Hry v matematice

Občasný seminář z matematické analýzy

Miroslav Zelený

Katedra matematické analýzy, MFF UK

Ostrava/Praha, 16. 2. 2021

EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání

MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

Teorie her

Teorie her

John von Neumann (1903–1957)

Nashova rovnováha

Nashova rovnováha

John Nash (1928–2015)

By Economicforum - Own work, CC BY-SA 3.0, https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=18885826

Hráč A:

Hráč A: akce $a_1, \ldots, a_n$

Hráč A: akce $a_1, \ldots, a_n$
Hráč B:

Hráč A: akce $a_1, \dots, a_n$
Hráč B: akce $b_1, \dots, b_m$

Hráč A: akce $a_1, \ldots, a_n$
Hráč B: akce $b_1, \ldots, b_m$
výplatní matice:

Hráč A: akce $a_1, \ldots, a_n$
Hráč B: akce $b_1, \ldots, b_m$
výplatní matice:

$$a_1 \qquad a_2 \qquad \ldots \qquad a_n$$

Hráč A: akce $a_1, \dots, a_n$
Hráč B: akce $b_1, \dots, b_m$
výplatní matice:

$$\begin{array}{ccccc} & a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ b_1 & \alpha_{11}, \beta_{11} & \alpha_{12}, \beta_{12} & \dots & \alpha_{1n}, \beta_{1n} \end{array}$$

Hráč A: akce $a_1, \ldots, a_n$
Hráč B: akce $b_1, \ldots, b_m$
výplatní matice:

$$
\begin{array}{ccccc}
 & a_1 & a_2 & \ldots & a_n \\
b_1 & \alpha_{11}, \beta_{11} & \alpha_{12}, \beta_{12} & \ldots & \alpha_{1n}, \beta_{1n} \\
b_2 & \alpha_{21}, \beta_{21} & \alpha_{22}, \beta_{22} & \ldots & \alpha_{2n}, \beta_{2n}
\end{array}
$$

Hráč A: akce $a_1, \dots, a_n$
Hráč B: akce $b_1, \dots, b_m$
výplatní matice:

$$
\begin{array}{ccccc}
 & a_1 & a_2 & \dots & a_n \\
b_1 & \alpha_{11}, \beta_{11} & \alpha_{12}, \beta_{12} & \dots & \alpha_{1n}, \beta_{1n} \\
b_2 & \alpha_{21}, \beta_{21} & \alpha_{22}, \beta_{22} & \dots & \alpha_{2n}, \beta_{2n} \\
b_3 & \alpha_{31}, \beta_{31} & \alpha_{32}, \beta_{32} & \dots & \alpha_{3n}, \beta_{3n}
\end{array}
$$

Hráč A: akce $a_1, \ldots, a_n$
Hráč B: akce $b_1, \ldots, b_m$
výplatní matice:

$$\begin{array}{cccccc}
 & a_1 & a_2 & \ldots & a_n \\
b_1 & \alpha_{11}, \beta_{11} & \alpha_{12}, \beta_{12} & \ldots & \alpha_{1n}, \beta_{1n} \\
b_2 & \alpha_{21}, \beta_{21} & \alpha_{22}, \beta_{22} & \ldots & \alpha_{2n}, \beta_{2n} \\
b_3 & \alpha_{31}, \beta_{31} & \alpha_{32}, \beta_{32} & \ldots & \alpha_{3n}, \beta_{3n} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots
\end{array}$$

Hráč A: akce $a_1, \ldots, a_n$
Hráč B: akce $b_1, \ldots, b_m$
výplatní matice:

$$
\begin{array}{cccccc}
 & a_1 & a_2 & \ldots & a_n \\
b_1 & \alpha_{11}, \beta_{11} & \alpha_{12}, \beta_{12} & \ldots & \alpha_{1n}, \beta_{1n} \\
b_2 & \alpha_{21}, \beta_{21} & \alpha_{22}, \beta_{22} & \ldots & \alpha_{2n}, \beta_{2n} \\
b_3 & \alpha_{31}, \beta_{31} & \alpha_{32}, \beta_{32} & \ldots & \alpha_{3n}, \beta_{3n} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
b_m & \alpha_{m1}, \beta_{m1} & \alpha_{m2}, \beta_{m2} & \ldots & \alpha_{mn}, \beta_{mn}
\end{array}
$$

Hráč A: akce $a_1, \ldots, a_n$
Hráč B: akce $b_1, \ldots, b_m$
výplatní matice:

$$
\begin{array}{cccccc}
 & a_1 & a_2 & \ldots & a_n \\
b_1 & \alpha_{11}, \beta_{11} & \alpha_{12}, \beta_{12} & \ldots & \alpha_{1n}, \beta_{1n} \\
b_2 & \alpha_{21}, \beta_{21} & \alpha_{22}, \beta_{22} & \ldots & \alpha_{2n}, \beta_{2n} \\
b_3 & \alpha_{31}, \beta_{31} & \alpha_{32}, \beta_{32} & \ldots & \alpha_{3n}, \beta_{3n} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
b_m & \alpha_{m1}, \beta_{m1} & \alpha_{m2}, \beta_{m2} & \ldots & \alpha_{mn}, \beta_{mn}
\end{array}
$$

Kámen-nůžky-papír

pravděpodobnostní strategie:

- hráč A hraje akci a_i s pravděpodobností p_i, $i = 1, \ldots, n$

pravděpodobnostní strategie:

- hráč A hraje akci a_i s pravděpodobností p_i, $i = 1, \ldots, n$
- hráč B hraje akci b_j s pravděpodobností q_j, $j = 1, \ldots, m$

$$p = (p_1, \ldots, p_n), q = (q_1, \ldots, q_m) \mapsto (\text{zisk A}(p, q), \text{zisk B}(p, q))$$

$$p = (p_1, \ldots, p_n), q = (q_1, \ldots, q_m) \mapsto (\text{zisk A}(p, q), \text{zisk B}(p, q))$$

Věta (Nash)

Existují pravděpodobnostní strategie p^* pro A a q^* pro B takové, že

$$p = (p_1, \ldots, p_n), q = (q_1, \ldots, q_m) \mapsto (\text{zisk A}(p, q), \text{zisk B}(p, q))$$

Věta (Nash)

Existují pravděpodobnostní strategie p^* pro A a q^* pro B takové, že

- pro každou strategii p platí

$$\text{zisk A}(p, q^*) \leq \text{zisk A}(p^*, q^*),$$

$$p = (p_1, \ldots, p_n), q = (q_1, \ldots, q_m) \mapsto (\text{zisk}\,\mathrm{A}(p, q), \text{zisk}\,\mathrm{B}(p, q))$$

Věta (Nash)

Existují pravděpodobnostní strategie p^* pro A a q^* pro B takové, že

- pro každou strategii p platí

$$\text{zisk}\,\mathrm{A}(p, q^*) \leq \text{zisk}\,\mathrm{A}(p^*, q^*),$$

- pro každou strategii q platí

$$\text{zisk}\,\mathrm{B}(p^*, q) \leq \text{zisk}\,\mathrm{B}(p^*, q^*).$$

Deskriptivní teorie množin

Deskriptivní teorie množin studuje charakteristické vlastnosti „definovatelných množin“.

Deskriptivní teorie množin

Deskriptivní teorie množin studuje charakteristické vlastnosti „definovatelných množin“.

Příklad

($\mathbb{R}$, sjednocení otevřených intervalů)

Borelovská hierarchie

Borelovská hierarchie

Borelovská hierarchie

Borelovská hierarchie

Σ^0_1

Borelovská hierarchie

Σ_1^0

Π_1^0

Borelovská hierarchie

$$\begin{array}{ccc} \Sigma^0_1 & \subset & \Sigma^0_2 \\ \Pi^0_1 & & \end{array}$$

Borelovská hierarchie

$$\begin{array}{ccc} \Sigma^0_1 & \subset & \Sigma^0_2 \\ \Pi^0_1 & \subset & \Pi^0_2 \end{array}$$

Borelovská hierarchie

$$\begin{array}{ccccc} \Sigma^0_1 & \subset & \Sigma^0_2 & \subset & \Sigma^0_3 \\ \Pi^0_1 & \subset & \Pi^0_2 & & \end{array}$$

Borelovská hierarchie

$$\begin{array}{ccccc} \Sigma^0_1 & \subset & \Sigma^0_2 & \subset & \Sigma^0_3 \\ \Pi^0_1 & \subset & \Pi^0_2 & \subset & \Pi^0_3 \end{array}$$

Borelovská hierarchie

$$\begin{array}{ccccccc} \Sigma^0_1 & \subset & \Sigma^0_2 & \subset & \Sigma^0_3 & & \dots \\ \Pi^0_1 & \subset & \Pi^0_2 & \subset & \Pi^0_3 & & \end{array}$$

Borelovská hierarchie

$$
\begin{array}{ccccccc}
\Sigma^0_1 & \subset & \Sigma^0_2 & \subset & \Sigma^0_3 & & \ldots \\
\Pi^0_1 & \subset & \Pi^0_2 & \subset & \Pi^0_3 & & \ldots
\end{array}
$$

Borelovská hierarchie

$$
\begin{array}{ccccccc}
\Sigma^0_1 & \subset & \Sigma^0_2 & \subset & \Sigma^0_3 & & \dots \\
\Pi^0_1 & \subset & \Pi^0_2 & \subset & \Pi^0_3 & & \dots
\end{array}
$$

borelovské množiny

Nekonečné hry

Y ... neprázdná množina, $A \subset Y^{\mathbb{N}}$

Nekonečné hry

Y … neprázdná množina, $A \subset Y^{\mathbb{N}}$

Hra $G(A, Y)$

Nekonečné hry

$Y \ldots$ neprázdná množina, $A \subset Y^{\mathbb{N}}$

Hra $G(A, Y)$

Hráč I

Hráč II

Nekonečné hry

Y ... neprázdná množina, $A \subset Y^{\mathbb{N}}$

Hra $G(A, Y)$

Hráč I $\quad y_1$

Hráč II

Nekonečné hry

Y ... neprázdná množina, $A \subset Y^{\mathbb{N}}$

Hra $G(A, Y)$

Hráč I $\quad y_1$

Hráč II $\quad\quad y_2$

Nekonečné hry

$Y \ldots$ neprázdná množina, $A \subset Y^{\mathbb{N}}$

Hra $G(A, Y)$

Hráč I	y_1		y_3
Hráč II		y_2	

Nekonečné hry

Y . . . neprázdná množina, $A \subset Y^{\mathbb{N}}$

Hra $G(A, Y)$

Hráč I	y_1		y_3	
Hráč II		y_2		y_4

Nekonečné hry

Y ... neprázdná množina, $A \subset Y^{\mathbb{N}}$

Hra $G(A, Y)$

Hráč I	y_1		y_3		$\dots$	
Hráč II		y_2		y_4		$\dots$

Nekonečné hry

Y ... neprázdná množina, $A \subset Y^{\mathbb{N}}$

Hra $G(A, Y)$

Hráč I	y_1		y_3		$\dots$	
Hráč II		y_2		y_4		$\dots$

Pokud $(y_i) \in A$, pak vítězí hráč I, jinak vítězí hráč II.

Nekonečné hry

Y ... neprázdná množina, $A \subset Y^{\mathbb{N}}$

Hra $G(A, Y)$

Hráč I	y_1		y_3		$\dots$	
Hráč II		y_2		y_4		$\dots$

Pokud $(y_i) \in A$, pak vítězí hráč I, jinak vítězí hráč II.

Definice

Hra $G(A, Y)$ je determinovaná, jestliže hráč I nebo hráč II má vítěznou strategii.

Nekonečné hry

Definice

Hra $G(A, Y)$ je determinovaná, jestliže hráč I nebo hráč II má vítěznou strategii.

Nekonečné hry

Definice

Hra $G(A, Y)$ je determinovaná, jestliže hráč I nebo hráč II má vítěznou strategii.

Platí:

- existuje $A \subset \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ taková, že $G(A, \mathbb{N}^{\mathbb{N}})$ není determinovaná

Nekonečné hry

Definice

Hra $G(A, Y)$ je determinovaná, jestliže hráč I nebo hráč II má vítěznou strategii.

Platí:

- existuje $A \subset \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ taková, že $G(A, \mathbb{N}^{\mathbb{N}})$ není determinovaná
- $G(A, Y)$ je determinovaná, pokud $A \subset Y^{\mathbb{N}}$ je

Nekonečné hry

Definice

Hra $G(A, Y)$ je determinovaná, jestliže hráč I nebo hráč II má vítěznou strategii.

Platí:

- existuje $A \subset \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ taková, že $G(A, \mathbb{N}^{\mathbb{N}})$ není determinovaná
- $G(A, Y)$ je determinovaná, pokud $A \subset Y^{\mathbb{N}}$ je
  - Σ^0_1 (Gale–Stewart, 1953),

Nekonečné hry

Definice

Hra $G(A, Y)$ je determinovaná, jestliže hráč I nebo hráč II má vítěznou strategii.

Platí:

- existuje $A \subset \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ taková, že $G(A, \mathbb{N}^{\mathbb{N}})$ není determinovaná
- $G(A, Y)$ je determinovaná, pokud $A \subset Y^{\mathbb{N}}$ je
  - Σ^0_1 (Gale–Stewart, 1953),
  - Σ^0_2 (Wolfe, 1955),

Nekonečné hry

Definice

Hra $G(A, Y)$ je determinovaná, jestliže hráč I nebo hráč II má vítěznou strategii.

Platí:

- existuje $A \subset \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ taková, že $G(A, \mathbb{N}^{\mathbb{N}})$ není determinovaná
- $G(A, Y)$ je determinovaná, pokud $A \subset Y^{\mathbb{N}}$ je
  - Σ_1^0 (Gale–Stewart, 1953),
  - Σ_2^0 (Wolfe, 1955),
  - Σ_3^0 (Davis, 1964),

Nekonečné hry

Definice

Hra $G(A, Y)$ je determinovaná, jestliže hráč I nebo hráč II má vítěznou strategii.

Platí:

- existuje $A \subset \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ taková, že $G(A, \mathbb{N}^{\mathbb{N}})$ není determinovaná
- $G(A, Y)$ je determinovaná, pokud $A \subset Y^{\mathbb{N}}$ je
  - Σ_1^0 (Gale–Stewart, 1953),
  - Σ_2^0 (Wolfe, 1955),
  - Σ_3^0 (Davis, 1964),
  - Σ_4^0 (Paris, 1972),

Nekonečné hry

Definice

Hra $G(A, Y)$ je determinovaná, jestliže hráč I nebo hráč II má vítěznou strategii.

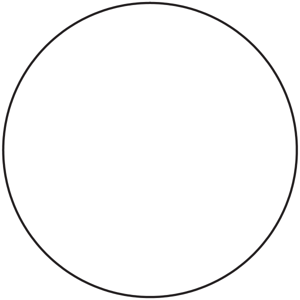
Platí:

- existuje $A \subset \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ taková, že $G(A, \mathbb{N}^{\mathbb{N}})$ není determinovaná
- $G(A, Y)$ je determinovaná, pokud $A \subset Y^{\mathbb{N}}$ je
  - Σ^0_1 (Gale–Stewart, 1953),
  - Σ^0_2 (Wolfe, 1955),
  - Σ^0_3 (Davis, 1964),
  - Σ^0_4 (Paris, 1972),
  - borelovská (Martin, 1975).

Hra bod-přímka

I

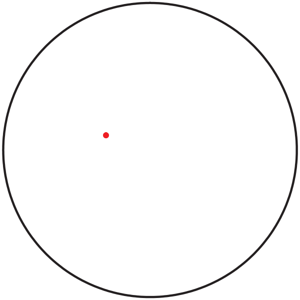
II



Hra bod-přímka

I $\quad a_1$

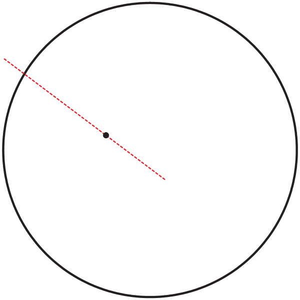
II



Hra bod-přímka

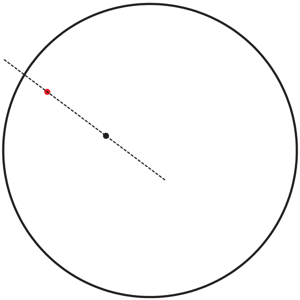
I $\boldsymbol{a}_1$

II p_1



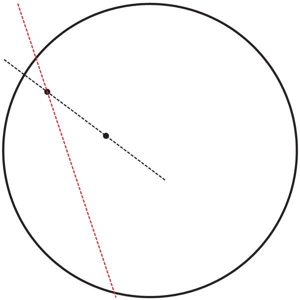
Hra bod-přímka

I	$\boldsymbol{a}_1$	$\boldsymbol{a}_2$
II	p_1	



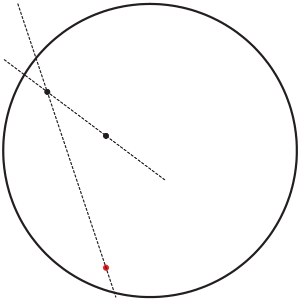
Hra bod-přímka

I	$\boldsymbol{a}_1$		$\boldsymbol{a}_2$	
II		p_1		p_2



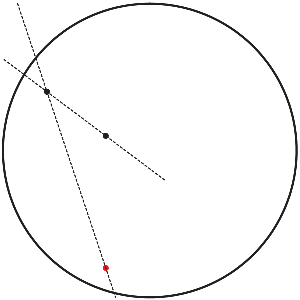
Hra bod-přímka

I	$\boldsymbol{a}_1$	$\boldsymbol{a}_2$	$\boldsymbol{a}_3$
II	p_1	p_2	



Hra bod-přímka

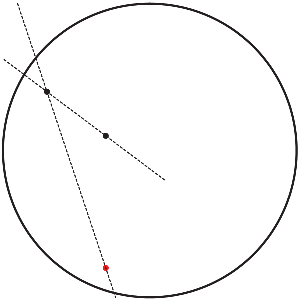
I	$\boldsymbol{a}_1$		$\boldsymbol{a}_2$		$\boldsymbol{a}_3$		$\ldots$
II		p_1		p_2		$\ldots$	



$\boldsymbol{a}_{i+1} \in B(0,1) \cap p_i$
$\boldsymbol{a}_i \in p_i$

Hra bod-přímka

I	$\boldsymbol{a}_1$		$\boldsymbol{a}_2$		$\boldsymbol{a}_3$		$\dots$	
II		p_1		p_2		$\dots$		



$\boldsymbol{a}_{i+1} \in B(0,1) \cap p_i$

$\boldsymbol{a}_i \in p_i$

Jestliže $(\boldsymbol{a}_i)$ konverguje, vítězí hráč II, jinak vítězí hráč I.

Hra bod-přímka

Věta

Hráč II má vítěznou strategii ve hře bod-přímka.

Hra bod-přímka

Věta

Hráč II má vítěznou strategii ve hře bod-přímka.

- Hra bod-přímka je determinovaná podle Martinovy věty.

Hra bod-přímka

Věta

Hráč II má vítěznou strategii ve hře bod-přímka.

- Hra bod-přímka je determinovaná podle Martinovy věty.
- Předpokládáme, že I má vítěznou strategii.

Hra bod-přímka

Věta

Hráč II má vítěznou strategii ve hře bod-přímka.

- Hra bod-přímka je determinovaná podle Martinovy věty.
- Předpokládáme, že I má vítěznou strategii.
- V roli hráče II sehrajeme s I partii, kde hráč I hraje podle své vítězné strategie, a porazíme ho.

Hra bod-přímka

Věta

Hráč II má vítěznou strategii ve hře bod-přímka.

- Hra bod-přímka je determinovaná podle Martinovy věty.
- Předpokládáme, že I má vítěznou strategii.
- V roli hráče II sehrajeme s I partii, kde hráč I hraje podle své vítězné strategie, a porazíme ho.
- To je spor a vítěznou strategii má hráč II.

Gradientový problém

Nechť $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ($n \geq 2$) je diferencovatelná.

Gradientový problém

Nechť $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ($n \geq 2$) je diferencovatelná.

$$\nabla f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

Gradientový problém

Nechť $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $(n \geq 2)$ je diferencovatelná.

$$\nabla f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

Otázka (C.E.Weil, 1990)

Nechť $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená a $(\nabla f)^{-1}(G) \neq \emptyset$. Má potom nutně $(\nabla f)^{-1}(G)$ kladnou n-dimenzionální míru?

Gradientový problém

Z. Buczolich (2002)

Negativní odpověď: Existuje $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferencovatelná taková, že $(\nabla f)^{-1}(B(0,1))$ je neprázdná množina míry nula.

Gradientový problém

Z. Buczolich (2002)

Negativní odpověď: Existuje $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferencovatelná taková, že $(\nabla f)^{-1}(B(0,1))$ je neprázdná množina míry nula.

Konstrukce hledané funkce f.

- $f_n \to f$

Gradientový problém

Z. Buczolich (2002)

Negativní odpověď: Existuje $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferencovatelná taková, že $(\nabla f)^{-1}(B(0,1))$ je neprázdná množina míry nula.

Konstrukce hledané funkce f.

- $f_n \to f$
- Hlavní problém konstrukce:
  Jak zaručit konvergenci posloupnosti

$$\nabla f_1(x),\ \nabla f_2(x),\ \nabla f_3(x),\ \dots,\ \nabla f_n(x),\ \dots\ ?$$