

Měření momentu setrvačnosti

Úkol č. 1: Změřte moment setrvačnosti obdélníkové desky přímou metodou.

Pomůcky

Fyzické kyvadlo (kovová obdélníková deska s třemi otvory), kovové tělíčko ze stejného materiálu, technické váhy, sada závaží, pásmo, posuvné měřítko, milimetrové měřítko.

Teorie

Moment setrvačnosti J tuhého tělesa (TT) vzhledem k ose jeho otáčení je definován vztahem

$$J = \sum_{i=1}^{i \rightarrow \infty} m_i r_i^2, \quad (1)$$

kde m_i je hmotnost i -tého bodu TT a r_i vzdálenost tohoto bodu od osy otáčení. Jednotkou momentu setrvačnosti v soustavě SI je $\text{kg}\cdot\text{m}^2$. Jde-li o těleso se spojitým rozložením látky, lze místo sumace použít integrace a vypočítat moment setrvačnosti jako

$$J = \int_m r^2 dm = \int_V \rho r^2 dV, \quad (2)$$

dm je hmotnost elementu TT o objemu dV a r vzdálenost tohoto elementu od osy rotace.

U těles pravidelného tvaru lze vypočítat moment setrvačnosti TT J_0 vzhledem k ose o procházející jeho těžištěm. Pro osu o' s ní rovnoběžnou ($o \parallel o'$) je možno moment setrvačnosti J určit pomocí Steinerovy věty

$$J = J_0 + md^2, \quad (3)$$

kde d je vzdálenost osy o' od těžiště a m hmotnost TT.

V případě obdélníkové desky o hmotnosti m a rozměrech a, b platí pro moment setrvačnosti J_0 vztah

$$\boxed{J_0 = \frac{1}{12} m (a^2 + b^2)}. \quad (4)$$

Výpočet momentu setrvačnosti podle vztahu (4) nazýváme přímou metodou (ačkoli je moment setrvačnosti veličinou nepřímo měřenou).

Postup měření

1. Protože měřená deska je značně dlouhá a obtížně se váží, zvážíme metodou tří kyvů přiložené pomocné tělíčko (hmotnost m'), které má přibližně stejnou šířku a tloušťku, ale je mnohem kratší. Hmotnost desky m je přibližně tolikrát větší, kolikrát je deska delší.
2. Délkové rozměry a , b obdélníkové desky změříme pásmem, případně, kde je to možné, mikrometrickým měřítkem. Měříme pouze jednou (pečlivě). Změříme délku l pomocného tělíška.
3. Naměřené hodnoty dosadíme do vztahu (4).

Chyba měření

Chybu měření vyhodnotíme jako chybu nepřímého měření. Ze vztahu (4) vyplývá, že nepřímo měřený moment setrvačnosti je funkcí tří přímo měřených veličin $J_0 = J_0(m, a, b)^*$. Pro chybu měření momentu setrvačnosti vyplývá z teorie vztah

$$\overline{\Delta J_0} = \sqrt{\left(\frac{\partial J_0}{\partial m}\right)^2 |\overline{\Delta m}|^2 + \left(\frac{\partial J_0}{\partial a}\right)^2 |\overline{\Delta a}|^2 + \left(\frac{\partial J_0}{\partial b}\right)^2 |\overline{\Delta b}|^2}. \quad (5)$$

Vypočtené parciální derivace

$$\frac{\partial J_0}{\partial m} = \frac{a^2 + b^2}{12}, \quad \frac{\partial J_0}{\partial a} = \frac{ma}{6} \quad \text{a} \quad \frac{\partial J_0}{\partial b} = \frac{mb}{6},$$

dosadíme do (5) a po vytknutí $\left(\frac{m}{6}\right)^2$ dostáváme

$$\overline{\Delta J_0} = \sqrt{\left(\frac{a^2 + b^2}{12}\right)^2 |\overline{\Delta m}|^2 + \left(\frac{m}{6}\right)^2 \left(a^2 |\overline{\Delta a}|^2 + b^2 |\overline{\Delta b}|^2\right)}. \quad (6)$$

Vztah (6) můžeme s využitím (4) dále upravit na tvar

$$\overline{\Delta J_0} = \overline{J_0} \sqrt{\left(\frac{|\overline{\Delta m}|}{m}\right)^2 + 4 \frac{\left(a^2 |\overline{\Delta a}|^2 + b^2 |\overline{\Delta b}|^2\right)}{\left(a^2 + b^2\right)^2}}, \quad (7)$$

kde $\overline{J_0}$ jsme označili naměřenou hodnotu momentu setrvačnosti.

Chybu měření délkových rozměrů odhadněte jako polovinu nejmenšího dílku použitého měřidla. Chybu v hmotnosti desky $\overline{\Delta m}$ je pak třeba určit výpočtem jako chybu veličiny nepřímo měřené. Hmotnost desky počítáme pomocí vztahu

* Přesně vzato ani hmotnost není v této úloze veličinou přímo měřenou, její chyba však bude určena pro jednoduchost zvlášť, viz níže.

$$m = \frac{a}{l} m', \quad (8)$$

kde l značí délku pomocného tělíska. Nepřímo měřená hmotnost desky m je tedy funkcí tří přímo měřených veličin $m = m(l, a, m')$. Střední chybu $\overline{\Delta m}$ proto vyjadřuje vztah

$$\overline{\Delta m} = \sqrt{\left(\frac{\partial m}{\partial l}\right)^2 |\overline{\Delta l}|^2 + \left(\frac{\partial m}{\partial a}\right)^2 |\overline{\Delta a}|^2 + \left(\frac{\partial m}{\partial m'}\right)^2 |\overline{\Delta m'}|^2}, \quad (9)$$

vypočítané parciální derivace

$$\frac{\partial m}{\partial l} = -\frac{am'}{l^2}, \quad \frac{\partial m}{\partial a} = \frac{m'}{l} \quad \text{a} \quad \frac{\partial m}{\partial m'} = \frac{a}{l},$$

dosadíme do (9) a s využitím vztahu (8) obdržíme

$$\overline{\Delta m} = m \sqrt{\left(\frac{|\overline{\Delta l}|}{l}\right)^2 + \left(\frac{|\overline{\Delta a}|}{a}\right)^2 + \left(\frac{|\overline{\Delta m'}|}{m}\right)^2}. \quad (10)$$

Chyby měření $\overline{\Delta l}$ a $\overline{\Delta a}$ odhadneme podle použitého měřidla (polovina nejmenšího dílku stupnice), chybu vážení pomocného tělíska $\overline{\Delta m'}$ vypočteme ze vztahu pro metodu tří kyvů.

Doporučená literatura

SKLENÁK, L. *Základní praktikum z fyziky I*. 1. vyd. Ostrava: PdF v Ostravě, 1988. 4.3.1 Měření momentu setrvačnosti příomou metodou, s. 62-64.

BROŽ, J. A KOL. *Základy fyzikálních měření I*. 1. vyd. Praha: SPN, 1983. 2.2.1 Stanovení momentu setrvačnosti vůči dané ose, s. 110-112.

MÁDR, V., KNEJZLÍK, J., KOPEČNÝ, J. *Fyzikální měření*. Praha: SNTL, 1991. 2.7 Moment setrvačnosti, poloměr setrvačnosti, s. 100-103.

Úkol č. 2: Změřte moment setrvačnosti obdélníkové desky z doby kyvu.

Pomůcky

Fyzické kyvadlo (kovová obdélníková deska s třemi otvory), kovové tělísko ze stejného materiálu, váhy technické, sada závaží, stopky, posuvné měřítko, milimetrové měřítko.

Teorie

Pro dobu kyvu τ fyzického kyvadla vzhledem k vodorovné ose procházející ve vzdálenosti d od těžiště platí vztah

$$\tau = \pi \sqrt{\frac{J}{mgd}}, \quad (11)$$

kde J je moment setrvačnosti k dané ose otáčení a m hmotnost kyvadla. Pro moment setrvačnosti z tohoto vztahu vychází

$$J = \frac{mgd\tau^2}{\pi^2} \quad (12)$$

a odtud pomocí Steinerovy věty (3) pro moment setrvačnosti J_0 vzhledem k rovnoběžné ose procházející těžištěm kyvadla

$$J_0 = md \left(\frac{g\tau^2}{\pi^2} - d \right). \quad (13)$$

Tento postup měření J_0 nazýváme určením momentu setrvačnosti z doby kyvu.

Postup měření

1. V jednom z krajních otvorů zavěsíme desku na břit. Změříme vzdálenost d těžiště od bodu kruhového otvoru, o nějž se břit při zavěšení desky opírá.
2. Pětkrát změříme dobu padesáti kyvů a odtud určíme střední dobu kyvu fyzického kyvadla $\bar{\tau}$. Je nezbytné zachovat omezující podmínku pro rozkvyv, maximálně 5° , viz úloha o měření tíhového zrychlení.
3. Naměřené hodnoty dosadíme do vztahu (13). (Hmotnost m desky je známa z předchozího úkolu.)
4. Srovnáme vypočtenou hodnotu J_0 s hodnotou získanou přímou metodou.

Chyba měření

Chybu měření vyhodnotíme jako chybu nepřímého měření. Výpočet provádíme pomocí vztahu (13), nepřímo měřený moment setrvačnosti je tedy funkcí tří přímo měřených veličin $J_0 = J_0(m, d, \bar{\tau})$ a pro jeho střední chybu platí

$$\bar{\Delta}J_0 = \sqrt{\left(\frac{\partial J_0}{\partial m}\right)^2 |\bar{\Delta}m|^2 + \left(\frac{\partial J_0}{\partial d}\right)^2 |\bar{\Delta}d|^2 + \left(\frac{\partial J_0}{\partial \bar{\tau}}\right)^2 |\bar{\Delta}\tau|^2}. \quad (14)$$

Vypočtené parciální derivace

$$\frac{\partial J_0}{\partial m} = d \left(\frac{g\bar{\tau}^2}{\pi^2} - d \right), \quad \frac{\partial J_0}{\partial d} = m \left(\frac{g\bar{\tau}^2}{\pi^2} - 2d \right) \text{ a } \frac{\partial J_0}{\partial \bar{\tau}} = 2md \frac{g\bar{\tau}}{\pi^2},$$

dosadíme do (14) a obdržíme

$$\bar{\Delta}J_0 = \sqrt{\left(\left(\frac{g\bar{\tau}^2}{\pi^2} - d\right)d\right)^2 |\bar{\Delta}m|^2 + \left(\left(\frac{g\bar{\tau}^2}{\pi^2} - 2d\right)m\right)^2 |\bar{\Delta}d|^2 + \left(2md \frac{g\bar{\tau}}{\pi^2}\right)^2 |\bar{\Delta}\tau|^2}. \quad (15)$$

Chybu měření vzdálenosti $\bar{\Delta}d$ vyhodnotíme podle použitého měřidla (polovina nejmenšího dílku stupnice), chybu měření hmotnosti $\bar{\Delta}m$ již máme vypočtenou ze zpracování předešlého úkolu, chybu měření doby kyvu $\bar{\Delta}\tau$ vypočítáme jako střední chybu přímého měření.

Doporučená literatura

SKLENÁK, L. *Základní praktikum z fyziky I*. 1. vyd. Ostrava: PdF v Ostravě, 1988. 4.3.2 Měření momentu setrvačnosti z doby kyvu, s. 64-66.

BROŽ, J. A KOL. *Základy fyzikálních měření I*. 1. vyd. Praha: SPN, 1983. 2.2.2 Momenty setrvačnosti kolem různých os procházejících těmž tělesem, s. 112-115.

MÁDR, V., KNEJZLÍK, J., KOPEČNÝ, J. *Fyzikální měření*. Praha: SNTL, 1991. 2.7 Moment setrvačnosti, poloměr setrvačnosti, s. 100-103.