

## Vlnový systém s prostorovým útlumem

- kmitavý pohyb u vlnového systému obecně vykazuje ztráty (tepelné, viskózní, vyzařováním, aj.).
- působením brzdící síly dochází ke ztrátám energie, mluvíme o disipaci energie
- ve vlnové rovnici se objeví člen úměrný první časové derivaci
- tento člen odpovídá brzdící síle (podobně jako u kmitavého pohybu).
- vlnová rovnice s útlumem bude mít tvar

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \underbrace{\frac{\Gamma}{c^2} \frac{\partial y}{\partial t}}_{\text{disipační člen}} = 0 \quad (1)$$

- do této vlnové rovnice dosadíme postupnou vlnu (PV1). Po dosazení derivací dostaneme

$$-k^2 y - \frac{1}{c^2} (-\omega^2 y) - \frac{\Gamma}{c^2} (-j\omega y) = 0 \quad (2)$$

- rovnici vynásobíme  $-\frac{c^2}{y}$  a převedeme druhý a třetí člen na pravou stranu

$$-k^2 \cancel{y} \cdot \left( -\frac{c^2}{\cancel{y}} \right) = \frac{1}{\cancel{c^2}} (-\omega^2 \cancel{y}) \cdot \left( -\frac{\cancel{c^2}}{\cancel{y}} \right) + \frac{\Gamma}{\cancel{c^2}} (-j\omega \cancel{y}) \cdot \left( -\frac{\cancel{c^2}}{\cancel{y}} \right) \quad (3)$$

- dostaneme disperzní relaci ve tvaru

$$c^2 k^2 = \omega^2 + j\Gamma\omega \quad (4)$$

- vlnové číslo  $k$  bude v tomto případě komplexní, budeme je předpokládat ve tvaru

$$k = k_1 + jk_2 \quad (5)$$

- po dosazení do disperzní relace a po oddělení reálné a imaginární části dostaneme rovnice pro  $k_1$  a  $k_2$

$$c^2(k_1^2 - k_2^2) = \omega^2 \text{ a } 2c^2 k_1 k_2 = \Gamma\omega$$

- po dosazení do (PV1) dostaneme

$$y = y_m e^{j(kx - \omega t)} = y_m e^{j[(k_1 + jk_2)x - \omega t]} = y_m e^{-k_2 x} e^{j(k_1 x - \omega t)}$$

Řešením je tedy v tomto případě exponenciálně tlumená harmonická vlna.

### Evanescentní vlna

- Zvláštní případ nastává, jestliže  $k_1 = 0$ , avšak  $k_2 \neq 0$
- Mluvíme v tomto případě o evanescentní vlně.
- Vlna se sice nemůže šířit, avšak amplituda je nenulová (prostorově zatlumená).
- Celý systém kmitá ve fázi, podobně jako ve stojaté vlně.
- Vlna se nešíří prostředím. Tento případ je v optice velmi významný např. u totálního odrazu světla.

## Rozdělení disperzních dějů

- z (GR2) plyne, že pokud  $v_f$  klesá s rostoucí frekvencí, tj.  $\frac{dv_f}{df} < 0$ , je  $v_g < v_f$
- tento případ označujeme jako normální disperzi z (GR2) rovněž plyne, že pokud  $v_f$  roste s rostoucí frekvencí, tj.  $\frac{dv_f}{df} > 0$ , je  $v_g > v_f$
- tento případ označujeme jako anomální disperzi

### Normální disperze

- fázová rychlost  $v_f$  klesá s rostoucí frekvencí
- platí tedy  $\frac{dv_f}{d\omega} < 0$
- fázová rychlost je větší než grupová  $v_f > v_g$
- například: pohyb mořských vln  $\left(v_g = \frac{1}{2}v_f\right)$

### Anomální disperze

- fázová rychlost  $v_f$  roste s rostoucí frekvencí
- platí tedy  $\frac{dv_f}{d\omega} > 0$
- fázová rychlost je menší než grupová  $v_f < v_g$
- například: pohyb kruhů na hladině kapaliny  $\left(v_g = \frac{3}{2}v_f\right)$
- skla s anomální disperzí se používají v objektivách zejména digitálních zrcadlovek, značí se AD

## Interference vln

- říkáme také skládání vln
- k interferenci dochází při skládání koherentních vln
- výsledná vlna vzniká složením dvou nebo více vln
- neskládáme jen amplitudy vln, bereme v úvahu také jejich fázi
- pojem interference je jedním ze základních pojmů nauky o vlnění
- lze jím vysvětlit řadu jevů
  - duhové barvy tenkých vrstev
  - zesílení a zeslabení zvuku architektonickými úpravami vnitřních prostor
  - přesné měření délek interferometrem

## Optická dráha vlny $L$

- vlna se šíří  $N$  prostředími o indexech lomu  $n_i$
- v každém z těchto prostředí urazí vzdálenost  $\ell_i$  (tzv. geometrická dráha )
- vlna prochází  $M$  rozhraními mezi prostředími
- na každém z těchto rozhraní dojde k fázovému posunu  $\Delta\phi_j$
- celková optická dráha vlny  $L$  s uvážením změny fáze je pak dána jako

$$L = \sum_{i=1}^N n_i \ell_i + \sum_{j=1}^M \Delta\phi_j \quad (\text{OD})$$

## Změna fáze vlny na rozhraní dvou prostředí

- opticky hustší prostředí má větší index lomu než opticky řidší prostředí
- při lomu na rozhraní dvou prostředí nedochází ke změně fáze
- při odrazu na opticky řidším prostředí se fáze nemění
- při odrazu na opticky hustším prostředí se fáze mění o  $\frac{\lambda}{2}$

## Interference dvou vln

- dvě vlny se šíří po různých optických drahách  $L_1$  a  $L_2$
- optický dráhový rozdíl drah těchto dvou vln označíme  $\Delta L = L_1 - L_2$

### Konstruktivní interference

- maximum intenzity nastane pro optický dráhový rozdíl rovný celočíselnému násobku vlnových délek

$$\Delta L = m\lambda, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \quad (\text{MXI})$$

- amplituda výsledné vlny je rovna součtu amplitud obou vln  $y_m = y_{m1} + y_{m2}$

### Destruktivní interference

- minimum intenzity nastane pro optický dráhový rozdíl rovný lichému násobku polovin vlnových délek

$$\Delta L = (2m + 1)\frac{\lambda}{2}, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \quad (\text{MNI})$$

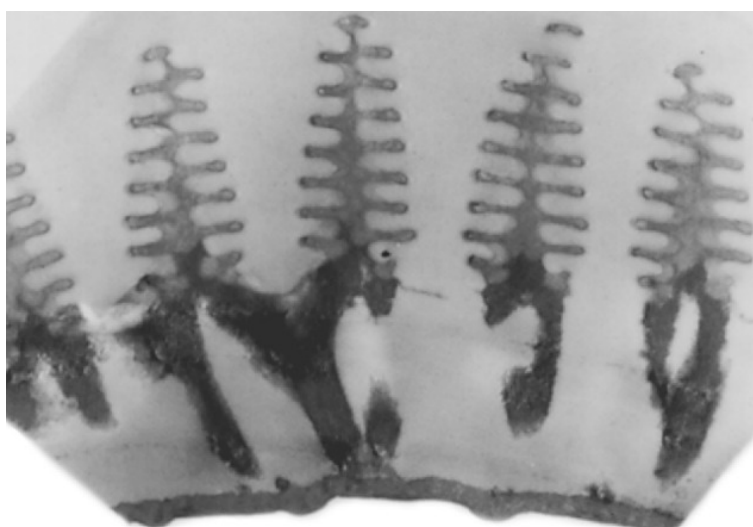
- amplituda výsledné vlny je rovna rozdílu amplitud obou vln  $y_m = |y_{m1} - y_{m2}|$
- například když světlo dopadá kolmo na tenkou průhlednou vrstvu o tloušťce  $h$ , vlny odražené od přední a zadní plochy interferují, dráhový rozdíl je roven  $\Delta L = 2h$

## Příklad konstruktivní interference

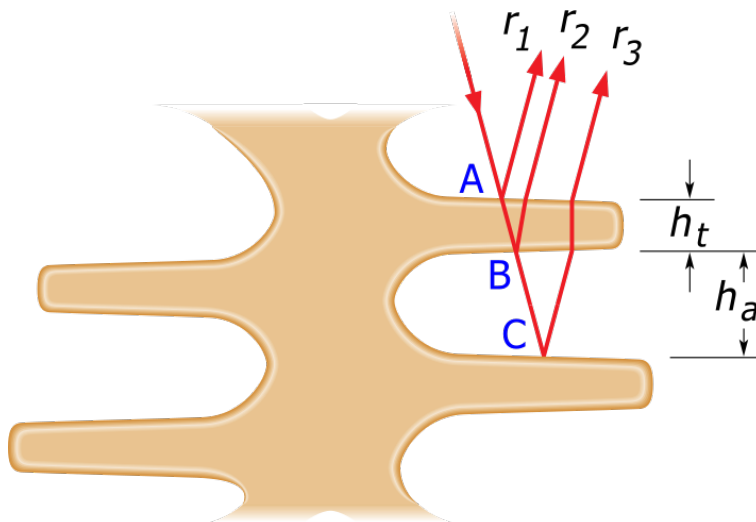
- Povrch křídel motýlů z rodu Morpho je na první pohled nádherně modrozelený.



- Pokud změníme směr pozorování, nebo pokud se křídlo pohybuje, odstín zbarvení se mění.
- Vypadá to, že křídlo je barevně proměnné a modrozelené zbarvení skrývá pravou matně hnědou barvu, kterou vidíme na spodní ploše křídla.
- Duhové zbarvení povrchu křídel motýlů z rodu Morpho je důsledkem konstruktivní interference světla, odraženého na tenkých terasovitě uspořádaných stupních průsvitných kutikul (buněčných bran na povrchu křídel).
- Ty jsou rovnoběžné s povrchem křídel a rozšiřují se směrem dolů ze středové části, kolmé ke křídlu.
- Řez středovou částí a terasovitými stupni ukazuje snímek z elektronového mikroskopu.



- Stupně mají index lomu  $n = 1,53$  a tloušťku  $h_t = 63,5$  nm.
- Jsou odděleny vzduchovou mezerou o tloušťce  $h_a = 127$  nm.
- Světlo na ně dopadá kolmo.
- Pro přehlednost je v obrázku použit šikmý chod příslušných paprsků.
- Vypočteme, pro jakou vlnovou délku viditelného světla vzniká při odrazu interferenční maximum.



- Uvažujme paprsky  $r_1, r_2$  a  $r_3$ , u kterých dochází k odrazu v bodech  $A, B$  a  $C$
- Vyjádříme si optické dráhy jednotlivých vln:
- Pro vlnu  $r_1$  máme optickou dráhu  $L_1 = \ell_1 + \Delta\phi_1 = 0 + \frac{\lambda}{2} = \frac{\lambda}{2}$
- Pro vlnu  $r_2$  máme optickou dráhu  $L_2 = n\ell_2 + \Delta\phi_2 = 2nh_t + 0 = 2nh_t$
- Pro vlnu  $r_3$  máme optickou dráhu  $L_3 = n\ell_2 + \ell_3 + \Delta\phi_3 = 2nh_t + 2h_a + \frac{\lambda}{2}$
- konstruktivní interference pro vlny  $r_1$  a  $r_2$  nastane podle (MXI) pro optický dráhový rozdíl rovný celočíselnému násobku vlnových délek

$$L_2 - L_1 = m\lambda$$

- Po dosazení dostaneme

$$2nh_t - \frac{\lambda}{2} = m\lambda \Rightarrow \lambda = \frac{2h_t n}{m + \frac{1}{2}}$$

- Nejvyšší hodnoty vlnové délky získáme pro  $m = 0$  :

$$\lambda = \frac{2 \cdot 63,5 \text{ nm} \cdot 1,53}{0 + \frac{1}{2}} = 388 \text{ nm}$$

- Tato vlnová délka leží v ultrafialové oblasti

- Pro větší  $m$  dostaneme ještě menší vlnové délky, které leží ještě hlouběji v ultrafialovém pásmu.
- Paprsky  $r_1$  a  $r_2$  tedy nevytvářejí jasné modrozelené zbarvení motýla.
- konstruktivní interference pro vlny  $r_1$  a  $r_3$  nastane podle (MXI) pro optický dráhový rozdíl rovný celočíselnému násobku vlnových délek

$$L_3 - L_1 = m\lambda$$

- Po dosazení za  $L_3$  a  $L_1$  dostaneme

$$2nh_t + 2h_a + \frac{\lambda}{2} - \frac{\lambda}{2} = m\lambda \Rightarrow \lambda = \frac{2h_t n + 2h_a}{m}$$

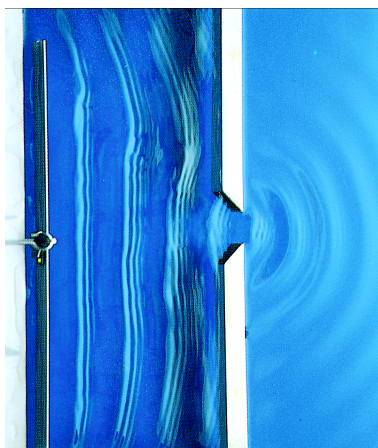
- Nejvyšší hodnoty vlnové délky získáme pro  $m = 1$  :

$$\lambda = \frac{2 \cdot 63,5 \text{ nm} \cdot 1,53 + 2 \cdot 127 \text{ nm}}{1} = \underline{\underline{448 \text{ nm}}}$$

- Tato vlnová délka odpovídá jasně modrozelenému zbarvení horního povrchu křídla motýla Morpho.
- Pokud světlo nedopadá přesně kolmo k rozhraní terasovitého stupně, ale poněkud šikmo, změní se dráhy vln a tím i poloha interferenčního maxima.
- Díváme-li se tedy na křídlo, které se pohybuje, pak se stále nepatrně mění vlnové délky, pro které je křídlo nejjasnější.
- To způsobuje duhový lesk povrchu křídla.

## Difrakce

- Difrakci vln rovněž označujeme jako ohyb vln
- Difrakcí vln rozumíme jev spočívající v pronikání vlnění do oblasti geometrického stínu
- Difrakce vzniká při průchodu vlnění
  - otvorem způsobujícím narušení vlnění
  - kolem překážky způsobujícím narušení vlnění
- Difrakci vykazují vlny všech typů , nejenom světelné vlny
- Na obrázku vidíme difrakci vodních vln, šířících se na vodní hladině v mělké nádobě



- Přesná teorie ohybu vychází z řešení Maxwellových rovnic s použitím okrajových podmínek, které charakterizují tvar a vlastnosti předmětu, na němž ohyb nastává.
- Matematické obtíže tohoto přístupu jsou ohromné a řešení je možné jen v nejjednodušších případech
- Difrakční integrály bývají většinou odvozovány z Huygensova-Fresnelova principu.

### Příklad difrakce

- S příkladem difrakce se setkáme, pohlédneme-li na jasně modrou oblohu .
- Uvidíme jemné skvrny a vláknité struktury vznášející se v zorném poli.
- Tyto vznášející se struktury vznikají tím, že světlo mívá okraje velmi malých kousků sklivcového moku (průhledný materiál vyplňující převážnou část oční bulvy).
- Tyto kousky se odlomily a vznášejí se ve vodní vrstvě těsně před sítnicí (detekuje světlo).
- Difrakční obrazec na jednom z těchto vznášejících se kousků onou vznášející se strukturou máte v zorném poli.
- Díváme-li se špendlíkovou dírkou v neprůhledném stínítku, takže světlo vstupující do vašeho oka je přibližně rovinnou vlnou, je možné, že budeme schopni v difrakčním obrazci rozlišit jednotlivá minima a maxima.

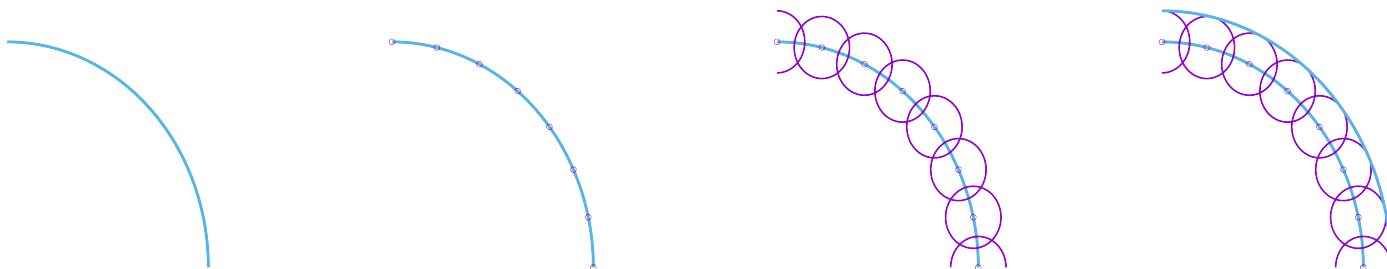


## Huygensova vlnová teorie

- prvním, kdo předložil přesvědčivou vlnovou teorii světla byl holandský fyzik Christian Huygens v roce 1678
- jeho teorie není tak rozsáhlá jako pozdější Maxwellova elektromagnetická teorie světla, je matematicky jednodušší a dodnes se používá
- Huygensova vlnová teorie je založena na geometrické konstrukci, která dovoluje stanovit, kde se bude nalézat vlnoplocha v libovolném pozdějším okamžiku, jestliže známe její současnou polohu
- Tato konstrukce vyplývá z tzv. Huygensova principu, což je ekvivalentní název pro Huygensovu konstrukci
- Christiaan Huygens je jedním ze zakladatelů vlnové optiky.
- Nebyl však první, kdo považoval světlo za nějaký druh vlnění.
- Že se světlo alespoň někdy projevuje jako vlnění, vyjádřil již F. M. Grimaldi a také Jan Marcus Marci (má pomník u Staroměstského náměstí).
- Huygens byl první, kdo na základě vlnové představy kvantitativně vysvětlil šíření světla ve volném prostoru, odraz, lom a dvojlom.

## Huygensův princip

1. všechny body na vlnoploše se chovají jako bodové zdroje sekundárních kulových vlnoploch
2. vlnoplocha v okamžiku  $t + \Delta t$  je obálkou sekundárních kulových vln, které vyšly z bodu vlnoplochy v předcházejícím okamžiku  $t$ .



## Fresnelova vlnová teorie

- Představa vyjádřená prvním tvrzením Huygensova principu je správná.
- Toto tvrzení již před Huygensem vyslovil český lékař a fyzik Jan Marcus Marci
- Naproti tomu druhé tvrzení je zřejmě nesprávné, neboť odporuje skutečnostem pozorovaným v interferenčních a difrakčních jevech.
- Fresnel proto zpřesnil druhé tvrzení Huygensova principu
- Při použití Huygensova-Fresnelova principu je nutné při konstrukci nové vlnoplochy brát v úvahu jak amplitudu, tak i fázi sekundárních vln.
- Výsledný obraz je dán konstruktivní a destruktivní interferencí sekundárních vln.
- Pomocí Huygensova-Fresnelova principu je možné vysvětlit difrakční jevy

## Huygensův-Fresnelův princip

1. všechny body na vlnoploše se chovají jako bodové zdroje sekundárních kulových vlnoploch
2. vlnoplocha v okamžiku  $t + \Delta t$  vznikne interferencí sekundárních kulových vln, které vyšly z bodu vlnoplochy v předcházejícím okamžiku  $t$ .

## Matematické vyjádření Huygens-Fresnelova principu

- Amplituda vlny  $\psi(x, y, z)$  je dána jako

$$\psi(x, y, z) = -\frac{ik}{2\pi} \iint_{(S_0)} \psi_0(M) \frac{\exp(iks)}{s} \cos \varphi dS_0 \quad (\text{HFP})$$

- Tento integrál se nazývá Fresnelův-Kirchhoffův difrakční integrál
- Vlna v bodě  $P$  je dána součtem sekundárních vln vycházejících z bodů plochy  $S_0$ .

$s$  je vzdálenost bodu  $P$  od bodu  $M$

$\frac{\exp(iks)}{s}$  je divergentní kulová vlna vycházející z bodu  $M$ . Říkáme jí též primární rozruch. Amplituda sekundárních vln je úměrná primárnímu rozruchu.

$-\frac{ik}{2\pi} = \frac{k}{2\pi} \exp\left(-i\frac{\pi}{2}\right)$  je faktor, který vyjadřuje skutečnost, že sekundární vlny mají amplitudu nepřímo úměrnou vlnové délce a že jejich fáze předbíhá o čtvrt periody fázi primárního rozruchu (nebo se za ní o tři čtvrtiny periody opožďuje).

Proto se faktoru  $-i = \exp\left(-i\frac{\pi}{2}\right)$  někdy v této souvislosti říká Fresnelův fázový předstih

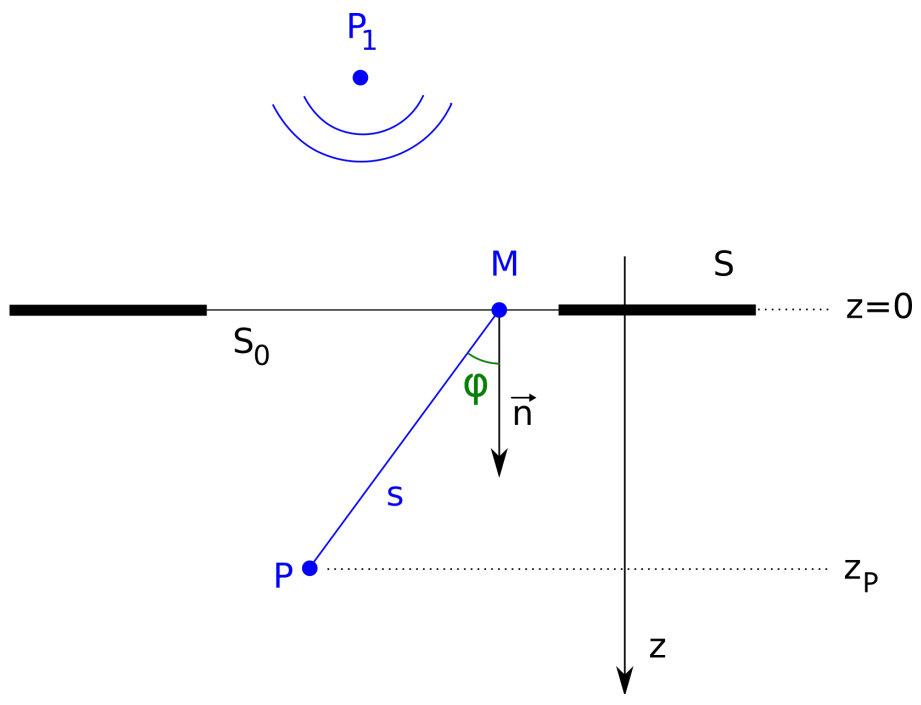
**Mezivýpočet:**

$$\exp\left(-i\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0 + i \cdot (-1) = -i$$

- Za obor integrace  $S_0$  bereme část roviny odpovídající propustným částem difrakčního stínítka
- Tuto rovinu volíme za souřadnicovou rovinu  $z = 0$ .

### Výpočet Fresnelova-Kirchhoffova integrálu

- Pomocí tohoto integrálu se nedá téměř nic analyticky vypočítat.
- Použijeme-li ho totiž bez zjednodušení integrandu k výpočtu konkrétních difrakčních jevů, shledáme, že integrace nelze provést nebo že příslušný integrál neexistuje.
- Proto se dělají různé aproximační úpravy integrandu.
- Jednou z mála výjimek, kdy integrál lze analyticky vypočítat, je nerušené šíření rovinné vlny
- Tento výpočet v náznaku ukáže potíže, s nimiž se při analytických výpočtech integrálu (HFP) setkáváme a ozřejmí se důvod, proč musí být v amplitudě sekundárních vln člen  $-\frac{ik}{2\pi}$



## Matematické vyjádření Fresnelovy difrakce

- popíšeme šíření sférické vlny, která vzniká v apertuře a šíří se podél osy  $z$ .
- V integrálu (HFP) položíme

$$\varphi = 0, \text{ tj. } \cos \varphi = 1 \quad (1)$$

- Dále vyjádříme kulovou vlnu pomocí její Fresnelovy paraxiální aproximace.
- Vzdálenost  $s$

$$s = r_{PM} = \sqrt{(x - x_M)^2 + (y - y_M)^2 + z^2} = z \sqrt{1 + \frac{(x - x_M)^2 + (y - y_M)^2}{z^2}} \quad (2)$$

- Souřadnice bodů v blízkém okolí osy  $z$  splňují podmínku

$$\frac{(x - x_M)^2 + (y - y_M)^2}{z^2} = \varepsilon \ll 1 \quad (3)$$

- Vztah (2) rozvineme pomocí Taylorova rozvoje funkce  $\sqrt{1 + a}$  pro malé  $a$

$$\sqrt{1 + a} \doteq 1 + \frac{a}{2} + o(a^2) \quad (4)$$

- Člen  $s$  můžeme s velkou přesností aproximovat vztahem

$$s \doteq z \left( 1 + \frac{(x - x_M)^2 + (y - y_M)^2}{2z^2} \right) = z + \frac{(x - x_M)^2}{2z} + \frac{(y - y_M)^2}{2z} \quad (5)$$

- Tento vztah vyjadřuje parabolickou aproximaci (parabolic approximation).

- Nyní zjednodušíme člen  $\frac{\exp(iks)}{s}$  v (HFP)

- V čitateli použijeme rozvoj (5), ve jmenovateli položíme

$$s = z \quad (6)$$

- Dostaneme

$$\begin{aligned} \frac{\exp(iks)}{s} &\doteq \frac{1}{z} \exp \left\{ ik \left[ z + \frac{(x - x_M)^2}{2z} + \frac{(y - y_M)^2}{2z} \right] \right\} \\ &= \frac{e^{ikz}}{z} \exp \left\{ \frac{ik}{2z} [(x - x_M)^2 + (y - y_M)^2] \right\} \end{aligned} \quad (7)$$

- Nyní dosadíme (7) do (HFP).

- Tak dostaneme Freselův difrakční integrál, označovaný také jako Fresnelova aproximace

$$\psi(x, y, z) = -\frac{ik}{2\pi} \frac{e^{ikz}}{z} \iint_{-\infty}^{\infty} \psi_0(x_M, y_M, 0) \exp \left\{ \frac{ik}{2z} [(x - x_M)^2 + (y - y_M)^2] \right\} dx_M dy_M \quad (\text{DI1})$$

kde  $\psi_0(x_M, y_M, 0) = 0$  v bodech nepropustné části stínítka.

- analytické řešení není jednoduché
- většinou vede na speciální funkce (Fresnelovy integrály, Besselovy funkce, Lommelovy funkce).
- Také numerické výpočty difrakčního integrálu (DI1) nebývají jednoduché, neboť integrand je rychle oscilující funkcí polohy bodu  $M(x_M, y_M)$  v rovině difrakčního stínítka.
- Ukážeme, jak difrakční integrál (DI1) vyjádřit pomocí Fourierovy transformace

- Rozepíšeme

$$(x - x_M)^2 = x^2 - 2xx_M + x_M^2 \quad (8)$$

$$(y - y_M)^2 = y^2 - 2yy_M + y_M^2 \quad (9)$$

- Pomocí (8) a (9) rozepíšeme exponenciálu v (DI1)

$$\begin{aligned} \exp \left\{ \frac{ik}{2z} [(x - x_M)^2 + (y - y_M)^2] \right\} &= \exp \left\{ \frac{ik}{2z} [x^2 - 2xx_M + x_M^2 + y^2 - 2yy_M + y_M^2] \right\} \\ &= \exp \left\{ \frac{ik}{2z} [x^2 + y^2] \right\} \exp \left\{ \frac{ik}{2z} [x_M^2 + y_M^2] \right\} \left\{ -\frac{ik}{2z} [2xx_M + 2yy_M] \right\} \end{aligned} \quad (10)$$

- Po dosazení (10) do (DI1) dostaneme

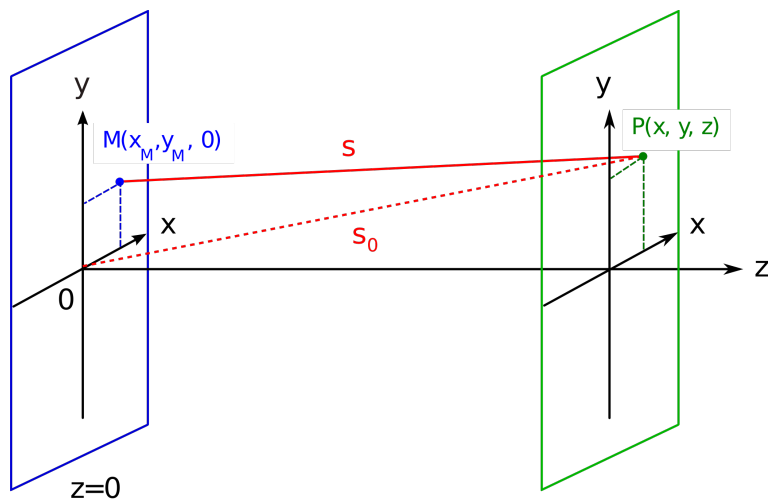
$$\begin{aligned} \psi(x, y, z) &= -\frac{ik}{2\pi} \frac{e^{ikz}}{z} \exp \left\{ \frac{ik}{2z} (x^2 + y^2) \right\} \times \\ &\times \iint_{-\infty}^{\infty} \psi_0(x_M, y_M, 0) \exp \left\{ \frac{ik}{2z} (x_M^2 + y_M^2) \right\} \exp \left\{ -\frac{ik}{z} (xx_M + yy_M) \right\} dx_M dy_M \end{aligned} \quad (DI2)$$

- Vlnová funkce charakterizující Fresnelovu difrakci je tak vyjádřena Fourierovou transformací součinu vlnové funkce  $\psi_0$  v rovině difrakčního stínítka a členu  $\exp \left\{ \frac{ik}{2z} (x_M^2 + y_M^2) \right\}$ .
- K výpočtu Fresnelovy difrakce tak lze využít metod vypracovaných pro Fourierovu transformaci.
- Všimněme si, že před integrálem je Fresnelova aproximace kulové vlny vycházející z počátku

$$\frac{\exp(iks_0)}{s_0} \doteq \frac{\exp(ikz)}{z} \exp \left\{ \frac{ik}{2z} [x^2 + y^2] \right\} \quad (11)$$

## Matematické vyjádření Fraunhoferovy difrakce

- popíšeme případ ohybu rovinných vln
- ve skalární difrakční teorii je Fraunhoferova difrakce aproximací Fresnelova difrakčního integrálu pro vzdálené pole



## Postup 2

- Ukážeme si nepříliš elegantní ale v literatuře velmi rozšířené odvození Fraunhoferova difrakčního integrálu
- V tomto případě aproximujeme kulovou vlnu v (HFP) poněkud jiným způsobem, než Fresnelovou parabolickou aproximací.
- Rozvineme vzdálenost  $s$  do řady v integračních proměnných  $x_M$  a  $y_M$

$$s = \sqrt{(x - x_M)^2 + (y - y_M)^2 + z^2} \quad (1)$$

$$= \sqrt{x^2 - 2xx_M + x_M^2 + y^2 - 2yy_M + y_M^2 + z^2} \quad (2)$$

$$= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - 2(xx_M + yy_M) + x_M^2 + y_M^2} \quad (3)$$

$$= \sqrt{s_0^2 - 2(xx_M + yy_M) + x_M^2 + y_M^2} \quad (4)$$

$$= s_0 \sqrt{1 - 2 \frac{xx_M + yy_M}{s_0^2} + \frac{x_M^2 + y_M^2}{s_0^2}} \quad (5)$$

- Vztah (5) rozvineme pomocí Taylorova rozvoje funkce  $\sqrt{1+a}$  pro malé  $a$

$$\sqrt{1+a} \doteq 1 + \frac{a}{2} + o(a^2) \quad (6)$$

- Dostaneme

$$s \doteq s_0 \left( 1 - 2 \frac{xx_M + yy_M}{2s_0^2} + \frac{x_M^2 + y_M^2}{2s_0^2} \right) \quad (7)$$

$$= s_0 - \frac{1}{s_0}(xx_M + yy_M) + \frac{1}{2s_0}(x_M^2 + y_M^2) \quad (8)$$

- Zanedbáme členy s vyššími mocninami  $x_M$  a  $y_M$ .
- Toto přiblížení je možné použít, pokud  $\psi_0(x_M, y_M, 0)$  má nenulové hodnoty jen v okolí počátku, konkrétně

$$\left| \frac{k(x_M^2 + y_M^2)}{2s_0} \right|_{max} \ll 2\pi, \text{ tj. } \left| \sqrt{x_M^2 + y_M^2} \right|_{max} \ll \sqrt{2\lambda s_0} \quad (9)$$

- Po tomto zanedbání dostaneme

$$s = s_0 - \frac{x}{s_0}x_M - \frac{y}{s_0}y_M \quad (10)$$

- Nyní zjednodušíme člen  $\frac{\exp(iks)}{s}$  v (HFP)
- V čitateli použijeme rozvoj (10), ve jmenovateli položíme

$$s = z \quad (11)$$

- Dostaneme

$$\frac{\exp(iks)}{s} \doteq \frac{1}{z} \exp \left[ ik \left( s_0 - \frac{x}{z}x_M - \frac{y}{z}y_M \right) \right] = \frac{\exp(iks_0)}{z} \exp \left[ -ik \left( \frac{x}{z}x_M + \frac{y}{z}y_M \right) \right] \quad (12)$$



- Nyní dosadíme (12) do Fresnelova-Kirchhoffova difrakčního integrálu (HFP):

$$\psi(x, y, z) = -\frac{ik \exp(iks_0)}{2\pi z} \iint_{(S_0)} \psi_0(x_M, y_M, 0) \exp\left[-\frac{ik}{z}(xx_M + yy_M)\right] dx_M dy_M \quad (13)$$

- Pokud je splněna podmínka (9), bude člen před integrálem (13) konstantní

$$-\frac{ik \exp(iks_0)}{2\pi z} = C \quad (14)$$

- S využitím (14) vyjádříme difrakční integrál (13) jako

$$\psi(x, y, z) = C \iint_{-\infty}^{+\infty} \psi_0(x_M, y_M, 0) \exp\left[-\frac{ik}{z}(xx_M + yy_M)\right] dx_M dy_M \quad (DI3)$$

- Funkce  $\psi(x, y, z)$  v (DI3) popisuje rovinnou vlnu vzniklou difrakcí.
- K osvětlení použijeme kolmo dopadající rovinnou vlnu
- Pro ni platí  $\psi(x_M, y_M, 0) = t(x_M, y_M)$

$t(x_M, y_M)$  je aperturní funkce

$t(x_M, y_M) = 1$  v místě, kde je otvor

$t(x_M, y_M) = 0$  všude jinde

- Po dosazení do (DI3) dostaneme Fraunhoferův difrakční integrál ve tvaru

$$\psi(x, y, z) = C \iint_{-\infty}^{\infty} t(x_M, y_M) \exp\left\{-\frac{ik}{z}(xx_M + yy_M)\right\} dx_M dy_M \quad (DI4)$$

- Tento integrál přímo odpovídá dvourozměrné Fourierově transformaci aperturní funkce
- To umožňuje použít k výpočtu Fraunhoferovy difrakce aparát Fourierových transformací
- Často proto mluvíme proto o Fourierovské optice
- Fourierova transformace je obsažena v mnoha rozšířených softwarových balících (Mathematica, MATLAB, Maple, ...)

## Fresnelovo číslo $F$

- je pojmenováno podle vojenského inženýra Augustina-Jean Fresnela
- je to bezrozměrné číslo, které se vyskytuje v optice, zejména v teorii difrakce
- pro vlnu, které prochází aperturou a pak dopadá na stínítko je definováno jako

$$F = \frac{a^2}{L\lambda}$$

kde

$a$  je charakteristický rozměr (např. průměr) apertury

$L$  je vzdálenost stínítka a apertury

$\lambda$  je vlnová délka dopadající vlny

Podle hodnoty Fresnelova čísla rozlišujeme v teorii difrakce tyto případy:

1.  $F < 1 \dots$  nastává Fraunhorefova difrakce ve vzdáleném poli
2.  $F \approx 1 \dots$  vyžaduje přesnější analýzu
3.  $F \geq 1 \dots$  nastává Fresnelova difrakce v blízkém poli
4.  $F \gg 1 \dots$  platí geometrická optika, k žádné difrakci nedochází

## Fresnelův ohyb

- také Fresnelova difrakce
- nastává v blízkém poli (Fresnelova oblast) pro  $F \geq 1$
- Příklad Fresnelova ohybu nastává, jestliže v rovině překážky nelze zanedbat zakřivení vlnoploch dopadajícího světelného svazku.
- difrakční obrazec se do jisté míry podobá geometrickému stínu apertury
- velikost difrakčního obrazce je srovnatelná se rozměry apertury
- matematická obtížnost popisu je hodně vysoká, výrazně větší, než u Fraunhoferova ohybu
- technické využití Fresnelova ohybu je malé, výrazně menší, než ohybu Fraunhoferova.
- Fresnelova difrakce se využívá např. u atomárního zrcadla (atomic mirror)
- zařízení, které odráží neutrální atomy podobným způsobem, jakým optická mřížka odráží viditelné světlo
- atomární zrcadlo může být vytvořeno pomocí elektrického nebo magnetického pole nebo jednoduše pomocí křemíkové destičky (wafer)

## Fraunhoferův ohyb

- také Fraunhoferova difrakce
- nastává ve vzdáleném poli (Fraunhoferova oblast) pro  $F < 1$
- difrakční obrazy jsou výrazné se zřetelnými projevy jak konstruktivní, tak destruktivní interference.
- Fraunhoferovy ohybové jevy nastávají tehdy, je-li vlna rovinná
- difrakční obrazec je výrazně větší než rozměry apertury
- matematická obtížnost popisu je výrazně nižší než u Fresnelovy difrakce
- technické využití Fraunhoferovy difrakce je značné

**Příklad** Vypočítejte průběh amplitudy vlny prošlé obdélníkovým otvorem v jinak neprůhledné rovinné desce. Obdélníkový otvor má rozměry  $a \times b$ , kde  $a = 0,25$  mm,  $b = 0,1$  mm. Obraz sledujeme na stínítku ve vzdálenosti  $z = 1$  m, vlnová délka je  $\lambda = 600$  nm. Dopadající vlna je rovinná.

**Řešení:** Nejprve rozhodneme, zda se jedná o Fresnelovu difrakci v blízkém poli nebo Fraunhoferův ohyb ve vzdáleném poli. K tomu použijeme Fresnelovo číslo  $F$ . To je v tomto případě rovno

$$F = \frac{a^2}{z\lambda} = \frac{(0,25 \cdot 10^{-3})^2}{600 \cdot 10^{-9}} = 0,1$$

Jedná se tedy o Fraunhoferovu difrakci ve vzdáleném poli.

Obdélníkový otvor ve stínítku popíšeme pomocí aperturní funkce

$$t(x_M, y_M) = 1 \text{ pro } |x_M| \leq \frac{a}{2}, |y_M| \leq \frac{b}{2}$$

$$t(x_M, y_M) = 0 \text{ pro } |x_M| > \frac{a}{2}, |y_M| > \frac{b}{2}$$

aperturní funkce je rovna jedné v místě kde je otvor, jinde je rovná nule.

Aperturní funkci dosadíme do Fraunhoferova difrakčního integrálu pro kolmo dopadající rovinnou vlnu

$$\psi(x, y, z) = C \iint_{-\infty}^{\infty} t(x_M, y_M) \exp \left\{ -\frac{ik}{z}(xx_M + yy_M) \right\} dx_M dy_M$$

tak dostaneme

$$\psi(x, y, z) = C \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \left( \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \exp \left\{ -\frac{ik}{z}(xx_M + yy_M) \right\} dx_M \right) dy_M$$

Dvojný integrál rozepíšeme jakou součin dvou jednoduchých integrálů

$$\psi(x, y, z) = C \left( \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \exp \left\{ -\frac{ik}{z}(yy_M) \right\} dy_M \right) \left( \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \exp \left\{ -\frac{ik}{z}(xx_M) \right\} dx_M \right)$$

Nejprve vyjádříme jednoduchý integrál. Ten je obecně roven

$$I = \int_{\alpha}^{\beta} \exp \left\{ -\frac{ik}{z}(xx_M) \right\} dx_M = -\frac{iz}{kx} \left( e^{-\frac{i\alpha k}{z}x} - e^{-\frac{i\beta k}{z}x} \right)$$

pro symetrický interval  $\left\langle -\frac{a}{2}, \frac{a}{2} \right\rangle$  je integrál roven

$$I = -\frac{iz}{kx} \left( e^{\frac{iak}{2z}x} - e^{-\frac{iak}{2z}x} \right) = -\frac{i \cdot iz}{ikx} \left( e^{\frac{iak}{2z}x} - e^{-\frac{iak}{2z}x} \right) = \frac{z}{ikx} \left( e^{\frac{iak}{2z}x} - e^{-\frac{iak}{2z}x} \right)$$

nyň výraz upravíme pomocí komplexního vyjádření funkce sinus

$$\sin \varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}$$

na tvar

$$I = \frac{2z}{kx} \sin\left(\frac{kxa}{2z}\right)$$

Součin integrálů je pak roven

$$\psi(x, y, z) = C \frac{4z^2}{k^2xy} \sin\left(\frac{kxa}{2z}\right) \sin\left(\frac{kya}{2z}\right) = Cab \frac{\sin\left(\frac{kxa}{2z}\right)}{\frac{kxa}{2z}} \cdot \frac{\sin\left(\frac{kya}{2z}\right)}{\frac{kya}{2z}}$$

konstantu  $C$  určíme pomocí intenzity bodě  $[0,0,z]$  jako

$$I(0, 0, z) = |\psi(0, 0, z)|^2 = Cab \Rightarrow C = \frac{I(0, 0, z)}{ab}$$

### Jiný postup výpočtu (Fourierovská optika)

- Stejný výsledek pro amplitudu rozptýlené vlny dostaneme také jako Fourierovu transformaci aperturní funkce  $t$ .
- Tu lze snadno spočítat například pomocí programu Mathematica

(\* aperturní funkce obdélníkového otvoru \*)

```
fx= Piecewise[{{0, xm < -a/2}, {1, (xm >=-a/2) && (xm <= a/2)}, {0, xm > a/2}}];
```

```
fy= Piecewise[{{0, ym < -b/2}, {1, (ym >=-b/2) && (ym <= b/2)}, {0, ym > b/2}}];
```

(\* Fourierova transformace aperturní funkce \*)

```
fo= FourierTransform[fx*fy, {xm, ym}, {(k x)/z, (k y)/z},  
FourierParameters -> {1, 1}];
```

```
FullSimplify[fo, {a > 0, b > 0}]
```

výsledek:

$$\frac{4z^2 \sin\left[\frac{akx}{2z}\right] \sin\left[\frac{bky}{2z}\right]}{k^2xy}$$

## Fraunhoferova difrakce na obdélníkovém otvoru

0.25mm x 0.1 mm



0.25mm x 0.25 mm



0.25mm x 0.5 mm



0.25mm x 1 mm



## Fraunhoferova difrakce na kruhovém otvoru

$r=0.1\text{mm}$



$r=0.25\text{mm}$



$r=0.5\text{mm}$



$r=1\text{mm}$



