TELMG –Modul 07: Nestacionární pole I - Vlny

Maxwellovy rovnice nestacionárního pole

- Mají obecný tvar (viz modul 3), stejně jako rovnice kontinuity a vyjádření vektorů pole pomocí potenciálů.
- Všechny veličiny jsou funkcí prostorových souřadnic i času.
- Elektrické a magnetické pole nelze vyšetřovat odděleně.
- V této kapitole se budeme zabývat výhradně homogenním lineárním izotropním prostředím, vodivým i nevodivým, bez přítomnosti volného náboje.
- Dosazením vztahů $\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$, $\vec{B} = \mu \vec{H}$, $\vec{j} = \gamma \vec{E}$, $\rho = 0$ do obecných MR v diferenciálním tvaru obdržíme rovnice, ze kterých budeme dále vycházet:

I.	$\mathrm{rot}\,\vec{B} = \mu\gamma\vec{E} + \varepsilon\mu\dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}$
II.	$\mathrm{rot}\,\vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$
III.	$\mathrm{div}\,\vec{E} = 0$
IV.	$\mathrm{div}\,\vec{B} = 0$

Telegrafní rovnice

- Aplikací operace rot na II. MR a užitím identity $\mathrm{rot\,rot} = \mathrm{grad\,div} - \Delta$ dostaneme po jednoduché úpravě:

$$\Delta\vec{\mathbf{E}} - \varepsilon\mu\frac{\partial^2 \vec{\mathbf{E}}}{\partial t^2} - \gamma\mu\frac{\partial \vec{\mathbf{E}}}{\partial t} = 0\,.$$

- Aplikací operace rot na I. MR obdobně obdržíme rovnici

$$\Delta\vec{\mathbf{B}} - \varepsilon\mu\frac{\partial^2 \vec{\mathbf{B}}}{\partial t^2} - \gamma\mu\frac{\partial \vec{\mathbf{B}}}{\partial t} = 0\,.$$

- Uvedené rovnice, popisující šíření elektromagnetického pole, se nazývají <u>telegrafní rovnice</u>.

Difúzní rovnice

- Pro pomalu se měnící pole nebo pole v dobrých vodičích, kdy platí

$$\left|\frac{\varepsilon}{\gamma}\frac{\partial^2 \vec{\mathbf{E}}}{\partial t^2}\right| << \left|\frac{\partial \vec{\mathbf{E}}}{\partial t}\right|,\quad \left|\frac{\varepsilon}{\gamma}\frac{\partial^2 \vec{\mathbf{B}}}{\partial t^2}\right| << \left|\frac{\partial \vec{\mathbf{B}}}{\partial t}\right|,$$

přecházejí telegrafní rovnice na již známé <u>difúzní rovnice</u>.

Vlnové rovnice

- Platí-li naopak $\left|\dfrac{\varepsilon}{\gamma}\dfrac{\partial^2 \vec{\mathbf{E}}}{\partial t^2}\right| >> \left|\dfrac{\partial \vec{\mathbf{E}}}{\partial t}\right|$, $\left|\dfrac{\varepsilon}{\gamma}\dfrac{\partial^2 \vec{\mathbf{B}}}{\partial t^2}\right| >> \left|\dfrac{\partial \vec{\mathbf{B}}}{\partial t}\right|$, např. v případě malé vodivosti prostředí (např. v dielektriku), dostáváme (homogenní) <u>vlnové rovnice</u>:

$$\Delta\vec{\mathbf{E}} - \varepsilon\mu\frac{\partial^2 \vec{\mathbf{E}}}{\partial t^2} = 0\,,\quad \Delta\vec{\mathbf{B}} - \varepsilon\mu\frac{\partial^2 \vec{\mathbf{B}}}{\partial t^2} = 0\,.$$

TELMG –Modul 07: Nestacionární pole I - Vlny

- Zavedením fázové rychlosti $v = \frac{c}{n}$ a indexu lomu $n = \sqrt{\varepsilon_r \mu_r}$ nabývají tyto rovnice tvaru

$$\Delta\vec{\mathbf{E}} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \vec{\mathbf{E}}}{\partial t^2} = 0\,,\ \Delta\vec{\mathbf{B}} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \vec{\mathbf{B}}}{\partial t^2} = 0\,.$$

- Jedná se o parciální diferenciální rovnice hyperbolického typu.

Řešení vlnové rovnice ve tvaru rovinné vlny

- Tzv. d'Alembertovo řešení jednorozměrné skalární vlnové rovnice $\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0$ má tvar

$$\psi(x,t) = f(x - vt) + g(x + vt)\,,$$

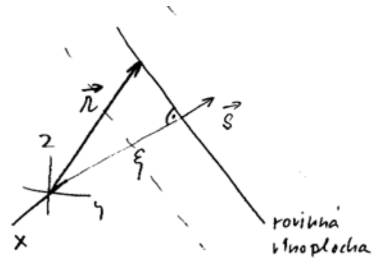
kde f, g jsou libovolné funkce.

- Trojrozměrné skalární vlnové rovnici $\Delta\psi - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0$ vyhovuje funkce

$$\psi(\vec{\mathbf{r}},t) = f(\vec{\mathbf{s}}\vec{\mathbf{r}} - vt) + g(\vec{\mathbf{s}}\vec{\mathbf{r}} + vt)\,,$$

kde vektor $\vec{\mathbf{s}} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ je jednotkový vektor se složkami totožnými se směrovými kosiny.

- Argumentu $d \equiv \vec{\mathbf{s}}\vec{\mathbf{r}} - vt$ říkáme fáze. Stejná hodnota fáze znamená stejnou hodnotu veličiny pole ψ. Místa se stejnou fází v libovolném pevném čase t jsou zřejmě roviny, kolmé na vektor $\vec{\mathbf{s}}$. Jedná se tedy o rovinnou vlnu.



- Zaveďme označení $\zeta \equiv \vec{\mathbf{s}}\vec{\mathbf{r}}$. Veličina ζ (dzéta) představuje orientovanou vzdálenost roviny procházející bodem $\vec{\mathbf{r}}$ kolmé na vektor $\vec{\mathbf{s}}$ od počátku souřadnic (viz obrázek). Zvolíme-li pevnou hodnotu fáze d_0, pak roviny s touto hodnotou fáze se pohybují podle rovnice $\zeta \equiv \vec{\mathbf{s}}\vec{\mathbf{r}} = d_0 + vt$, tzn. rychlostí v ve směru vektoru $\vec{\mathbf{s}}$.

Helmholtzova rovnice v dielektriku

- Vlnová rovnice pro harmonické veličiny v komplexním vyjádření.
- Dosazením $\vec{\mathbf{E}}(r,t) = \vec{\mathbf{E}}(r)e^{-i\omega t}$, $\vec{\mathbf{B}}(r,t) = \vec{\mathbf{B}}(r)e^{-i\omega t}$ do vlnových rovnic obdržíme Helmholtzovy rovnice

$$\Delta\vec{\mathbf{E}} + k^2\vec{\mathbf{E}} = 0\,,\ \Delta\vec{\mathbf{B}} + k^2\vec{\mathbf{B}} = 0\,,$$

kde $k = \frac{\omega}{v} = \frac{\omega n}{c}$.

TELMG –Modul 07: Nestacionární pole I - Vlny

Řešení Helmholtzovy rovnice pro dielektrikum

- Uvažujme řešení ve tvaru rovinné vlny. Trojrozměrné Helmholtzovy rovnice pro dielektrikum pak přecházejí na jednorozměrný tvar

$$\frac{\partial^2 \vec{\mathbf{E}}(\zeta)}{\partial \zeta^2} + k^2 \vec{\mathbf{E}}(\zeta) = 0\,,\ \frac{\partial^2 \vec{\mathbf{B}}(\zeta)}{\partial \zeta^2} + k^2 \vec{\mathbf{B}}(\zeta) = 0\,.$$

- Jedná se o lineární diferenciální rovnice druhého řádu s konstantními koeficienty (pro každou složku vektorů $\vec{\mathbf{E}}$, $\vec{\mathbf{B}}$), jejichž fundamentální systém řešení je $e^{\pm ik\zeta}$. Vybereme si pouze řešení s kladným znaménkem, pak výsledné řešení je

$$\vec{\mathbf{E}}(\zeta,t) = \vec{\mathbf{E}}_0 e^{i(k\zeta-\omega t)}\,,\ \vec{\mathbf{B}}(\zeta,t) = \vec{\mathbf{B}}_0 e^{i(k\zeta-\omega t)}\,.$$

- Návratem k původnímu polohovému vektoru $\vec{\mathbf{r}}$ a zavedením tzv. <u>vlnového vektoru</u> $\vec{\mathbf{k}} = k\vec{\mathbf{s}}$ obdržíme vyjádření

$$\vec{\mathbf{E}}(\vec{\mathbf{r}},t) = \vec{\mathbf{E}}_0 e^{i(\vec{\mathbf{k}}\vec{\mathbf{r}}-\omega t)}\,,\ \vec{\mathbf{B}}(\vec{\mathbf{r}},t) = \vec{\mathbf{B}}_0 e^{i(\vec{\mathbf{k}}\vec{\mathbf{r}}-\omega t)}\,.$$

- Jedná se o rovinnou monochromatickou (monofrekvenční) vlnu, přičemž prostorové opakování stejných hodnot vektorů pole nastává ve směru vektoru $\vec{\mathbf{k}}$ s periodou $\lambda = \frac{2\pi}{k}$. Veličina λ je známá <u>vlnová délka</u> a $k \equiv |\vec{\mathbf{k}}|$ představuje tzv. (úhlový) <u>vlnočet</u>, který je 2π -násobkem počtu vlnových délek v jednotkové délce (1 m).

Vlastnosti rovinné harmonické vlny v dielektriku

- Naše řešení vlnových rovnic zatím není konečné, neboť vlnové rovnice jsme získali derivováním (rotací) I. a II. MR. Uvážením platnosti III. a IV. MR dostaneme dále vztah mezi směry vektorů $\vec{\mathbf{E}}$, $\vec{\mathbf{B}}$, $\vec{\mathbf{s}}$.
- Dosazením řešení Helmholtzovy rovnice do III. a IV. MR obdržíme po provedení derivací podle ζ a t rovnice

$$\vec{s}\cdot\vec{\mathbf{E}} = 0\,,\ \vec{s}\cdot\vec{\mathbf{B}} = 0\,.$$

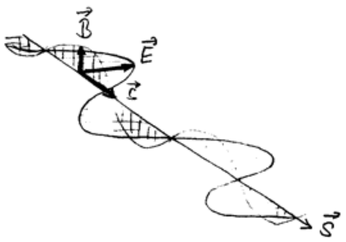
Vektory $\vec{\mathbf{E}}$, $\vec{\mathbf{B}}$ jsou kolmé na směr šíření vlny $\vec{\mathbf{s}}$.

- Z I. MR obdržíme navíc vztah

$$\vec{\mathbf{B}} = \frac{1}{v}\vec{s}\times\vec{\mathbf{E}}\,.$$

- Vektory $\vec{\mathbf{s}}$, $\vec{\mathbf{E}}$, $\vec{\mathbf{B}}$ jsou navzájem kolmé a v uvedeném pořadí tvoří pravotočivý trojhran.
- Odtud plyne, že Poyntingův vektor $\vec{\mathbf{P}} = \vec{\mathbf{E}}\times\vec{\mathbf{H}}$ má stejný směr jako směr šíření $\vec{\mathbf{s}}$ rovinných vlnoploch, jinak řečeno směr toku energie je totožný se směrem vlnového vektoru (to není samozřejmé, v anizotropním protředí tomu tak není).

TELMG –Modul 07: Nestacionární pole I - Vlny



Helmholtzova rovnice ve vodivém prostředí

- Vyjdeme z telegrafních rovnic. Dosazením $\vec{\mathbf{E}}(r,t) = \vec{\mathbf{E}}(r)e^{-i\omega t}$, $\vec{\mathbf{B}}(r,t) = \vec{\mathbf{B}}(r)e^{-i\omega t}$ obdržíme Helmholtzovy rovnice ve tvaru

$$\Delta\vec{\mathbf{E}} + K^2\vec{\mathbf{E}} = 0\,,\ \Delta\vec{\mathbf{B}} + K^2\vec{\mathbf{B}} = 0\,,$$

kde $K = \omega\sqrt{\varepsilon\mu\left(1 + \mathrm{i}\frac{\gamma}{\varepsilon\omega}\right)}$ je nyní komplexní veličinou.

- V případě $\omega << \frac{\gamma}{\varepsilon} = \frac{1}{\tau}$, kde $\tau = \frac{\varepsilon}{\gamma}$ je již známá relaxační doba pro rozplývání volného objemového náboje v homogenním vodiči, dostáváme rovnici platnou pro kvazistacionární pole.

Řešení Helmholtzovy rovnice pro vodivé prostředí

- Obdobně jako v případě dielektrika hledáme řešení pro rovinnou vlnu, závislé na souřadnici ζ. Dostáváme obyčejnou lineární diferenciální rovnici s konstantními koeficienty

$$\frac{\partial^2\vec{\mathbf{E}}(\zeta)}{\partial\zeta^2} + K^2\vec{\mathbf{E}}(\zeta) = 0\,,\ \frac{\partial^2\vec{\mathbf{B}}(\zeta)}{\partial\zeta^2} + K^2\vec{\mathbf{B}}(\zeta) = 0\,,$$

kde $K = \omega\sqrt{\varepsilon\mu\left(1 + \mathrm{i}\frac{\gamma}{\varepsilon\omega}\right)}$ je komplexní veličina.

- Pro přehlednost je vhodné zavést $k = \omega\sqrt{\varepsilon\mu}$, pak

$$K = k\sqrt{\left(1 + \mathrm{i}\frac{\gamma}{\varepsilon\omega}\right)} = \alpha + \mathrm{i}\beta\,,$$

kde reálnou část α a imaginární část β komplexního čísla K lze explicitně vyjádřit takto:

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}k\sqrt{1 + \sqrt{1 + \left(\frac{\gamma}{\varepsilon\omega}\right)^2}}\,,\ \beta = \frac{1}{\sqrt{2}}k\sqrt{-1 + \sqrt{1 + \left(\frac{\gamma}{\varepsilon\omega}\right)^2}}\,.$$

- Řešení získaných rovnic je snadné. Předpokládáme např. pro vektor $\vec{\mathbf{E}}$ řešení ve tvaru $\vec{\mathbf{E}} = \vec{\mathbf{E}}_0 e^{\lambda\zeta}$, odkud

$$\lambda = \sqrt{-K^2} = \pm\mathrm{i}K = \pm(-\beta + \mathrm{i}\alpha)\,.$$

- Fyzikálně přípustné řešení (tj. řešení, které nediverguje k nekonečnu pro $\zeta \to \infty$) je

$$\vec{\mathbf{E}} = \vec{\mathbf{E}}_0 e^{-\beta\zeta} e^{\mathrm{i}(\alpha\zeta - \omega t)}\,.$$

- Obdobně bychom mohli nalézt řešení pro vektor $\vec{\mathbf{B}}$, ale abychom zjistili vztah mezi $\vec{\mathbf{B}}$ a $\vec{\mathbf{E}}$, dosaďme získaný tvar $\vec{\mathbf{E}}$ do II. MR, která má pro komplexní harmonické vektory tvar $\vec{s}\times\frac{\partial\vec{\mathbf{E}}}{\partial\zeta}=-\frac{\partial\vec{\mathbf{B}}}{\partial t}$. Po provedení derivací a jednoduché úpravě dostaneme

$$\vec{\mathbf{B}}=\frac{1}{\omega}(\alpha+\mathrm{i}\beta)\vec{\mathbf{s}}\times\vec{\mathbf{E}}\,.$$

Vlastnosti rovinné harmonické vlny ve vodiči

- Oproti vlnám v nevodivém prostředí dochází ke dvěma změnám.
- Vlny jsou tlumené; tlumení je dáno činitelem $e^{-\beta\zeta}$.
- Fáze elektrického a magnetického pole jsou různé; rozdíl je dán fází činitele $\alpha+\mathrm{i}\beta$ v řešení pro $\vec{\mathbf{B}}$.