9 Taylorovy a Laurentovy řady

9.1 Definice (mocninná řada).

Nechť $z_0, a_0, a_1, a_2, \dots$ jsou konečná komplexní čísla. Funkční řadu

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n = a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \dots$$

nazýváme mocninnou řadou v komplexním oboru. Číslo z_0 je střed mocninné řady a čísla $a_0, a_1, a_2, \dots$ jsou koeficienty mocninné řady.

Poznámka.

Pro mocninné řady v komplexním oboru platí analogická tvrzení jako pro reálné mocninné řady. Nechť $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ je mocninná řada. Potom platí:

i) Mocninná řada konverguje absolutně pro všechny z ležící uvnitř kruhu $|z-z_0| < R$ a diverguje vně tohoto kruhu, tj. pro $|z-z_0| > R$. Pro poloměr konvergence R dané řady platí

$$R = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}.$$

Speciálně může být $R = 0$ a $R = +\infty$. Poloměr konvergence lze určit také podle následujících vztahů (pokud limity existují)

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}, \qquad R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|.$$

ii) Pro body z na kružnici $|z-z_0| = R$ nelze obecně o konvergenci mocninné řady nic říci.

iii) Mocninná řada konverguje stejnoměrně v libovolném uzavřeném kruhu $|z-z_0| \le r < R$.

iv) Mocninnou řadu lze uvnitř kruhu konvergence derivovat (resp. integrovat) libovolněkrát.

9.2 Věta.

Řady $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$, $\quad \sum\limits_{n=0}^{\infty} n\, a_n(z-z_0)^{n-1}$, $\quad \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(z-z_0)^{n+1}$ *mají stejný poloměr konvergence.*

9.3 Věta.

Součet mocninné řady je holomorfní v kruhu konvergence, má tam derivace všech řádů, které jsou rovny součtům řad z derivací členů dané řady.

9.4 Věta (Taylorova věta).

Nechť $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *je holomorfní funkce v bodě* $z_0 \in \mathbb{C}$.
Potom existuje kruh $K(z_0, R) = \{z \in \mathbb{C} : \ |z - z_0| < R\}$ *takový, že pro* $z \in K(z_0, R)$ *platí*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

kde koeficienty mocninné řady jsou dány vztahem

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int\limits_{\varphi(z_0,r)} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} \, \mathrm{d}z,$$

kde $\varphi(z_0, r)$ *je libovolná kladně orientovaná kružnice se středem* z_0 *a poloměrem* $0 < r < R$.

Poznámka.

1. Funkce f je holomorfní v $\mathbb{C}$ právě tehdy, když $R = \infty$.
2. Funkce f je holomorfní v bodě $z_0 \in \mathbb{C}$ právě tehdy, když lze f vyjádřit v okolí $U(z_0)$ jako součet konvergentní mocninné řady. Hranice konvergence prochází bodem, kde funkce f není holomorfní, a tento bod je nejblíže bodu z_0.
3. Funkce $f : w = \mathrm{Ln}(z)$ je holomorfní v $\mathbb{C} - \{z \in \mathbb{C} : \ \mathrm{Im}\, z = 0, \ \mathrm{Re}\, z \leq 0\}$.
   Zvolme $z_0 = 1$. Pro $n \in \mathbb{N}$ platí

   $$f^{(n)}(z) = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{z^n},$$

   a tedy

   $$a_n = \frac{f^{(n)}(1)}{n!} = \frac{(-1)^{n-1}}{n}.$$

   Pro rozvoj funkce f dostáváme

   $$\mathrm{Ln}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (z - 1)^n, \qquad z \in U(1,1) = \{z \in \mathbb{C} : \ |z - 1| < 1\}.$$

Poznámka (metody určování Taylorova rozvoje pro holomorfní funkci).

1. Přímým výpočtem koeficientů a_n podle vztahů $a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int\limits_{\varphi(z_0,r)} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} \, \mathrm{d}z$.
2. Využitím vztahu pro součet geometrické řady $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$ pokud $|q| < 1$.
3. Využití známých Taylorových rozvojů.
4. Derivováním a integrováním známých Taylorových rozvojů.

9.5 Definice (Laurentova řada).

Nechť $z_0, a_0, a_{\pm 1}, a_{\pm 2}, \dots$ jsou konečná komplexní čísla. Funkční řadu

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n = \dots + a_{-2}\frac{1}{(z-z_0)^2} + a_{-1}\frac{1}{(z-z_0)} + a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \dots$$

nazýváme Laurentovou řadou (zobecněnou mocninnou řadou) v komplexním oboru.
Číslo z_0 je střed Laurentovy řady a čísla $a_0, a_{\pm 1}, a_{\pm 2}, \dots$ jsou koeficienty Laurentovy řady.

i) Řadu $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ nazýváme regulární část Laurentovy řady.

ii) Řadu $\sum\limits_{n=-\infty}^{-1} a_n (z-z_0)^n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n}$ nazýváme hlavní část Laurentovy řady.

iii) Součtem Laurentovy řady rozumíme součet součtů hlavní a regulární části, pokud oba existují.

Nechť $z_0 = \infty$, pak Laurentovou řadou se středem v bodě $z_0 = \infty$ nazveme řadu

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{a_n}{z^n} = \dots + a_{-2}z^2 + a_{-1}z + a_0 + a_1\frac{1}{z} + a_2\frac{1}{z^2} + \dots,$$

kde řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{-n} z^n$ je hlavní část Laurentovy řady a řada $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{z^n}$ je regulární část Laurentovy řady.

Poznámka.

i) Formálně není rozdíl mezi Laurentovou řadou v bodě 0 a v bodě ∞, ale mají "prohozené" hlavní a regulární části.

ii) Zkoumání konvergence hlavní části Laurentovy řady převedeme na zkoumání konvergence obyčejné mocninné řady substitucí $w = (z-z_0)^{-1}$. Hlavní část Laurentovy řady konverguje právě tehdy, když konverguje řada $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_{-n} w^n$. Je-li proto R_H poloměr konvergence řady $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_{-n} w^n$, pak pro $\rho = \frac{1}{R_H}$ hlavní část Laurentovy řady konverguje pro $|z-z_0| > \rho$ a diverguje pro $|z-z_0| < \rho$.

iii) Číslo ρ nazýváme poloměrem konvergence hlavní části Laurentovy řady a vidíme, že řada konverguje vně kruhu $K(z_0, \rho)$ a diverguje uvnitř kruhu $K(z_0, \rho)$.

iv) Pokud $\rho = 0$ řada konverguje všude kromě bodu z_0 a pokud $\rho = \infty$ řada nekonverguje nikde.

v) Ke každé Laurentově řadě existují $0 \le \rho \le \infty$, $0 \le R \le \infty$ tak, že

   (a) regulární část konverguje (absolutně a lokálně stejnoměrně) v $K(z_0, R)$ a diverguje v $\mathbb{C} - \overline{K(z_0, R)}$,

   (b) hlavní část konverguje v $\mathbb{C} - \overline{K(z_0, \rho)}$ a diverguje v $K(z_0, \rho)$,

   (c) o konvergenci na hraničních kružnicích nevíme nic.

vi) Pro

   (a) $\rho < R$ konverguje Laurentova řada v mezikruží $M(z_0, \rho, R)$, konvergence je absolutní a lokálně stejnoměrná, součet je holomorfní funkce a derivace jsou také holomorfní funkce,

   (b) $\rho = R$ nelze nic tvrdit,

   (c) $\rho > R$ diverguje Laurentova řada pro každé $z \in \mathbb{C}$.

9.6 Věta (Laurentova věta).

Nechť pro $a, b \in \mathbb{R}$, $0 \le a < b \le +\infty$ a $z_0 \in \mathbb{C}$ je funkce f holomorfní v mezikruží

$$M(a, b, z_0) = \{z \in \mathbb{C} : \ a < |z - z_0| < b\}.$$

Potom existuje právě jedna řada $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ tak, že platí

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad \text{pro } z \in M(a, b, z_0).$$

Koeficienty této řady jsou dány předpisem

$$a_n = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int\limits_{|z - z_0| = \lambda} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} \, \mathrm{d}z, \quad n \in \mathbb{Z}, \ \lambda \in (a, b).$$

Poznámka.

Laurentova řada je určena jednoznačně pro každé mezikruží, ve kterém je funkce holomorfní. Je-li f holomorfní ve dvou disjunktních mezikružích se stejným středem, pak příslušné Laurentovy řady mohou být v těchto různých mezikružích různé.

Postupy nalezení Laurentových řad:

1. Podle definice pro koeficienty a_n.
2. Použitím známých řad a jejich modifikací, například pro $\sin(\frac{1}{z})$, e^{z^2} a podobně.
3. Pro racionální lomené funkce použiji rozklad na parciální zlomky a dále podle vztahů pro geometrickou řadu $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$ pokud $|q| < 1$.

4. Derivováním, resp. integrováním známých Taylorových rozvojů.

Poznámka.

Důsledky Laurentovy věty:

i) Důsledek 1: Taylorova věta. Je-li f holomorfní v mezikruží $M(0, b, z_0)$, pak její Laurentova řada se redukuje na řadu Taylorovu. Tj. $a_n = 0$ pro $n = -1, -2, -3, \dots$

ii) Důsledek 2: Je-li f holomorfní vně nějakého kruhu $K(z_0, R)$, kde $0 \leq R < +\infty$ a $z_0 \in \mathbb{C}$, pak pro každé $z_1 \in \mathbb{C}$ je funkce f holomorfní vně nějakého kruhu $K(z_0, R'(z_1))$ a platí

$$a_{-1}(z_1) = a_{-1}(z_0),$$

kde pro $j = 0, 1$ je $a_{-1}(z_j)$ koeficient u $\frac{1}{z-z_j}$ v Laurentově rozvoji funkce f v mezikruží $M(R', +\infty, z_1)$, tj. $a_{-1}(z_1)$ nezávisí na z_1.

iii) Nechť f je holomorfní na $M(0, b, z_0)$ a omezená na $M(0, b', z_0)$, kde $0 < b' \leq b$. Potom

(a) hlavní část Laurentova rozvoje f je v $M(0, b, z_0)$ identicky rovna nule,

(b) funkce f má v z_0 limitu,

(c) po dodefinování (ev. předefinování) funkce f v bodě z_0 její limitou dostaneme funkci holomorfní v $U(b, z_0)$.

iv) Je-li f holomorfní a omezená vně nějakého kruhu $K(z_0, R)$, pak pro každé $z_1 \in \mathbb{C}$

(a) jsou všechny koeficienty $a_1, a_2, a_3, \dots$ regulární části Laurentovy řady rovny nule v $M(a, +\infty, z_0)$,

(b) funkce f má v bodě ∞ limitu a tato limita je rovna koeficientu a_0 u nulté mocniny $(z - z_1)$ a tento koeficient proto na volbě z_1 nezávisí.

9.7 Věta (o jednoznačnosti).

Nechť f je holomorfní funkce v oblasti $\Omega \subset \mathbb{C}$ a množina nulových bodů funkce $N_f = \{z \in \Omega : \ f(z) = 0\}$ má v Ω hromadný bod. Potom je f v Ω identicky rovna nule.

Poznámka.

Důsledky věty o jednoznačnosti:

1. Nechť f_1 a f_2 jsou holomorfní funkce v Ω. Je-li $f_1(z) = f_2(z)$ pro $z \in M \subset \Omega$, přičemž M má v Ω hromadný bod, pak $f_1 \equiv f_2$ v Ω.

2. Je-li f holomorfní funkce v Ω a neplatí, že $f \equiv 0$, pak nulové body této funkce jsou izolované v Ω.

9.8 Definice.

Nechť je dán v intervalu $\langle a, b\rangle \subset \mathbb{R}$ ortonormální systém funkcí

$$\varphi_1(x), \varphi_2(x), \varphi_3(x)\ldots, \quad \varphi_n \in L_2(a,b),$$

a nechť $f \in L_2(a,b)$. Řada

$$c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x) + c_3\varphi_3(x) + \ldots,$$

kde

$$c_k = (f, \varphi_k) = \int_a^b f(x)\overline{g(x)}\,\mathrm{d}x$$

se nazývá Fourietova řada příslušná k funkci f vzhledem k systému $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \varphi_3(x)\ldots$

Poznámka.

1. Výrok $f \in L_2(a,b)$ znamená, že funkce f je v daném intervalu integrovatelná s kvadrátem, tj. $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x < \infty$ a $\int\limits_a^b |f(x)|^2\,\mathrm{d}x < \infty$.
2. Systém funkcí $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \varphi_3(x)\ldots$ je ortogonální, pokud
$$(\varphi_i, \varphi_j) = \int\limits_a^b \varphi_i(x)\overline{\varphi_j(x)}\,\mathrm{d}x = 0 \quad \text{pro } i \neq j.$$
3. Systém funkcí $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \varphi_3(x)\ldots$ je ortonormální, pokud je ortogonální a navíc
$$\|\varphi_i\|^2 = (\varphi_i, \varphi_i) = 1.$$
4. Typickými příklady ortonormálních systémů jsou systémy funkcí
   (a) pro interval $\langle -\pi, \pi\rangle$
   $$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \quad \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \quad \frac{\cos 2x}{\sqrt{\pi}}, \quad \frac{\sin 2x}{\sqrt{\pi}}, \ldots$$
   (b) pro interval $\langle 0, \pi\rangle$
   $$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin x, \quad \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin 2x, \quad \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin 3x, \ldots$$
   (c) pro interval $\langle 0, \pi\rangle$
   $$\frac{1}{\sqrt{\pi}}, \quad \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos x, \quad \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos 2x, \quad \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos 3x, \ldots$$
   (d) pro interval $\langle -1, 1\rangle$
   $$\sqrt{\frac{1}{2}}, \quad \sqrt{\frac{3}{2}}x, \quad \sqrt{\frac{5}{2}}\cdot\frac{1}{2}\left(3x^2 - 1\right), \quad \sqrt{\frac{7}{2}}\cdot\frac{1}{2}\left(5x^3 - 3x\right), \ldots$$

9.9 Věta (o rozvoji periodické funkce ve Fourierovu řadu).

Nechť $f(x)$ je periodická funkce s periodou 2π a nechť $f(x)$ a $f'(x)$ jsou po částech spojité funkce v $\langle 0, 2\pi\rangle$. Pak v každém bodě x, kde je funkce f spojitá, platí

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

a v bodech nespojitosti platí

$$\frac{1}{2}\left[f_+(x) + f_-(x)\right] = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

Pro koeficienty a_n a b_n platí

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx \, \mathrm{d}x, \quad n = 0, 1, 2, \dots \\ b_n &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx \, \mathrm{d}x, \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

9.10 Věta.

Nechť funkce f je holomorfní na mezikruží $M(0, a, b)$, $0 \le a < 1 < b \le \infty$. Pak Laurentův rozvoj funkce $f(z)$ na jednotkové kružnici $\varphi(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,t}$, $t \in \langle 0, 2\pi\rangle$ je totožný s Fourierovým rozvojem periodické funkce $\Phi(t) = f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,t})$.

Poznámka.

Najděte Fourierův rozvoj funkce

$$\Phi(t) = \frac{\sin t}{1 - 2a\cos t + a^2},$$

kde $0 < |a| < 1$ a $t \in \langle 0, 2\pi\rangle$.

Substitucí $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,t}$ dostáváme funkci

$$f(z) = \frac{1 - z^2}{2\mathrm{i}\,(z^2 - (a + 1/a)z + 1)} = \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(-1 + \frac{1}{1 - z/a} + \frac{1}{1 - a\,z}\right),$$

která je holomorfní v mezikruží $M(0, |a|, 1/|a|)$. Laurentův rozvoj této řady má tvar

$$f(z) = \frac{1}{2\mathrm{i}}\sum_{n=1}^{\infty} a^n \left(z^n - \frac{1}{z^n}\right).$$

Dosazením $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,t}$ dostáváme Fourierův rozvoj

$$\Phi(t) = \frac{\sin t}{1 - 2a\cos t + a^2} = \sum_{n=1}^{\infty} a^n \sin nt.$$