34 Obligaciones y bonos. Empréstitos

INTRODUCCIÓN

Las obligaciones y los bonos son títulos que representan una parte alícuota de una deuda, que el emisor de dicho título se compromete a pagar al tenedor en un plazo y con unos intereses pactados.

La diferencia entre obligaciones y bonos estriba, fundamentalmente en el plazo de vencimiento, que en las obligaciones es más largo, y en el sistema de amortización. En general, los bonos suelen tener un único vencimiento, mientras que las obligaciones pueden amortizarse anticipadamente a su vencimiento mediante sorteos.

34.01 OBLIGACIONES Y BONOS

34.01.01 Concepto

Las obligaciones y los bonos son títulos que representan una parte alícuota de una deuda, que el emisor de dicho título se compromete a pagar al tenedor en un plazo y con unos intereses pactados.

La diferencia entre obligaciones y bonos estriba, fundamentalmente en el plazo de vencimiento, que en las obligaciones es más largo, y en el sistema de amortización. En general, los bonos suelen tener un único vencimiento, mientras que las obligaciones pueden amortizarse anticipadamente a su vencimiento mediante sorteos.

El Texto Refundido de la Ley de Sociedades Anónimas nos define el título de la obligación en su artículo 291, exponiendo: que los títulos de una emisión deberán ser iguales y contener:

A) Su designación específica.

B) Las características de la Sociedad emisora y, en especial, el lugar en que ésta ha de pagar.

C) La fecha de la escritura de emisión y la designación del Notario y protocolo respectivo.

D) El importe de la emisión, en moneda española.

E) El número, valor nominal, intereses, vencimientos, primas y lotes del título, si los tuviere.

F) Las garantías de la emisión.

G) La firma, por lo menos, de un Consejero o Administrador.

La obligación, en su estado más puro, representa que por dicho título recibiremos unos intereses, en unos plazos determinados, y que al vencimiento nos reintegrarán el nominal del título, es decir, el valor por el que fue adquirido. No obstante, frente a la fuerte competencia que ofrece el mercado de renta variable ante la decisión de un inversor a colocar dinero en dicho mercado o en renta fija, las obligaciones han ido adoptando ciertas formas que la apartan de su concepto primitivo, con el fin de hacerlas más atractivas frente al inversor, es por ello que en la actualidad existe gran variedad de títulos obligaciones y que la Ley de Sociedades Anónimas, en su artículo 291, obliga a recoger estas características en el título.

Las clases de obligaciones más importantes son:

A) **Obligaciones simples u ordinarias:** son aquéllas que se reembolsan en dinero.

B) **Obligaciones convertibles:** ofrecen al obligacionista la posibilidad de cambiar las obligaciones que posea por acciones de la empresa emisora de las mismas, de acuerdo con las reglas de conversión que se establezcan. Se define la relación de conversión como el cociente entre el precio de emisión de la obligación, que puede ser su valor nominal, y su precio de conversión, que no es más que el valor fijado para las acciones a los efectos de la conversión. También se define el valor de conversión, como el producto de la relación de conversión por la cotización actual de la acción, y la prima de conversión como la diferencia entre el precio de emisión y el valor de conversión.

Ejemplo: Obligaciones convertibles

Supongamos una empresa que emite obligaciones a la par (por su valor nominal) de 10.000 euros y convertibles en acciones al precio de 125 euros cada acción. La cotización actual de las acciones es de 110 euros. Calcular la relación de conversión, el valor de conversión y la prima de conversión.

Solución:

1)

$$\text{Relación de conversión} = \frac{\text{precio de emisión}}{\text{precio de conversión}} = \frac{10.000}{125} = 80 \text{ accs./oblig.}$$

La relación de conversión sería de 80 acciones por obligación.

2) Valor de conversión = Relación de conversión x cotización actual de la acción =
= 80 x 110 = 8.800 euros/obligación

El valor de conversión sería el montante que obtendríamos si canjeáramos una obligación por las acciones que le correspondan y seguidamente vendiéramos estas acciones a su cotización en ese instante.

3) Prima de conversión = precio de emisión - valor de conversión =
= 10.000 - 8.800 = 1.200 euros/obligación

La prima de conversión sería, en este caso, el valor que hemos pagado de más por la adquisición de las 80 acciones que corresponden a cada obligación.

C) **Obligaciones con prima de reembolso o con lotes:** las obligaciones con prima de reembolso, se reembolsan por encima del valor nominal y es precisamente la diferencia entre el valor de reembolso y el valor nominal lo que constituye la prima de reembolso.

Los lotes se refieren a cantidades de dinero que se entregan a las obligaciones cuando son amortizadas por sorteo.

D) **Obligaciones indiciadas:** el nominal a devolver, los intereses o ambos a la vez, se calculan en función de algún índice de referencia, por ejemplo: el índice de precios al consumo, índices financieros, índices de precios basados en el valor de los metales preciosos, etc.

E) **Obligaciones participativas:** el tipo de interés de estas obligaciones consta de una parte fija y de otra variable, la cual está en función de los beneficios que obtenga la empresa, así pues, de alguna forma confieren la posibilidad de participar en los beneficios de la empresa emisora, lo cual hace atractivas a dichas obligaciones.

F) **Obligaciones cupón cero:** se denominan así por no recibir intereses a lo largo de la vida del título, si bien, su precio de emisión es bajo la par, es decir por debajo del valor nominal.

34.01.02 Valor teórico de una obligación

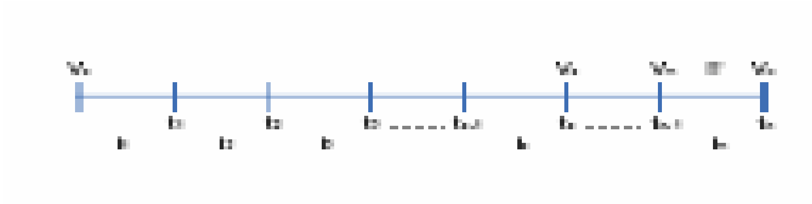
El valor teórico de una obligación será el valor actual del título, es decir la actualización de todos los flujos futuros que se recibirían por poseer dicho título, actualizados a la tasa de interés que desean ganar los inversores. El planteamiento expuesto es el realizado desde una óptica prospectiva, esto es, observando los flujos de dinero que quedan por delante del instante actual; también podríamos hallar el valor teórico de la obligación desde una óptica retrospectiva, observando los flujos de dinero anteriores al instante actual, y de esta forma el valor teórico se encontraría como la diferencia entre el valor capitalizado del precio de emisión y la capitalización de los flujos de dinero recibidos hasta el instante actual.

En este estudio usaremos la óptica prospectiva por ser, quizás, algo más sencilla. El enfoque que daremos en este apartado al valor teórico de la obligación, será el valor por el que el obligacionista estaría dispuesto a desprenderse de un título, que le garantiza el pago de unos intereses periódicos hasta su vencimiento y que en éste se le devuelve el nominal del título, por tanto supondremos, que el título no se amortiza anticipadamente antes de su vencimiento y que el valor por el que el obligacionista estaría dispuesto a desprenderse es el que matemáticamente le corresponda en ese instante.

Definamos las variables que formarán parte de las fórmulas empleadas en el cálculo del valor teórico:

V_s : valor teórico de la obligación en el instante "t_s".
V_o : valor nominal de la obligación.
r : tasa de interés periódico.
i_j : tasa de interés que desean ganar los obligacionistas en el período "j".
n : número de períodos desde el instante inicial hasta el vencimiento del título.

El planteamiento general del problema en cuestión podría representarse esquemáticamente:



El valor teórico de la obligación sería:

$$V_s = \frac{V_o}{(1 + i_{s+1}) \times (1 + i_{s+2}) \; .... \; (1 + i_n)} +$$

actualización del valor final de la obligación, que coincide con su valor nominal, en el instante "ts".

$$+ \frac{V_o \times r}{(1 + i_{s+1})} + \frac{V_o \times r}{(1+i_{s+1}) \times (1+i_{s+2})} + \; .... \; + \frac{V_o \times r}{(1 + i_{s+1}) \times \; .... \; \times (1 + i_n)} \; ;$$

actualización al instante "ts" de los intereses pagados en los instantes posteriores.

Esta expresión puede simplificarse notoriamente, si consideramos el caso más general en el que los intereses de los diversos períodos sean iguales, de esta forma obtendríamos la expresión:

$$V_s = \frac{V_o}{(1 + i)^{(n-s)}} + \sum_{j = s+1}^{n} \frac{V_o \times r}{(1 + i)^{(j-s)}} =$$

$$= \frac{V_o}{(1 + i)^{(n-s)}} + V_o \times r \sum_{j = s+1}^{n} \frac{1}{(1 + i)^{(j-s)}} =$$

$$= \frac{V_o}{(1 + i)^{(n-s)}} + V_o \times r \left[\frac{1}{(1 + i)} + \frac{1}{(1 + i)^2} + \; .... \; + \frac{1}{(1 + i)^{(n-s)}} \right]$$

El corchete representa una serie geométrica de razón: $\frac{1}{1 + i}$;

1er. término: $a1 = \dfrac{1}{1 + i}$;

y formada por (n-s) términos, cuya suma se calculará de acuerdo con lo especificado en la unidad 32, resultando finalmente la expresión:

$$V_s = \frac{V_o}{(1+i)^{n-s}} + (V_o \times r) \times \left[\frac{1 - \dfrac{1}{(1+i)^{(n-s)}}}{i} \right]$$

También cabría otra simplificación bastante lógica, que sería en caso en que el obligacionista utilice una tasa de actualización igual a la que le ofrece el tipo de interés del título, es decir, que la rentabilidad que el inversor pretende obtener es el tipo de interés que le ofrece el título, en este caso la expresión del valor teórico sería:

$$V_s = \frac{V_o}{(1+i)^{(n-s)}} + (V_o \times \cancel{i}) \times \left[\frac{1 - \dfrac{1}{(1+i)^{(n-s)}}}{\cancel{i}} \right] =$$

$$= \frac{V_o}{(1+i)^{(n-s)}} + V_o \times \left[1 - \frac{1}{(1+i)^{(n-s)}} \right] =$$

$$= \frac{V_o}{(1+i)^{(n-s)}} + V_o \left[\frac{(1+i)^{(n-s)} - 1}{(1+i)^{(n-s)}} \right] =$$

$$\frac{\cancel{V_o} + V_o \ (1+i)^{(n-s)} - \cancel{V_o}}{(1+i)^{(n-s)}} = \frac{V_o \ \cancel{(1+i)^{(n-s)}}}{\cancel{(1+i)^{(n-s)}}} = V_o$$

De esta forma obtenemos que el valor teórico de la obligación en cualquier instante es el valor nominal del título, esto nos recuerda la amortización de préstamos tipo americano estudiado en la unidad anterior, en los cuales observábamos que el capital pendiente de amortizar en cualquier instante de la vida del préstamo era precisamente el capital inicial.

Como la obligación representa un préstamo que el obligacionista realiza al emisor del título, la cancelación de dicho préstamo es lo que el obligacionista recibiría por su título y correspondería al valor teórico de la obligación.

Por este motivo a este tipo de obligaciones se les denomina obligaciones tipo americano, que reciben unos intereses en determinados períodos y que al final de la vida del título reciben el nominal.

Ejemplo: Cálculo del valor teórico

Calcular el valor teórico de un bono de 10.000 euros de valor nominal, con un tipo de interés del 3% trimestral pagadero el 30 de marzo, junio, septiembre y diciembre, con vencimiento el 30 de junio de N+4. La fecha actual es el 31 de diciembre de N, después del pago de los intereses. La exigencia del inversionista es del 14% efectivo anual.

Solución:

En primer lugar, hallemos el tipo de interés trimestral que el inversionista desea obtener, partiendo del dato del 14% efectivo anual.

$(1 + i)^4 = 1 + 0{,}14$

$1 + i = \sqrt[4]{1{,}14}$

$i = \sqrt[4]{1{,}14} - 1 = 0{,}0333 = 3{,}33\%$

Se ha calculado en base a la formulación del interés compuesto estudiada en la unidad anterior.

Con todos estos datos el valor teórico del bono sería:

$$V_s = \frac{10.000}{(1 + 0{,}0333)^{14}} + (10.000 \times 0{,}03) \times \left[\frac{- 1 \quad \dfrac{1}{(1 + 0{,}0333)^{14}}}{0{,}0333} \right] =$$

$$= \frac{10.000}{1{,}58187} + 300 \times \left[\frac{1 - 0{,}6322}{0{,}0333} \right] = 6.322 + 3.314 = 9.636 \text{ euros}$$

Aplicación de la fórmula expuesta para el valor teórico del bono o la obligación teniendo como datos:

V_0 = 10.000 euros $\qquad$ i = 3,33% = 0,0333
r = 3% = 0,03 $\qquad$ n = 14

Ejemplo: Cálculo de la tasa efectiva anual

Situémonos en el bono del ejemplo anterior y supongamos que a 31/12/N adquirimos el bono por 9.000 euros.

¿Cuál sería la tasa efectiva anual (T.A.E.) que obtendríamos con esta compra?

Solución:

Planteando la ecuación del valor teórico, conociendo que éste es de 9.000 euros, nos quedará como incógnita la tasa requerida por nosotros, que en este caso seríamos los inversores.

$$9.000 = \frac{10.000}{(1 + i)^{14}} + (10.000 \times 0,03) \times \left[\frac{1 - \dfrac{1}{(1 + i)^{14}}}{i} \right]$$

Para resolver esta ecuación, debemos aplicar iteraciones sobre la incógnita hasta lograr una que cumpla, es decir, probar valores para "i" de forma que obtengamos para uno de ellos un valor positivo y para otro de ellos un valor negativo, en cuyo caso, el Tª de Bolzano nos asegura que entre ambos valores existe al menos una solución al problema. Así, planteando la misma ecuación anterior igualada a cero:

$$0 = -9.000 + \frac{10.000}{(1 + i)^{14}} + (10.000 \times 0,03) \times \left[\frac{1 - \dfrac{1}{(1 + i)^{14}}}{i} \right]$$

Si probamos para i = 0,04 el resultado obtenido es: -56.

Si probamos para i = 0,039 el resultado obtenido es: 43.

Por lo que entre estos dos valores deberá existir la solución del problema y si tomamos i = 0,0394, prácticamente el resultado es próximo al cero y nos sirve.

Por tanto la tasa efectiva anual para el inversor la obtendríamos:

$$(1 + 0,0394)^4 = 1 + i$$

$$i = (1 + 0,0394)^4 - 1 = 0,167 = 16,7\%$$

34.01.03 Compra al descuento

Este caso correspondería a las obligaciones cupón cero, que las adquirimos a un precio inferior a su valor nominal, es decir, bajo la par, y no cobramos intereses a lo largo de la vida del título y al vencimiento nos reembolsan el nominal del título.

El planteamiento para conocer el valor del título en el instante de la compra, es el siguiente:

$$V_o = V \times (1 + i)^t$$

donde las variables que intervienen significan:

- V_o : valor nominal del título.
- V : valor de compra del título.
- i : tasa de interés retributiva del título.
- t : tiempo transcurrido desde la compra hasta el vencimiento.

Observamos que se usa la ley financiera de capitalización del interés compuesto.

Ejemplo: Cálculo de la tasa de interés

Calcular la tasa de interés trimestral de una obligación, de valor nominal 1.000.000 de euros y 4 años de vida, sabiendo que el precio de compra al inicio de la vida del título ha sido de 673.625 euros.

Solución:

4 años x 4 trimestres/año = 16 trimestres

$$1.000.000 = 673.625 \times (1 + i)^{16}$$

$$\frac{1.000.000}{673.625} = (1 + i)^{16}$$

$$\sqrt[16]{\frac{1.000.000}{673.000}} = 1 + i = \sqrt[16]{\frac{1.000.000}{673.000}} - 1 = 0{,}025 =$$

2,5% trimestra

34.02 EMPRÉSTITOS

34.02.01 Concepto

Un empréstito es una emisión de obligaciones y constituye una de las formas de financiación para la empresa, si bien es verdad, que su uso se reserva para las grandes empresas, fundamentalmente motivado por la confianza que el inversor tiene en ellas.

El capítulo décimo del Texto Refundido de la Ley de Sociedades Anónimas, trata las exigencias mercantiles de los empréstitos.

No es objeto de esta unidad el tratar todos y cada uno de los aspectos mercantiles de los empréstitos, pues son los aspectos financieros los que nos interesan, no obstante, destacaremos los aspectos mercantiles, que a nuestro juicio son más interesantes por su afección a los aspectos financieros:

Artículo 282. Importe de la emisión

El importe total de la emisión no debe ser superior al capital social desembolsado, más las reservas que figuren en el último Balance aprobado y las cuentas de regularización y actualización de Balances, cuando hayan sido aceptadas por el Ministerio de Economía y Hacienda.

Artículo 283. Condiciones de la emisión

Será necesario la constitución de una Asociación de Defensa o Sindicato de Obligacionistas y la designación, por la Sociedad, de una persona que, con el nombre de Comisario, concurra al otorgamiento del contrato de emisión en nombre de los futuros obligacionistas.

Artículo 284. Garantías de la emisión

La total emisión podrá garantizarse a favor de los titulares presentes y futuros de los valores, por medio de hipoteca mobiliaria o inmobiliaria; con prenda de valores que deberán ser depositados en un Banco oficial o privado; con garantía del Estado, Comunidad Autónoma, Provincia o Municipio; con aval solidario de un Banco oficial o privado, o de Caja de Ahorros.

Artículo 296. Gastos del Sindicato

Los gastos normales que ocasione el sostenimiento del Sindicato correrán a cargo de la Sociedad emisora, sin que en ningún caso puedan exceder del 2% de los intereses anuales devengados por las obligaciones emitidas.

Artículo 306. Rescate

La Sociedad podrá rescatar las obligaciones emitidas:

a) Por amortización o pago anticipado, de acuerdo con las condiciones de la escritura de emisión.

b) Como consecuencia de los convenios celebrados entre la Sociedad y el Sindicato de Obligacionistas.

c) Por adquisición en Bolsa, al efecto de amortizarlas.

d) Por conversión en acciones, de acuerdo con los titulares.

Artículo 308. Reembolso

La Sociedad deberá satisfacer el importe de las obligaciones en el plazo convenido, con las primas, lotes y ventajas que en la escritura de emisión se hubiesen fijado. Igualmente estará obligada a celebrar los sorteos periódicos en los términos y forma previstos, con intervención del Comisario y en presencia del Notario, que levantará el acta correspondiente. La falta de cumplimiento de esta obligación, autorizará a los acreedores para reclamar el reembolso anticipado de las obligaciones.

De lo anterior se desprende que la Ley de Sociedades Anónimas prevé la existencia de una serie de tipos de empréstitos, de los cuales los más interesantes serán definidos en el apartado siguiente.

34.02.02 Tipos de empréstitos

Para darnos una idea genérica de los tipos de empréstitos, veamos el siguiente diagrama:

Empréstitos			
Sin cancelación escalonada (sin sorteos)		Con cancelación escalonada (con sorteos)	
Formados por obligaciones de tipo americano	**Formados por obligaciones que representan préstamos simples**	**Formados por obligaciones de tipo americano**	**Formados por obligaciones que representan préstamos simples**
Interés constante Interés variable	Interés constante Interés variable Términos amortizativos constantes o variables	Interés constante Interés variable Términos amortizativos constantes o variables	Interés constante Interés variable Términos amortizativos constantes o variables

Todas ellas, pueden incluir una serie de características comerciales como son: primas de reembolso, lotes y primas de emisión.

En este tratado se estudiarán los empréstitos con cancelación escalonada, es decir, con sorteos periódicos de amortización de títulos, con tipo de interés constante a lo largo de la vida del empréstito y términos amortizativos constantes, haciendo una breve referencia al caso anterior, pero con términos amortizativos variables. No es nuestro objetivo el estudio en profundidad de los empréstitos. No obstante, con los conocimientos adquiridos en esta unidad, estaríamos en predisposición para poder entender el resto de tipos de empréstitos.

34.02.03 Empréstitos formados por obligaciones tipo americano con cancelación escalonada

34.02.03.01 Planteamiento general

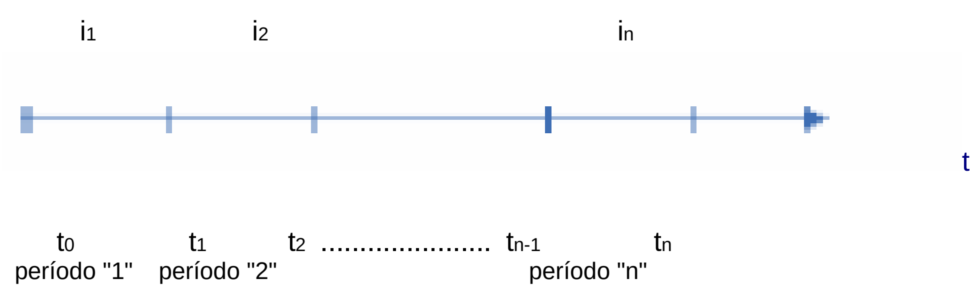
Se trata de empréstitos formados por obligaciones de tipo americano y con realización de sorteos periódicos, en los cuales se amortizan un determinado número de títulos.

Las variables que intervienen en el planteamiento son:

- N_s : número de títulos pendientes de amortizar al inicio del período "s".
- M_s : número de títulos amortizados al final del período "s".
- a_s : término amortizativo o cantidad pagada a los obligacionistas al final del período "s".
- i_s : tipo de interés en el período "s".
- C_s : capital pendiente de devolver a los obligacionistas al final del período "s", una vez pagado el término amortizativo a_s.
- V_0 : valor nominal de la obligación.

El planteamiento es que al final de cada período se pagan los intereses del mismo a todas las obligaciones vivas al inicio de dicho período y se amortizan un número determinado de ellas, es decir se reembolsa a los obligacionistas el nominal de dichos títulos amortizados. Las obligaciones amortizadas se obtienen mediante sorteo en la forma expuesta en el artículo 308 de la Ley de Sociedades Anónimas expuesto en el apartado 34.01.01.

Esquemáticamente podríamos representarlo así:



Intereses:	$V_o \times N_1 \times i_1$	$V_o \times N_2 \times i_2$	.....	$V_o \times N_n \times i_n$
+				
amortización:	$M_1 \times V_o$	$M_2 \times V_o$	.....	$M_n \times V_o$
términos amortizativos:	$\underbrace{V_o \times N_1 \times i_1 + M_1 \times V_o}_{a_1}$	$\underbrace{V_o \times N_2 \times i_2 + M_2 \times V_o}_{a_2}$	.....	$\underbrace{V_o \times N_n \times i_n + M_n \times V_o}_{a_n}$

Es evidente que el número de obligaciones vivas al inicio del segundo período, serán las que eran vivas al final del primer período menos la que hayamos amortizado, es decir, se verificará:

$$N_1 - M_1 = N_2 \longrightarrow N_1 - N_2 = M_1$$

y en general:

$$N_s - N_{s+1} = M_s$$

También es evidente que la suma de todas las obligaciones amortizadas, deberá coincidir con el número de obligaciones vivas al inicio del empréstito, por tanto, se verificará:

$$M_1 + M_2 + \text{..........} + M_n = N_1$$

o bien en forma condensada:

$$\sum_{s=1}^{n} M_s = N_1$$

Observemos que en el planteamiento general, los tipos de interés de los períodos o réditos periodales y los términos amortizativos, son variables a lo largo de la vida del empréstito.

El planteamiento general de los conceptos básicos nos conduce a las siguientes expresiones:

A) Equivalencia financiera en el origen (to):

$$V_o \times N_1 = \frac{a_1}{(1 + i_1)} + \frac{a_2}{(1 + i_1) \times (1 + i_2)} + \text{.....} + \frac{a_n}{(1 + i_1) \times \text{.....} \times (1 + i_n)} =$$

$$= a_1 \times (1 + i_1)^{-1} + a_2 \times (1 + i_1)^{-1} \times (1 + i_2)^{-1} + \text{.....} + a_n \times (1 + i_1)^{-1} \times \text{.....} \times (1 + i_n)^{-1} =$$

$$= \sum_{s=1}^{n} a_s \times \prod_{r=1}^{s} (1 + i_r)^{-1}$$

Es decir, que el montante del empréstito en el origen, debe ser igual a la actualización en el origen de todos los términos amortizativos.

B) El capital pendiente de devolver a los obligacionistas al final del período "s", una vez pagado el término amortizativo "as", conocido como reserva matemática, es:

$$C_s = \frac{a_{s+1}}{(1 + i_{s+1})} + \frac{a_{s+2}}{(1 + i_{s+1}) \times (1 + i_{s+2})} + ... + \frac{a_n}{(1 + i_{s+1}) \times ..... \times (1 + i_n)} =$$

$$= a_{s+1} \times (1 + i_{s+1})^{-1} + a_{s+2} \times (1 + i_{s+1})^{-1} \times (1 + i_{s+2})^{-1} + ... +$$

$$+ a_n \times (1 + i_{s+1})^{-1} \times ..... \times (1 + i_n)^{-1} =$$

$$= \sum_{r = s+1}^{n} a_r \times \prod_{j = s+1}^{r} (1 + i_j)^{-1}$$

Como vemos, el capital pendiente de devolución al final del período "s", una vez pagado el término amortizativo "as", es la actualización al final del período "s" del resto de términos amortizativos hasta el final de la vida del empréstito.

C) Término amortizativo:

$$a_s = \underbrace{V_o \times N_s \times i_s}_{\text{intereses del período "s"}} + \underbrace{M_s \times V_o}_{\text{obligaciones amortizadas del período "s"}}$$

34.02.03.02 Caso de réditos periodales constantes y términos amortizativos constantes

En este caso se verificará:

1) $i_1 = i_2 = i_3 = ... = i_n = i$
2) $a_1 = a_2 = a_3 = ... = a_n = a$

Las expresiones de la equivalencia financiera, reserva matemática y término amortizativo serán:

A) Equivalencia financiera en el origen:

$$V_o \times N_1 = \frac{a}{1 + i} + \frac{a}{(1 + i)_2} + ... + \frac{a}{(1 + i)_n} =$$

$$= a \times \left[\frac{1}{1+i} + \frac{1}{(1+i)^2} + \dots + \frac{1}{(1+i)^n} \right] = a \times \left[\frac{1 - \frac{1}{(1+i)^n}}{i} \right] = a \times a_{\overline{n}|i}$$

De donde se deduce la cuantía del término amortizativo, a, puesto que V_0, N_1, i, son conocidos. Su expresión será:

$$a = \frac{V_0 \times N_1}{a_{\overline{n}|i}}$$

> NOTA: La suma del corchete es una serie geométrica análoga a la vista en el apartado 33.02.02.01, correspondiente a la amortización de préstamos por el método francés.

B) Reserva matemática:

$$C_s = \frac{a}{1+i} + \frac{a}{(1+i)^2} + \dots + \frac{a}{(1+i)^{(n-s)}} =$$

$$= a \times \left[\frac{1}{1+i} + \frac{1}{(1+i)^2} + \dots + \frac{1}{(1+i)^{(n-s)}} \right] = a \times \left[\frac{1 - \frac{1}{(1+i)^{(n-s)}}}{i} \right] = a \times a_{\overline{n-s}|i}$$

$$= \frac{V_0 \times N_1}{a} \times a_{\overline{n-s}|i}$$

> NOTA: La suma del corchete es una serie geométrica análoga a la obtenida al estudiar la equivalencia financiera, pero con "(n-s)" en lugar de "n".

C) Término amortizativo:

$$a_s = a = \frac{V_0 \times N_1}{a_{\overline{n}|i}} \quad \text{para} \quad s = 1, 2, \dots\dots\dots, n$$

De la constancia del término amortizativo, podemos hallar el número de obligaciones a amortizar al final de cada período, con sólo restar estas dos expresiones miembro a miembro:

$$
\begin{array}{rl}
 & a_s \; = a = V_0 \times N_s \times i + V_0 \times M_s \\
 & a_{s+1} = a = V_0 \times N_{s+1} \times i + V_0 \times M_{s+1} \\
(-) & \overline{\hspace{12cm}} \\
 & 0 = V_0 \times i \times \underbrace{(N_s - N_{s+1})}_{M_s} + V_0 \times M_s - V_0 \times M_{s+1}
\end{array}
$$

$$\cancel{V_0} \times M_{s+1} = \cancel{V_0} \times M_s \times (1 + i)$$

$$\boxed{M_{s+1} = M_s \times (1 + i)} \longrightarrow \boxed{M_{s+1} = M_1 \times (1 + i)}$$

De forma que el número de obligaciones amortizadas al final de cada período, sigue una serie geométrica de razón "(1 + i)" y cuyo primer término, "M_1", lo obtendríamos de la expresión del término amortizativo para el primer período:

$$a = V_0 \times N_1 \times i + V_0 \times M_1$$

$$\frac{V_0 \times N_1}{a_{\overline{n}|i}} = V_0 \times N_1 \times i + V_0 \times M_1$$

$$M_1 = \frac{N_1}{a_{\overline{n}|i}} - N_1 \times i = N_1 \times \left[\frac{1}{a_{\overline{n}|i}} - i \right] = \frac{N_1}{S_{\overline{n}|i}}$$

De esta forma, podremos saber cuantas obligaciones debemos amortizar al final de cada período, el número de obligaciones vivas, el montante de intereses a pagar y el término amortizativo, en definitiva, todo lo necesario para poder construir el cuadro de amortización del empréstito.

NOTA: $\frac{1}{a_{\overline{n}|i}} - i = \frac{1}{S_{\overline{n}|i}}$; esta igualdad se deduce fácilmente:

$$\frac{1}{\frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i}} - i = \frac{i}{1 - (1 + i)^{-n}} - i = \frac{\cancel{i} - \cancel{i} + i \times (1 + i)^{-n}}{1 - (1 + i)^{-n}} =$$

$$= \frac{i}{(1 + i)^{n} - 1} = \frac{1}{(1 + i)^{n} - 1} = \frac{1}{S_{\overline{n}|i}}$$

i

Donde $S_{\overline{n}|i}$ sería la suma de la serie geométrica:

$$1 + (1 + i) + (1 + i)^2 + ... + (1 + i)^{n-1}$$

Esto es lógico, si pensamos que el número de obligaciones vivas al inicio del empréstito, es la suma de todas las que amortizaremos y éstas siguen una serie geométrica, como ya hemos visto, y por tanto el número de obligaciones vivas al inicio del empréstito será una suma de una serie geométrica:

$$N_1 = \sum_{s=1}^{n} M_s = \sum_{s=1}^{n} M_1 (1 + i)^{s-1} = M_1 \sum_{s=1}^{n} (1 + i)^{s-1} =$$

$$= M_1 \times [1 + (1 + i) + (1 + i)^2 + ... + (1 + i)^{n-1}] =$$

$$= M_1 \times \left[\frac{1 \times [(1 + i)^n - 1]}{(\cancel{1} + i) - \cancel{1}} \right] = M_1 \times \frac{(1 + i)^n - 1}{i} = M_1 \times S_{\overline{n}|i}$$

Ejemplo: Equivalencia financiera, reserva matemática y término amortizativo

Construir el cuadro de amortización de un empréstito con cancelación escalonada, formado por obligaciones de tipo americano con las siguientes características:

- Número de títulos emitidos: $N_1 = 10.000$
- Nominal de cada título: $V_o = 1.000$ euros
- Vida del empréstito: $n = 5$ años
- Rédito anual constante: $i = 0{,}1 = 10\%$
- Términos amortizativos anuales constantes

Solución:

Empecemos calculando la cuantía del término amortizativo:

$$a = \frac{V_o \times N_1}{a_{\overline{n}|i}} = \frac{V_o \times N_1}{\left[\dfrac{1 - \dfrac{1}{(1 + i)^n}}{i} \right]} = \frac{1.000 \times 10.000}{\left[\dfrac{1 - \dfrac{1}{(1 + 0{,}1)^5}}{0{,}1} \right]} =$$

$$= \frac{10.000.000}{3,790786769} = 2.637.974,81 \text{ euros} \simeq 2.637.975 \text{ euros}$$

Calculemos ahora las obligaciones que deberemos amortizar al final de cada período:

$$M = \frac{N_1}{S_{\overline{n}|i}} = \frac{10.000}{\dfrac{(1 + 0,1)^5 - 1}{0,1}} = 1.637,975 \simeq 1.638$$

$$M_2 = M_1 \times (1 + i) = 1.637,975 \times (1 + 0,1) = 1.801,77 \simeq 1.802$$

$$M_3 = M_1 \times (1 + i)^2 = 1.637,975 \times (1 + 0,1)^2 = 1.981,95 \simeq 1.982$$

$$M_4 = M_1 \times (1 + i)^3 = 1.637,975 \times (1 + 0,1)^3 = 2.180,14 \simeq 2.180$$

$$M_5 = M_1 \times (1 + i)^4 = 1.637,975 \times (1 + 0,1)^4 = 2.398,16 \simeq 2.398$$

Efectivamente se verifica: $M_1 + M_2 + M_3 + M_4 + M_5 = N_1 = 10.000$

Con estos datos podemos calcular los intereses a pagar al final de cada período:

$$I_1 = V_o \times N_1 \times i = 1.000 \times 10.000 \times 0,1 = 1.000.000 \text{ euros}$$

$$I_2 = V_o \times N_2 \times i = V_o \times (N_1 - M_1) \times i = 1.000 \times (10.000 - 1.638) \times 0,1 = 836.200 \text{ euros}$$

$$I_3 = V_o \times N_3 \times i = V_o \times (N_2 - M_2) \times i = 1.000 \times (8.362 - 1.802) \times 0,1 = 656.000 \text{ euros}$$

$$I_4 = V_o \times N_4 \times i = V_o \times (N_3 - M_3) \times i = 1.000 \times (6.560 - 1982) \times 0,1 = 457.800 \text{ euros}$$

$$I_5 = V_o \times N_5 \times i = V_o \times (N_4 - M_4) \times i = 1.000 (4.578 - 2.180) \times 0,1 = 239.800 \text{ euros}$$

Con estos datos ya podemos construir el cuadro de amortización:

Períodos	Intereses	Amortizac. obligaciones	Términos amortizat.	Capital pendiente	Obligaciones vivas	Obligaciones amortizadas
inicio	---	---	---	10.000.000	10.000	---
1	1.000.000	1.638.000	2.638.000	8.362.000	8.362	1.638
2	836.200	1.802.000	2.638.200	6.560.000	6.560	1.802
3	656.000	1.982.000	2.638.000	4.578.000	4.578	1.982
4	457.800	2.180.000	2.637.800	2.398.000	2.398	2.180
5	239.800	2.398.000	2.637.800	---	---	2.398

NOTA: El hecho de que los términos amortizativos no sean constantes e igual al valor calculado de 2.637.975 euros, es debido al redondeo realizado en el número de obligaciones a amortizar al final de cada período, no obstante, sus valores difieren muy poco del calculado.

34.02.03.03 Caso de créditos periodales constantes

En este caso sólo exigimos que se cumpla:

$$i_1 = i_2 = i_3 = ... = i_n = i$$

En tanto que los términos amortizativos serán variables.

La variabilidad de los términos amortizativos puede obedecer a determinadas leyes, como por ejemplo, que los términos amortizativos varíen siguiendo una serie geométrica, una serie aritmética, etc. El cálculo de los términos amortizativos en cualquiera de las variaciones mencionadas, es de una complejidad que excede al nivel de este tratado y por tanto no serán desarrollados, no obstante, se mencionan para que el lector se dé cuenta de las muchas posibilidades que la unidad de los empréstitos ofrece en cuanto a cálculo. Remitimos al lector a un buen tratado de matemática financiera para abarcar las principales modalidades que ofrecen las variaciones de los términos amortizativos.

RESUMEN

La obligación debe ser tomada como una inversión: invertiré un dinero, y al cabo del tiempo, recibiré este dinero más un poco más (el interés). Como hemos visto, y si nos interesa, podemos cambiar estas obligaciones.

Un empréstito es una emisión de obligaciones, y constituye fuente de financiación para las empresas.

Llegados a este punto, queda a la elección del inversor en qué invertir, y a la elección de la empresa, donde obtener su financiación.