyziky
- jde o lineární homogenní diferenciální rovnici druhého řádu s proměnnými koeficienty.
- pro rovnice tohoto typu existuje postup řešení, spočívající v tom, že nejprve hledáme tvar řešení v okolí singulárních bodů
- prozkoumáme řešení rovnice (14) pro $\xi \to \pm\infty$
- budeme hledat tzv. asymptotické řešení
- pro velké ξ zanedbáme λ oproti ξ^2
- rovnice (14) přejde na tvar

$$\frac{\mathrm{d}^2\psi(\xi)}{\mathrm{d}\xi^2} - \xi^2\psi(\xi) = 0 \tag{15}$$

- její přesné řešení vede na parabolické cylindrické funkce[1] (Weberovy funkce) $D_v(z)$
- asymptotickým řešením rovnice (15) je funkce

$$\psi_a(\xi) = e^{-\xi^2/2} \tag{16}$$

- ověříme to dosazením
- první derivace asymptotického řešení bude

$$\frac{\mathrm{d}\psi_a(\xi)}{\mathrm{d}\xi} = \xi e^{-\xi^2/2} \tag{17}$$

- druhá derivace asymptotického řešení bude

$$\frac{\mathrm{d}^2\psi_a(\xi)}{\mathrm{d}\xi^2} = (\xi^2 - 1)e^{-\xi^2/2} \tag{18}$$

- určíme limitu (15) pro $\xi \to \pm\infty$

$$\lim_{\xi\to\pm\infty} \frac{\mathrm{d}^2\psi(\xi)}{\mathrm{d}\xi^2} - \lim_{\xi\to\pm\infty} \xi^2 e^{-\xi^2/2} = 0 \tag{19}$$

[1] parabolic cylinder function

- dosadíme (16) a (18) a dostaneme

$$\lim_{\xi\to\pm\infty}(\xi^2-1)e^{-\xi^2/2} - \lim_{\xi\to\pm\infty}\xi^2 e^{-\xi^2/2} = 0 \tag{20}$$

$$\lim_{\xi\to\pm\infty}\xi^2 e^{-\xi^2/2} - \lim_{\xi\to\pm\infty}\xi^2 e^{-\xi^2/2} = 0 \tag{21}$$

- rovnice je splněna, takže (16) je asymptotickým řešením rovnice (15)
- přesné řešení rovnice (14) budeme hledat ve tvaru

$$\psi(\xi) = \nu(\xi)e^{-\xi^2/2} \tag{R1}$$

- dosadíme (R1) do (14) a dostaneme

$$\frac{\mathrm{d}^2(\nu(\xi)e^{-\xi^2/2})}{\mathrm{d}\xi^2} - (\lambda-\xi^2)\nu(\xi)e^{-\xi^2/2} = 0 \tag{22}$$

- po úpravě dostaneme diferenciální rovnici pro $\nu(\xi)$

$$\frac{\mathrm{d}^2\nu(\xi)}{\mathrm{d}\xi^2} - 2\xi\frac{\mathrm{d}\nu(\xi)}{\mathrm{d}\xi} + (\lambda-1)\nu(\xi) = 0 \tag{23}$$

- řešení budeme hledat v tvaru rozvoje

$$\nu(\xi) = a_0 + a_1\xi + a_2\xi^2 + a_3\xi^3 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\xi^n \tag{24}$$

- derivací (24) dostaneme

$$\frac{\mathrm{d}\nu(\xi)}{\mathrm{d}\xi} = a_1 + 2a_2\xi + 3a_3\xi^2 + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n\xi^{n-1} \tag{25}$$

- vztah (25) vynásobíme ξ
- dostaneme

$$\xi\frac{\mathrm{d}\nu(\xi)}{\mathrm{d}\xi} = a_1\xi + a_2\xi^2 + a_3\xi^3 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n\xi^n \tag{26}$$

- druhá derivace (24) bude

$$\frac{\mathrm{d}^2\nu(\xi)}{\mathrm{d}\xi^2} = 1\cdot 2a_2 + 2\cdot 3a_3 y + 3\cdot 4a_4 y^2 + \cdots = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n\xi^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}\xi^n \tag{27}$$

- dosadíme (24), (26) a (27) do (23)

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}\xi^n - 2\sum_{n=0}^{\infty} n a_n\xi^n + (\lambda-1)\sum_{n=0}^{\infty} a_n\xi^n = 0 \tag{28}$$

- vytkneme sumu

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+2)(n+1)a_{n+2} - 2na_n + (\lambda - 1)a_n\right] \xi^n = 0 \tag{29}$$

- vytkneme a_n

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+2)(n+1)a_{n+2} - (2n+1-\lambda)a_n\right] \xi^n = 0 \tag{30}$$

- aby rovnice platila pro všechny hodnoty ξ, musí být člen v hranatých závorkách roven nule pro všechny n
- musí tedy platit

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} = (2n+1-\lambda)a_n \tag{31}$$

- dostaneme rekurentní vztah

$$a_{n+2} = \frac{2n+1-\lambda}{(n+1)(n+2)} a_n \tag{R2}$$

- rovnice (R2) umožňuje najít koeficienty $a_2, a_3, a_4, \ldots$ pomocí a_0 a a_1
- poněvadž (23) je diferenciální rovnice druhého řádu, má její řešení dvě libovolné konstanty, zde a_0 a a_1
- pomocí a_0 dostaneme posloupnost koeficientů $a_2, a_4, a_6, \ldots$
- pomocí a_1 dostaneme posloupnost koeficientů $a_3, a_5, a_7, \ldots$

Energetické hladiny

- nyní potřebujeme vyšetřit chování funkce
$$\psi(\xi) = \nu(\xi) e^{-\xi^2/2} \tag{32}$$
pro $\xi \to \infty$
- ψ může být fyzikálně přípustnou vlnovou funkcí, jen když se bude blížit k nule pro $\xi \to \infty$
- to bude platit, pokud
$$\lim_{\xi\to\infty} \nu(\xi) < \lim_{\xi\to\infty} e^{-\xi^2/2} \tag{33}$$
- vypočteme poměr mezi za sebou následujícími koeficienty obou rozvojů pro $n \to \infty$
- podle (R2)
$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+2}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+1-\lambda}{(n+1)(n+2)} = \frac{2}{n} \tag{34}$$
- rozvoj exponenciály je
$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \tag{35}$$
- rozvoj $\exp\left(\frac{1}{2}x^2\right)$ je
$$\exp\left(\frac{1}{2}x^2\right) = 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^4}{2^2 \cdot 2!} + \frac{x^6}{2^3 \cdot 3!} + \dots = \sum_{n=0,2,4,\dots}^{\infty} \frac{1}{2^{n/2}\left(\frac{n}{2}\right)!} x^n = \sum_{n=0,2,4,\dots}^{\infty} b_n x^n \tag{36}$$
- poměr mezi sousedními koeficienty bude
$$\frac{b_{n+2}}{b_n} = \frac{2^{n/2}\left(\frac{n}{2}\right)!}{2^{(n+2)/2}\left(\frac{n+2}{2}\right)!} = \frac{2^{n/2}\left(\frac{n}{2}\right)!}{2\cdot 2^{n/2}\left(\frac{n}{2}+1\right)\left(\frac{n}{2}\right)!} = \frac{1}{2\left(\frac{n}{2}+1\right)} = \frac{1}{n+2} \tag{37}$$
- v limitě $b \to \infty$ tento poměr nabývá hodnoty
$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_{n+2}}{b_n} = \frac{1}{n} \tag{38}$$
- koeficienty v mocninné řadě pro $\nu(\xi)$ klesají pomaleji než koeficienty v rozvoji $\exp\left(\frac{1}{2}\xi^2\right)$
- to znamená, že $\nu(\xi)e^{-\xi^2/2}$ nevymizí při $\xi \to \infty$
- je proto nutné, aby ν měla pouze konečný počet členů
- z rekurentního vztahu (R2) vidíme, že je-li
$$\lambda = 2k+1,\ k = 0, 1, 2, \dots \tag{39}$$

- pro nějaké k, pak
$$a_{k+2} = a_{k+4} = a_{k+6} = \cdots = 0 \tag{40}$$
jak požadujeme

- řada (R2) pro $\nu(\xi)$ může patřit do jednoho ze dvou typů

  1. $a_0 \neq 0, a_1 = 0, k$ je přirozené a sudé V tomto případe $\nu(\xi)$ je polynom stupně k, obsahující jen sudé mocniny ξ.
  2. $a_0 = 0, a_1 \neq 0, k$ je přirozené a liché , $\nu(\xi)$ je opět polynom stupně k, který obsahuje jen liché mocniny ξ.

- všimněme si hodnot energie, které odpovídají fyzikálně přípustným řešením 1. a 2. typu.

- v obou případech platí podmínka (39)

- po dosazení (39) do (12) dostaneme přípustné hodnoty energie pro lineární harmonický oscilátor
$$E_k = \hbar\omega \left(k + \frac{1}{2}\right), \; k = 0, 1, 2, \ldots \tag{41}$$

- energie harmonického oscilátoru je tedy kvantovaná po částech o velikosti $\hbar\omega$

- energetické hladiny jsou zde ekvidistantní

- všimněme si, že pro $n = 0$ je
$$E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega \tag{42}$$

- to je nejnižší energie , jakou může oscilátor mít

- tato hodnota se nazývá nulová energie

- energie harmonického oscilátoru by se měla s teplotou klesající k 0 K blížit k $E = E_0$ a nikoliv k $E = 0$

Vlnové funkce

- vlnové funkce příslušné k hodnotám energie můžeme přímo zkonstruovat z rovnice (R1) a z rekurentních vztahů (R2)
- tyto řešení mají tvar
$$\psi_k(\xi) = N_k H_k(\xi) e^{-\xi^2/2} \tag{43}$$
- kde $H_k(\xi)$ jsou polynomy k-tého stupně, při sudém k obsahují H_k pouze sudé mocniny ξ a při lichém k pouze liché mocniny.
- konstanta N_k v (43) je určená normovací podmínkou
$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} |\psi_k(x)|^2 \mathrm{d}x = 1 \tag{44}$$
- například pro řešení odpovídající základnímu stavu ($k = 0$) zvolme $a_0 = 1$
- je to řešení typu 1, tedy $a_1 = 0$ a z rekurentního vztahu (R2) potom dostaneme $a_i = 0$ pro $i \geq 2$
- vlnová funkce základního stavu má tedy tvar
$$\psi_0(\xi) = Ce^{-\xi^2/2} \tag{45}$$
- kde C normalizační konstanta.
- prvnímu excitovanému stavu ($k = 1$) odpovídá řešení typu 2, $a_0 = 0, a_1 = 1$ (například), $a_i = 0$ pro $i \geq 2$ a dostaneme
$$\psi_1(\xi) = C'\xi e^{-\xi^2/2} \tag{46}$$
- kde C' je opět normalizační konstanta.
- je možné ukázat, že (při vhodné volbě normování) polynomy $H_k(\xi)$ jsou totožné s Hermitovými polynomy, jejichž vlastností jsou v matematice dobře známé
- obecný tvar pro vlnovou funkci normovanou na jedničku je
$$\psi_k(\xi) = \left(\frac{m\omega_0}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} \frac{1}{\sqrt{2^k k!}} H_k(\xi) e^{-\xi^2/2}, \tag{47}$$
- kde
$$\xi = x\sqrt{\frac{m\omega_0}{\hbar}} \tag{48}$$
- v proměnné x
$$\psi_k(x) = \left(\frac{m\omega_0}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} \frac{1}{\sqrt{2^k k!}} H_k\left(\sqrt{\frac{m\omega_0}{\hbar}} \cdot x\right) \exp\left(-\frac{m\omega_0}{2\hbar} \cdot x^2\right), \tag{49}$$

$$\begin{aligned}
\psi_0(x) &= \left(\frac{m\omega_0}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} \frac{1}{\sqrt{2^0 0!}} H_0\left(\sqrt{\frac{m\omega_0}{\hbar}}\cdot x\right)\exp\left(-\frac{m\omega_0}{2\hbar}\cdot x^2\right) && (50)\\
&= \left(\frac{m\omega_0}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} \exp\left(-\frac{m\omega_0}{2\hbar}\cdot x^2\right) && (51)\\
\psi_1(x) &= \left(\frac{m\omega_0}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} \frac{1}{\sqrt{2^1 1!}} H_2\left(\sqrt{\frac{m\omega_0}{\hbar}}\cdot x\right)\exp\left(-\frac{m\omega_0}{2\hbar}\cdot x^2\right) && (52)\\
&= \left(\frac{m\omega_0}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} \frac{1}{\sqrt{2}}\left(2\sqrt{\frac{m\omega_0}{\hbar}}\cdot x\right)\exp\left(-\frac{m\omega_0}{2\hbar}\cdot x^2\right) && (53)\\
&= \left(\frac{m\omega_0}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} \sqrt{\frac{2m\omega_0}{\hbar}}\cdot x\cdot\exp\left(-\frac{m\omega_0}{2\hbar}\cdot x^2\right) && (54)
\end{aligned}$$

- pro

$$\alpha = \frac{m\omega_0}{\hbar}, y = \sqrt{\alpha}\cdot\xi \tag{55}$$

$$\begin{aligned}
\psi_k(y) &= \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} \frac{1}{\sqrt{2^k k!}} H_k(y) e^{-y^2/2} && (56)\\
\psi_0(y) &= \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} \frac{1}{\sqrt{2^0 0!}} H_0(y) e^{-y^2/2} && (57)\\
&= \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-y^2/2} && (58)\\
\psi_1(y) &= \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} \frac{1}{\sqrt{2^1 1!}} H_1(y) e^{-y^2/2} = \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot 2y\cdot e^{-y^2/2} && (59)\\
&= \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} \sqrt{2} y e^{-y^2/2} && (60)\\
\psi_2(y) &= \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} \frac{1}{\sqrt{2^2 2!}} H_2(y) e^{-y^2/2} = \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} \frac{1}{\sqrt{8}}\cdot (4y^2-2) e^{-y^2/2} && (61)\\
&= \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} \frac{1}{\sqrt{2}}(2y^2-1) e^{-y^2/2} && (62)\\
\psi_3(y) &= \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} \frac{1}{\sqrt{2^3 3!}} H_3(y) e^{-y^2/2} = \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} \frac{1}{4\sqrt{3}}\cdot (8y^3-12y)\cdot e^{-y^2/2} && (63)\\
&= \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} \frac{1}{\sqrt{3}}(2y^3-3y) e^{-y^2/2} && (64)\\
\psi_4(y) &= \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} \frac{1}{\sqrt{2^4 4!}} H_4(y) e^{-y^2/2} = \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} \frac{1}{8\sqrt{6}}\cdot (16x^4-48x^2+12)\cdot e^{-y^2/2} && (65)\\
&= \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} \frac{1}{2\sqrt{6}}(4x^4-12x^2+3) e^{-y^2/2} && (66)
\end{aligned}$$

$$\psi_5(y) = \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} \frac{1}{\sqrt{2^5 5!}} H_5(y) e^{-y^2/2} = \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} \frac{1}{16\sqrt{15}} \cdot (32x^5 - 160x^3 + 120x) \cdot e^{-y^2/2} \quad (67)$$

$$= \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} \frac{1}{2\sqrt{15}} (4x^5 - 20x^3 + 15x) e^{-y^2/2} \quad (68)$$

$$\psi_6(y) = \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} \frac{1}{\sqrt{2^6 6!}} H_6(y) e^{-y^2/2} = \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} \frac{1}{96\sqrt{5}} \cdot (64x^6 - 480x^4 + 720x^2 - 120) \cdot e^{-y^2/2} \quad (69)$$

$$= \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} \frac{1}{12\sqrt{5}} (8x^6 - 60x^4 + 90x^2 - 15) e^{-y^2/2} \quad (70)$$

$$\psi_7(y) = \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} \frac{1}{\sqrt{2^7 7!}} H_7(y) e^{-y^2/2} \quad (71)$$

$$= \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} \frac{1}{96\sqrt{70}} \cdot (128x^7 - 1344x^5 + 3360x^3 - 1680x) \cdot e^{-y^2/2} \quad (72)$$

$$= \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} \frac{1}{6\sqrt{70}} (8x^7 - 84x^5 + 210x^3 - 105x) e^{-y^2/2} \quad (73)$$

$$\psi_8(y) = \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} \frac{1}{\sqrt{2^8 8!}} H_8(y) e^{-y^2/2} \quad (74)$$

$$= \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} \frac{1}{384\sqrt{70}} \cdot (256x^8 - 3584x^6 + 13440x^4 - 13440x^2 + 1680) \cdot e^{-y^2/2} \quad (75)$$

$$= \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} \frac{1}{24\sqrt{70}} (16x^8 - 224x^6 + 840x^4 - 840x^2 + 105) e^{-y^2/2} \quad (76)$$

$$\psi_9(y) = \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} \frac{1}{\sqrt{2^9 9!}} H_9(y) e^{-y^2/2} \quad (77)$$

$$= \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} \frac{1}{2304\sqrt{35}} \cdot (512x^9 - 9216x^7 + 48384x^5 - 80640x^3 + 30240x) \cdot e^{-y^2/2} \quad (78)$$

$$= \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} \frac{1}{72\sqrt{35}} (16x^9 - 288x^7 + 1512x^5 - 2520x^3 + 945x) e^{-y^2/2} \quad (79)$$

$$\psi_{10}(y) = \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} \frac{1}{\sqrt{2^{10} 10!}} H_{10}(y) e^{-y^2/2} \quad (80)$$

$$= \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} \frac{1}{23040\sqrt{7}} \cdot (1024x^{10} - 23040x^8 + 161280x^6 - 403200x^4 + 302400x^2 - 30240) \quad (81)$$

$$\cdot \quad e^{-y^2/2} \quad (82)$$

$$= \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} \frac{1}{720\sqrt{7}} (32x^{10} - 720x^8 + 5040x^6 - 12600x^4 + 9450x^2 - 945) e^{-y^2/2} \quad (83)$$

- normovací podmínkou (35) je konstanta N_k určená až na fázový faktor typu $e^{i\alpha}$.
- tento faktor nemá fyzikální význam
- vraťme se nyní zpět k řešením 3. typu
- tato řešení je třeba zamítnout, protože nesplňují normovací podmínku.
- pokud řada pro $\nu(\xi)$ má nekonečný počet členů, tak $\nu(\xi) \to \exp(\xi^2)$ pro $\xi \to \infty$ a funkce $\psi(\xi)$ určená rovnicí (24) se zřejmě nedá normovat

- bez podrobného důkazu uvedeme jen jednoduchý argument, který dělá tvrzení přijatelným.
- Taylorův rozvoj funkce $\exp(\xi^2)$ je:

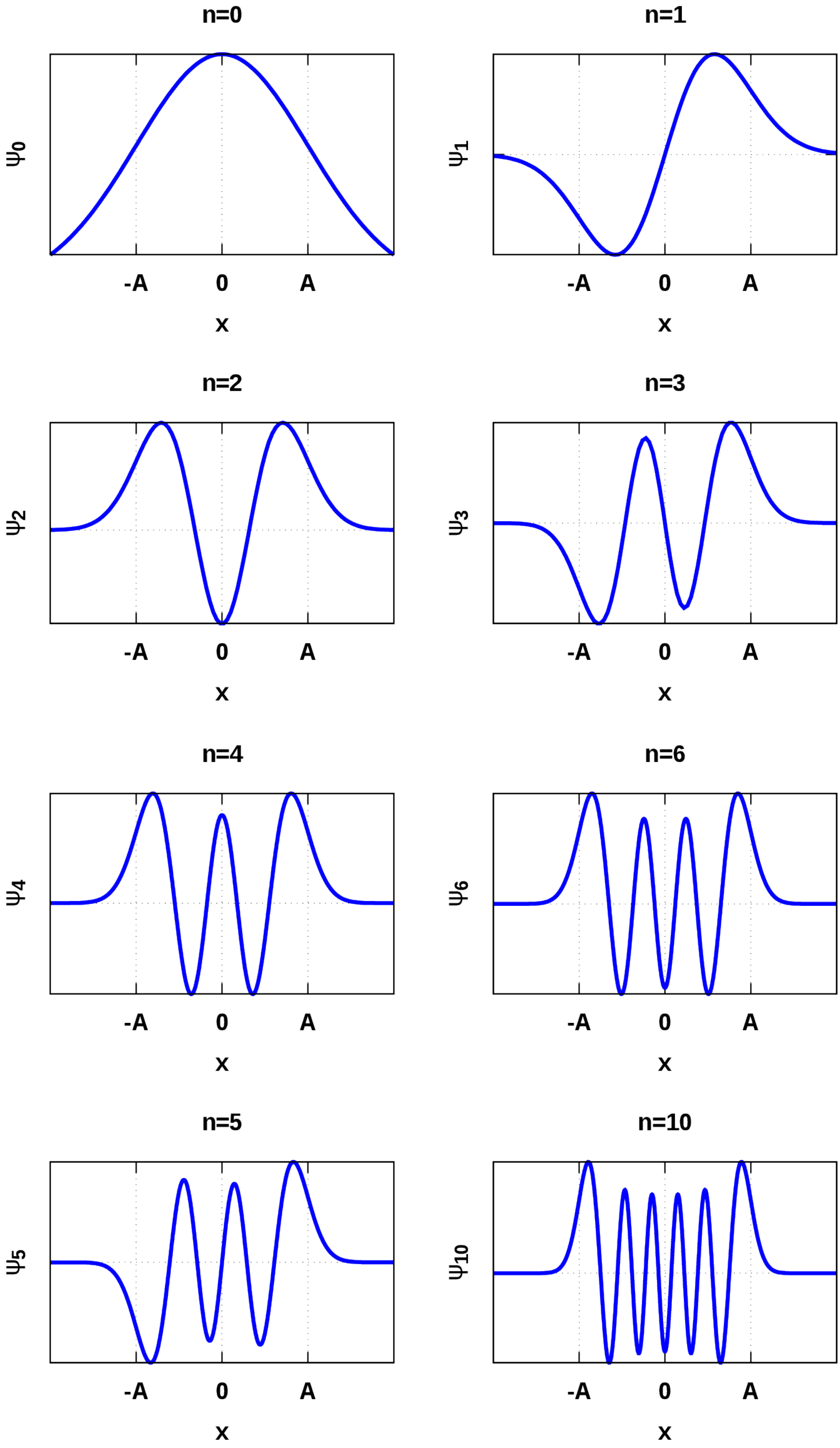
$$e^{\xi^2/2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(\xi^2)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\xi^{2k} = \sum_{k=0, sude}^{\infty} \frac{1}{(k/2)!}\xi^k \tag{84}$$

- pro velké k platí

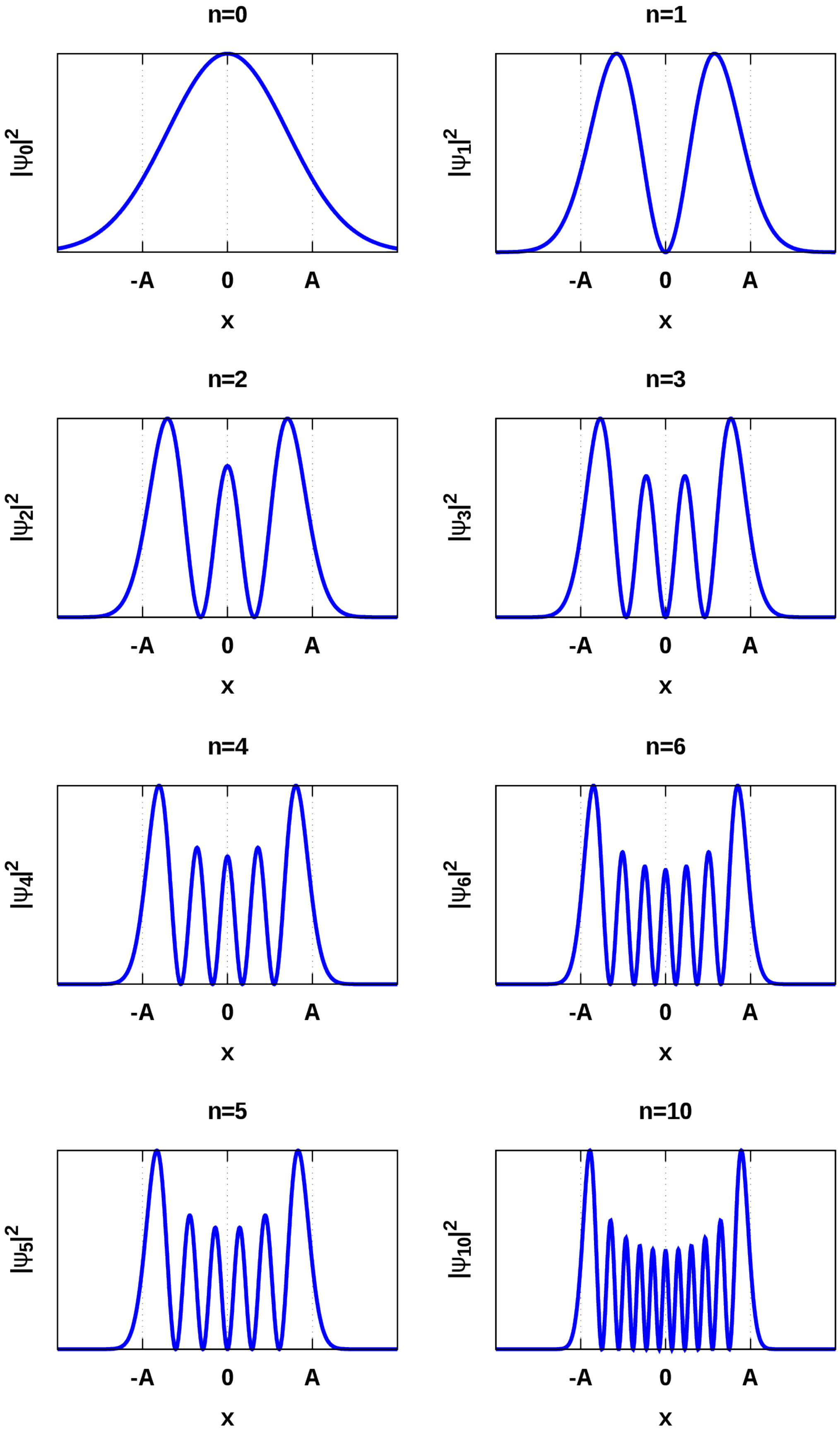
$$\frac{b_{k+2}}{b_k} \to \frac{2}{k} \tag{85}$$

- a to je stejný poměr, jaký mají pro velké k koeficienty rozvoje $\nu(\xi)$ (viz. (R2)).

Průběhy vlnových funkcí



Hustoty pravděpodobnosti



Amplituda A

- hranice $-A$ a $+A$ v grafech ukazují hranice, v nichž by kmital klasický oscilátor s toutéž energií
- energie klasického oscilátoru

$$E = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}m\omega_0^2 A^2 \tag{1}$$

- energie kvantového oscilátoru

$$E_k = \hbar\omega_0 \left(k + \frac{1}{2}\right) \tag{2}$$

- obě energie se sobě rovnají

$$\frac{1}{2}m\omega_0^{\cancel{2}} A_k^2 = \hbar\cancel{\omega_0} \left(k + \frac{1}{2}\right) \tag{3}$$

- amplituda A_k příslušná ke kvantovému číslu k je

$$A_k = \sqrt{\frac{2\hbar\left(k + \frac{1}{2}\right)}{m\omega_0}} \tag{4}$$

- v bezrozměrných jednotkách

$$A_k = \sqrt{\frac{2\hbar\left(k + \frac{1}{2}\right)}{m\omega_0}} \cdot \sqrt{\frac{m\omega_0}{\hbar}} = \sqrt{2\left(k + \frac{1}{2}\right)} \tag{5}$$

$$A_0 = \sqrt{2\left(0 + \frac{1}{2}\right)} = 1 \tag{6}$$

$$A_1 = \sqrt{2\left(1 + \frac{1}{2}\right)} = \sqrt{2+1} = \sqrt{3} \doteq 1,73 \tag{7}$$

$$A_2 = \sqrt{2\left(2 + \frac{1}{2}\right)} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5} \doteq 2,24 \tag{8}$$

$$A_3 = \sqrt{2\left(3 + \frac{1}{2}\right)} = \sqrt{6+1} = \sqrt{7} \doteq 2,65 \tag{9}$$