PARADOJAS Y RIGOR: LA HISTORIA INTERMINABLE

Introducción

Paradoxes are compact energy sources, talismans
(The infinity and the mind, *R. Rucker*)

Sufficient unto the day is the rigor thereof
(E. H. Moore)

La palabra *paradoja* procede del griego (*para* y *doxos*) y significa etimológicamente "más allá de lo creíble". Y ésta es probablemente su mejor definición. En general, una paradoja es una afirmación o razonamiento que nos lleva a una contradicción (real o aparente).

Las paradojas, en un sentido muy amplio, aparecen constantemente en nuestra vida cotidiana, bien porque las descubrimos nosotros mismos en nuestro quehacer diario, o bien porque nos las hacen ver (a veces por razones interesadas) en la forma "*resulta paradójico que en nombre de* [ponga aquí el lector la virtud que desee] *se puedan justificar tales actos"* o *"es sorprendente* (¿paradójico?) *que a pesar de tener la renta per cápita más elevada de la región, el 80% de la población viva por debajo de los umbrales de la pobreza"*. Otro argumento habitual toma la forma *"resulta llamativo* (es decir, paradójico) *la contradicción entre lo que dice tal* [individuo, grupo, fabricante, etc..] *y lo que hace"*, etc.

Por otro lado, estamos acostumbrados a descubrir resultados sorprendentes y muchas veces paradójicos en las ciencias experimentales. Las dos grandes teorías físicas del siglo XX, la Teoría de la Relatividad y la Mecánica Cuántica (que proporcionan una explicación de la realidad y un nivel predictivo más exacto que cualquier otra teoría anterior), están plagadas de resultados paradójicos e incluso mutuamente incompatibles. El postulado de la constancia de la velocidad de la luz en el vacío para cualquier sistema inercial de referencia conduce a una serie de resultados paradójicos: la desaparición de las nociones de espacio y tiempo absolutos, la contracción del tiempo y de las longitudes en la dirección del movimiento, el aumento de masa a velocidades relativistas; en fin, la concepción de la realidad física como un continuo espacio temporal con estructura de variedad riemaniana, no necesariamente euclídea (*cfr.* la deliciosa obrita de divulgación [Ei]). La Mecánica Cuántica, por su parte, niega de entrada el principio de causalidad (entendido como la posibilidad de predecir el estado futuro de un sistema físico con una probabilidad tan cercana a 1 como se quiera, mediante un análisis suficientemente elaborado del fenómeno observado). La inevitable interacción del observador con el hecho observado lleva al *Principio de Complementariedad* de **N. Bohr**, que establece la imposibilidad de realizar una descripción causal (en términos de transferencia de energía o momento) de los fenómenos atómicos que sea a la vez una descripción espacio temporal (en términos de posición), ya que ambas requieren disposiciones experimentales mutuamente excluyentes. Sin embargo, *ambas* descripciones, son necesarias para la comprensión del fenómeno. La cuantificación de este principio conduce al *principio de incertidumbre*, formulado por primera vez por **W. Heisenberg** en 1926**,** una de cuyas consecuencias es la dualidad onda-partícula tan típica del mundo microfísico: las partículas subatómicas se nos aparecen a veces como diminutas balas tremendamente veloces, y otras veces presentan fenómenos de difracción e interferencia propios de las ondas, dependiendo de la disposición experimental que empleemos. El comportamiento de las cosas a escala microcósmica es, simplemente, distinto al que estamos habituado. Sin embargo, al menos podemos decir , con el premio Nobel **R. P. Feynman**, que *"todas* [las partículas] *están chifladas, pero exactamente de la misma manera"* ([Fe; Cap. 6]).

Algunas interpretaciones son aún más extremas. Así, **P. Jordan** sostenía que las observaciones no sólo alteran lo que se mide, sino que lo *originan*: por ejemplo, al medir la posición de un electrón, éste es *"forzado a asumir una posición definida; previamente no estaba en general allí o aquí… Si mediante otro experimento se mide la velocidad del electrón, se le obliga a decidirse por un valor exacto. En tal decisión, la tomada anteriormente acerca de la posición es completamente eliminada."* De modo que *"nosotros mismos producimos los resultados de las mediciones."*([Jo]).

Así pues, la Física Moderna parece haberse instalado confortablemente en el convencionalismo: las teorías proporcionan descripciones y predicciones cada vez más exactas de los hechos observados, sin pretender encontrar una explicación última de la realidad. A este respecto es quizá paradigmática la reflexión que hace **R. Feynman** a cuenta de la discusión del conocido experimento para detectar o bien la energía o bien la posición de los electrones que pasan a través de una pantalla con dos agujeros. Como es bien sabido, en el primer caso los electrones se comportan como ondas, y en el segundo caso como partículas. Dice Feynman:

> *La cuestión es saber cómo funciona realmente. ¿Qué mecanismo es el causante de todo esto? Nadie sabe de ningún mecanismo. Nadie puede dar una explicación del fenómeno más profunda que la que yo he dado; o sea, una mera descripción… La formulación matemática puede hacerse más precisa… Pero el misterio profundo es el que acabo de describir y, en la actualidad, nadie puede ir más al fondo.* [Fe: Cap. 6]

En el mismo sentido se pronuncia **S. Hawking**, quien, con ocasión del 25 aniversario de los Premios Príncipe de Asturias, declaraba recientemente:

> *Una teoría es tan sólo un modelo matemático para describir las observaciones, y no tiene derecho a identificarse con la realidad, sea lo que sea lo que esto signifique. Podría ser que dos modelos muy diferentes lograran describir las mismas observaciones: ambas teorías serían igualmente válidas, y no se podría decir que una de ellas fuera más real que la otra.* [El País, 13/04/2005; pág. 38].

Pero, ¿qué tienen que ver el misterio y las paradojas con el reino del rigor y exactitud que se supone son las Matemáticas? El capítulo titulado "***Paradoja perdida y paradoja recuperada"*** del clásico [KN] comienza así:

> *"Quizá la mayor de todas las paradojas es que haya paradojas en la matemática. No nos sorprende descubrir inconsistencias en las ciencias experimentales… Verdaderamente, el testamento de la ciencia está situado en un fluir tan*

continuo que la herejía de ayer es el evangelio de hoy y el fundamentalismo de mañana…. Sin embargo, como la matemática se construye sobre lo viejo, pero no lo descarta, como sus teoremas se deducen de postulados con los métodos de la lógica, no sospechamos, a pesar de haber sufrido cambios revolucionarios, que sea una disciplina capaz de engendrar paradojas."

Como veremos en las páginas siguientes, lo cierto es que las paradojas han aparecido con profusión en las Matemáticas, y han jugado un papel decisivo en su desarrollo. Los intentos de resolver o evitar una determinada paradoja han supuesto, cuanto menos, una mayor comprensión del problema estudiado. La confrontación entre el resultado obtenido y lo que uno esperaba, produce siempre un efecto de sorpresa y es un toque de atención que nos induce a reflexionar. Y es este efecto dinamizador de la crítica y la reflexión lo que hace tan importante el valor de las paradojas en el desarrollo de la Ciencia en general y de las Matemáticas en particular.

Por otro lado, la idea de demostración rigurosa depende, obviamente, del contexto y del entorno cultural. En los escritos matemáticos ordinarios (incluso los de hoy en día), *sólo* se detallan los pasos **no** puramente mecánicos; aquellos que suponen una idea nueva, una construcción original o la introducción de algún elemento nuevo. Pero el consenso sobre lo que es o no un paso obvio o trivial, ha ido cambiando a lo largo de la historia. Así, por ejemplo, el hecho de que una función (real de variable real) continua, definida en un intervalo cerrado y que toma valores de signo opuesto en los extremos del intervalo, deba anularse en algún punto del interior del intervalo, era algo obvio para los matemáticos del siglo XVIII (y gran parte de los del siglo XIX); Actualmente este hecho es un **Teorema** no trivial que se *demuestra* en los primeros cursos de la Universidad. Por supuesto, el problema es decodificar adecuadamente las palabras que aparecen en el enunciado de la cuestión, especialmente las nociones de *función, número real* y *continuidad*. Pero incluso en los aparentemente sólidos *Elementos* de **Euclides** se pueden encontrar construcciones que no están claramente justificadas con la sola asunción de los 5 Postulados fijados por el autor. Ya en la Proposición I.1, en que se prueba que sobre cualquier segmento **AB** se puede construir un triángulo equilátero, (se trazan circunferencias de centros en **A** y en **B**, de radio la longitud del segmento, y el punto de corte **C** es el otro vértice del triángulo buscado) aparece una dificultad: ¿Por qué las dos circunferencias se cortan? Nada en los postulados ni en las *nociones comunes* permite asegurarlo. Hace falta un nuevo axioma *de continuidad*. Otro ejemplo: supongamos cuatro puntos sobre la recta, **A**, **B**, **C**, **D**; supongamos que **B** se halle entre **A** y **C** y que **C** esté situado entre **B** y **D**. Parece razonable deducir que, necesariamente, **B** está ente **A** y **D**, ¿no?. Pues, sorprendentemente, no es posible demostrar este resultado a partir de los axiomas de Euclides (Este hecho fue detectado por **M. Pasch** nada menos que en 1882). La revisión crítica de *Los Elementos* fue llevada a cabo por **D. Hilbert**, alrededor de 1900, quien tuvo que elevar la lista de los postulados hasta 20 para desarrollar correctamente la Geometría Euclídea.

En la evolución de la noción de rigor a lo largo del tiempo, juega un papel decisivo la *paradoja*, que rompe con los principios establecidos y obliga a crear un nuevo paradigma del rigor. A lo largo de las páginas que siguen tendremos ocasión de examinar distintos ejemplos de este proceso.

1.- Algunos ejemplos de falacias y paradojas.

Una verdad sin interés puede ser eclipsada por una falsedad emocionante
(*A. Huxley*)

Las **falacias** (afirmaciones absurdas y contradictorias que aparentan ser consecuencia lógica de un razonamiento correcto, pero que esconden un error en el mismo) son las paradojas más inocuas y, probablemente, las más divertidas. A veces se presentan en forma de acertijo o problema, una especie de reto al lector para que descubra dónde se encuentra el error en el razonamiento. Su uso razonado puede ser muy útil en la enseñanza: la confusión e inseguridad que provocan en el estudiante pueden ser utilizadas para despertar el espíritu crítico y aumentar la capacidad de análisis. Veamos algunas de ellas:

Las **falacias aritméticas** suelen ser muy fáciles de desmontar. Muchas de ellas incluyen la división por 0, más o menos camuflada, o surgen de ignorar que todo número positivo posee *dos* raíces cuadradas. Otras veces, el truco consiste en envolver el problema en un exceso coloquial, que disimula el error introducido. Es paradigmático el ejemplo de la bien conocida:

***Falacia de la herencia*: ** Con distintas variantes en las cantidades y la naturaleza de la herencia, se trata de lo siguiente: un padre de 3 hijos, dueño de un rebaño de 17 ovejas, al morir dispone en su testamento que el rebaño se divida entre sus hijos de la siguiente forma: La mitad para el mayor, la tercera parte para el mediano y la novena parte para el menor, *con la condición de no sacrificar ninguna res.*

Ante la dificultad de cumplir con los deseos de su padre, los hermanos acuden a un tío ganadero-matemático que tenían, que resuelve el problema así: Primero, les deja una oveja de su rebaño. Del total de 18 ovejas, entrega la mitad (esto es, 9) al hermano mayor, la tercera parte (esto es, 6) al mediano y, finalmente, la novena parte (es decir, 2) al pequeño. Así ha entregado 9+6+2 = 17 ovejas, con lo que le queda una, la suya, que vuelve a incorporar a su rebaño. Así que *¿problema resuelto?*

Obviamente, no. Éste es un caso típico en el que el narrador trata de confundir al oyente con una abundancia de información que oculta la principal, que es que los datos iniciales son erróneos. El padre sería un buen ganadero, pero ¡no sabía sumar fracciones, ya que

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}=\frac{17}{18}\neq 1!$$

Realmente, de hacer caso al testamento, el mayor de los hermanos debería recibir 8 ovejas y media, el mediano 5 ovejas y 2/3, y el menor 1 oveja y 8/9 de oveja: en total 16 ovejas y 1/18, esto es, los 17/18 partes del rebaño de 17 ovejas. Quedarían, por tanto, 17/18 de oveja sin repartir (1/18 del total). Lo que el astuto tío hace, para evitarse líos, es repartir el rebaño ampliado (17+1), de acuerdo con las condiciones del testamento. De esta manera reparte 17/18 del nuevo rebaño (es decir, 17 ovejas), y al final le queda

1/18 del mismo, es decir, su propia oveja. Pero obviamente no cumple lo dispuesto en el testamento.

Falacia del montón de arena: Otras falacias se basan en el uso del *sentido común* aplicado a situaciones que no están bien definidas. Por ejemplo, consideremos las siguientes propiedades *evidentes* de los montones de arena:

1. Dos o tres granos de arena **no forman** un montón.
2. Un millón de granos de arena **forma** un montón.
3. Si n granos de arena **no forman** un montón, tampoco lo forman $n+1$ granos.
4. Si n granos de arena **forman** un montón, también lo forman $n-1$ granos.

Si usamos la afirmación (1) y aplicamos sucesivamente la (3) a ella, obviamente contradeciremos a la (2). Un argumento análogo muestra que las afirmaciones (2) y (4) juntas, contradicen a la (1). La paradoja surge precisamente porque la noción de *montón de arena* no se define con precisión.

Hay multitud de **falacias geométricas**, muchas de ellas basadas en razonamientos realizados sobre un dibujo concreto, que produce el resultado (falso) deseado. Por ejemplo:

***La falacia del círculo vacío*:** Todo punto P interior de un círculo, está sobre su circunferencia:

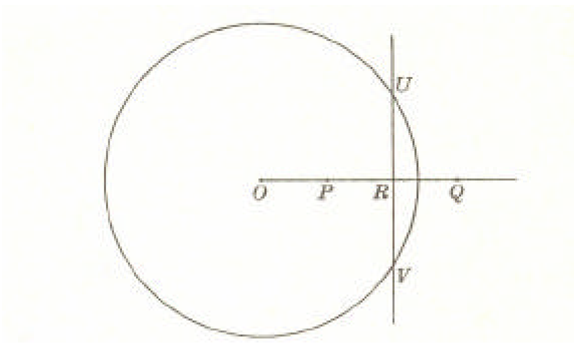

Fig. 1 El círculo vacío

Sea Q el punto de OP a la derecha de P tal que $OP.OQ = r^2$, tracemos la mediatriz del segmento PQ, que cortará al círculo en dos puntos U y V. Sea R el punto medio de PQ. Se tiene $OP = OR-RP$, $OQ = OR + RQ = OR + RP$ (pues $RQ = RP$). Pero entonces

$$OR^2 - RP^2 = (OR-RP)(OR+RP) = r^2 = OR^2 + UR^2 \qquad \text{(T. de Pitágoras),}$$

es decir,

$$0 = UR^2 + RP^2 = UP^2 \qquad \text{(Pitágoras de nuevo!)}$$

Por tanto, $UP = 0$, esto es, ¡$P=U$!

(La solución a la falacia es que R está <u>siempre</u> en el exterior del círculo, y los puntos U y V, por tanto, no existen.)

También resultan interesantes y útiles para clarificar conceptos en la enseñanza, las **falacias del cálculo**, derivadas de una manipulación inadecuada del cálculo diferencial o integral. He aquí algunas:

I.- La función $f(x)=\frac{1}{x}$ tiene derivada $f'(x)=-\frac{1}{x^2}<0$ en todo su dominio de definición. Por tanto, *f* es una función **decreciente** en ese dominio ($\mathbb{R}\setminus\{0\}$). Pero, claramente,¡ -1 < 1, y *f*(-1) = -1 < 1 = *f*(1)!

II.- Si integramos por partes $\int \frac{dx}{x}$ obtenemos:

$$I=\int \underbrace{\frac{1}{x}}_{u}\cdot \underbrace{1\cdot dx}_{dv}=\frac{1}{x}\cdot x-\int x\left(-\frac{1}{x^2}\right)dx=1+I\ .$$

Por tanto, ¡1 = 0!

III.- Si f es una función arbitraria y en la integral $I=\int_0^p f(q)\cos q\,dq$ hacemos el cambio $\operatorname{sen} q=t$, resulta $\cos q\,dq=dt$ y, como $\operatorname{sen}0=\operatorname{sen}p=0$, se tiene que I = $\int_0^0 f(\operatorname{arcsen} t)\,dt=0$. En particular, tomando $f(q)=\cos q$, obtenemos

$$0=I=\int_0^p \cos^2 q\,dq=\frac{1}{2}\int_0^p (1+\cos 2q)\,dq=\left[\frac{1}{2}q+\frac{1}{4}\operatorname{sen}2q\right]_0^p=\frac{p}{2}.$$

Casi todos tenemos experiencias de alumnos que han utilizado argumentos similares para resolver algún ejercicio, sin percatarse de las consecuencias de los mismos.

Los ejemplos anteriores son muy simples, y reposan esencialmente en una utilización formal de algún resultado teórico, olvidándose de las hipótesis de validez del mismo. Sin embargo, argumentos parecidos a los anteriores provocaron grandes controversias entre los matemáticos de los siglos XVI al XVIII y, como veremos más adelante, contribuyeron en gran medida a la clarificación de conceptos básicos en la Matemática, como son los de *función, límite, derivada* o *integral.* Y esta es una de las principales funciones de las paradojas en matemáticas: estimular el espíritu crítico y contribuir a clarificar y fundamentar sólidamente las nociones y técnicas utilizadas. Y, como consecuencia de ello, establecer nuevos estándares de *rigor.*

Otras paradojas se basan en la confusión que puede causarnos un análisis precipitado del movimiento. Como ejemplo tenemos la ***paradoja de los rodillos rodantes*** **([N]:** Si la circunferencia de cada uno de los rodillos de la figura siguiente (Figura 2) es de 30 cms., ¿cuánto habrá avanzado la plancha superior cuando los rodillos hayan dado una vuelta completa?

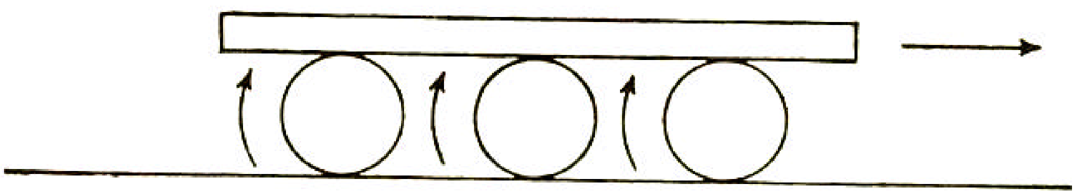

Fig. 2 La Losa y los Rodillos

Si pensamos que la distancia recorrida por la plancha ha de ser igual a la circunferencia de los rodillos, ¡nos equivocamos!: sería así si los rodillos no tocaran el suelo y estuvieran atravesados por unos ejes rígidos que pasaran por sus centros.; pero a este avance hay que añadirle el propio avance de los rodillos, es decir otra distancia igual. Por tanto el avance total es justamente **el doble de la circunferencia,** es decir, 60 cm.

Más intrigante es la siguiente ***Paradoja de la Rueda de Aristóteles*** o ***Paradoja de Galileo***[1] por haber sido tratada en profundidad en el libro *Discorsi e dimostraziioni matematiche intorno a due nuoue Science,* publicado en 1638: Se trata de dos círculos concéntricos, el mayor de los cuales ha dado una vuelta completa rodando, sin resbalar, a lo largo de una recta, desde A a B.

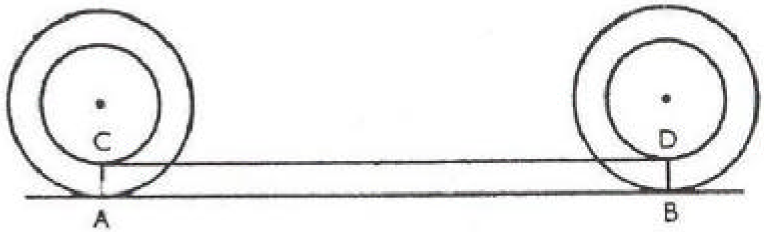

Fig. 3 Los dos discos que ruedan

Por tanto, la distancia recorrida por el círculo mayor, *AB* es igual a su circunferencia. Pero el disco pequeño ha dado también una vuelta completa, luego la distancia *CD* es también igual a la circunferencia del disco pequeño. Por tanto *¡las longitudes de las circunferencias de los dos discos son iguales!.*

Para desentrañar el misterio, fijémonos en la trayectoria *real* que recorre el punto A cuando la rueda gira hasta B. Esta curva es, como se sabe, una de las más famosas de la Geometría: la **cicloide:**

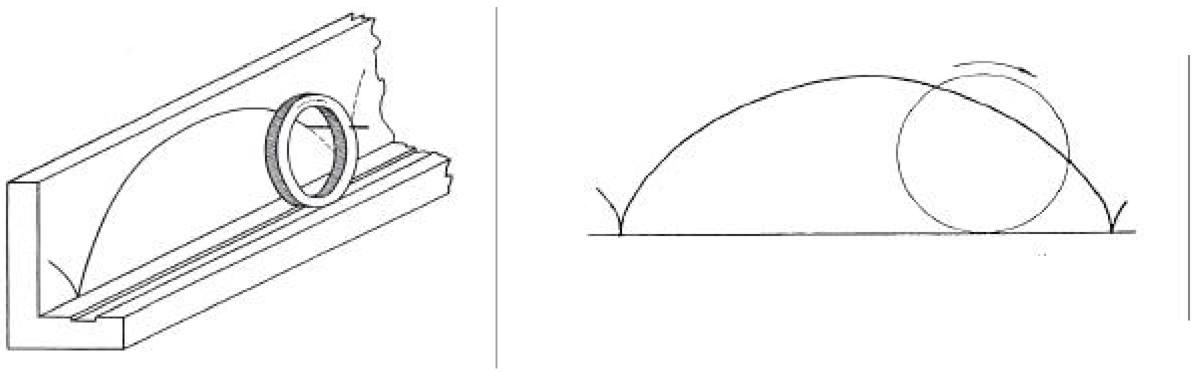

Fig. 4 La cicloide: su generación

La trayectoria descrita por un punto situado en el interior de un disco que gira, es lo que se llama una *cicloide acortada.*

[1] La paradoja aparece enunciada en la *Mecánica* de **Aristóteles** (véase, p. e., [A2; **24**; pág. 103-107]) y fascinó a muchos matemáticos a lo largo de la historia. **Galileo** utilizó un argumento de paso al límite, discutiendo primero el caso de dos polígonos regulares concéntricos y haciendo crecer indefinidamente el número de lados. Véase la discusión en [He3; págs. 246-252].

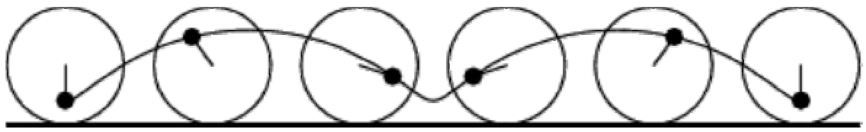

Fig. 5 Cicloide Acortada

La distancia recorrida por el punto de la circunferencia interior es claramente inferior a la recorrida por el punto de la circunferencia grande. Y también la velocidad a que se mueven ambos puntos es distinta.

Esto muestra también que el disco pequeño no recorrerá la distancia *CD* girando sin resbalar (como hace el disco grande), sino que será simultáneamente arrastrado por el disco grande. El efecto práctico (comprobable) es que si los discos estuvieran formados por ruedas dentadas firmemente unidas, con el mismo eje, y situadas sobre sendos raíles dentados paralelos, *¡no podrían moverse!*.

Los dos últimos ejemplos ponen ya de manifiesto otro de los efectos de las paradojas en Matemáticas: el intento de resolver la contradicción aparente nos lleva a un análisis más profundo del problema y a la consideración de nuevos elementos que, aunque implícitos, no se habían tomado en cuenta hasta el momento. El estudio de estos nuevos elementos genera así nuevos conocimientos que enriquecen nuestra ciencia. .

Pueden consultarse muchos otros ejemplos en [Bu], [KN], [KM], [Max] y [N].

Aunque no será objeto principal de nuestra atención, debemos mencionar también que han sido muchos los juegos, problemas o acertijos que han contribuido al desarrollo de las Matemáticas. Por citar algunos, recordemos el famoso *Problema de los conejos*:

> *¿Cuántas parejas de conejos se obtendrán al cabo de un año a partir de un solo par, si se supone que cada pareja es fértil a partir de su segundo mes y produce una nueva pareja cada mes?*

La solución a este problema llevó a **Fibonacci** (*Leonardo de Pisa,*) a descubrir la sucesión que lleva su nombre y que ha originado gran cantidad de matemáticas. Muchos matemáticos del Renacimiento, como **Cardano** o **Tartaglia,** fueron también inventores de juegos y pasatiempos. Y no podemos dejar de citar el famoso problema de *Los siete puentes de Königsberg* o el de *Los treinta y seis oficiales*, cuyo estudio detallado por parte de **L. Euler** sentó las bases de la Teoría de Grafos y la Topología (el primero) y de importantes trabajos en combinatoria (el segundo).

Tampoco nos ocuparemos de las paradojas y contradicciones aparecidas en el estudio de los juegos de azar, que contribuyeron decisivamente al desarrollo matemático de la teoría de probabilidades. Pueden encontrarse abundantes ejemplos en las obras citadas anteriormente.

El siguiente capítulo lo dedicaremos a exponer uno de los ejemplos más claros y evidentes de la influencia de las paradojas en el desarrollo de las Matemáticas.

2.- Las paradojas y el desarrollo de la Matemática en Grecia.

Nadie entre que no sepa Geometría
(Inscripción sobre la puerta de *La Academia* de Platón)

La mayor parte de las paradojas hacen referencia a la noción de *verdad* o *falsedad*, por lo que no es extraño que aparecieran desde el comienzo mismo de la Filosofía cuando esta surgió en Grecia, en el sentido moderno del término de *búsqueda de la verdad* para proporcionar una explicación *racional* del mundo que nos rodea.

Este cambio cualitativo en la relación del Hombre con la realidad en la que vive puede interpretarse también como consecuencia de una gran paradoja socio-cultural. En efecto, entre los siglos IX y VII antes de Cristo las más importantes *polis* griegas del continente organizaron una serie de grandes migraciones, que dieron lugar a la colonización griega de las costas del Mediterráneo y del Mar Negro. Como consecuencia, se fue desarrollando una cultura más abierta e independiente que, con la instauración de la democracia como sistema político en algunas ciudades-estado, propició la aparición de una clase de *ciudadanos* abiertos al debate y al análisis, con una profunda curiosidad por cuanto les rodeaba.

Muchas de estas colonias desarrollaron un importante comercio entre la Grecia continental y las grandes civilizaciones del medio Oriente, anquilosadas y cerradas en sí mismas tras más de 1.500 años de historia. Los viajeros y comerciantes griegos tuvieron así oportunidad de conocer y contrastar distintas explicaciones sobre el origen del mundo y su evolución que, *paradójicamente*, eran muchas veces contradictorias entre sí y con las propias creencias de los griegos. Probablemente, la primera reacción de estos viajeros sería pensar que estas contradicciones eran naturales, pues todos esos mitos egipcios, babilonios o hebreos eran, naturalmente, falsos, ya que contradecían las creencias griegas, que debían ser las únicas verdaderas. Pero a mediados del siglo VI a.C., tiene lugar una tremenda *crisis de fe* o pérdida de creencias en la civilización griega. Puestos a cuestionar los mitos ajenos, ¡no hay ninguna razón objetiva para concluir que los mitos griegos son los verdaderos, mientras que los demás son todos falsos!

Esta crisis intelectual, provocada por una pérdida de creencias tan sistemática, constituye el punto de partida de la filosofía griega. Surge así la idea de la necesidad de *demostrar* la veracidad de una determinada explicación acerca del mundo. La posibilidad de encontrar esas *verdades necesarias* se basa en una importante hipótesis de partida: la de que *el mundo real está controlado por leyes inteligibles a la mente humana.*

Esta idea, asumida tácitamente por los escépticos pensadores griegos de alrededor del siglo VI a. de C., es la causante de la gran revolución ideológica que condujo al nacimiento de la Filosofía y las Matemáticas primero, y a la Ciencia en el sentido anteriormente descrito después.

El término griego *mathema* significa “conocimiento adquirido” o “conocimiento que se puede aprender”, y originariamente era utilizado por los griegos para designar el estudio del conocimiento en general. La contracción al significado que ahora tiene se produjo lentamente. Al parecer, el cambio ya es completo en **Aristóteles** (384-322 a. de C.), pero aún no en **Platón** (427-348 a. de C.). En todo caso su etimología sugiere claramente que el estudio de las Matemáticas partió de la formulación de preguntas relativas al mundo y el deseo de buscar respuestas *verdaderas* a esas preguntas. Esta es probablemente la razón de la aproximación a las Matemáticas de hombres como **Tales** o **Pitágoras.**

Las primeros métodos de demostración de los griegos estaban basados en razonamientos visuales, especialmente adaptados a los primeros estudios sobre Geometría, la ciencia de *lo que se ve*, y a la aritmética pitagórica, esencialmente discreta, junto con el uso de un proceso lógico deductivo. No se trataba de un método especial para tratar los objetos matemáticos, sino del mismo método empírico utilizado para analizar la realidad física, pero que al aplicarlos sobre los objetos tan ontológicamente simples como los matemáticos, se obtenían resultados con un grado de certeza irrefutable. Esta convicción llevó a los primeros matemáticos griegos a considerar las Matemáticas como el estudio de la realidad última y eterna, inmanente en la naturaleza y el universo, que se manifestaba sólo de forma aproximada en el mundo real, más que como una rama de la lógica o una herramienta de la ciencia y la tecnología (recordemos la afirmación pitagórica de que *“todo es número”*, o la atribuida a Platón de que *Dios siempre hace Geometría.*)

A finales del siglo V a. de C., los pitagóricos habían formulado y desarrollado un considerable número de resultados sobre la geometría del triángulo y otras figuras rectilíneas del plano. Para ello establecieron una completa *teoría de proporciones* geométricas y, como subproducto, la herramienta básica para el estudio y comparación de áreas de figuras planas: el llamado *método de aplicación de áreas,* consistente en una serie de técnicas que permitían dado un triángulo o rectángulo arbitrario, construir otro rectángulo con su misma área, pero con base prefijada. De este modo, se establecen rigurosamente las relaciones usuales entre triángulos y (por subdivisión), figuras poligonales semejantes y su *cuadratura,* es decir, la construcción de un cuadrado del mismo “área”. Éste es para los griegos un concepto primitivo, definido a través de lo que hoy llamaríamos una “relación de equivalencia”. En efecto, dos figuras poligonales *tienen la misma área* si, por medio de las técnicas de “aplicación de áreas”, pueden ambas transformarse en el mismo rectángulo. Como todo rectángulo se puede transformar en otro de la misma área y base prescrita, las áreas de las figuras poligonales se pueden comparar, sumar. etc. (Por supuesto, lo mismo puede decirse de la *longitud* de líneas poligonales o del *volumen* de poliedros).

Los geómetras griegos no dan una definición rigurosa de *medida* de magnitudes geométricas como longitud, área o volumen, que aparecen como conceptos primitivos. Consideran siempre *razones* de magnitudes geométricas homogéneas y no magnitudes aisladas. En la base de la Geometría pitagórica estaba la convicción profunda de que dos magnitudes geométricas de la misma naturaleza (longitudes, áreas o volúmenes) eran siempre *conmensurables*, es decir, existía una unidad de medida común para ambas de forma que las dos magnitudes se podían expresar como múltiplos enteros de esa unidad. De este modo, dos magnitudes geométricas de la misma naturaleza estaban en la misma proporción entre sí que los correspondientes múltiplos de la unidad de una medida común a ambas. Por ello, el descubrimiento *paradójico***,** a mediados del siglo V a. de C., de la existencia de segmentos inconmensurables (como el lado y la diagonal de un cuadrado, o el lado y la diagonal del pentágono regular) supuso un verdadero terremoto para la matemática y la filosofía pitagórica. ¡Todas las demostraciones basadas en la teoría de proporciones pitagórica quedaban, en principio, invalidadas! En consecuencia, los griegos tuvieron que abandonar la idea Pitagórica de identificar las magnitudes geométricas continuas con una descripción numérica de las mismas. la geometría *no* es aritmética y los objetos matemáticos, no eran tan simples como se pensaba. De hecho, propiedades que parecían claramente verdaderas (como que dos segmentos siempre admitían una unidad de medida común), resultaban ser falsas. Esta crisis de fundamentos hizo cuestionar la seguridad del método seguido hasta entonces para demostrar las propiedades de los objetos matemáticos.

Y así, en algún momento de la segunda mitad del siglo V a. C, un grupo de matemáticos griegos establecieron un nuevo método matemático: el *método axiomático-deductivo*, que es esencialmente el mismo que usamos hoy. Se trata de, partiendo de unas pocas verdades *evidentes* (o **axiomas**), y a través de una serie de etapas sucesivas muy simples, obtener una cadena de afirmaciones, con la propiedad de que una cualquiera de ellas es verdadera con toda seguridad (en el dominio de objetos que estamos estudiando) siempre que lo sean todas las anteriores. A las leyes que rigen las formas correctas de pasar de una afirmación a otra de la cadena, se les llamó más tarde *leyes lógicas* o *deductivas*, y tienen un carácter formal, independiente del carácter de verdadero o falso de la afirmación a la que se aplica. A estas cadenas de afirmaciones lógicamente correctas, los griegos las llamaron **demostraciones**.

La insistencia en el método deductivo es a la vez el gran logro y la causa de la mayor parte de las limitaciones de la matemática griega. Por un lado, la elección de los axiomas es básica para la solidez del edificio construido. Así, Aristóteles señala la importancia de que los conceptos introducidos no sean auto-contradictorios, y la manera más clara de comprobar esto es la posibilidad de *construir* tales objetos. Y entre los objetos geométricos más simples, visualmente construíbles y no contradictorios, están la línea recta y la circunferencia. No es extraño, pues, la insistencia de los matemáticos griegos en buscar métodos de demostración *basados exclusivamente en el uso de la regla y el compás* (es decir, obtenidos a partir de rectas y circunferencias). De esta manera, los resultados obtenidos tendrían el carácter de *verdad necesaria*, al poseer unos cimientos suficientemente sólidos y rigurosos.

De este modo, la matemática griega *rigurosa* se vio confinada a la geometría plana (o, a lo sumo, tridimensional) y especialmente a los objetos construíbles con regla y compás.

Por otro lado, la solución para poder recuperar la teoría pitagórica del método de aplicación de áreas, vino por una redefinición apropiada de la proporcionalidad entre dos magnitudes geométricas cualesquiera (conmensurables o no) y fue establecida por **Eudoxo de Cnidos** (408-355 a. de C.), un estudiante de la Academia de Platón en Atenas, y aparece desarrollada en el Libro V de *Los Elementos* de **Euclides**. La definición de Eudoxo (*cfr.*, por ejemplo [Ed, pág. 13] tiene asombrosas semejanzas con el método de las *cortaduras* de **Dedekind** para definir rigurosamente los números reales ¡2.200 años después! Sin embargo, la idea misma de generalizar la noción de número más allá de los números enteros, el dominio de lo discreto, es absolutamente extraña a la matemática griega. Las magnitudes geométricas son esencialmente *continuas*, y no tienen para los griegos un carácter numérico. No obstante, se pueden comparar entre sí y formar *razones*.

Al cataclismo producido por el descubrimiento de los inconmensurables vino a añadirse otro que, junto al citado, iban a marcar el desarrollo de toda la matemática griega posterior. Me refiero a las famosas **paradojas de Zenón** contra la pluralidad y el movimiento. **Zenón,** nacido en la colonia griega de Elea, en el sur de Italia, alrededor del 500 a. de C., es el más brillante discípulo del gran **Parménides** (539?- ¿ a. de C.), considerado el primero de los filósofos racionalistas. En Parménides se encuentra explícitamente la distinción neta entre conocimiento racional y experiencia sensible. Todos los filósofos precedentes habían buscado un principio eterno y universal, causa del cambio y la multiplicidad de las cosas. Si existe tal principio –dice Parménides- debe ser distinto de las cosas y poseer caracteres distintos. Por tanto, Parménides llega a la conclusión de que la realidad constituye una unidad inmutable, eterna y única. El movimiento, el cambio, la multiplicidad que se muestra en nuestra experiencia sensible, son simples ilusiones y apariencias. Ridiculizado en su tiempo por sus creencias, al parecer su joven y brillante discípulo Zenón trató de defender la Filosofía eleática de la acusación de inconsistencia lógica elaborando una serie de argumentos (**paradojas**) para demostrar que la existencia de una pluralidad de cosas o el movimiento conducían a contradicciones lógicas. Desgraciadamente, los escritos de Zenón se han perdido y su contenido nos han llegado sólo a través de citas y comentarios de autores posteriores, especialmente **Aristóteles** (en su *Física* [A1]) y **Simplicio**, que se refieren a ellos con el objeto de refutarlos.

Entre los 40 argumentos atribuidos a Zenón por los autores posteriores, los cuatro más famosos están dirigidos a probar la imposibilidad del movimiento. Recordémoslos brevemente:

I. Paradoja de la dicotomía. Un móvil no puede recorrer una distancia finita, pues para ello primero deberá alcanzar *antes* la mitad de esa distancia. Pero *antes* aún, debe alcanzar la mitad de esa mitad, y así sucesivamente. Como no se pueden recorrer infinitas magnitudes, el movimiento es imposible.

II.- Paradoja de Aquiles y la Tortuga. Probablemente es la más conocida: Se trata de una carrera entre Aquiles (el más veloz de los héroes clásicos) y la tortuga (uno de los animales más lentos). Aquiles da una cierta ventaja a la tortuga, pero entonces ¡resulta que nunca la puede alcanzar! En efecto, cuando Aquiles llegue, al cabo del tiempo t_0, a la posición inicial T_0 que ocupaba la tortuga, ésta se encontrará en una posición posterior T_1; cuando Aquiles alcance la posición T_1 habrá transcurrido un tiempo t_1 y la tortuga se encontrará en otra posición posterior $T_{2,}$, etc. sin que Aquiles llegue jamás a alcanzar a la tortuga.

III.- Paradoja de la flecha. La flecha disparada por un arquero en cada instante de su vuelo ocupa una posición bien determinada, y en ese instante está inmóvil (pues –aduce Zenón- todo objeto que ocupa un espacio igual a sí mismo, está en reposo). Pero si en cada instante la flecha está inmóvil, debe permanecer *siempre* en reposo.

IV.- Paradoja del Estadio. El cuarto argumento de Zenón contra el movimiento pone en juego una complicada serie de elementos, y su descripción (tanto la de Aristóteles como la de Simplicio) es larga y farragosa (véase [Lee] o [PR]). Pero esencialmente el argumento es el siguiente: En un estadio cuyos extremos son D y E se encuentran tres grupos de 4 atletas cada uno, $\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$, $\{B_1, B_2, B_3, B_4\}$ y $\{C_1, C_2, C_3, C_4\}$. Los 4 cuerpos del primer grupo se encuentran en el centro del estadio; los del segundo grupo se encuentran en la mitad izquierda del estadio, de modo que los dos primeros, B_1 y B2, están situados a la altura de A_1 y A_2. Los del tercer grupo están situados de forma análoga a los del segundo, pero en la mitad derecha del estadio:

$$B_4 \ B_3 \ B_2 \ B_1 \quad \rightarrow$$

D $\quad A_1\ A_2\ A_3\ A_4 \quad$ E

$\leftarrow \quad C_1\ C_2\ C_3\ C_4$

En un momento dado, los atletas de los grupos B y C se ponen en movimiento con la misma velocidad y sentidos opuestos, mientras que los del grupo A permanecen inmóviles. Al cabo de un cierto lapso de tiempo, se alcanzará la siguiente situación:

$B_4\ B_3\ B_2\ B_1$

D $\quad A_1\ A_2\ A_3\ A_4 \quad$ E

$C_1\ C_2\ C_3\ C_4$

En este momento, B_1 ha sobrepasado 2 cuerpos del grupo central (A_3 y A_4). Pero *en ese mismo lapso de tiempo*, B_1 ha sobrepasado 4 cuerpos del grupo C (puesto que está a la altura de C_4). De este modo se llega a la paradoja de que el espacio es el doble de sí mismo o el tiempo es el doble de sí mismo.

Como hemos dicho, los argumentos de Zenón nos han llegado por vías indirectas. Usualmente se suelen interpretar los dos primeros como críticas de la idea de movimiento admitiendo que el tiempo y el espacio son infinitamente divisibles. Ambos son similares, aunque el primero está expresado en términos de movimiento absoluto y el segundo se refiere a un movimiento relativo. Los dos últimos argumentos se interpretan como complementarios de los anteriores, en el sentido de que mostraría la inconsistencia lógica del movimiento también en un universo en el que el tiempo estuviera formado por instantes discretos (paradoja de la Flecha) o en el que tiempo y espacio a la vez fueran discretos (paradoja del Estadio). En todo caso, el ingrediente básico de todos ellos es la aparición de procesos infinitos en los experimentos mentales propuestos. Y éste es el punto fundamental. Por supuesto que Zenón sabía que él mismo podía moverse, o que Aquiles terminaría por alcanzar a la tortuga. El problema no era *dónde* o *cuándo* Aquiles alcanzaría a la tortuga, sino *cómo* podía llegar a hacerlo, ante la imposibilidad de realizar una *infinidad* de actos.

Las refutaciones de **Aristóteles** a las paradojas de Zenón en su *Física* son significativas: Rechaza los dos primeros argumentos afirmando que Zenón olvida que *se puede recorrer un número infinito de magnitudes* (las que separan a Aquiles de la tortuga, o las sucesivas mitades que debe recorrer el móvil) *o estar en contacto con cada una de ellas, en un tiempo limitado* ([A1, VI, 233])[2]. Este argumento *lógico* de Aristóteles se suele identificar en los primeros cursos de cálculo con una solución *analítica* de la paradoja: Aquiles alcanzará a la tortuga en un tiempo igual a la suma de los tiempos (cada vez menores) necesarios para recorrer dos posiciones consecutivas de la tortuga. Igualmente el móvil recorrerá la distancia requerida en el tiempo igual a la suma (*infinita*) de los tiempos necesarios para recorrer cada mitad sucesiva de la distancia a recorrer. En ambos casos el ingrediente fundamental estriba en el hecho de que la suma de una serie cuyos términos son cada vez más pequeños puede ser finita (por supuesto, las nociones de límite o convergencia de una serie son completamente ajenos al pensamiento aristotélico.) Sin embargo, lo paradójico para Zenón es la identificación de un proceso *infinito* (las sucesivas posiciones a recorrer) con uno finito (recorrer un espacio determinado en un tiempo finito). Zenón pensaba (y también Aristóteles, como veremos) que ningún proceso infinito puede considerarse como completo.

---

[2] Véase la discusión de los argumentos de Aristóteles en [He3; págs. 130 y siguientes].

La paradoja de la Flecha resulta de considerar que el tiempo está formado por una serie sucesiva de instantes, de modo que el vuelo de la flecha puede descomponerse de una sucesión de imágenes *congeladas,* (como en una película de cine). En cada instante, la flecha ocupa una posición fija, y en ella está inmóvil. ¿Cómo puede estar formado el vuelo de la flecha por una sucesión de *ahoras* en las que permanece inmóvil?. La paradoja la resuelve Aristóteles simplemente negando el origen de la misma, es decir, la naturaleza atómica del tiempo ([A1, VI, 239b]). Bajo este supuesto, la solución más habitual de la paradoja de la flecha se basa en la noción de función y límite de una función de variable real: la posición de la flecha en cada instante t viene dada por una función $f(t)$, que aunque para cada valor fijo de t toma un valor determinado (una constante), ella misma no es constante. El límite del cociente de la variación de la posición respecto al tiempo transcurrido en esa variación es la *velocidad instantánea*, que claramente puede no ser cero. Por supuesto, la pregunta de cómo pasa un objeto de un punto a otro, no se plantea.

Finalmente, refuta la paradoja del Estadio con el argumento de que *"el falso razonamiento consiste en que se supone que un cuerpo de igual tamaño es capaz de pasar a la misma velocidad y en el mismo tiempo tanto frente a un cuerpo en movimiento como frente a un cuerpo en reposo."* (traducción de *Física, VI, 9, 239b* , tomada de [PR, p. 55]), esto es, por la relatividad del movimiento, que hace que los resultados sean distintos para un observador en reposo que para otro en movimiento. No obstante, parece demasiado pueril pensar que Zenón cometiera este error elemental. Casi todos los investigadores modernos apuntan a que, como en la el argumento de la Flecha, Zenón quiere mostrar la contradicción que supone la existencia del movimiento en el supuesto de que el tiempo está compuesto de instantes individuales (como en la Flecha), y *también* el espacio se supone formado por átomos individuales, de modo que, partiendo de la posición inicial, en el *siguiente instante* (átomo) de tiempo, los cuerpos B y C recorrieran un átomo espacial (los B hacia la derecha y los C hacia la izquierda), sin posibilidad de posiciones intermedias. El argumento de Zenón contradeciría entonces o bien la minimalidad del átomo espacial, o bien la minimalidad del átomo temporal.

De este modo, los cuatro argumentos forman una unidad que mostraría la imposibilidad lógica del movimiento bajo cualquier hipótesis sobre la naturaleza del espacio y el tiempo. El lector interesado puede consultar en [Lee] el texto original griego, junto con abundantes comentarios sobre las distintas traducciones e interpretaciones de estos argumentos. .

Las paradojas de Zenón han sido objeto de exhaustivos análisis desde el punto de vista científico y hay un amplio consenso de que los aspectos *formales* de las mismas pueden ser resueltos (cfr., por ejemplo [Gr]). La siguiente cita recogería la opinión general al respecto, desde el punto de vista matemático:

> *"The four paradoxes are, of course, easily answered in terms of the concepts of the differential calculus. There is no logical difficulty in the* dichotomy *or* The Achilles*… in terms of infinite convergent series… The paradox of the flying arrow involves directly the conception of the derivative and is answered immediately in terms of this…"* [B1, p. 24-25]

Las implicaciones de las paradojas de Zenón sobre la naturaleza del tiempo y el espacio son fascinantes y en último término ponen en cuestión la idea de un tiempo y un espacio absolutos e independientes, así como la noción de *simultaneidad*. Algunos autores han querido ver en ellas, especialmente en la del *Estadio,* un antecedente claro de la Teoría especial de la Relatividad. Es bien sabido que, según esta teoría, dos objetos en movimiento relativo tienen diferentes planos de simultaneidad (con todas las consecuencias relativistas usuales). Por supuesto, un argumento de este tipo probablemente jamás se le ocurriría a Zenón[3], pero sí sirve para reivindicar su intuición física sobre la naturaleza del movimiento y las inconsistencias lógicas que surgen al considerar un tiempo y un espacio absolutos e independientes entre sí.

Las paradojas de Zenón siguen causando polémica. **Bertrand Russell**, en un ensayo escrito en la década de 1920, las calificó de *"inmensamente sutiles y profundas"* y todavía hay filósofos que piensan que no han quedado resueltas satisfactoriamente. En [Sa] pueden consultarse una serie de textos sobre el tema [4].

También al escritor argentino **Jorge Luis Borges**, probablemente el escritor de ficción que más y mejor ha tratado el problema del infinito, se sintió fascinado por los argumentos de Zenón. Su ensayo *La perpetua carrera de Aquiles y la tortuga* ([Bg1]) es paradigmático al respecto.

En todo caso es cierto que la introducción de procesos infinitos puede llevar a contradicciones lógicas nada deseables. Por ello los matemáticos griegos desarrollaron un verdadero "horror al infinito" que les llevó a huir sistemáticamente del uso de los procesos y algoritmos infinitos. Esto se pone claramente de manifiesto tanto en el mismo método axiomático-deductivo (donde la demostración debe terminar tras un número *finito* de etapas) como en el otro gran logro de la Geometría griega: el **Método de Exhausción**, que permitió extender los métodos de aplicación de áreas más allá de las figuras poligonales. En efecto, los griegos asumieron también como evidente que todas las figuras geométricas simples (círculos, elipses, etc., y las obtenidos por uniones e intersecciones de ellas) tenían un "**área**", que era una magnitud geométrica del mismo tipo que el área de las figuras poligonales, gozando en particular de las propiedades naturales de monotonía y aditividad. Para determinar el área de una región $\boldsymbol{R}$ de este tipo, se trataba de obtener una sucesión $\boldsymbol{P_1, P_2, P_3, \ldots}$ de polígonos que "llenaran" $\boldsymbol{R}$. El llamado *Método de Exhausción*, atribuido a **Eudoxo**, fue desarrollado como alternativa rigurosa a la idea intuitiva de tomar como área de $\boldsymbol{R}$ el límite de las áreas de los $\boldsymbol{P_n}$. La Definición 4 del Libro V de ***los Elementos*** establece que *" dos magnitudes forman razón, cuando cada una admite un múltiplo que es mayor que la otra",* (es decir, dos magnitudes a, b forman razón, $a:b$, si existe un entero positivo n tal que $na>b$). La trascendencia de este hecho fue reconocida por **Arquímedes,** que enunció explícitamente como *axioma de Eudoxo* la siguiente consecuencia:

Proposición X.1 de ***Los Elementos****: Dadas dos magnitudes desiguales, si de la mayor se substrae una magnitud mayor que su mitad, y del resto una magnitud mayor que su mitad, y así sucesivamente, quedará una magnitud que será menor que la menor de las magnitudes dadas.*

Utilizando este axioma, se puede demostrar rigurosamente la idea intuitiva de que un conjunto dado $\boldsymbol{A}$ (p. ej., un círculo, una pirámide, una esfera, un cono de base circu-

---

[3] Si se acepta la Teoría de la Relatividad, puede resultar que Aquiles no alcance a la tortuga. Si, por ejemplo, comienzan separados por un año-luz y suponemos que Aquiles puede acelerar a 10 m/s^2, al cabo de unos 337 días alcanzará el 97% de la velocidad de la luz (y no habrá alcanzado todavía a la tortuga). La contracción relativista del tiempo hará que la tortuga vea para entonces a Aquiles prácticamente parado. Véanse los detalles en [Bu; Cap. 8], donde se comentan también el resto de las paradojas de Zenón que hemos mencionado.

[4] Recomendamos también al lector una visita a la página web de **S. Marc Cohen** (http://faculty.was-hington.edu/smcohen/320/index.html)

lar, etc.) se puede *aproximar* todo lo que se quiera por figuras inscritas más sencillas (en los casos mencionados anteriormente serían polígonos regulares, uniones finitas de prismas, poliedros formados por unión finita de pirámides de vértice el centro de la esfera, pirámides con el mismo vértice que el cono, etc.). Este es el paso previo para demostrar la mayor parte de los teoremas que aparecen en *los Elementos* que establecen una relación entre las magnitudes de dos conjuntos ***A*** y ***B*** de la forma $m(\boldsymbol{A}) = km(\boldsymbol{B})$. En efecto, el argumento consiste en construir dos sucesiones de figuras más sencillas, de magnitudes computables (por ejemplo, líneas poligonales en caso de longitudes, polígonos en caso de áreas, prismas en caso de volúmenes, etc.), $(\mathbf{P_n})$ contenidas en ***A*** y $(\mathbf{Q_n})$ conteniendo a ***B***, tales que $m(\mathbf{Q_n}) = km(\mathbf{P_n})$ para todo n. Por aplicación del principio de Eudoxo se consigue demostrar que, dado ε>0,

$$m(A) - m(P_n) < e \quad \text{y} \quad m(B) - m(Q_n) < e$$

para n suficientemente grande. En términos modernos, la prueba estaría completa, ya que

$$m(B) = \lim_{n\to\infty} m(Q_n) = k\lim_{n\to\infty} m(P_n) = km(A)$$

Sin embargo, como hemos dicho, el concepto de límite era extraño a los griegos, por lo que utilizaban en su lugar una doble reducción al absurdo: Si $m(\boldsymbol{B}) > km(\boldsymbol{A})$, escribamos $\varepsilon = m(\mathbf{B})-km(\mathbf{A})$. Elijamos sendas figuras **P,** contenida en ***A***, y **Q** en ***B*** tales que $m(\mathbf{Q}) = km(\mathbf{P})$ y $m(Q) > m(\boldsymbol{B})-\varepsilon = km(\boldsymbol{A})$. Pero esto es una contradicción, ya que $\mathbf{P} \subset \boldsymbol{A}$ y, portanto, $m(\mathbf{P}) \leq m(\boldsymbol{A})$. Intercambiando los papeles de ***A*** y ***B*** se muestra que el supuesto $km(\boldsymbol{A}) > m(\boldsymbol{B})$ conduce también a contradicción, luego debemos concluir que $m(\boldsymbol{B}) = km(\boldsymbol{A})$.

El Método de Exhausción fue extendido y mejorado por Arquímedes al llamado *Método de Compresión*. La idea general es la siguiente: Para probar que dos magnitudes geométricas ***X*** y ***K*** son iguales, se construyen dos sucesiones de figuras, una monótona creciente $(\mathbf{L_n})$ y la otra monótona decreciente, $(\mathbf{U_n})$, que ,respectivamente, estén contenidas y contengan a ***X*** (lo que implica que $m(\mathbf{L_n}) < \boldsymbol{X} < m(\mathbf{U_n})$ para todo n) y tales que cumplan:

1. $m(\mathbf{L_n}) < \boldsymbol{K} < m(\mathbf{U_n})$, para todo n.
2. Se verifica una de las dos condiciones siguientes:

   a) Para toda magnitud $\varepsilon > 0$ existe un N tal que $m(U_N)-m(\mathbf{L_N}) < \varepsilon$.

   b) Para toda magnitud $\alpha > 1$ existe un N tal que $m(\mathbf{U_N})/m(\mathbf{L_N}) < \alpha$.

Como en el método de exhausción directo, una doble reducción al absurdo prueba que $\boldsymbol{X = K}$.

Arquímedes utilizó magistralmente estos métodos, obteniendo resultados espectaculares, como por ejemplo (véase [He1]):

1. El área de un círculo es igual a la de un triángulo de base la longitud de la circunferencia y altura el radio.
2. La superficie de una esfera es igual a la de cuatro círculos máximos.
3. El volumen de una esfera es igual al de un cono de base un círculo de área igual a la superficie de la esfera, y de altura el radio de la esfera.
4. Cuadratura de la elipse.

5. Volúmenes de sólidos de revolución.
6. Cuadratura de segmentos de la parábola y la espiral logarítmica.

Notemos que el método de comprensión sólo puede aplicarse si se conoce de antemano el candidato ***K***, lo que significa que debe ser complementado con algún otro método que sugiera cuál debe ser el resultado. Pero, ¿cuál es ese método? La sorprendente respuesta no se supo hasta 1906, cuando fue descubierta en Constantinopla, virtualmente por accidente, una obra de Arquímedes titulada *El Método* (incluida en la edición de Dover de [He1]), que se consideraba perdida y de la que sólo se conocían algunas referencias. En esta obra, Arquímedes cuenta con detalle los métodos de razonamiento por él empleados para descubrir algunos de sus más importantes resultados, antes de obtener una demostración rigurosa de los mismos (por el método de exhausción o compresión). Esencialmente el método empleado por Arquímedes es el que los matemáticos europeos del Renacimiento designarían como el de los *indivisibles* combinado con una ingeniosa utilización de la ley de la palanca, manejado con una seguridad y atrevimiento que deja en mantillas los razonamientos de Cavalieri o Kepler (véase la sección 3.2.1). Arquímedes considera, por ejemplo, las figuras planas como formadas por láminas de densidad unidad, constituidas por un número indefinidamente grande (pero *finito)* de elementos (por ejemplo, bandas paralelas de anchura muy pequeña o *infinitesimal*, en el lenguaje de casi 2.000 años más tarde). Para comparar las áreas de dos figuras (una de ellas de área conocida), establece una correspondencia entre los elementos infinitesimales de cada una, de modo que los elementos correspondientes se "*equilibren"* en una balanza imaginaria. Utilizando las leyes de la palanca que él mismo había estudiado y aplicado en su obra *Sobre el equilibrio de planos* ([He1]), se puede establecer entonces una relación entre el área de la figura conocida, **T** y la de la figura desconocida, **X**. Del mismo modo se pueden comparar los volúmenes de dos cuerpos en el espacio, considerándolos como sólidos de densidad unidad y descomponiéndolos en un número indefinidamente grande de *elementos de volumen* infinitesimales. *El Método* contiene numerosos ejemplos de este "método mecánico", como lo llama Arquímedes, para descubrir nuevos resultados. Entre ellos, uno de sus favoritos: la fórmula para el volumen de la esfera (Proposición 2), de la cual conjeturó la de la superficie de la misma, al considerar la esfera como un cono circular de altura el radio y de base un círculo de área el de la superficie esférica. Ambas fórmulas aparecen rigurosamente demostradas por el método de compresión en *Sobre la Esfera y el Cilindro* ([He1]), en lo que constituye un verdadero ejercicio de virtuosismo y orfebrería matemática.[5]

Arquímedes señala claramente que el argumento no es riguroso, pues una región plana no está formada por una colección *finita* de segmentos, ni un volumen por un número finito de secciones planas, mientras que la ley de la palanca se aplica siempre a una colección *finita* de masas. Sin embargo,

"... el argumento proporciona una clara indicación de cuál es la conclusión correcta." (El Método [He1]).

Tras la edad de oro de los siglos IV y III antes de Cristo, el desarrollo teórico de la matemática griega comenzó a declinar rápidamente. Arquímedes significó la cúspide del pensamiento matemático de la antigüedad y tuvieron que transcurrir más de 18 siglos para que la Matemática llegara a su altura.

[5] En [Ed, pág. 68 y sigs.] puede verse varios de los ejemplos de Arquímedes, en lenguaje actual.

Existen tanto razones externas (cambio en la situación política y social de Grecia, concentración de profesionales en unos pocos centros, guerras, fin de la influencia helenística, dominación romana, etc.), como internas para explicar el declive de la matemática griega: Y entre estas últimas, el descubrimiento *paradójico* de la existencia de magnitudes inconmensurables y las *paradojas* a que da lugar la introducción de procesos infinitos, jugaron un papel determinante. Por un lado, originaron la rígida separación entre geometría y aritmética (o álgebra), lo que hizo que los griegos trabajaran esencialmente con magnitudes geométricas (longitudes, áreas, volúmenes), y el manejo de los valores numéricos fuera exclusivamente retórico, en lugar de simbólico. En consecuencia, los complejos y difíciles rodeos retóricos para realizar cálculos simples impedían detectar las analogías entre las soluciones de problemas similares y, por tanto, el reconocimiento y codificación de algoritmos generales de cálculo. Es decir, el excesivo énfasis geométrico impidió el desarrollo de una tradición algorítmica.

Por otra parte, si bien las paradojas influyeron decisivamente en el desarrollo del método axiomático-deductivo, como contrapartida la exigencia griega en el rigor lógico absoluto les hizo rechazar todos los conceptos que no pudieran formular completa y precisamente, y excluir cualquier traza del infinito en sus matemáticas, (incluyendo el concepto de límite, que se sustituye por una doble reducción al absurdo), lo que supuso una fuerte limitación al crecimiento y desarrollo posterior de las mismas.

No obstante, hay que decir que durante más de 2000 años, la Geometría de los antiguos griegos, con Euclides y, sobre todo, Arquímedes como principales ejemplos, fue considerada como el modelo de rigor y exactitud en Matemáticas.

3.- Un paseo por la historia del infinito.

> Hay un concepto que es el corruptor y el desatinador de los otros. No hablo del Mal, cuyo limitado imperio es la ética; hablo del **Infinito.**
>
> (Avatares de la tortuga. *J. L. Borges*)

3.1.- El infinito físico

Hay muchos aspectos de la realidad que parecen apuntar hacia la existencia real de infinitos: por ejemplo, el tiempo parece prolongarse hacia atrás y adelante indefinidamente; la percepción del espacio que nos rodea parece indicarnos que éste es ilimitado; cualquier intervalo, espacial o temporal, parece poder dividirse indefinidamente…

Aristóteles se percató de estos hechos, pero su profunda convicción en la inteligibilidad del mundo real le llevó a *rechazar* la existencia del infinito en el mundo sensible y establecer su distinción entre el infinito *actual* o real y el infinito *potencial*, en el sentido de magnitudes o procesos que se pueden prolongar *tanto como se desee.* Sólo acepta Aristóteles este último tipo de infinito, ya que si algo está más allá de la comprensión es que no pertenece al mundo real. En sus propias palabras: *"…ser infinito es una privación, no una perfección…"* (*Física*, III.7.208a).

De hecho, Aristóteles lo que hace es explicitar una idea ampliamente aceptada por los griegos. La misma palabra utilizada para designar el infinito, *apeiron*, podía significar también *ilimitado, indefinido, totalmente desordenado,* etc., y tenía un sentido peyorativo.

Pero entonces, ¿cómo explicar nuestra percepción de que el tiempo y el espacio se nos presentan en muchos aspectos como infinitos?

Respecto al tiempo, Aristóteles sostenía la teoría, muy extendida en la antigüedad, de los *ciclos cósmicos* o tiempo circular: Al cabo de un gran número de años (el *Gran Año* cósmico), el Sol, la Luna y los cinco planetas conocidos recobrarían una cierta posición original, y a partir de entonces volverían a repetirse los mismos acontecimientos. Por tanto, no habría una infinidad de acontecimientos ya que en cada recorrido del ciclo completo o gran año, volverían a repetirse los mismos. De hecho, ni siquiera hace falta hablar de una infinidad de ciclos: el *mismo* ciclo puede repetirse una y otra vez. La teoría del los ciclos cósmicos reaparece con frecuencia a lo largo de la historia.

La aceptación por parte de la Iglesia Católica de que el Universo fue creado por la divinidad en un momento dado, implica el abandono de la teoría del tiempo circular y la introducción de un tiempo lineal. Pero si hubo una Creación en un momento específico del tiempo, ¿qué había antes?, ¿qué hacía Dios antes de crear el Cielo y la Tierra? Se dice que **San Agustín** (354-430) dio la siguiente respuesta: *"Preparar el Infierno para quienes hacen semejantes preguntas"*. Pero, realmente, la solución dada por San Agustín al problema fue, como era de esperar de un hombre excepcional, tremendamente original: antes de la Creación, simplemente el tiempo *no existía*. El tiempo y el Cosmos aparecieron conjuntamente. La eternidad de Dios *no* es un tipo de tiempo; al contrario, Dios subsiste eternamente *fuera* del tiempo. Por tanto, no tiene sentido preguntar lo que hacía Dios antes de la Creación. Hay que hacer notar la semejanza de este argumento con las teorías cosmológicas recientes del *Big Bang*, confirmadas teóricamente por el teorema de Hawking-Penrose de 1970 sobre la existencia de una singularidad al comienzo del Universo, si la Teoría de la Relatividad general es correcta (*cfr.* [Ha])

En cuanto al espacio, los astrónomos griegos (y Aristóteles con ellos) sostenían que el Universo estaba formado por una serie de esferas en movimiento, con centro en la Tierra, que contenían los distintos objetos que se observaban en el Cielo: la Luna, el Sol, los cinco Planetas y las Estrellas Fijas. Por tanto, nuestro universo es acotado y finito. Respecto a la pregunta obvia de qué hay más allá de la última esfera, Aristóteles mantiene que *"lo que está limitado, no lo está en referencia a algo que lo rodee"* (Física, III.8.208a). El primer argumento clásico contra la finitud del espacio aparece explícitamente en *De Rerum Natura*, del poeta **Lucrecio** (94-50 a. de C.), y es el siguiente: si el espacio fuera limitado, supongamos que alguien llega hasta el mismo borde y lanza un dardo; entonces, o bien el dardo atraviesa el borde (en cuyo caso no es realmente el borde del espacio) o se para, en cuyo caso se trata efectivamente de una frontera y hay algo *más allá* del borde. Este argumento es similar al atribuido al pitagórico **Arquitas de Tarento** (430-360 a. de C.) para probar que el Cosmos visible (limitado) existía en un vacío infinito: si alguien se encuentra al borde del universo y extiende un brazo hacia el exterior, lo tenderá al vacío; si ahora se coloca un poco más afuera y lo vuelve a tender, y repite el proceso indefinidamente, resultará que el exterior del universo sería infinito (incidentalmente, para Aristóteles este argumento sólo probaría que *caso de existir* el vacío sería potencialmente infinito.) El punto débil de la teoría de Aristóteles es pues que si el Cosmos es una esfera finita, tiene un borde, y el argumento de Lucrecio se puede aplicar. Ahora sabemos que se pueden concebir modelos cosmológicos finitos y sin borde, como puede ser la superficie de una hiperesfera, lo que haría más defendible la idea de Aristóteles.

Durante la Edad Media, el modelo cosmológico griego (esencialmente formalizado por Ptolomeo) fue asumido sin discusión, salvo ligeras modificaciones para adaptarlo a las nuevas observaciones realizadas. La revolución astronómica llevada a cabo por **N. Copérnico** y **J. Kepler** en los siglos XVI y XVII, acabó con este modelo y planteó de nuevo la posibilidad de un espacio infinito. Tras el precedente de Lucrecio, un inglés, **Thomas Digges,** publicó en 1576 una obra de divulgación sobre la teoría de Copérnico y describió un Universo donde las estrellas eran otros soles, esparcidos por un espacio infinito. **Giordano Bruno** defendió apasionadamente la idea de un Universo infinito, tanto en el espacio como en el tiempo; en él existirían infinitos mundos, muchos de ellos habitados por otros seres humanos (*Del infinito Universo y Mundos,* 1584). Sus teorías planteaban tremendos problemas teológicos y contradicciones con muchas afirmaciones contenidas en la Biblia: la Creación había tenido lugar en un momento determinado del tiempo y el mundo no había existido eternamente, como afirmaba Bruno. Sólo hubo una Caída y una Redención. ¿Cómo podían participar de estos hechos los habitantes de los otros mundos? ¿Había sido Cristo crucificado en todos los mundos, o existían seres humanos sin pecado original? En 1591, Bruno fue detenido por la Inquisición y, tras nueve años de interrogatorios y torturas, fue quemado en la Plaza romana de Campo di Fiori en 1600.

La rápida difusión y amplia popularidad de las teorías de Copérnico y Kepler, a pesar de la oposición de la Iglesia, se debió en gran parte al trabajo del iniciador de la Revolución Científica que iba a cambiar sustancialmente las ideas sobre la Naturaleza y el Universo: **Galileo Galilei** (1564-1642). Su descubrimiento del telescopio en 1609 y sus observaciones y teorías sobre la Naturaleza se difundieron rápidamente por toda Europa. A ello contribuyeron sin duda sus libros, dirigidos a un público muy amplio y que tuvieron un enorme éxito. Por ejemplo, su famoso *Diálogo sobre los dos máximos Sistema del Mundo* (se refiere al Ptolomeico y al Copernicano), publicado en 1632, estaba escrito en italiano, en lugar de latín, que era la lengua científica por excelencia.

Si bien no contiene pruebas concluyentes del sistema copernicano (y alguna de las teorías que propugna son completamente erróneas, como el capítulo dedicado a las mareas), *El Diálogo* contribuyó decisivamente a demoler la cosmología aristotélica y señaló las pautas a seguir por la nueva Revolución Científica en ciernes. Ya en su libro *Il saggiatore* (El Ensayista), dedicado al papa Urbano VIII en 1623, Galileo había expuesto sus ideas sobre el método científico:

> *La Filosofía está escrita en ese gran libro que es el Universo… Pero no podemos entender el libro si antes no aprendemos el lenguaje en el que está escrito y su alfabeto.* ***Ese lenguaje es el de las Matemáticas,*** *y sus caracteres son triángulos, círculos y otras figuras geométricas, sin la cuales es humanamente imposible entender una sola palabra de él…*

Estas ideas se desarrollan y concretan en *El Diálogo*: A través de una serie de diálogos entre los principales personajes, Salvati y Simplicio, Galileo defiende que la Naturaleza está regida por una serie de principios básicos simples, que deben descubrirse por la experimentación y la inducción. Una vez descubiertos estos principios, debe encontrarse una descripción o *modelo matemático* del fenómeno estudiado, que permita predecir hechos, comprobables de nuevo por la observación y experimentación. Esta última parte y, sobre todo, la necesidad de *matematizar* la Naturaleza para su comprensión, suponía un cambio fundamental con el aristotelismo vigente.

El éxito de *El Diálogo* fue inmenso en toda Europa… y atrajo la atención de la Inquisición, que prohibió su venta y llamó a juicio a Galileo. En junio de 1633, reafirmando el dictamen de la Inquisición de 1616 sobre la teoría copernicana, un tribunal de 7 cardenales declaró *absurda, falsa en Filosofía y herética la afirmación de que el Sol ocupa el centro del Universo y que la Tierra no está inmóvil en el centro del mundo.* y obligó a Galileo, a rectractarse de sus creencias. Tras la abjuración, fue condenado a una especie de arresto domiciliario de por vida, muriendo en su hogar, cerca de Florencia, en 1642. A pesar de su reclusión y amargura, siguió trabajando incansablemente, y en 1638 apareció su *Discorsi e dimostrazioni matematiche in torno a due nove scienze attenanti alla mecanica i movimenty locali,* en el que hace un estudio sistemático y revolucionario sobre el movimiento de los proyectiles, formula la ley de composición de movimientos, la del movimiento uniformemente acelerado y aborda el estudio del péndulo.

La comprobación por parte de los astrónomos de que al aumentar la potencia de sus telescopios se descubrían más y más estrellas, cada vez más lejanas, hizo que fuera arraigando con fuerza la idea de un Universo infinito. El mismo Galileo se inclinaba por esta opción, aunque nunca dio por zanjada la cuestión. La causa de estas dudas, que contrastan con la facilidad con la que muchos de sus contemporáneos aceptaron la idea de un Universo infinito, probablemente se debe a las propiedades paradójicas que él mismo había descubierto del infinito matemático (véase la Sección siguiente.)

Pragmático como era, en una carta que escribió en 1649 a Fortunio Liceti, un Profesor de la Universidad de Padua, manifestó que no podía concebir un universo finito y limitado ni un universo infinito e ilimitado. El hecho de que lo infinito no pudiera ser comprendido por el intelecto finito del hombre, le inducía a inclinarse por la segunda posibilidad: ¡era mejor sentirse desconcertado ante lo incomprensible que verse incapaz de comprender lo finito!

El hombre encargado de desarrollar el programa de Galileo, **Isaac Newton** (1642-1727), creía, como G. Bruno, que el espacio era infinito y estaba ocupado por un Dios omnipresente. Su primer argumento en apoyo de esta idea se encuentra en una carta escrita al clérigo **Richard Bentley** en 1692: Si el universo fuera finito –dice Newton- la gravedad determinaría que toda la materia se concentrara finalmente en un punto. Por el contrario, en un universo infinito cualquier astro experimentaría fuerzas gravitatorias en todas direcciones.

El argumento de Newton se basa en su concepción de un espacio infinito y estático. Hoy sabemos que esto no es así. Además, el Universo visible tiene una estructura grumosa, no homogénea: las estrellas se distribuyen en galaxias, muy distantes unas de otras. Los efectos gravitacionales del resto de las galaxias son despreciables frente a los que originan las estrellas de la propia galaxia. Y sin embargo, las galaxias permanecen estables a lo largo de muchos millones de años, ya que su rotación impide el colapso que predecía Newton. Claro está que Newton no sabía de la existencia de otras galaxias distintas de nuestra propia Vía Láctea, y las observaciones de los astrónomos contemporáneos suyos parecían mostrar que las estrellas se hallaban uniformemente distribuidas en el espacio, lo que servía de apoyo a su argumento.

Aunque nadie había encontrado un argumento concluyente que probara que el universo es infinito, la mayoría de los científicos de la época se inclinaban por esta idea. Sin embargo, el astrónomo real **Edmon Halley** (1656-1742) (que, por cierto, había financiado la primera edición de los *Principia* de Newton), creyó haber encontrado un argumento *en contra* de la infinitud del Universo: Si lo fuera –argumentaba Halley- contendría infinitas estrellas, y no habría lugar en el cielo al que uno pudiera dirigir la mirada sin que la línea de visión se encontrara con una estrella. Por tanto, ¡el cielo en la noche debería aparecer tan brillante como durante el día! En la actualidad este argumento se conoce como **Paradoja de Olbers**, por el astrónomo alemán **H. Olbers**, que la redescubrió en 1826. El mismo Olbers creyó haber encontrado una explicación: la luz de las estrellas lejanas podría ser absorbida por grandes masas de materia interestelar intermedias. Pero si esto sucediera, con el tiempo esta materia intermedia se calentaría, hasta hacerse tan brillante como las mismas estrellas. Se puede argumentar que, incluso en un universo infinito con infinitas estrellas, éstas podrían estar asimétricamente distribuidas y existir algunos sectores (infinitos) del cielo sin estrellas. Pero esta hipótesis parece poco natural (y contradice las observaciones astronómicas.) La hipótesis del *Big Bang*, ampliamente aceptada en la actualidad, permite explicar fácilmente la paradoja: si se admite que el Universo tuvo su origen en una gran explosión, hace unos 15.000 millones de años, aunque el espacio fuera infinito y con infinitas estrellas sólo podríamos percibir las que estuvieran situadas a menos de 15.000 millones de años luz y, además, la luz emitida por las más lejanas habría sufrido un enorme desplazamiento hacia el rojo (convirtiéndose de hecho en ondas de radio).

En el momento actual, aún no tenemos una respuesta definitiva a la pregunta de si el espacio es finito o infinito. A lo largo del siglo XX han ido apareciendo importantes datos empíricos que parecían inclinar la respuesta en una dirección, para después corregirla en sentido contrario. Si se acepta la Teoría de la Relatividad, la respuesta dependerá de la curvatura del espacio: si ésta es positiva, el Universo se cerrará sobre sí mismo y será finito; si la curvatura es negativa o 0, el Universo será infinito. Por otro lado, la idea de un Universo en el que tiempo y espacio deben ser finitos y sin frontera es defendida por muchos cosmólogos modernos, con **S. Hawking** a la cabeza (*Cfr*. [Ha; pág. 182 y sgs.])

Una curiosa variación de la hipótesis del tiempo circular, en versión espacial aparece en el relato de J. L. Borges *La Biblioteca de Babel* (*cfr*. [Bg2]), que comienza así: *"El Universo (que otros llaman Biblioteca), se compone de un número indefinido, y tal vez infinito, de galerías hexagonales"* La biblioteca, que es eterna, contiene todo posible libro de 410 páginas y cualquier combinación concebible de letras aparece en algún tomo. Contra los que declaran que el Universo (la Biblioteca) no es infinito, ya que el número posible de libros de 410 páginas, aunque muy grande, es finito, el narrador afirma que *"la biblioteca es infinita y periódica. Si un eterno viajero la atravesara en cualquier dirección, comprobaría la cabo de los siglos que los mismos volúmenes se repiten…"*

La interrelación entre las dos principales teorías físicas del siglo XX, la Teoría de la Relatividad y la Mecánica Cuántica, ha producido una serie de fascinantes consecuencias que hace que muchos de los textos y artículos dedicados a estos temas parezcan verdaderas obras de ciencia-ficción, plagados como están de nombres como *supercuerdas, agujeros de gusano, mundos paralelos, tiempo imaginario, viaje en el tiempo*, etc. Como excelente botón de muestra pueden consultarse [Ga], [Yn] y las obras de divulgación [Ha], [Mo] y [Pe1]. En ellas se puede comprobar que en los distintos modelos matemáticos empleados para describir la realidad son, a veces, incompatibles entre sí, y en todos aparecen con frecuencia cantidades infinitas: **R. Penrose** probó en 1970 que si la Teoría de la Relatividad es cierta, en un agujero negro las fuerzas gravitatorias se harían infinitas (la interpretación lógica de este hecho es que dentro de un agujero negro, la Teoría de la Relatividad *no* es cierta); la Electrodinámica Cuántica trata de introducir los efectos relativistas en la descripción cuántica de las interacciones entre partículas y, según los expertos, es la teoría probada experimentalmente con mayor precisión de la Física. Pues bien, esta teoría lleva a considerar que los electrones son puntos sin dimensiones, dotados de una masa y una energía infinitas. Las ecuaciones de la electrodinámica cuántica proporcionan muchas veces soluciones infinitas, que deben ser eliminadas mediante las técnicas de renormalización introducidas por **J. Schwinger** y **R. Feynman,** no muy ortodoxas matemáticamente hablando, pero que proporcionan soluciones notablemente acordes con las observaciones… En fin, en los textos reseñados anteriormente pueden encontrarse muchos otros ejemplos que muestran claramente que los físicos parecen haber aceptado plenamente la situación.

Para finalizar, dediquemos algunas líneas al problema del continuo en la realidad física, es decir, ¿son el tiempo y el espacio *físicos* infinitamente divisibles?

Para Aristóteles la respuesta es afirmativa, y lo pone claramente de manifiesto con su definición de continuo: *Lo que puede dividirse en partes que son infinitamente divisibles* (Física, VI. 232b). Probablemente, las aporías de Zenón tuvieron algo que ver con dicha concepción. Notemos, sin embargo, que esto no contradice su rechazo de magnitudes infinitas reales, ya que si bien un cuerpo material o un intervalo de tiempo pueden dividirse indefinidamente, como nadie puede realizar esas infinitas divisiones, no puede decirse que el conjunto de partículas del objeto o de instantes de tiempo sea infinito realmente, sino sólo en sentido *potencial.*

Como sabemos, la mayoría de las teorías sobre la naturaleza de la materia que se han desarrollado a lo largo de la historia, se inclinan hacia la existencia de elementos o partículas básicas e indivisibles que compondrían, por agregación, todo lo existente: primero, los cuatro elementos clásicos de la Antigüedad griega (Aire, Tierra, Fuego y Agua), que al mezclarse en diversas proporciones, originarían todas las demás sustancias. Después, los Alquimistas agregaron al sistema nuevas sustancias "elementales", como ciertas sales, esencias, etc.. Los primeros químicos encontraron una nueva unidad fundamental de cada sustancia: la *molécula*. Posteriormente, se comprobó que las moléculas podían a su vez descomponerse en unidades más simples, llamadas *átomos*, de los que se pensó que existían menos de un centenar diferentes (cantidad que ha ido aumentando paulatinamente). Cuando se dispuso de energías mayores, se descubrió que el átomo no era una unidad tan simple, sino que podía "romperse" en diversas partículas: electrones, protones, neutrones…A lo largo de los últimos 50 años, utilizando aceleradores cada vez más energéticos, se han ido encontrando más y más *"partículas elementales*" que, actualmente, parecen estar todas ellas constituidas por distintas variedades de *quarks* (cuyo número va creciendo con el uso de mayores energías…) Citando a S. Hawking, *"Podríamos, en verdad, esperar encontrar varios niveles de estructura más básicos que los "quarks" y electrones que ahora consideramos como partículas elementales."* ([Ha, pág. 215]). La verdad es que el proceso parece repetir el viejo argumento de Aristóteles de la divisibilidad infinita del espacio. Sin embargo, el mismo Hawking señala que

> *"…la gravedad puede poner un límite a esta sucesión de "cajas dentro de cajas". Si hubiese una partícula con una energía por encima de lo que se conoce como energía de Planck (10^9 GeV), su masa estaría tan concentrada que se amputaría ella misma del resto del universo y formaría un pequeño agujero negro."* [ibidem]

Otros científicos prefieren interpretar la realidad como un continuo espacio temporal, en el que los distintos objetos que percibimos surgen como variaciones o perturbaciones en la geometría del mismo. En esta interpretación, la pregunta sería si el continuo espacio temporal tiene una estructura granular (lo que significaría la existencia de partículas o "granos" indivisibles) o no.

Y quizá, *" las nociones de "espacio" y "tiempo" son abstracciones que pueden aplicarse al nivel de nuestra experiencia sensible, pero que carecen de sentido más allá de la trigésima cifra decimal. ¿Qué habría entonces allí? Nuestro viejo amigo el "apeiron"* ([Ru, pág. 29]).

En todo caso, en el momento actual, parece que no existe una respuesta definitiva a la cuestión de si la materia es finita o infinitamente divisible.

Salvo algunos pensadores medievales (entre ellos, San **Isidoro de Sevilla**) que creían que el tiempo está formado por instantes indivisibles, llegando a cuantificar que una hora contenía exactamente 22.560 instantes (*cfr.* [B1, pág. 66]), no parece que haya habido muchos defensores de la idea de un tiempo discreto. En este aspecto, la concepción generalizada, pues, es la misma que la de Aristóteles: El tiempo es un continuo infinitamente divisible.

3.2.- El infinito en Matemáticas

Para algunos autores la historia de la fundamentación de las Matemáticas puede verse como un enriquecimiento progresivo del universo matemático para incluir más y más *infinitos* ([Ru]). Pero, por otro lado, la introducción de conjuntos o procesos infinitos es la causa principal de la aparición de paradojas en Matemáticas. Ya hemos visto que los matemáticos griegos fueron plenamente conscientes de este fenómeno, lo que les llevó a una autolimitación en el uso del infinito.

También hemos visto cómo Aristóteles rechazaba la existencia del infinito actual o real en el mundo sensible, admitiendo sólo la existencia de infinitos potenciales. En cuanto al uso del infinito en Matemáticas, Aristóteles dice:

> *El negar la existencia actual del infinito no priva a los matemáticos de sus especulaciones. De hecho ellos* [los matemáticos] *no necesitan este infinito y no hacen uso de él. Sólo postulan* [por ejemplo] *de una línea finita que puede prolongarse tanto como se desee…*[Física, III, 207b.]

El enunciado de la famosa demostración de la infinitud de los primos que aparece como proposición 20 del libro IX de *Los Elementos* (*cfr.* [He2]) es paradigmático de esta limitación en el uso de conjuntos infinitamente grandes: No se afirma que el conjunto de los números primos sea infinito, sino que *"hay más números primos que cualquier colección de primos que consideremos"*, es decir, dada cualquier colección finita de primos, siempre existe otro primo que no pertenece a ella (y, de hecho, es *mayor* que cualquier primo de la colección). Los procesos infinitos se eliminan, al exigir que la conclusión o demostración se obtenga tras un número finito de etapas. También hemos visto cómo, de manera sutil, en los propios *Elementos* se proscriben las magnitudes infinitas y las infinitamente pequeñas: La definición 4 del libro V (que, recordemos, establece que *dos magnitudes forman razón cuando cada una de ellas admite un múltiplo que excede a la otra),* <u>prohíbe</u> de hecho la existencia de magnitudes infinitamente pequeñas o infinitamente grandes y evita que se puedan comparar (*formar razón*) longitudes con áreas o áreas con volúmenes. Como veremos, ésto es precisamente lo que hicieron los iniciadores de los métodos infinitesimales de los siglos XVI y XVII.

La autoridad e influencia del pensamiento de Aristóteles hizo que el rechazo a la existencia del infinito actual perviviera durante más de 2.000 años. Sólo al final del siglo XIX los matemáticos se atrevieron (no sin profundas controversias) a dejar de lado estas ideas.

Con el establecimiento del Imperio Romano en el Mediterráneo, la cultura Griega comienza un lento declive, refugiándose principalmente en Alejandría, hasta su conquista por los Árabes en el año 641 d. de C. Por otro lado, el colapso del Imperio Romano de Occidente en el siglo V de nuestra Era llevó a Europa a un largo período de oscuridad en el aspecto cultural y científico. La herencia cultural griega fue conservada en parte y finalmente transmitida a Europa a través del Imperio Bizantino primero y, sobre todo, de los Árabes, quienes la enriquecieron con la incorporación de las ideas sobre aritmética y álgebra de las civilizaciones orientales, especialmente con la notación posicional y la introducción del 0. El nuevo sistema de numeración se fue extendiendo lentamente, pero puede decirse que a partir del siglo XIII se generaliza su empleo. Uno de los centros fundamentales de transmisión de cultura fue precisamente la Escuela de Traductores de Toledo, con **Gerardo de Cremona** a la cabeza. La asimilación y aceptación de la cultura griega y en particular del pensamiento aristotélico por parte de la Iglesia

Católica a partir del siglo XIII, sentó las bases para el renacimiento intelectual en la cultura Occidental.

Las especulaciones sobre la naturaleza del infinito y el continuo durante la Edad Media fueron de carácter esencialmente filosófico, más que científico. En líneas generales, se aceptaron las ideas de Aristóteles al respecto (con la obvia modificación de la existencia real de Dios como un infinito absoluto). Sin embargo, a comienzos del siglo XIV algunos filósofos (la mayoría pertenecientes al *Merton College* de Oxford), iniciaron el estudio *cuantitativo* del movimiento, lo que implicaba cuantificar la *variación* de magnitudes continuas, algo completamente extraño al pensamiento griego, que sólo consideraba movimientos uniformes. Los filósofos del círculo de Merton, entre los que destacan **Richard Suiseth** (o **Swineshead),** conocido como *El Calculador,* y **Thomas Bradwardine**, que fue Arzobispo de Canterbury, comenzaron a estudiar el movimiento uniformemente acelerado, en el que la velocidad varía proporcionalmente al tiempo transcurrido. Por supuesto, la idea de *velocidad instantánea* se utilizaba de forma intuitiva y poco precisa, pero permitió obtener resultados correctos. Los argumentos son siempre tediosos y retóricos, a falta de un simbolismo adecuado, y con frecuentes llamadas a la intuición. En cualquier caso, pueden considerarse como los primeros antecedentes de la noción de derivada de una cantidad variable. Incluso las palabras *fluxus* y *fluens*, tan utilizadas por Newton tres siglos más tarde, aparecen ya en los trabajos de *Calculador*. Estos trabajos conducen con frecuencia, de manera natural, al problema de sumación de una serie infinita. Por ejemplo, Suiseth planteó el siguiente problema: *Calcular la velocidad media de un móvil que durante la primera mitad del tiempo total de su movimiento, lo hace con velocidad constante; el siguiente cuarto lo hace a velocidad doble de la inicial; el siguiente octavo del tiempo total lo hace al triple de la velocidad inicial, y así ad infinitum.* Si se consideran tanto el intervalo de tiempo como la velocidad inicial la unidad, el problema es equivalente a calcular la suma

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{8}+\cdots+\frac{n}{2^n}+\cdots$$

Calculador obtuvo el resultado correcto (=2) mediante un largo y farragoso argumento verbal. Ésta parece ser el primer ejemplo de sumación de una serie infinita que no es una serie geométrica. Pero además, *Calculador* parece aceptar la idea de la suma de la serie infinita como un proceso ilimitado, a diferencia de los argumentos utilizados por **Arquímedes** para obtener la suma de algunas progresiones geométricas, esto es: obtener una expresión para la suma de un número *finito* de términos y comprobar (utilizando el axioma de Eudoxo) que esta suma difiere tanto como se desee de un candidato previamente encontrado.

Los estudios del círculo de Merton se extendieron a Francia e Italia a lo largo del siglo XIV. El parisino **N. Oresme** (1323-1382) introdujo el uso de representaciones gráficas y diagramas geométricos para dar demostraciones más sencillas y convincentes que las de *Calculador*. Su idea fue representar una cantidad variable (temperatura, velocidad, densidad, etc.) por medio de un segmento vertical cuya longitud en cada instante era el valor de la cantidad. Esta representación anticipaba claramente la idea de sistema de coordenadas, así como la de dependencia funcional. Por ejemplo, representa la velocidad de un móvil uniformemente acelerado durante un intervalo de tiempo [0,T], por medio de un trapecio construido sobre el intervalo, de modo que el lado vertical en 0 tiene como longitud la velocidad inicial v_0 del móvil, y en T su velocidad final v_f . Oresme no explicita claramente que el área del trapecio representa la distancia recorrida por el móvil, pero por las consecuencias que infiere, ésta parece haber sido su interpretación. Por ejemplo, deduce que el espacio recorrido es $s = \frac{1}{2}(v_0 + v_f)T$ (esto es, el área del trapecio), resultado equivalente a la conocida *regla de Merton* para el cálculo de la velocidad media en un movimiento uniformemente acelerado. En todo caso, esta idea fue más o menos aceptada implícitamente por los Escolásticos de los siglos XIV a XVI, y explicitada claramente en el famoso *Discurso* de Galileo de 1638, del que ya hemos hablado.

Oresme introduce métodos geométricos para la sumación de algunas series infinitas, que sustituyen con ventaja a los métodos retóricos de la escuela de Merton, aunque seguían siendo tediosos y construidos *ad hoc.* También a Oresme se debe la primera demostración de la divergencia de la serie armónica.

El estudio de las series infinitas continuó a lo largo de los siglos XVI y XVII sin avances prácticos significativos, aunque contribuyó decisivamente en la aceptación de los procesos infinitos en Matemáticas, preparando así el camino para el desarrollo de los métodos infinitesimales.

3.2.1 *Los indivisibles y los métodos infinitesimales.*

El Renacimiento científico y cultural de los siglos XV y XVI se asocia a menudo a la rápida difusión de los clásicos griegos provocada por la invención de la imprenta. Por otro lado, la aparición de una nueva clase de artesanos libres despertó el interés en la búsqueda de nuevos materiales y, en general, por el desarrollo de la tecnología. Las exploraciones geográficas a través de miles de kilómetros de mar abierto demandaban nuevos y más precisos métodos para determinar la posición; el incremento del comercio exigía nuevos y más rápidos mecanismos de cálculo; la introducción de la pólvora significó la aparición de nuevos problemas militares, como el movimiento y trayectoria de los proyectiles. Al mismo tiempo, el conocimiento de extrañas civilizaciones provocó un sentimiento de apertura en la cultura europea y la imprenta permitió la diseminación del conocimiento, hasta entonces controlado férreamente por la Iglesia. Todo, en fin, contribuyó a que la idea de la búsqueda del conocimiento y el desarrollo científico para dominar la Naturaleza se convirtiera en un rasgo dominante de la civilización Europea moderna, preparando el terreno a la revolución científica que tuvo lugar a partir del siglo XVII.

En las Matemáticas, el Renacimiento se plasmó en el rápido progreso en el álgebra y, sobre todo, el desarrollo de un simbolismo adecuado, que permitió obtener métodos de cálculo cada vez más eficaces: A lo largo del siglo XVI, la escuela de algebristas italianos (**Tartaglia**, **Cardano**, **Bombelli**, etc.) había conseguido obtener las fórmulas para resolver las ecuaciones algebraicas de grados 3 y 4 por radicales. En esta tarea, se fue desarrollando también un simbolismo algebraico adecuado, que resultó esencial para el desarrollo del Álgebra y, a fin de cuentas, de toda la Matemática.

De hecho, los signos + y - comienzan a emplearse a partir de 1481; el símbolo para el producto fue introducido por **Oughtred** algo más tarde, y el signo = lo introdujo **R. Recorde**, autor del primer tratado inglés de Álgebra, en 1557. Los símbolos > y < son debidos a **T. Harriot**; los paréntesis aparecen en 1544.

Más importante y significativa fue la de publicación por **F. Viète** de *artem analyticam isagoge* (Introducción al Arte Analítico) en 1591, en donde se introduce el simbolismo literal para designar los coeficientes ("datos") y las incógnitas en las ecuaciones. Ya en el siglo XVII, **R. Descartes** mejoró y desarrolló las ideas de Vieta, utilizando las primeras letras del alfabeto para designar cantidades conocidas, y reservando el uso de las últimas letras del alfabeto para las incógnitas. Vieta introduce los símbolos [y { en 1593 y a Descartes se debe el símbolo $\sqrt{}$. Así, a comienzos del siglo XVII los matemáticos disponían del bagaje técnico suficiente para abordar los nuevos retos planteados.

Los matemáticos del Renacimiento, como hijos de su época, estaban más interesados en la obtención de nuevos métodos y resultados que en el rigor de las pruebas. Como consecuencia de esta mentalidad, los matemáticos de los siglos XVI y XVII habían perdido aquel "horror al infinito" de los griegos, que como sabemos había impedido el desarrollo de una teoría de límites que evitara la tediosa doble *reductio ad absurdum* de las demostraciones clásicas. Este hecho, junto con el desarrollo de una escritura simbólica adecuada, facilitó el desarrollo de técnicas formales de cálculo y la aparición de los métodos infinitesimales, que se usaron con profusión y absoluta falta de rigor en la solución de multitud de problemas de cálculo de áreas y volúmenes en este período.

Así, **J. Kepler** (1571-1630) utilizó razonamientos de este tipo para tratar de *demostrar* sus leyes del movimiento planetario (*cfr.* [Ed, pág. 100]). Más determinante fue la publicación en 1615 de una obra sobre la medición exacta de los volúmenes de barricas de vino (muy importante para el comercio de la época): *Nova stereometria doliorum vinariorum* ("Nueva geometría sólida de las barricas de vino"). En ella, se considera un cuerpo sólido como unión de una cantidad infinita de piezas sólidas infinitesimales o ***indivisibles***, de forma y tamaño conveniente para resolver el problema estudiado. Por ejemplo, considera la esfera de radio r compuesta por una infinidad de pirámides de vértice en el centro y base en la superficie de la esfera, todas ellas de altura r. La fórmula del volumen de una pirámide da $V= Ar/3$, con A= superficie de la esfera ($=4\pi r^2$). También consideró el toro generado al girar un círculo de radio a en torno a un eje vertical situado a una distancia b de su centro, como formado por infinitas rebanadas muy delgadas, determinadas por la intersección del toro con planos que pasan por el eje de revolución. Cada rebanada es más delgada en el interior que en el exterior. Kepler asumió que el volumen de una de estas rebanadas era $\pi a^2 t$, donde $t = ½\,(t_1 + t_2)$ es el promedio de las anchuras mínima y máxima, e.d., t es la anchura de la rebanada en su centro. Por tanto, el volumen del toro es $V = (\pi a^2)(\sum t) = (pa^2)\,(2p\ b)$, que es el resultado correcto. En el libro citado se calculan los volúmenes de más de 90 sólidos de revolución por estos métodos.

El uso sistemático de las técnicas infinitesimales se popularizó sobre todo por la aparición de 2 obras escritas por el alumno de Galileo **B. Cavalieri** (1598-1647): la *Geometria indivisilibus* y los *Exertitationes geometricae sex*. Los 6 primeros libros de la *Geometria* están redactados a la manera de los libros griegos, pero, finalmente, Cavalieri desistió de su intento de justificar el uso y la existencia de los indivisibles. Estaba más interesado en su utilización práctica.

Cavalieri, a diferencia de Kepler, consideraba las figuras geométricas formadas por *indivisibles* de dimensión menor. Así, las áreas estaban formadas por infinitos segmentos paralelos a una recta fija o *regula* (las *omnes lineae* de la figura dada); los volúmenes estaban constituidos por infinitos trozos de áreas planas equidistantes, etc. También a diferencia de Kepler, que imaginaba una figura geométrica descompuesta en trozos infinitesimales (de la misma dimensión) que, mediante una recombinación *ad hoc* permitía obtener el área o volumen de la figura dada, Cavalieri procedía a establecer una biyección entre los indivisibles de *dos* figuras geométricas dadas, de modo que si entre los indivisibles correspondientes existía una cierta relación constante, se podía concluir que la misma relación existía entre las magnitudes de las figuras en cuestión. En general, la medida de una de las figuras era conocida y así se podía calcular la de la otra.

Un ejemplo típico de los métodos de Cavalieri es lo que todavía se conoce hoy como *Teorema de Cavalieri*, cuya validez puede justificarse actualmente a través del teorema de Fubini:

> *Si dos sólidos tienen la misma altura y si las secciones por planos paralelos a las bases a la misma distancia de ellas tienen áreas en una razón dada, entonces los volúmenes de los sólidos están en la misma razón.*

Además de su técnica de comparación de los volúmenes de dos sólidos, comparando las áreas de sus secciones, Cavalieri desarrolló también un método para calcular el área o volumen de un solo cuerpo, por medio de un método formal (geométrico) para calcular sumas de "potencias de líneas" del tipo $\sum x^k$. Por ejemplo, si consideramos el recinto limitado por la gráfica de la parábola $y = x^2$ entre los puntos de abscisa $x = a$ y $x= b$, la longitud de una sección vertical típica es x^2, y el área vendría dada por la suma $\sum x^2$ para x entre a y b. La técnica de Cavalieri consiste en comparar las potencias de los segmentos paralelos a los lados de un cuadrado de lado a con las de los triángulos obtenidos al trazar una diagonal (*cfr*. [Ed], [B1] y [B2]). Los argumentos se hacen más y más complicados al aumentar k, de modo que Cavalieri sólo pudo verificar directamente la fórmula $\sum x^k = a^{k+1}/(n+1)$ para los valores enteros de k menores que 10. Con estos resultados, pudo calcular el área bajo las curvas $y = x^n$ (n=9) en el intervalo unidad, los volúmenes obtenidos por revolución de estos recintos, etc. **Fermat, Pascal** y **Roberval** establecieron, más o menos rigurosamente y por distintos métodos, la validez de la fórmula para todo entero positivo.

El mismo Cavalieri y, por supuesto, sus contemporáneos, eran conscientes de la falta de rigor del método de los indivisibles. Durante algún tiempo, trató de solventar las críticas sobre el uso de los indivisibles realizadas por muchos de sus colegas . Pero, finalmente, llegó a la conclusión de que los espectaculares resultados obtenidos bastaban para justificar el método, mientras que el *sentido común* era suficiente para evitar las falacias más simples, como por ejemplo la siguiente: consideremos (figura 6) un triángulo cuya altura h lo divide en dos triángulos rectángulos desiguales, **A** y **B**. Consideremos **A** como la suma de sus líneas paralelas a h, y lo mismo **B**. Como se muestra en la figura, a cada indivisible de **A** le corresponde un único indivisible de **B** de la misma longitud, y recíprocamente. Siendo así los indivisibles correspondientes iguales, su suma debería

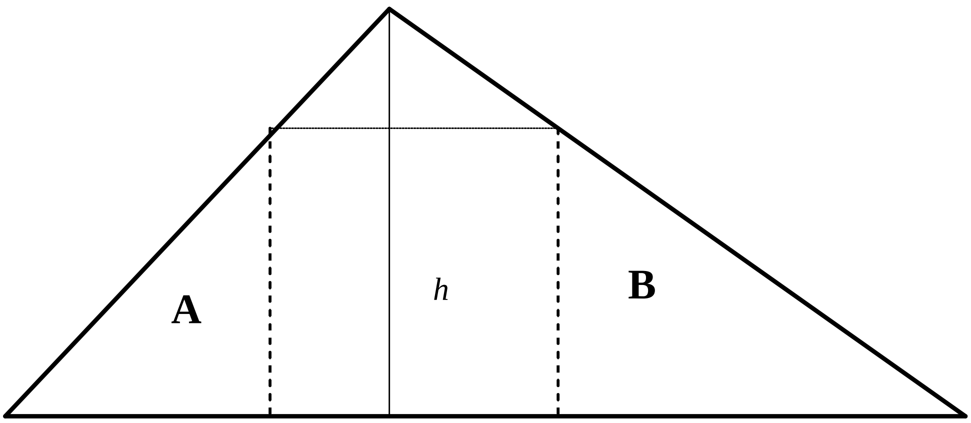

Figura 6

serlo también y, por tanto, ¡**A** y **B** tendrían el mismo área!

Al fin y al cabo, como escribió más tarde Cavalieri en los *Ejercicios*, *"El rigor es asunto de los filósofos, más que de los matemáticos"*.

E. Torricelli (1608-1647), amigo de Cavalieri y también discípulo de Galileo, era plenamente consciente de las ventajas y desventajas del método de los indivisibles, que defendía como herramienta para descubrir nuevos resultados, de los que había que obtener después pruebas "a la manera de los griegos". Torricelli sospechaba que éstos ya poseían un método semejante al de los indivisibles para este fin, aunque lo habían ocultado para evitar la crítica de los sus detractores. El descubrimiento de *El Método* de Arquímedes prueba lo acertado de esta sospecha. Torricelli obtuvo importantes resultados, utilizando hábilmente los indivisibles y proporcionando muchas veces demostraciones alternativas por medio del método de exhausción por figuras adecuadas (no necesariamente rectángulos o prismas). Desgraciadamente, su prematura muerte impidió que desarrollara completamente sus ideas.

La aplicación de los métodos de indivisibles al estudio del movimiento permite obtener evidencias claras de que los problemas clásicos de determinación de la tangente a una curva y del área encerrada bajo ella, son inversos uno del otro. En efecto, la representación gráfica del espacio recorrido en función del tiempo permite visualizar claramente la noción de velocidad instantánea, y su identificación con la tangente a la curva que representa el espacio recorrido. Del mismo modo, en un diagrama velocidad-tiempo, los razonamientos infinitesimales ponen en evidencia que el área encerrada bajo la curva es, precisamente, el espacio recorrido por el móvil. Estos resultados, implícitamente aceptados desde los tiempos de Oresme, adquieren así confirmación "matemática", y como tal se explicitan en *El Discurso* de Galileo y son formulaciones embrionarias del *Teorema Fundamental del Cálculo.* También el francés **G.P. de Roberval** (1602-1675) utilizó con profusión este "método cinemático" de considerar una curva como la trayectoria de un móvil, descomponiendo su movimiento como combinación de otros más simples y utilizando sistemáticamente la regla del paralelogramo para obtener la tangente (= velocidad instantánea) a la curva en cuestión como *suma vectorial* de las velocidades instantáneas de los movimientos en los que se descompone el original. En fin, **I. Barrow**, maestro que fue de Newton, en la Lección X de sus *Lectiones Geometricae* (1670) enuncia y demuestra un teorema geométrico que muestra claramente la relación inversa que existe entre el cálculo de tangentes y el de cuadraturas en general (*cfr.*, p. ej., [Ed, págs. 138-140]).

Tras los trabajos de Cavalieri y Torricelli, comienza un proceso hacia la aritmetización de los indivisibles, sustituyendo los imprecisos métodos geométricos de suma de "potencias de líneas" por la suma de cantidades más y más pequeñas, en número más y más grande, es decir, en métodos aritméticos para la sumación de series infinitas, que se escriben en la forma $a_1+a_2+\ldots+etc.$ A este cambio de mentalidad contribuyó no poco la aparición en 1637 de la *Geometría* de **R. Descartes** (1596-1650) y la *Introducción al estudio de los lugares planos y sólido*, enviada por **P. de Fermat** (1601-1665) a sus corresponsales en París el mismo año, que sentaron las bases de la Geometría Analítica, cuyo objetivo era aplicar los métodos del álgebra a la resolución de problemas geométricos. Las nociones de *variable* y *función*, indispensables para el desarrollo del cálculo, aparecen ya explícitamente.

El proceso de aritmetización de los indivisibles culminó con la obra de **J. Wallis** (1616-1703) *Arithmetica infinitorum*, aparecida en 1655 y cuyo título es bastante explícito. En ella, Wallis abandona el marco geométrico para asignar valores numéricos a los indivisibles y, mediante manipulaciones aritméticas formales no demasiado rigurosas, obtiene, entre otros resultados, fórmulas equivalentes a

$$\int_0^a x^n dx = \frac{a^{n+1}}{n+1}$$

para todo valor racional de n (distinto de -1, por supuesto). Por cierto, en esta obra es donde aparece por primera vez el signo ∞ para designar el infinito. La fórmula anterior había sido ya obtenida rigurosamente (por medio del método de exhausción) por Fermat y por Torricelli, pero sus resultados no fueron publicados hasta después de la aparición del libro de Wallis.

3.2.2. *La creación del Cálculo.*

A lo largo de este proceso de aritmetización, los indivisibles geométricos van dando paso poco a poco a la noción, esencial para el desarrollo del Cálculo, de **infinitésimo:** un ente con propiedades asombrosas, ya que no es 0, pero es menor (en valor absoluto) que cualquier cantidad positiva; más aún, ninguno de sus múltiplos alcanza a ser una cantidad finita. Sin embargo, una cantidad *infinita* de estos elementos, puede ocasionar un efecto o magnitud finita. Una vez más, Jorge Luis Borges nos ilustra magistralmente sobre la naturaleza paradójica de estas nociones: En el cuento *Parábola del Palacio* [Bg3], se puede leer

"…Cada cien pasos una torre cortaba el aire; para los ojos el color era idéntico, pero la primera de todas era amarilla y la última escarlata, tan delicadas eran las gradaciones y tan larga la serie."

El hecho de que el color entre dos torres consecutivas sea indistinguible nos sugiere que la diferencia de color entre ellas es infinitesimal. Pero, sin embargo, la primera y la última torre tienen colores diferentes, lo que indica que el número de torres debe ser infinito para que la suma de las variaciones infinitesimales origine una diferencia de color perceptible. Recomendamos al lector el interesante artículo [Bla], donde se analizan algunas paradojas matemáticas incluidas en las obras de Borges.

Volviendo a nuestra historia, los métodos geométricos para expresar una magnitud como "suma" de indivisibles, se convierten en técnicas para expresar funciones por medio de series infinitas; los empleados para la determinación de áreas y tangentes evolucionan hacia distintas reglas para su cálculo a partir de la expresión analítica de la curva en cuestión. Estas reglas se obtienen introduciendo en dicha expresión analítica elementos auxiliares *infinitesimales* que, tras una manipulación formal, se hacen desaparecer igualándolos a 0.

El paso decisivo fue dado por **Isaac Newton** (1642-1727) y **G. Leibniz** (1646-1716) quienes sistematizaron los distintos métodos existentes hasta convertirlos en potentes algoritmos de cálculo que iban a ser la herramienta básica para llevar a cabo el programa de Galileo de la matematización de la Naturaleza. El principal responsable del éxito de este programa fue Newton, autor de la obra científica más admirada de todos los tiempos: *Philosophiae naturales principia mathematica* (o, simplemente, *Principia*), que apareció impresa por primera vez en 1687, aunque muchos de los resultados los había obtenido Newton en el *bienio milagroso* que pasó retirado en su hogar natal de Woolsthrope entre 1665 a 1667, debido a la gran plaga que azotaba Londres. En esta obra, Newton formula las Leyes de la Dinámica y la Teoría de la Gravitación, lo que le permite desarrollar un modelo matemático riguroso para explicar *todos* los fenómenos de movimiento a partir de unas pocas leyes o *principios*. Así, Newton descubrió un esquema majestuoso que abarcaba desde la caída de una piedra hasta el movimiento de los planetas y las mareas y que fascinó a sus contemporáneos. A lo largo de los siglos XVIII y XIX los científicos siguieron con empeño el programa de la descripción matemática de la Naturaleza (*cfr.* [Bo4]).

Los métodos utilizados por Newton o Leibniz para el desarrollo del Cálculo (*Método de Fluxiones*, como lo llamó Newton, o *Cálculo Diferencial* en la terminología de Leibniz.) no difieren esencialmente de los empleados por sus predecesores, pero lo que en Fermat, Descartes o Roberval eran una serie de reglas especiales para resolver algunos problemas concretos, se transforma en manos de Newton y Leibniz en un método muy general para la determinación de tangentes y cuadraturas, así como la explotación sistemática de la relación inversa entre ambos problemas, mediante el desarrollo de algoritmos formales para el cálculo con magnitudes infinitesimales.

Es difícil encontrar descripciones claras del cálculo de fluxiones en los *Principia*, pues Newton empleó deliberadamente un lenguaje geométrico y sintético, “a lo griego”. Se supone que muchos de los cálculos de los *Principia* fueron obtenidos utilizando los métodos analíticos desarrollados previamente por Newton y reconvertidos a un lenguaje sintético. Para cuando se publicaron los *Principia*, hacía tres años que Leibniz había publicado en *Acta Eruditorum* su primer artículo sobre Cálculo Diferencial. Sin embargo, para entonces Newton ya había desarrollado completamente su método, aunque su reticencia habitual a hacer públicos sus resultados retrasara su aparición impresa hasta mucho más tarde. De hecho, la primera obra de Newton sobre el cálculo, finalizada en 1769, no fue publicada hasta 1711; La segunda y más importante obra, *A treatise of the method of fluxions and infinite series*, terminado en 1671, no apareció hasta 1737, en versión inglesa, mientras que la versión original en latín tardó todavía cinco años más en ser publicada. Esta actitud contrasta con la de Leibniz, que prefería publicar en revistas científicas para una mayor rapidez en la difusión de sus resultados.

Sin embargo, aunque los resultados obtenidos son análogos, el enfoque de los mismos es bastante diferente.

En un primer momento, Newton utiliza los infinitésimos de modo similar a como los empleaban Fermat o Barrow, pero con una habilidad muy superior. Así, en sus primeros trabajos para calcular el área entre el eje de abscisas y la curva $y = y(x)$, concibe este recinto como unión de rectángulos infinitesimales. Si $A(x)$ es el área hasta el punto de abscisa x y consideramos su valor en un punto infinitamente próximo, $A(x+\mathrm{o})$, su diferencia $A(x+\mathrm{o})-A(x)$ es el área de un rectángulo infinitesimal de base o y altura $y(x)$. Por tanto, su *velocidad de cambio*, esto es, la razón de la variación del área a la variación de la abscisa, es $y(x)$ (en otras palabras, $\frac{dA}{dx} = y(x)$). Este resultado era esencialmente conocido, como sabemos. Pero lo que hace Newton es darle la vuelta: ¡Conociendo una tabla de derivadas, sabremos el área bajo las gráficas de esas derivadas! Así se obtiene un procedimiento algorítmico de cálculo de áreas (si se posee un algoritmo para calcular derivadas, claro). Por ejemplo, Newton toma como $A(x)$ la curva $\frac{n}{m+n}ax^{(m+n)/n}$ y con la ayuda de su teorema binomial, que ya había descubierto, calcula su incremento, divide por el infinitésimo o y después suprime los términos que contienen alguna potencia del infinitésimo, para obtener $y(x) = ax^{m/n}$. De esta manera consigue una demostración sencilla y general de los múltiples resultados parciales que habían ido obteniendo penosamente Cavalieri, Torricelli, Fermat, Roberval, Wallis, etc. Así pues, Newton toma como noción básica del nuevo cálculo la de derivada, y obtiene como consecuencia el cálculo de áreas o cálculo integral. Esta idea de considerar la integral como el proceso inverso a la derivación, es la que iba a imponerse hasta la crisis de fundamentos de comienzos del siglo XIX.

Los infinitésimos así concebidos ofrecen una gran dificultad para su fundamentación y para la justificación de sus reglas de uso. Por ello Newton, siguiendo una idea que ya había utilizado Roberval, destacó más tarde que lo que realmente importa es la *razón* de cantidades infinitesimales, que puede ser una cantidad finita, independiente de la naturaleza de los factores. Este método de *últimas razones de cantidades evanescentes* está muy cerca de la noción de *límite* de un cociente incremental, pero los problemas de cálculo práctico (pues, a la postre, se utilizaban las reglas usuales de los infinitésimos para obtenerlo) y, sobre todo, su aplicación a magnitudes que dependen de dos o más variables, hizo que fuera pronto sustituido por el *método de las fluxiones,* inspirado claramente en la intuición física. Para ello, Newton consideró que las cantidades variables a estudiar estaban generadas por el movimiento continuo de puntos, líneas y planos (en lugar de verlas como un agregado de sus elementos infinitesimales). Por ejemplo, la curva plana $f(x,y) = 0$ puede considerarse como el lugar geométrico de los puntos de intersección de dos rectas móviles, una horizontal y otra vertical. De esto modo, las coordenadas x e y de cada punto de la curva son funciones del tiempo, y el movimiento que describe la curva es composición de un movimiento horizontal, con vector velocidad $\dot{x}$ y un movimiento vertical con vector velocidad $\dot{y}$. Por la regla del paralelogramo, resulta entonces que la pendiente de la tangente a la curva dada es $\dot{y}/\dot{x}$. Las cantidades x e y que varían con el *flujo* del tiempo fueron llamadas por Newton *fluentes*, y su velocidad de cambio, sus *fluxiones*. A su vez, las fluxiones pueden considerarse como fluentes con fluxiones $\ddot{x}, \ddot{y}$, etc. Aparentemente, Newton consideró como intuitivamente evidente la noción de velocidad instantánea de un móvil con movimiento rectilíneo y para su cálculo empleó sin reparo los métodos infinitesimales. Sin embargo, señaló varias veces que las fluxiones nunca aparecen aisladas, sino como razones de la forma $\dot{y}/\dot{x}$, lo que parece le servía par justificar el uso de los infinitésimos en el cálculo de las mismas. Como podemos ver, los argumentos de partida son análogos a los utilizados por Roberval en su cálculo de tangentes. Pero de nuevo Newton convierte una idea ya utilizada para resolver algunos problemas concretos en un *método* potente y general de cálculo.

Newton plantea inmediatamente el problema fundamental: dada una relación entre cantidades variables, encontrar la relación entre sus fluxiones; y *recíprocamente*. Este último caso comprende tanto el problema de cálculo de primitivas (cuando se trata de una ecuación simple de la forma $\dot{y}/\dot{x}=g(x)$) como el de resolución de una ecuación diferencial general $h(x, \dot{y}/\dot{x}) = 0$. Newton se embarca en una serie de cálculos que le permiten obtener las reglas generales de derivación de polinomios, productos y cocientes y, combinándolas con el uso de series infinitas, obtener un algoritmo sistemático para abordar estos problemas (*cfr.* [Ed; págs. 191-230]).

En cuanto al otro creador del cálculo, G. Leibniz, su trayectoria es completamente diferente a la de Newton. Su formación inicial fue en Derecho y Filosofía y desempeñó una activa carrera diplomática al servicio del Elector de Mainz. Sus obligaciones profesionales le llevaron a París en 1672, y allí entró en contacto con algunos de los mejores científicos de su tiempo, que despertaron su interés por distintos campos de la ciencia y la ingeniería: inventor de una de las primeras máquinas de calcular, pionero en la búsqueda de un sistema de notación y terminología que codificara el razonamiento lógico (lo que hoy llamaríamos *lógica simbólica*), no es extraño que se sintiera atraído por las Matemáticas y la búsqueda de un sistema general de cálculo, junto con una notación adecuada para el mismo. Según declaró más tarde, su inspiración para el desarrollo de su cálculo diferencial se originó en una figura aparecida en un trabajo de Pascal (el "triángulo diferencial", para el caso de un cuarto de círculo) y darse cuenta de que podía reproducirse en cualquier curva, de modo que la determinación de la tangente dependía de la razón de las *diferencias* de las ordenadas y las abscisas cuando éstas se hacían infinitamente pequeñas, y la cuadratura dependía de la *suma* de rectángulos infinitamente pequeños, siendo esas operaciones mutuamente inversas. Como vemos, argumentos ya conocidos, pero que Leibniz supo desarrollar y convertirlos en un método sistemático de cálculo.

Es curioso que el filósofo Leibniz tuviera muchos menos reparos formales en el uso de los infinitésimos que el físico Newton. Leibniz no quería hacer un misterio de los infinitésimos, ni apelaba a la intuición geométrica para su justificación. Simplemente los usaba. Creía firmemente que si se especificaban claramente las reglas para manejarlos y si éstas se aplicaban correctamente, el resultado sería correcto, cualquiera que fuera la naturaleza de los símbolos manejados. En este sentido, Leibniz puede considerarse un precursor claro de la corriente formalista en Matemáticas.

El primer trabajo sobre el cálculo diferencial lo publicó Leibniz en 1684 en *Acta Eroditorum*, la revista que él mismo había ayudado a crear 2 años antes (en [Str] puede verse una traducción al inglés). Define la *diferencia* o *diferencial* de una cantidad variable sin indicar las consideraciones infinitesimales que habían sido su motivación: la diferencial dx de la abscisa se toma como una cantidad arbitraria y define la diferencial dy de la ordenada como la cantidad que es a dx como la razón de la ordenada a la subtangente (consecuencia inmediata de la semejanza entre el triángulo diferencial y el formado por la tangente y la subtangente). La definición anterior asigna al cociente dy/dx un valor finito, libre de todo uso de infinitésimos, y conocido éste por algún método adecuado (que en el cálculo efectivo de Leibniz *utiliza* los infinitésimos), permite obtener la tangente a la curva. Pero obviamente, la definición dada *presupone* una definición previa de tangente a una curva en un punto que para Leibniz es la usual de la época: la recta que une dos puntos infinitamente próximos de la curva. Así pues, la ausencia del uso de infinitésimos en la definición es sólo aparente. El trabajo incluye (sin demostración) las reglas para la diferencial de sumas, productos, cocientes, potencias y raíces, y aplica los resultados para el cálculo de tangentes, problemas de máximos y mínimos, etc.

Dos años más tarde, Leibniz publicó en la misma Revista un segundo artículo, esta vez sobre cálculo integral. En él aparece la notación para indicar el área bajo una curva dada, como *suma* de infinitésimos. Estos dos artículos fueron sólo el anticipo de los cerca de 30 que publicó Leibniz en la misma Revista sobre el nuevo cálculo. Y éste es también, como hemos apuntado más arriba, un rasgo que distingue a Leibniz de Newton: su interés en difundir rápidamente sus descubrimientos. Otra diferencia importante es que Leibniz tuvo pronto excelentes discípulos, entre los que destacaremos a los hermanos Johann y Jakob **Bernouilli** y al aristócrata francés **Guillaume-François de L'Hospital** (1661-1704), conocido como Marqués de L'Hospital, autor del primer libro de Cálculo Diferencia de la Historia: el *Analyse des Infiniment petits*, publicado en francés en París, en 1696. Ahora sabemos que muchos de los resultados incluidos en el libro se deben a Johann Bernouilli, profesor particular y "negro" del Marqués. El Prólogo del libro contiene una clara descripción del nuevo cálculo:

> *El Análisis que se explica en esta obra incluye el cálculo ordinario, pero es muy diferente. El análisis ordinario no trata más que cantidades finitas: éste penetra hasta el infinito mismo. Compara las diferencias, infinitamente pequeñas, de las cantidades finitas; descubre las relaciones entre estas diferencias y a partir de ellas obtiene las cantidades finitas, que comparadas con éstas infinitamente pequeñas, son como infinitos. Se puede incluso decir que este Análisis se extiende más allá del infinito, pues no se limita a las diferencias infinitamente pequeñas, sino que descubre las diferencias de estas diferencias, las de las diferencias terceras, cuartas, y así sucesivamente… De forma que no sólo abarca al infinito, sino el infinito del infinito o una infinidad de infinitos.* [Hos, Preface]

El libro comienza introduciendo las nociones geométricas de número y cantidad variable (se distingue por primera vez entre variable dependiente e independiente) y continúa enunciando una serie de "*Demandes ou Suppositions*". Entre ellas se encuentra que se pueda sustituir una cantidad por otra que difiera de la primera en un infinitésimo, y que las curvas se pueden considerar como la unión de una infinidad de segmentos rectilíneos infinitesimales. A partir de aquí, la redacción es clara e inteligible. El libro tuvo un éxito enorme, siendo uno de los textos más utilizados durante todo el siglo XVIII. El lector interesado puede encontrar en [P] un buen análisis pormenorizado de la obra.

Como queda claro en el libro de L'Hospital, Leibniz concibió desde el comienzo la existencia de un número infinito de órdenes de infinitésimos, y mantuvo el principio de que en una relación que contuviera infinitésimos de distintos órdenes, sólo había que retener los de órden inferior (ya que los otros son infinitamente pequeños frente a ellos). Sin embargo, los intentos para definir y utilizar las diferenciales de orden superior, no tuvieron mucho éxito, y fueron objeto de la mayor parte de la crítica de sus detractores.

Contra lo que habitualmente se cree, Leibniz parece que no tenía claro la existencia *real* de los infinitésimos. En una carta escrita dos meses antes de su muerte, manifestó que no creía que existieran magnitudes realmente infinitas o realmente infinitesimales, pero tanto si existen como si no, estos conceptos son "ficciones útiles para abreviar y utilizar un lenguaje universal". Una vez más, Leibniz señalaba que la cuestión de la existencia de los infinitésimos es **independiente** de si su uso, respetando las reglas del cálculo, conducía a resultados correctos.

Los resultados a que se llega con los métodos de Leibniz son similares a los obtenidos con los de Newton. Una de las grandes ventajas del método de Leibniz reside sobre todo en la notación, a la que dedicó mucho tiempo, y que es la que esencialmente utilizamos. Por el contrario, la justificación rigurosa de los métodos de Newton es más sencilla, al haber hecho hincapié en las *razones* de infinitésimos, es decir, la derivada, en lugar de sus *diferencias,* es decir, la diferencial. Eso también trasciende al problema inverso: para Newton la integral es simplemente la antiderivación; para Leibniz, la integral es una suma infinita de diferenciales. En todo caso, el resultado común es la creación de métodos generales y algoritmos de cálculo que permiten unificar y tratar sistemáticamente una enorme cantidad de problemas.

El éxito del cálculo, tanto en Matemáticas como en su aplicación para la descripción de la Naturaleza, fue espectacular, lo que contrasta con la debilidad de sus fundamentos lógicos. Hasta el punto que se convirtió en tema de conversación en las reuniones de los ilustrados de la época. Al parecer, en una de estas reuniones **Leibniz** trató de explicar a la reina **Sofía Carlota** de Prusia los rudimentos del cálculo infinitesimal. Pero la Reina le interrumpió diciendo que a lo largo de su relación con la Corte se había familiarizado tanto con lo infinitamente pequeño, que no necesitaba la ayuda de **Leibniz** para que se lo explicara.

Una de las más demoledoras críticas al nuevo análisis se debe al obispo irlandés **G. Berkeley** (1685-1753). En su ensayo *The Analyst* [6], publicado en 1734 y dedicado "a un matemático infiel" (el astrónomo y amigo de Newton **Edmund Halley** (1656-1742)), acusa a los seguidores de Newton y Leibniz de utilizar métodos que no comprenden, basados en inconsistencias lógicas y conceptos ambiguos, aunque reconoce que los resultados obtenidos puedan ser ciertos:

> *…No tengo ninguna discrepancia en cuanto a sus conclusiones, sino sólo en cuanto a su lógica y a su método: ¿Cómo lo demuestra?, ¿de qué objetos se ocupa?....*

> *….¿Y que son estos diferenciales? Las velocidades de incrementos que desaparecen ¿Y que son estos mismos incrementos evanescentes? No son cantidades finitas, ni cantidades infinitamente pequeñas, pero tampoco son nada. ¿No podemos denominarlas los fantasmas de las cantidades desaparecidas?*

Berkeley incluye en su obra una rápida, pero esencialmente correcta, descripción del método de fluxiones y el método de las diferenciales de Leibniz, y su crítica sobre la inconsistencia conceptual de los infinitésimos está bien fundamentada. Lo curioso es que este furibundo ataque tenía como objeto mostrar que los fundamentos de las Matemáticas no eran más sólidos que los de la Religión, como queda claro en el subtítulo de El Analista: *Donde se examina si el objeto, principios e inferencias del Análisis Moderno se puede entender de manera más clara, o deducir de manera más evidente que los misterios de la Religión y las cuestiones de la Fe. "Saca en primer lugar la viga de tu propio ojo, y entonces podrás ver claramente para sacar la mota del ojo de tu hermano"* (tomado de [B2, pág. 539])].

Como dice **J. Newman** en su comentario a *The Analyst* incluido en [Nw, pág. 212],

"…resulta difícil de entender por qué pensó Berkeley *que podría restablecer la fe en la Religión demostrando que los matemáticos eran, a menudo, tan estúpidos como los teólogos.*"

Berkeley justifica el que el cálculo infinitesimal produzca resultados correctos como consecuencia de una "compensación de errores", explicación que iban a repetir más tarde personajes de la talla de **Maclaurin, Lagrange** o **L. Carnot.** Este último caso es especialmente llamativo, tanto por el prestigio del autor (el *Organizador de la Victoria* en los turbulentos años de la Revolución Francesa), como por la popularidad de que gozó su obra *Réflexions sur la métaphysique du calcul infinitésimal*, aparecida en 1797 y ampliamente traducida. Tratando de encontrar una base sólida para la fundamentación del Cálculo, Carnot llegó a la conclusión de que los verdaderos principios metafísicos del mismo son ¡la compensación de errores!. Los infinitésimos, al igual que los números imaginarios, serían simplemente cantidades que se introducen para facilitar los cálculos y desaparecen en el resultado final. Las reglas de cálculo con estas cantidades ficticias son las mismas que rigen las cantidades reales debido a una cierta *Ley de Continuidad*. Lo cierto es que la popularidad de esta obra tuvo un efecto completamente contrario al

[6] Una traducción al castellano aparece en [Nw; págs. 214-219].

deseado, y sin duda contribuyó a aumentar la sensación de incomodidad de los matemáticos con los *abominables pequeños ceros*, en palabras de C. Boyer ([B2]), acelerando la crisis que iba a conducir a la rigorización del Análisis durante el siglo XIX.

3.2.3. *Crisis y Soluciones: La aritmetización del Análisis.*

Como hemos dicho, los infinitésimos (y sus inversos, los números infinitamente grandes) se utilizaron con profusión en las Matemáticas a lo largo del siglo XVIII, consiguiendo éxitos espectaculares. Uno de los más hábiles manipuladores de estos objetos fue el genial y prolífico **L. Euler** (1707-1783)**,** autor de uno de los primeros textos (en sentido moderno) de Análisis: el *Introductio in Analysin Infinitorum*[7] (1748). En él, tras establecer con precisión lo que significa para el autor la palabra *función* (esencialmente, una *expresión analítica*, que permite determinar el o los valores correspondientes a un valor determinado de las variables), pasa a definir el Análisis como el estudio de las funciones, dando así un paso fundamental hacia la aritmetización de esta disciplina y su independencia de la Geometría. Por otro lado, Euler evita sistemáticamente el uso del cálculo diferencial y basa su análisis en el desarrollo de las funciones en series infinitas. Realmente lo único que supone es la fórmula del desarrollo de $(1+x)^r$, con r racional (y un ingenioso manejo de las cantidades infinitas e infinitésimas).

Pero no todo el mundo es Euler, y la cantidad de paradojas y contradicciones que se iban acumulando aumentaba la sensación de inseguridad. La utilización indiscriminada de los automatismos formales (basada en una aceptación implícita de la ley de continuidad) dio lugar a un sin fin de controversias entre los matemáticos. Por ejemplo, Johann Bernouilli sostenía que $\log(-n) = \log n$, ya que $2\log(-n) = \log(-n)^2 = \log n^2 = 2 \log n$. Otro de sus argumentos estaba basado en la idea de integral como antiderivada: Como $\frac{dx}{x} = \frac{d(-x)}{-x}$, resulta que $\log x = \int \frac{dx}{x} = \int \frac{d(-x)}{-x} = \log(-x)$. Por el contrario, Leibniz sostenía que los logaritmos de los números negativos eran imaginarios, aunque sus argumentos son poco convincentes. Uno de ellos, por ejemplo, es el siguiente: si $\log(-1)$ fuera real, también lo sería $\log i = \log(-1)^{1/2} = ½ \log(-1)$, *lo que es claramente absurdo* (?). Otro se basaba en ciertas manipulaciones con series divergentes (otra de las fuentes habituales de contradicciones; véanse ejemplos en [Bu], [KM], [KN], etc.). Euler confesó que esta paradoja le había atormentado durante bastante tiempo y en [Eu2] obtuvo la solución correcta (via las llamadas “fórmulas de Euler”). En la introducción, escribe:

> *…los logaritmos forman claramente parte de las matemáticas puras. Por ello puede resultar sorprendente saber que han sido objeto hasta ahora de una embarazosa controversia en la que aparecían contradicciones aparentemente insolubles, cualesquiera que fuera la opción tomada…Yo voy a eliminar completamente todas las contradicciones, para que pueda verse lo difícil que es descubrir la verdad y defenderse contra la inconsistencia, incluso cuando dos grandes hombres abordan el problema…*

Otra fuente importante de paradojas fue la utilización automática de la “regla de Barrow” para el cálculo de áreas o integrales definidas, según el método de Newton. Por ejemplo

[7] La Real Sociedad Matemática Española ha publicado una cuidadísima traducción, enriquecida con multitud de notas, junto con una edición facsimilar de un ejemplar de la primera edición ([Eu]). Véanse también los Capítulos 9 y 10 de [Du].

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x} = \log x \Big|_{-1}^{1} = -\log(-1) = -(2n+1)p\, i \quad (n \text{ entero})\cdot$$

¿Cómo se explica que la suma de infinitésimos reales $\frac{dx}{x}$ pueda originar distintos valores, todos ellos imaginarios? **S. Poisson** (1781-1840) trató de explicar el resultado mediante un cambio de variable $x = -(\cos q + i \operatorname{sen} q)$, entre los valores q = 0 y q = *(2n+1)* (lo que equivale a sustituir el intervalo de integración [-1,1] por distintos arcos de círculo), pero la solución seguía siendo misteriosa. El mismo tipo de contradicción había sido puesto de manifiesto por **J. D'Alembert** (1717-1783) al obtener en 1768

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x}\Big|_{-1}^{1} = -2,$$

es decir, un número negativo como suma de infinitésimos positivos. Un argumento similar fue utilizado también por **J. L. Lagrange** (1736-1813). Otras contradicciones surgían al aplicar automáticamente las fórmulas de cambio de variable o la integración por partes, como hemos puesto de manifiesto en el Capítulo I.

En fin, la situación a finales del siglo XVIII se iba haciendo insostenible. La incuestionable efectividad del Cálculo para representar y predecir los fenómenos del mundo real contrastaba con el débil andamiaje lógico que lo sustentaba. El problema se agravó por la necesidad de confeccionar manuales y tratados didácticos para los alumnos de las nuevas Universidades que fueron surgiendo en toda Europa, tomando como modelos las grandes *Écoles* creadas tras la Revolución en Francia. La necesidad de organizar rigurosamente la teoría por motivos didácticos tuvo otra importante consecuencia: una profunda reflexión sobre los *fundamentos* de cada teoría y, en particular, sobre los fundamentos del Análisis, que como hemos visto ocupaba un lugar preeminente como herramienta de modelización de la Naturaleza. Es claro, pues, que se imponía la búsqueda de nuevos paradigmas del rigor en Matemáticas.

Uno de los primeros intentos en esa dirección se debe a Lagrange, quien en 1797 publicó la monografía *Théorie des fonctions analytiques* como libro de texto para sus alumnos de la *Ecole Polytechnique*, fundada pocos años antes. En este libro que, como orgullosamente declara su autor, presenta la teoría de funciones y el cálculo diferencial *"liberados de toda consideración acerca de infinitesimales, cantidades evanescentes, límites o fluxiones..."*, Lagrange *define* de hecho una función por su desarrollo en serie de potencias, y las derivadas sucesivas de la función aparecen como los correspondientes coeficientes en el desarrollo en serie de la misma, siendo por tanto, funciones "derivadas" de la primera. El problema es que Lagrange nunca pudo probar convincentemente la existencia del desarrollo en serie de una función "arbitraria". En cualquier caso, en la obra de Lagrange se apunta uno de los aspectos que, finalmente, permitieron resolver el problema de la fundamentación del Cálculo Diferencial en sentido moderno. En sentido más o menos cronológico, los pasos preliminares para llegar a la solución finalmente aceptada fueron estos:

1. La adopción de la noción de *función* como objeto central del cálculo (en lugar del concepto más vago de *variable*).
2. La elección de la noción de *derivada* como concepto fundamental del cálculo diferencial (en lugar de la *diferencial*).
3. La concepción de la derivada como una *función.*

4. El concepto de *límite* como noción básica para el desarrollo de la teoría.

Ya hemos visto cómo Euler en la *Introductio* concibe ya el cálculo como el estudio de las funciones. Los puntos (2) y (3) aparecen explicitados en la *Théorie* de Lagrange, como ya hemos citado, aunque su solución para evitar el uso de infinitésimos está viciada al presuponer la existencia del desarrollo en serie de potencias de cualquier función. Como pronto señaló Cauchy, existen funciones tan sencillas como la $f(x) := e^{-1/x^2}$ si $x \neq 0; f(0) = 0,$ que no admiten un desarrollo en serie en un entorno de 0 (e.d., no son *analíticas*). Los primeros intentos para basar el cálculo diferencial en una noción de límite aparecen en el artículo de D'Alembert sobre el tema *Limite* publicado en 1765 en la *Encyclopédie*: "Una magnitud se dice que es el *límite* de otra magnitud cuando la segunda puede acercarse a la primera dentro de cualquier orden de magnitud dado, por pequeño que sea, aunque pueda no llegar a alcanzarla." Pero donde esta noción se utiliza sistemáticamente para la fundamentación del cálculo es en el famoso *Cours d'analyse*, publicado en 1821 por **A. L. Cauchy** (1789-1857), en el que se recogen las lecciones impartidas por el mismo en la *Ecole Polytechnique*. En el prólogo, Cauchy expresa su concepción del rigor en análisis de la siguiente forma:

> "*Respecto a los métodos, he tratado de darles un rigor semejante al que se pide en Geometría [...] Razonamientos como el paso de series convergentes a divergentes, o de cantidades reales a imaginarias, aunque comúnmente admitidos, no me parecen inducciones adecuadas para presentar la verdad [...] Además, debemos observar que* [este tipo de razonamiento] *tienden a atribuir una validez indefinida a las fórmulas algebraicas, cuando en realidad la mayor parte de estas fórmulas existen sólo bajo ciertas condiciones y para ciertos valores de las cantidades que contienen. En la determinación de esas condiciones y esos valores, he abolido toda incertidumbre.[...] Es verdad que, para mantenerme fiel a estos principios, me he visto obligado a admitir muchas proposiciones que, quizás, parecen un poco severas a primera vista.*" ([C])

La primera de estas proposiciones "un poco severas" es que "*una serie divergente no tiene una suma*" (¡!). Cauchy defiende que las series infinitas, instrumento básico del análisis de la época, deben ser tratadas con extremo rigor, aún a costa de una drástica reducción de la aplicabilidad de las fórmulas utilizadas. "*Por tanto, antes de considerar la suma de cualquier serie, debo examinar en qué casos la serie puede sumarse...*".

El instrumento que Cauchy desarrolla y utiliza sistemáticamente para realizar una revisión crítica del Análisis es la teoría de límites. Sobre la noción precisa de límite Cauchy edifica todo el edificio del Análisis. Su definición es la siguiente:

"*Cuando los valores atribuidos sucesivamente a la misma variable se aproximan indefinidamente a un valor fijo, de modo que llega a diferir de él tan poco como se quiera, este último valor se llama el* límite *de los otros.*"

A continuación, Cauchy ***define*** un infinitésimo o cantidad infinitamente pequeña como una <u>*variable*</u> *con límite cero*. De esta manera, Cauchy evita todas las confusiones y controversias que resultan de considerar los infinitésimos como números *fijos* menores (en valor absoluto) que cualquier número real positivo. A continuación, Cauchy desarrolla la teoría básica a partir de esta definición: funciones continuas, etc. El año siguiente (1822), Cauchy publica su *Résumé des leçons donees a l'Ecole Royal Polytechnique sur le calcul infinitesimal* (o, simplemente *Résumé*) Aquí Cauchy da un nuevo paso hacia la fundamentación rigurosa del Cálculo al tomar como concepto básico el de *derivada* de una función (definido como límite del cociente incremental usual), en lugar del mas impreciso de *diferencial*. Sobre este concepto construye de forma rigurosa toda la teoría elemental del cálculo diferencial.

Ya hemos visto algunas de las paradojas que resultan del uso indiscriminado de la *regla de Barrow* para el cálculo de integrales definidas. Siguiendo su programa de establecer un desarrollo riguroso del cálculo, **Cauchy** se plantea la necesidad de *demostrar* la existencia de la integral definida. Y así, en el Prólogo de su *Résumé* publicado en 1822, dice:

"... En el cálculo integral, me ha parecido necesario demostrar generalmente la existencia de las integrales *o* funciones primitivas *antes de probar sus diversas propiedades. Para ello, he hallado necesario establecer al comienzo la noción de* integral entre límites dados *o* integral definida."

Y en la lección 21 del *Résumé* Cauchy demuestra la existencia de la integral definida $\int_a^b f(x)dx$ de una función continua *f(x)* en el intervalo [a,b] como límite de las áreas de los rectángulos inscritos en la gráfica de la función *f* con base en los intervalos de particiones cada vez más finas del intervalo [a,b]. Es decir, que el método de exhausción de los griegos funciona para los recintos que están limitados por el eje de abscisas y la gráfica de una función continua *arbitraria*.

El paso siguiente lo dio **B. Riemann** (1826-1866), quien en su su trabajo de *Habilitationsschrif* en 1854 consideró la *totalidad* de las funciones para las que el método de exhausción *a lo Cauchy* funcionaba, junto con una serie de caracterizaciones y propiedades de la nueva clase de funciones (las funciones *integrables Riemann*) que las convirtieron en la clase más amplia de funciones *razonables* hasta finales del siglo XIX, y a su integral, una herramienta potente y versátil que rápidamente fue aceptada por la comunidad matemática. La siguiente opinión de **P. Du Bois-Reymond** (1883) fue generalmente compartida por los matemáticos del siglo XIX:"*Riemann ha logrado extender el concepto de integral a sus posibilidades más extremas".* No parecía concebible una posible extensión de la noción.

A pesar de lo expuesto, el mismo Cauchy y muchos otros matemáticos de la época, siguieron utilizando, paradójicamente, el lenguaje y las técnicas intuitivas de los infinitésimos, lo que originó confusión y falta de precisión. Por otro lado, la ausencia de una definición precisa y rigurosa de los números reales impedía el establecimiento de una base sólida para el Cálculo, y hacía que muchos de los argumentos utilizados estuvieran viciados en origen, como sucede por ejemplo con la utilización sistemática por parte de Cauchy del criterio que lleva su nombre para probar la existencia de límite de una sucesión de reales. Por cierto, que el criterio de Cauchy o su equivalente, el axioma del supremo, había sido utilizado anteriormente por **B. Bolzano** en un casi desconocido artículo publicado en Praga en 1817, en el que, tras definir la noción de función continua de manera análoga a como lo iba a hacer Cauchy, se probaba rigurosamente (con ayuda del citado axioma) el teorema de los valores intermedios para tales funciones

Finalmente, **R. Dedekind** y **G. Cantor** publicaron en 1872 sendas construcciones rigurosas de los números reales, lo que permitió culminar el proceso de aritmetización del Análisis a **K. Weierstrasss (**1815-1897), estableciendo la definición de límite por medio de la condición ε, δ (esencialmente, la que se utiliza hoy en los textos) y que permite construir todo el Cálculo en términos de las propiedades del sistema de números reales, sin ninguna mención a los infinitésimos. La definición de Weierstrass termina con la concepción dinámica de la idea de límite, como un proceso infinito inacabado de una magnitud variable que se aproxima indefinidamente a otra, sin alcanzarla. Ésta es precisamente la clave del argumento de Zenón en su paradoja de Aquiles y la Tortuga.

Así pues, los infinitésimos desaparecieron del análisis riguroso alrededor de 1872… hasta 1966, año en el apareció el libro *Non-standard Analysis* de **A. Robinson** (1918-1974). En el prólogo, se puede leer:

> *A finales de 1960 se me ocurrió que los conceptos y métodos de la Lógica Matemática contemporánea podían proporcionar un marco adecuado para el desarrollo del Cálculo Diferencial e Integral en términos de números infinitamente pequeños e infinitamente grandes.* ([Ro])

Partiendo de una construcción utilizada por T. Skolen en 1934, Robinson considera una extensión $^*\mathbb{R}$ de $\mathbb{R}$ (esencialmente, una ultrapotencia de $\mathbb{R}$ por un ultrafiltro libre en $\mathbb{N}$) que es un cuerpo ordenado (no arquimediano, por supuesto), llamado el cuerpo de los números *hiperreales*. La aportación esencial de Robinson fue la utilización de un profundo teorema de teoría de modelos, el *Teorema de Los*, para establecer el llamado ***Axioma de Transferencia***, que esencialmente afirma que todo enunciado "bien formado", válido para todos los números reales, también es válido para todos los números hiperreales. A partir de este axioma, puede probarse que existen en el cuerpo $^*\mathbb{R}$ elementos no nulos tales que $0< \varepsilon < r$, para cualquier número real positivo *r*, es decir, *infinitésimos*. En consecuencia, $1/\varepsilon$ es mayor que cualquier número real positivo, es decir, un número *infinito*. El axioma de transferencia permite extender a $^*\mathbb{R}$ toda función definida sobre $\mathbb{R}$ y de este modo desarrollar rigurosamente un cálculo "a lo Leibniz", donde los infinitésimos y los elementos infinitamente grandes son genuinos objetos matemáticos. Los elementos de $^*\mathbb{R}$ que se pueden identificar a elementos de $\mathbb{R}$ se llaman e*stándar*, y los demás son elementos *no-estándar*. Dos elementos de $^*\mathbb{R}$ se dice que están infinitamente próximos si su diferencia es un infinitésimo. Con este lenguaje, una función real *f* es continua en *r* si su extensión a $^*\mathbb{R}$ transforma puntos infinitamente próximos a *r* en puntos infinitamente próximos a *f(r)*. En fin, para todo número hiperreal finito *a* (es decir, mayorado por algún número real) existe un *único* número real infinitamente próximo a él, que se llama la *parte estándar* de *a*, y esto permite definir adecuadamente la noción de derivada, integral, etc.

El uso de la teoría de modelos y de resultados profundos de lógica simbólica en la construcción de Robinson hacían difícil su difusión a nivel elemental. Pero en 1976 apareció [Ke], en donde tras una introducción axiomática de los hiperreales, se desarrolla a nivel elemental un texto de cálculo con técnicas no estándar[8], que resulta ciertamente atractivo. En [SL] se desarrolla un curso de Análisis de nivel más elevado, con aplicaciones a la Topología y al Análisis Funcional, pero utilizando también herramientas más sofisticadas. El lector interesado puede consultar en [DD] varias contribuciones a distintas áreas de las matemáticas con técnicas no estándar, así como una abundante bibliografía al respecto.

[8] El libro está agotado, pero puede descargarse en la página http://www.math.wisc.edu/~keisler/

3.2.4. *El infinito actual. La teoría de conjuntos.*

Ya hemos visto que el rechazo aristotélico a la existencia de magnitudes o conjuntos infinitos se mantuvo durante toda la Edad Media. A partir del siglo XIV, como hemos dicho más arriba, los matemáticos comienzan a usar procesos infinitos, como las series y, más tarde, los métodos infinitesimales, pero siempre de manera acrítica y meramente instrumental. Se hablaba de los puntos de un segmento, pero se evitaba decir que el segmento estaba formado por infinitos puntos…

Las propiedades paradójicas del infinito matemático, más o menos conocidas ya por varios pensadores medievales, fueron claramente puestas de manifiesto por Galileo. En efecto, en uno de los diálogos entre los personajes principales, Salviati y Simplicius (los mismos que los de *El Diálogo* de 1632), de su obra póstuma *Discursos y demostraciones relativas a dos nuevas Ciencias* (1638), el primero hace notar que se pueden emparejar biunívocamente los números naturales con sus cuadrados (que forman un subconjunto propio del primer conjunto); es decir, una parte (el conjunto de *cuadrados*) tiene el *mismo número* de elementos que el todo (el conjunto de *todos los números naturales*). En otro lugar constata que, al considerar dos circunferencias concéntricas y trazar radios desde el centro común, haciendo corresponder a cada punto **A** de la circunferencia pequeña el único punto de la circunferencia grande en el que el radio que pasa por **A** la corta, se puede establecer una biyección entre los puntos de la circunferencia pequeña y los de la grande[9]. En ambos casos, parece contradecirse uno de los principios más firmemente establecidos: el de que *el todo es mayor que la parte.* De hecho, este principio aparece como la *Noción Común* número 5 en *Los Elementos* de Euclides ([He2]). Recordemos que estas *nociones comunes* se suponían verdades evidentes de naturaleza general, no específicas de la Geometría.

Desgraciadamente, Galileo no dio el paso adelante, lógicamente coherente, de aceptar esta propiedad de los conjuntos infinitos. Simplemente, sacó la consecuencia de que no se pueden comparar entre sí magnitudes infinitas, que son intrínsecamente incomprensibles, ya que

> *…intentamos, con nuestra mente finita, discutir el infinito, asignándole las mismas propiedades que damos a lo finito y limitado. Creo que esto es un error… Los atributos "igual", "mayor" y "menor" no son aplicables al infinito, sino sólo a cantidades finitas.*

Como hemos visto, ésta es la actitud predominante de los matemáticos ante el problema del infinito: ignorarlo y seguir adelante. Es significativa, a este respecto, la opinión de **K. F. Gauss** (1777-1855), expresada en una carta escrita en 1831: *"En lo que concierne a su demostración…protesto contra el uso que se hace de una cantidad infinita como una entidad real; esto nunca se permite en matemáticas. El infinito es sólo una manera de hablar, puesto que se trata en realidad de límites…"* También Cauchy rechazaba la existencia de conjuntos infinitos por la propiedad que tenían de ponerse en correspondencia biyectiva con una parte propia suya. En fin, esta actitud de evitar los problemas que ocasionan los conjuntos infinitos era, como dice **Kline** [Kl1, p. 994], hipócrita, pero permitió avanzar considerablemente en la construcción del cálculo. Pero el programa de rigorización del Análisis iniciado en el primer tercio del siglo XIX hizo que no se pudiera obviar por más tiempo el problema de los conjuntos infinitos.

---

[9] También aparecen conjuntos infinitos de puntos en la discusión de la **paradoja de la rueda de Aristóteles**. *Cfr.* Nota 1 en pág. 7..

El primero en aceptar explícitamente la existencia del infinito actual fue el matemático y teólogo checo **B. Bolzano** (1781-1848). En 1851, tres años después de su muerte, apareció su obra *Paradoxien des Unendlichen* (Paradojas del Infinito) ([Bol]), en la que se recogen sus reflexiones sobre la noción de infinito, no sólo desde el punto de vista matemático, sino también los aspectos físicos y filosóficos del mismo. Pero, desde luego, la parte más importante de la obra es la que se refiere a las Matemáticas. Para empezar, Bolzano introduce por primera vez un punto de vista conjuntista en las Matemáticas. Así, en las primeras secciones de su obra Bolzano describe los conceptos conjuntistas que va a utilizar, distinguiendo entre *agregado*, que define como *"un todo cuyas partes se encuentran bien definidas (ein aus gewisen Teilen bestebendes Ganze)", conjunto,* que es *"un agregado que depende de un concepto respecto al cual el orden de sus elementos es indiferente"* y *multitud* (de A), que es *"un conjunto cuyos elementos pueden ser considerados como objetos de un cierto tipo A"* (es decir, un conjunto formado por unidades de un cierto tipo). Bolzano continúa analizando distintas nociones de infinito que se han dado, y en el párrafo 9 introduce su concepto de infinito así:

> *Llamaré* **infinita** *a una multitud si todo conjunto finito es tan sólo una parte de ella.*

Y a continuación construye un conjunto infinito en particular: el conjunto de todas las proposiciones y verdades en sí. Su demostración se basa en la distinción entre una proposición verdadera *P* y la proposición *P es verdadera* y utiliza implícitamente la existencia de un conjunto infinito previo: el de los números naturales (que por otro lado se nos aparece como el ejemplo más claro de conjunto infinito). Es claro que Bolzano quería evitar este círculo vicioso, pero hoy sabemos que su intento estaba condenado al fracaso: la existencia de al menos un conjunto infinito debe ser introducido como axioma.

En cualquier caso, Bolzano defiende la existencia *real* de magnitudes infinitas *"no sólo entre las cosas que no poseen realidad, sino igualmente entre las que sí la tienen"* ([Bol; § 25]). En cuanto al infinito potencial de los matemáticos, no lo considera una magnitud infinita individual, sino una magnitud variable. El infinito no se debe buscar en un proceso eternamente inacabado; al contrario, la posibilidad de tomar valores más y más grandes supone que el conjunto de esos valores es realmente infinito.

Bolzano reconoce la existencia de diferentes órdenes de infinitud y se enfrenta al problema de comparar y establecer un orden entre los conjuntos infinitos. Para ello introduce dos vías paralelas: una a partir de la *medida* de una multitud (a través de un proceso que incluye la elección de una unidad de medida y el uso de la propiedad de aditividad [10]) y otra a partir de su *multiplicidad*, que corresponde más o menos a la noción cantoriana de *cardinalidad*. En una obra anterior[11] había establecido como criterio de igualdad de dos multitudes la existencia de una biyección entre ellas. Pero la dificultad de establecer tales biyecciones en casos concretos, junto con la paradoja de la existencia de conjuntos que son biyectivos con una parte propia suya (propiedad que en [Bol; §20] se prueba que *caracteriza* a los conjuntos infinitos) hizo que se inclinara por la primera opción. En último término Bolzano rechazaba, como Galileo, la idea de que el todo pu-

---

[10] Véase [Bol; §16]

[11] *Wissenschaftslehre*, 1837

diera ser igual a una de sus partes. Así, a pesar de la existencia de una biyección obvia entre el segmento (0,5) y el (0,12), su *medida* es distinta Este conflicto profundo le impidió construir una aritmética coherente de magnitudes infinitas (por ejemplo, sostenía que la magnitud de un conjunto infinito cambia cuando se le añade un elemento.) Las secciones 50 a 69 contienen reflexiones sobre física y metafísica, en relación con el infinito.

A pesar de las dudas, contradicciones y ambigüedades que contiene, *Paradojas del Infinito* es una obra notable que establece ya las directrices básicas de la unificación de la Matemática sobre la Teoría de Conjuntos y es un precedente histórico claro de los trabajos de Cantor y Dedekind.

El creador reconocido de la Teoría de Conjuntos es **G. Cantor** (1845-1918), aunque fue decisiva para su desarrollo la relación personal y epistolar con su gran amigo **R. Dedekind** (1831-1916). La manera en que Cantor llegó a interesarse por los problemas del infinito es ciertamente curiosa. En 1869 el joven Cantor llega a la pequeña Universidad de Halle para obtener su *Habilitación* (con una Tesis en Teoría de números) y allí conoce a **H. Heine** (1821-1881), quien le introduce en un problema en el que llevaba tiempo trabajando: la unicidad de la representación de una función por medio de series trigonométricas. En una serie de artículos publicados en 1870 y 1871, Cantor logró probar la unicidad de representación cuando la serie trigonométrica convergía puntualmente, salvo a lo más en un conjunto *finito* de puntos de un intervalo de periodicidad. La pregunta natural era si el resultado sigue siendo cierto para un conjunto *infinito* de puntos. Obviamente, la respuesta es negativa para el conjunto formado por todo el intervalo, luego se trataba de saber qué tipo de conjuntos infinitos (si había alguno) proporcionaban una respuesta afirmativa al problema. Esto llevó a Cantor a plantearse el estudio y posible clasificación de los subconjuntos infinitos de números reales. Y para ello tuvo que comenzar estableciendo una noción rigurosa de número real. En 1872 aparece su famoso trabajo en *Mathematische Annalen* en el que construye el conjunto de los números reales por medio de sucesiones de Cauchy de números racionales. A partir de aquí, demuestra las propiedades fundamentales, incluyendo la completitud, y con esta sólida base comienza el estudio riguroso de conjuntos arbitrarios de números reales: define cuidadosamente las nociones de *punto límite* de un conjunto *P*, la de *conjunto derivado P'* (conjunto de los puntos límites de *P*), etc. Finalmente, con estas herramientas consigue dar una respuesta al problema de la unicidad: La serie es única si converge salvo a lo más en un *"conjunto de Primera Especie"*, es decir, tal que alguno de sus sucesivos conjuntos derivados, $P^{(n}$, sea vacío.

En el mismo año, Dedekind había publicado su ensayo *Stetigkeit und irrationale Zahlen* en el que construía los números reales por medio de *cortaduras* de números racionales, es decir, un par (I, S) de subconjuntos infinitos de números racionales, tal que todo elemento de I es menor o igual que cualquier elemento de S y cualquier número racional pertenece o bien a I o bien a S. Lo destacable de ambas construcciones es que en ellas aparece un número real en términos de conjuntos *infinitos* de racionales (una sucesión de Cauchy o un par de subconjuntos que determina una cortadura) Tanto Cantor como Dedekind defienden la existencia del infinito actual como fundamental para sus construcciones.

Tras su trabajo sobre los reales, el interés de Cantor derivó hacia los problemas del infinito y el continuo. Su teoría de conjuntos y números transfinitos se encuentra dispersa a lo largo de muchos trabajos, el primero de los cuales apareció en el *Journal de Crelle* en 1874. En él Cantor considera al menos dos clases de infinitos: el correspondiente al conjunto de los números naturales y el de los números reales. Prueba que no existe una biyección entre ambos conjuntos y que el conjunto de los números algebraicos (es decir, los que son raíces de algún polinomio con coeficientes enteros) se puede poner en correspondencia biyectiva con el de los números naturales. De estos dos hechos deduce un teorema de Liouville sobre la existencia de infinitos números trascendentes (es decir, no algebraicos). En el siguiente artículo, Cantor establece ya como idea central de su teoría la noción de conjunto (que define como *una colección de objetos bien definidos que la mente puede concebir como un todo y decidir si un objeto dado pertenece o no a ella*). Introduce la idea de *equivalencia* de conjuntos por medio de la existencia de una biyección entre ellos. Dos conjuntos equivalentes tienen la misma *potencia* (posteriormente se usó el término *cardinal*). Para Cantor (como para Bolzano), un conjunto es infinito si puede ponerse en correspondencia biyectiva con un subconjunto propio. Cantor prueba que los racionales es el conjunto infinito con menor potencia, y que la potencia de $\mathbb{R}$ y de $\mathbb{R}^n$ es la misma para cualquier entero positivo n (este resultado sorprendió tanto a Cantor que cuando se lo comunicó a su amigo Dedekind en 1877, escribió "*¡lo veo, pero no lo creo!*"). La novedad de los conceptos y técnicas empleadas y los sorprendentes resultados obtenidos, que contradecían muchas ideas arraigadas sobre el "tamaño" de distintos conjuntos, hizo que las teorías de Cantor despertaran la oposición e incluso la hostilidad de muchos matemáticos contemporáneos. Entre ellos destaca la figura de **L. Kronecker** (1823-1891), muy influyente en la época, para quien sólo los objetos matemáticos que podían contruirse en un número finito de etapas a partir de los naturales, tenían sentido (es, pues, el primer representante de la corriente *intuicionista* o *constructivista*[12] en Matemáticas, que iba a tener su momento de mayor influencia en el primer tercio del siglo XX) . Al parecer, cuando **Lindemann** probó la trascendencia de π en 1882, Kronecker dijo:

¿De qué sirve su bello trabajo sobre π ? ¿Por qué estudiar estos problemas, si los números irracionales no existen?

A pesar de la oposición de Kronecker, que le produjo una crisis nerviosa y una profunda depresión entre 1884 y 1887, Cantor continuó sus trabajos. En 1880 introduce las nociones de unión e intersección arbitraria de conjuntos y, si P es un conjunto de números reales que no es de Primera Especie, define $P^{(\infty} := \bigcap_{n=1}^{\infty} P^{(n}$ y posteriormente la cadena

$$P^{(\infty+1} := \left(P^{(\infty}\right)', \cdots, P^{(2\infty} := \left(P^{(\infty}\right)^{(\infty}, \cdots, P^{(\infty^2} := \bigcap_{n=1}^{\infty} P^{(n\infty}, \cdots$$

y, en general $P^{(\gamma}$ para cada *"símbolo infinito"* de la forma $\gamma = n_k\infty^k + n_{k-1}\infty^{k-1} + \ldots + n_1\infty + n_0$, dando así comienzo a la aritmética transfinita. En 1883 discute los conjuntos bien ordenados e introduce los números ordinales y la suma y el producto de números transfinitos. En fin, en 1895 y 1897 aparecieron en *Mathematische Annalen* sus dos principales trabajos sobre la teoría de conjuntos, con una exposición sistemática y moderna de la misma. Al parecer, Cantor retrasó la publicación del segundo artículo, esperando incluir una prueba de la *hipótesis del continuo*, que él mismo había formulado.

[12] Véase Sección 4.2.

4.- Paradojas, paradojas y más paradojas.

El sueño de la razón produce monstruos
(Título del *Capricho* Nº 43 de *Francisco de Goya*)

Para ver claro, basta con cambiar la dirección de la mirada
(*Antoine de Saint-Exupéry*)

4.1.- Paradojas del Análisis.

Una buena descripción de la situación del Análisis al comienzo del siglo XIX aparece en la carta que escribe **N. Abel** (1802-1829) en Octubre de 1826, desde París, a su antiguo maestro **Hansteen** en Oslo:

> *Quiero dedicar todos mis esfuerzos a traer un poco de claridad a la prodigiosa oscuridad que uno encuentra hoy en el Análisis. La falta de unidad y planificación hace realmente sorprendente que haya tanta gente estudiando esta disciplina. Lo peor de todo es la absoluta falta de rigor con que se trata. Sólo hay unas pocas proposiciones en análisis superior que hayan sido demostradas con todo rigor. Por todas partes aparece la desafortunada forma de razonar de lo particular a lo general, y resulta extraño que, a pesar de todo, aparezcan tan pocas paradojas.*
>
> *En mi opinión, la razón es que las funciones de las que, hasta ahora, se ha ocupado el análisis, pueden, en su mayor parte, expresarse por una serie de potencias. Cuando aparecen otras para las que esto no es verdad (lo que, ciertamente, no sucede a menudo), los resultados pueden no ser ciertos, y así fluye una masa de proposiciones incorrectas ligadas una a la otra.*
>
> *Esto continuará así hasta que se descubra un método general. Pero debo ser extremadamente cuidadoso, pues una vez admitidas las proposiciones sin una demostración rigurosa (es decir, sin demostración), arraigan tan profundamente en mí que en cada instante me expongo a utilizarlas sin ningún cuidado...*

Como hemos visto, el “método general” al que hace referencia Abel, pasa por clarificar las nociones básicas de *función*, *límite* y *continuidad*, y su desarrollo, junto con el de los nuevos paradigmas de rigor a que dio origen, ocupó los dos últimos tercios del siglo XIX. Pero este desarrollo riguroso sacó también a la luz una serie de *monstruos* de la razón que contradecían la intuición geométrica, casi todos obtenidos por un proceso de paso al límite. Veamos a continuación algunos ejemplos:

4.1.1.Funciones y conjuntos paradójicos en relación con la noción de Integral.

Riemann introdujo la noción de integral que lleva su nombre en su trabajo de *Habilitationsschrif* en 1854, estableciendo así la que por mucho tiempo sería la clase más amplia de funciones *razonables* para el cálculo: las funciones *integrables Riemann.* Tras la definición, Riemann demostró dos criterios de integrabilidad de los que fácilmente resultaba que las funciones continuas y las monótonas eran integrables. Al mismo tiempo, construyó una de las primeras funciones *monstruosas*: si para cada número real x escribimos $i(x):=$ entero más próximo a x y $(x):= x\text{-}i(x)$ si $x \quad (2k+1)/2$ (k entero); 0 en otro caso, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(nx)}{n^2}$ es uniformemente convergente y define una función $R(x)$ que es discontinua (con discontinuidades de salto) exactamente en el conjunto (denso) de puntos

$$\left\{ x_n^k = \frac{2k+1}{2n} : k, n \in \mathbb{Z} \right\} \text{(fracción irreducible).}$$

Pese a sus infinitas discontinuidades, la función es integrable en cualquier intervalo finito, como resulta fácilmente de los criterios de Riemann.

La integral de Riemann supuso un avance decisivo para el desarrollo riguroso del Análisis. Pero también fue el origen de numerosos problemas. Por ejemplo, el teorema fundamental del cálculo no se verifica para esta integral: hay funciones f integrables Riemann tales que su integral indefinida $F(x) = \int_a^x f$ no es derivable (basta que f tenga una discontinuidad de salto); existen funciones integrables Riemann sin primitiva (como, por ejemplo, la $g(x) = \text{sen}\frac{1}{x}$ si $x \neq 0$; $g(0) = 1$); en fin, hay funciones derivables cuya derivada no es integrable Riemann. Afortunadamente, **G. Darboux** (1842-1917) demostró en 1875 que si f *tiene derivada acotada e integrable Riemann* en [a,b], $\int_a^b f' = f(b) - f(a)$, es decir, la regla de Barrow es válida en este caso. El primero en hacer notar que la integrabilidad de la derivada no era una hipótesis superflua, fue el matemático italiano **U. Dini** (1845-1918). En efecto, si f es una función derivable no constante tal que en todo intervalo existen puntos en los que se anule la derivada, entonces *f' no puede ser integrable,* puesto que en las sumas de Riemann que tienden a $\int_a^b f'$ puede tomarse siempre para cada partición un punto en cada intervalo de la partición en que se anule la derivada, y por tanto la correspondiente suma será 0. En consecuencia, $\int_a^b f' = 0 \neq f(b) - f(a)$. Dini creía que era "muy probable" que existieran funciones con la propiedad anterior, pero no pudo construir un ejemplo. En 1896, utilizando la técnica de "condensación de singularidades" análoga a la empleada por Riemann en la construcción de la función R, **T. Broden** construyó una función g estrictamente creciente con derivada acotada, tal que g' se anula en un conjunto *denso,* luego por el argumento anterior, g' no puede ser integrable. Sin embargo, el primero en dar un ejemplo de tal función había sido **V. Volterra** (1860-1940), en sus trabajos sobre conjuntos diseminados con contenido no nulo, como veremos enseguida. Pero antes, viene al caso una pequeña digresión:

El maestro de Riemann, **P. Dirichlet** (1805-1859)**,** en su famoso trabajo sobre la convergencia de la serie de Fourier de una función, había sido el primero en señalar la posibilidad de extender la noción de integral (de Cauchy) a funciones cuyas discontinuidades formaran un conjunto *pequeño* en algún sentido. Dirichlet conjeturó que debieran poder integrarse las funciones cuyo conjunto de discontinuidades fuera lo que hoy llamamos un *conjunto diseminado*, es decir tal que su adherencia no contuviera segmentos. En trabajos posteriores aparecen otras nociones de *pequeñez*: conjuntos de primera especie (Dirichlet, Lipschitz, Cantor, etc.), conjuntos de contenido cero (Riemann, Stolz, Harnack, etc.), conjuntos de medida cero (Harnack, Borel, Lebesgue), y la confusión entre estas nociones es causa frecuente de contradicciones. La clarificación de la noción de *tamaño* de un conjunto fue uno de los problemas que impulsaron el estudio de los conjuntos infinitos y la topología en la segunda mitad del siglo XIX.

La función R de Riemann tiene un conjunto de discontinuidades *denso*, y por tanto, no diseminado. Pero, por otro lado, existen funciones no integrables Riemann cuyas discontinuidades forman un conjunto diseminado (lo que invalida la conjetura de Dirichlet). La construcción de estas funciones está ligada a la de conjuntos diseminados con contenido no nulo. La idea general de la construcción de tales conjuntos consiste en distribuir una sucesión (I_n) de intervalos abiertos disjuntos densamente en [0,1] (es decir, de modo que todo subintervalo I [0,1] contenga algún I_n). Entonces **C** = [0,1]\ I_n es *cerrado* y *diseminado*. Si, además, $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{long}(I_n) < 1$, entonces **C** no puede tener contenido 0 claramente. (Por el contrario, si $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{long}(I_n) = 1$, **C** tiene medida 0, y por tanto, contenido 0). Volterra siguió este proceso para después construir una función continua estrictamente creciente, constante en cada I_n. Más tarde, Cantor repitió el mismo procedimiento para construir el famoso conjunto que lleva su nombre: un conjunto compacto, infinito no numerable, sin puntos aislados, diseminado y de medida 0, y con él, la función singular asociada (una función estrictamente creciente, con derivada 0 en casi todo punto). Sin embargo, hay que decir que antes que Volterra un desconocido matemático inglés, **H. J. Smith** (1826-1883) había descubierto en 1875 dos métodos para construir conjuntos diseminados, el segundo de los cuales es esencialmente el que hemos descrito más arriba. Desgraciadamente, su trabajo no fue conocido en el continente.

El desarrollo de la integral de Riemann motivó también el interés renovado por un viejo problema: el problema del área.

En general, para los griegos y todos los matemáticos posteriores, el área de una región del plano es un concepto primitivo. El problema es *calcularla*. Ya hemos visto cómo los griegos desarrollaron el método de exhausción para calcular el área de ciertas regiones. Vimos también cómo los métodos de los indivisibles se emplearon para realizar ésta tarea en el Renacimiento. En particular, al aplicar estos métodos a los recintos limitados por la gráfica de una función en un intervalo y el eje de abscisas, se pudo establecer la relación inversa que había entre el cálculo del área de estos recintos y el de las tangentes a las curvas que los limitan. De este modo, hasta bien entrado el siglo XIX se identificaba el problema de calcular el área limitada por la gráfica de una función $y = f(x)$ en un intervalo [a,b], es decir, la *integral definida* $\int_a^b f(x)d(x)$, con el problema de la antiderivación.

Las sucesivas extensiones de la noción de integral imponían siempre ciertas restricciones a la clase de las funciones integrables. Una alternativa evidente consistía en definir la integral de una función como el *área* de su recinto de ordenadas. Pero entonces surge el problema de analizar qué se entiende por área de un conjunto plano. A finales del siglo XIX se realizan distintos intentos para sistematizar esta noción (véanse, por ejemplo, [H], [Pes] y [Bo1]), lo que lleva a plantear el llamado

<u>*Problema de la medida*</u>**:** *¿Puede asignarse a cada subconjunto A de la recta (o, en general, del espacio euclídeo n-dimensional) un número, $m(A) \geq 0$ (su medida), de modo que:*

1. *Si A y B son disjuntos, $m(A \cup B) = m(A) + m(B)$.*

2. *Si T es una isometría del plano, m(T(A)) = m(A).*

3. *La medida del intervalo unidad n-dimensional es 1 (normalización)?*

H. Lebesgue (1875-1941) resuelve el problema en su Tesis [Le] en 1901 para una clase M de subconjuntos de la recta que contiene a todos los abiertos, a los cerrados y a muchos otros conjuntos. Además, la función obtenida es *numerablemente aditiva*, esto es, si (A_n) es una sucesión disjunta de elementos de M,

$$m(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n)\cdot$$

Más aún, la solución de Lebesgue es la *única* posible sobre M que cumple esta propiedad. Poco después, en1905, **G. Vitali** (1875-1932) construyó (con ayuda del *Axioma de elección*)[13] un subconjunto de $\mathbb{R}$ que no pertenecía a M. Siguiendo las mismas ideas puede probarse que *no existe una medida numerablemente aditiva* definida sobre todos los subconjuntos de la recta (o del espacio en general).

En todo caso, el problema de la medida seguía abierto. Y así continuó hasta 1923, en que un joven matemático polaco, **S. Banach (**1892-1945) resolvió parte del problema con una serie de técnicas novedosas, pertenecientes al nuevo dominio del *Análisis Funcional*. Banach probó que el problema de la medida en $\mathbb{R}^n$ tiene solución para *n=1*, *2*. Más aún, construyó soluciones que extienden a la de Lebesgue, y otras que **no** extienden a la de Lebesgue; es decir, la solución no es única (*cfr*. [Ba1]).

Un año más tarde, de nuevo Banach, en colaboración con **A. Tarski** (1902-1983), y utilizando un resultado de **Hausdorff** sobre descomposiciones paradójicas de la esfera unidad de $\mathbb{R}^3$, demuestran que el problema de la medida **no** tiene solución para $n \geq 3$. Su resultado es realmente sorprendente, hasta tal punto que se conoce con el nombre de **Paradoja de Banach-Tarski**, y es el siguiente[14]:

*La esfera unidad sólida B de $\mathbb{R}^3$ se puede dividir en m+n partes disjuntas, $B_1, B_2, \ldots B_{m+n}$, de modo que las m primeras se pueden recombinar (usando sólo isometrías del espacio) para formar una bola unidad B***,** *y las otras n se pueden recombinar de la misma manera para formar* ***otra*** *bola unidad B.* ([BaT])

De esta forma, si v fuera una solución al problema de la medida en $\mathbb{R}^3$, se tendría

$$v(B) = \sum_{k=1}^{m} v(B_k) + \sum_{k=m+1}^{m+n} v(B_k) = v(B) + v(B),$$

[13] Véase sección 4.1.2. No es preciso utilizar toda la fuerza del axioma de elección: el teorema de Hanh-Banach (que es estrictamente más débil que el axioma de elección.; véase, por ejemplo [BoR]), junto con los axiomas usuales de la teoría de conjuntos, bastan para probar la existencia de conjuntos no medibles Lebesgue ([FW]).

[14] Una demostración elemental puede verse en [St]. Véase también [Mar].

y, por tanto, $v(B)= 0$. Como el cubo de centro 0 y lado 1/4 está contenido en *B*, su "medida" sería también 0 y, en consecuencia, el cubo unidad también tendría "medida" 0.

Más aún, si *C* y *D* son dos subconjuntos acotados de $\mathbb{R}^{3,}$ ambos con interior no vacío, se pueden descomponer en un mismo número finito de subconjuntos disjuntos y congruentes dos a dos por isometrías (se dice entonces que *C* y *D* son *equidescomponibles*). Es decir, ¡*C* se puede descomponer en un número finito de partes disjuntas que, recombinándolas adecuadamente, permiten obtener *D*!

Más tarde, **Sierpisnki** demostró una versión infinita no numerable de la paradoja: la bola *B* se puede descomponer en *c* (=cardinal del continuo) partes disjuntas, cada una de ellas equivalente, por descomposición finita y recombinación isométrica, a *B***.** La memoria [W] contiene una exhaustiva información sobre la paradoja de Banach-Tarski y, en general, las descomposiciones paradójicas de conjuntos, hasta la fecha de su publicación y es aún hoy la referencia estándar sobre este tópico. En el *Survey* [L2] se incluye una actualización del estado de las investigaciones sobre este apasionante tema.

El responsable último de la paradoja de Banach-Tarski es el *axioma de elección* (o alguna variante del mismo), como veremos en la sección siguiente. Pero, aceptado éste, la diferencia de comportamiento entre *n=1, 2* y *n 3* se debe a la estructura del grupo de isometrías en cada caso. Para *n=1, 2*, las isometrías del espacio forman un grupo *resoluble* (lo que permite que las técnicas de extensión de Banach se puedan aplicar), mientras que para *n 3,* el grupo de isometrías contiene un subgrupo libre generado por dos elementos, que es el responsable, (junto con el axioma de elección), de la descomposición paradójica de la bola tridimensional. Este hecho fue descubierto por **J. von Neumann** (1903-1957) en 1929 (*cfr*. [vN1]), quien introdujo la noción de *grupo "amenable"*, entendiendo por tal un grupo **G** sobre el que existe una medida finitamente aditiva *m* definida sobre todos los subconjuntos de **G**, de masa total 1 (es decir, *m*(**G**) = 1) y que sea invariante (es decir, *m*(*gA*)= *m*(*A*) para cualquier subconjunto *A* de **G** y cualquier elemento *g* de **G**). Von Neumann demostró que todo grupo resoluble es "amenable", mientras que todo grupo que contenga un subgrupo libre generado por dos elementos, no es "amenable". Las descomposiciones paradójicas del tipo de la de Banach Tarski en un conjunto sobre el que actúa un grupo de biyecciones **G** (que desempeña el papel de las isometrías de $\mathbb{R}^n$) existen si y sólo si **G** no es "amenable" Este resultado de Tarski ([Ta1], [Ta2]) establece claramente la relación existente entre descomposiciones paradójicas y la estructura del grupo subyacente. Sobre las propiedades, estructura y aplicaciones de los grupos "amenables" el lector interesado puede consultar la monografía [Pa] y las referencias que en ella aparecen.

La paradoja de Banach Tarski implica que cualquier poliedro es equidescomponible con cualquier cubo. Por supuesto, las piezas en las descomposiciones pueden ser muy complicadas. Si se impone que estas piezas sean poliedros (con o sin bordes), la situación es completamente diferente. Por supuesto, una condición necesaria para que dos poliedros sean equidescomponibles en piezas poliédricas es que tengan el mismo volumen. La pregunta de si esta condición es suficiente constituye el tercero de la famosa lista de 23 problemas propuesta por D. Hilbert en el Congreso Internacional de Matemáticas celebrado en París en 1900[15] . La solución a este problema la obtuvo un discípulo del mismo Hilbert, **M. Dehn** (1878-1952), en 1901, mostrando que los tetraedros de vértices (0,0,0), (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1) y (0,0,0), (1,0,0), (1,1,0), (1,1,1), respectivamente, tienen el mismo volumen pero **no** son equidescomponibles en piezas poliédricas.

Por otro lado, la solución positiva del problema de la medida en $\mathbb{R}^2$ implica que si dos subconjuntos medibles del plano son equidescomponibles, deben tener la misma medida. Pero esta condición no garantiza (en principio) la equidescomponibilidad. La pregunta concreta de si un círculo y un cuadrado del mismo área son equidescomponibles fue planteada por Tarski en 1925 y, tras muchos intentos, fue resuelta afirmativamente por **M. Laczkovich** en 1990[16] ([L1]). Sorprendentemente, en la solución dada por Laczkovich basta considerar traslaciones para la congruencia de las piezas obtenidas en la descomposición (¡del orden de 10^{50}!) en lugar de isometrías generales[17].

4.1.2. El papel del axioma de Elección.

Dados dos conjuntos arbitrarios, puede suceder que sus cardinales sean incomparables. Sin embargo, Cantor probó que esta situación no puede ocurrir si los conjuntos están bien ordenados. Parecía paradójico que pudiera haber conjuntos (no bien ordenados) cuyos cardinales fueran incomparables. Pensando sobre este problema, **E. Zermelo** (1871-1953) logró probar en 1904 que todo conjunto puede ser bien ordenado. Pero para ello tuvo que usar un nuevo axioma (aceptado implícitamente hasta entonces en muchas ocasiones): el **Axioma de elección**, que establece que dada una colección arbitraria de conjuntos no vacíos y disjuntos, existe un conjunto que contiene exactamente un elemento de cada conjunto de la colección. Este axioma resulta ser *equivalente* tanto a la existencia de una buena ordenación sobre cualquier conjunto, como al hecho de que dos cardinales cualesquiera sean comparables, y también a muchos otros resultados (como el llamado *Lema de Zorn*, el *Teorema de Tychonoff* sobre el producto de espacios topológicos compactos, etc[18]. Por ejemplo, él o alguna de sus variantes es responsable último de la paradoja de Banach-Tarski que expusimos en la sección anterior, ya que, como consecuencia de un teorema de **Solovay** de 1964 resulta que la paradoja no puede demostrarse en la teoría usual de conjuntos (axiomática de Zermelo-Fraenkel, o (ZF) en abreviatura). Más aún, si (ZF) es consistente, también lo es si añadimos el siguiente axioma:

(GM) Existe una solución numerablemente aditiva del problema de la medida que extiende a la medida de Lebesgue.[19]

---

[15] En su conferencia, **Hilbert** propuso solamente 10 problemas; fue después, en un famoso artículo publicado el mismo año en *Gottingen Nachrichten*, cuando la lista se amplió a 23.

[16] La respuesta al problema de Tarski es negativa si se imponen restricciones sobre la naturaleza de las piezas en la descomposición o de las isometrías usadas. Por ejemplo, **Dubins, Hirsch** y **Karush** probaron en 1963 que un círculo y un cuadrado de la misma área no son equidescomponibles en piezas limitadas por curvas de Jordan ([DHK]). **Gardner** mostró en 1985 que la respuesta es también negativa si sólo se permiten isometrías que generen un grupo discreto ([Gar]).

[17] En [GW] puede consultarse una amplia panorámica del problema y una idea de la solución de Laczkovich sin incidir en demasiados tecnicismos.

[18] Véase [BoR]

[19] Ha habido algunos intentos de estudiar la matemática deducida de la axiomática (ZF) + (GM) (*matemática solovayana)*, pero los resultados obtenidos muestran que no es muy interesante.

Como hemos visto, en (ZF) con el axioma de elección (GM) es *falso* y, claramente, (GM) hace imposible la paradoja de Banach-Tarski. Por tanto, la validez de esta paradoja exige algún tipo de axioma adicional a (ZF). En el último capítulo de [W] se exponen un gran número de relaciones entre la paradoja de Banach-Tarski y distintas debilitaciones del Axioma de Elección. Finalmente, destaquemos que en 1991, **J. Pawlikowski** demostró que era suficiente añadir el Teorema de Hahn-Banach, que se deduce del Axioma de Elección (pero es estrictamente más débil; véase Nota 13) a (ZF) para demostrar la paradoja de Banach-Tarski ([Paw].)

El axioma de elección es responsable de muchos otros resultados sorprendentes, lo que hizo que se pusiera en cuestión si los resultados obtenidos a partir de este axioma tendrían la "misma validez" que los obtenidos sin usarlo. En 1938, **K. Gödel** (del que hablaremos después largo y tendido) probó que si la teoría de conjuntos usual es consistente, también lo es cuando se le añade el axioma de elección (es decir, no se puede demostrar la *negación* del axioma de elección). En 1963, **P. Cohen** (1934-) dio otra vuelta de tuerca al problema, demostrando que el axioma de elección es *independiente* de los demás axiomas de la teoría de conjuntos usual (es decir, este axioma tampoco es un teorema de la teoría de conjuntos usual.) Cohen recibió la *Medalla Fields* en 1966 por sus trabajos en teoría de conjuntos.

4.1.3. Otras funciones y conjuntos paradójicos.

El proceso de paso al límite permitió construir rigurosamente objetos que contradecían la intuición. Uno de los resultados más sorprendentes fue el ejemplo dado por Weierstrass en una conferencia pronunciada en la Academia de Ciencias de Berlín en 1872 de una función continua *que no tiene derivada en ningún punto*[20]. La función es la siguiente:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b^n \cos(a^n p\, x), \text{ con } 0 < b < 1, \; a \text{ un entero impar y } ab > 1 + \frac{3}{2}p$$

Hasta entonces se tenía la convicción, basada en la experiencia física, de que toda curva continua poseía una tangente definida, salvo a lo más en ciertos puntos aislados. El ejemplo de Weierstrass supuso una nueva conmoción para la comunidad matemática. Como sucede siempre, conocido el primer ejemplo, empezaron a surgir muchos otros. Más aún, el conjunto de funciones reales continuas en un intervalo compacto que tienen derivada a la derecha al menos en un punto, es de primera categoría (en el sentido de Baire) en el espacio métrico completo de todas las funciones continuas en el intervalo con la métrica de la convergencia uniforme, con lo que su complementario es extremadamente grande (en sentido de la categoría de Baire). Este resultado fue probado por **S. Mazurkiewicz** .([Maz]) y extendido después por Banach ([Ba2]). Por otro lado, las funciones continuas no derivables en ningún punto son hoy un lugar común en muchas ramas del análisis, como el movimiento Browniano, los fractales, las ondículas, etc. con lo que, una vez más, podemos constatar la cita de [KN] recogida en la introducción: también en matemáticas *"la herejía de ayer es el Evangelio de hoy…"*

Resulta igualmente paradójico que, tras probar la existencia de funciones tan patológicas como la anterior, Weierstrass demostrara en 1875 (¡cuando tenía 70 años!) que

---

[20] Parece que **Weierstrass** había dado ya un ejemplo de una tal función en su Seminario en 1861. El ejemplo que damos es el que aparece en el Volumen 2 de su *Mahematische Werke.*

cualquier función continua en un intervalo compacto se puede aproximar uniformemente por *polinomios* ([We])[21], es decir, aunque haya funciones continuas muy irregulares, se pueden aproximar uniformemente por funciones extremadamente regulares. Este teorema, considerado uno de los resultados fundamentales de la teoría de aproximación fue extendido sustancialmente por **M. H. Stone** (1903-1989) en 1937 (*cfr.* [Sto]).

Entre la pléyade de funciones y curvas patológicas que surgieron a finales del siglo XIX, queremos destacar, finalmente, dos ejemplos significativos (ambos, también, curvas sin tangente en ningún punto). El primero de ellos se debe originariamente a **G. Peano** (1858-1932), quien en 1890 construyó una curva continua que pasa por todos los puntos del cuadrado unidad **I** =[0.1]×[0,1] ([Pea]). La construcción de Peano es esencialmente analítica, utilizando la representación decimal en base 3. El año siguiente, Hilbert construyó otra curva del mismo tipo por medio de un algoritmo geométrico más fácil de describir, a saber: Dibujemos un cuadrado de lado unidad. Lo dividimos en cuatro partes iguales. Unimos los centros de los cuatro cuadrados como muestra la figura inferior (Figura 7). Volvemos a dividir cada cuadrado en cuatro cuadrados idénticos y unimos de nuevo los centros de todos los cuadrados mediante una sola curva siguiendo el patrón mostrado en el segundo paso de la figurada inferior (orden 2). Repitiendo el proceso (en la figura se muestra la tercera iteración), y con una parametrización adecuada obtenemos una sucesión de funciones continuas (f_n) de modo que la distancia $|f_{n+1}(t)-f_n(t)|$ en cada punto t no excede la longitud de la diagonal del cuadrado obtenido en la n-ésima iteración, es decir, $\sqrt{2}.2^{-n}$. Por tanto, estas funciones convergen uniformemente a una función continua f de [0,1] en **I.** La imagen de f (imposible de dibujar) es la curva de Hilbert ([Hi1]). .

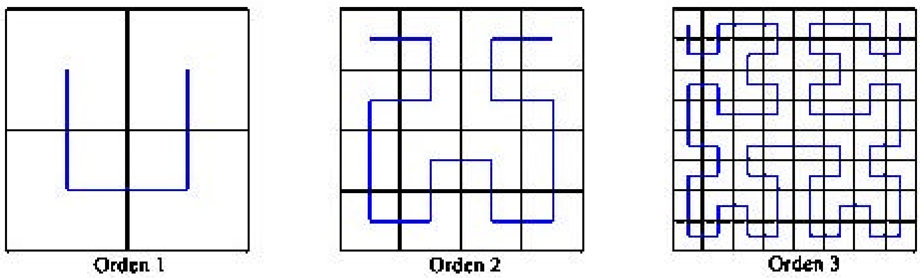

Figura 7

Puede probarse fácilmente que $f([0,1])$ = **I,** es decir, la curva de Hilbert "llena" el cuadrado I. Este ejemplo supuso un nuevo golpe a la idea intuitiva de *dimensión.*, tras la demostración de Cantor en 1877 de que existía una biyección entre **I** y el intervalo [0,1]. Afortunadamente, **L. Brouwer** (1881-1966) demostró en 1911 que no puede existir una *biyección continua* entre **I** y [0,1], obteniendo de paso una noción de *dimensión* que resulta ser un invariante topológico. Notemos también que las curvas descritas por las funciones f_n tienen longitudes crecientes, que superan a cualquier cantidad fijada tomando n suficientemente grande, lo que implica que la curva de Hilbert tiene longitud *infinita.*

Pese a su carácter paradójico, varios matemáticos se percataron enseguida de que las curvas de Peano y Hilbert podían ser ,muy útiles para extender resultados conocidos de la recta real a espacios de dos o más dimensiones. Por ejemplo, H. Lebesgue demues-

[21] En 1886 apareció una traducción al francés: *Sur la possibilité d'une représentation analytique des fonctions dites arbitraires d'une variable réelle,* en el J. Math. Pure et App. (Journal de Liouville).

tra el teorema de Heine Borel en dos dimensiones por este método en sus *Leçons sur l'intégration* ([Le2; p. 117]). Más adelante, el mismo Lebesgue confesó que en un primer momento había intentado usar este método para extender su teoría de integración al caso de funciones de varias variables. Posteriormente, **F. Riesz** (1880-1956), en su trabajo sobre el problema de los momentos y sus variantes, introduce los espacios L_p $(1<p<\ )$ y hace notar que la mayor parte de sus resultados sobre el espacio funcional $L^p([a,b])$ pueden extenderse al espacio $L^p(M)$, para un subconjunto medible arbitrario del espacio n-dimensional, pues *"si M tiene medida m, se puede aplicar de forma esencialmente biunívoca sobre un intervalo de longitud m, de forma que cada subconjunto medible de M se corresponda con un subconjunto medible del intervalo de la misma medida"* ([R]). **J. Radon** (1887-1956), utilizando esencialmente la construcción de la curva de Hilbert, definió explícitamente la correspondencia de Riesz en sus trabajos sobre medidas abstractas (véase, p. e., [H; págs. 191-194].)

La segunda curva *monstruosa* a considerar se debe a **N. H. von Koch** (1870-1924) y su construcción (en 1904) es también muy simple: Se parte de un triángulo equilátero de lado de longitud unidad (Figura 8 (a)). En la segunda etapa, se sustituye el tercio central de cada lado por un nuevo triángulo equilátero, suprimiendo la base (Figura 8(b)), se continúa

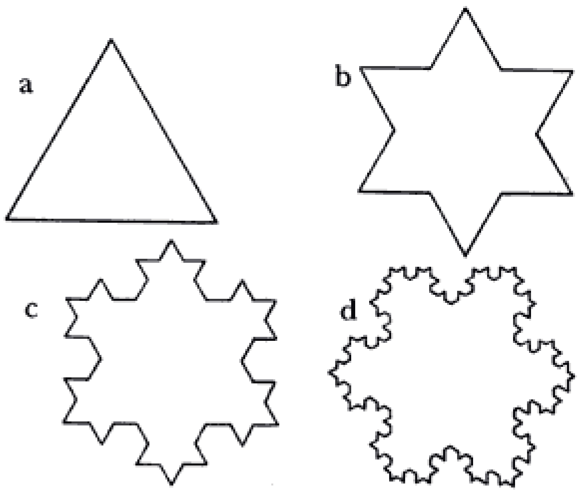

Figura 8

el proceso (en la figura 8 se muestran las 4 primeras iteraciones). Usando parametrizaciones adecuadas se obtiene así una sucesión de funciones continuas uniformemente convergente. La imagen de la función límite es la llamada *curva de Koch* o *copo de nieve*. Obviamente esta curva, como pasaba con la curva de Hilbert, no se puede dibujar, pero de su construcción resulta que carece de tangente en todos sus puntos y tiene longitud infinita, aunque limita un conjunto (abierto) de área finita.

Las curvas de Peano, Hilbert y Koch son algunos de los primeros ejemplos de *objetos fractales*, ampliamente estudiados en la actualidad por su aplicación en campos tan diversos como la economía, la lingüística, el desarrollo de las plantas, la evolución de las poblaciones, la meteorología, etc. Aunque aparecidos a finales del siglo XIX, su popularización se debe en gran parte al Profesor de la Universidad de Yale **B. Mandelbrot.** En su artículo [Ma1] utilizó la costa británica como ejemplo para ilustrar que ésta no tiene una longitud determinable, sino que depende de la escala de medición empleada. Y propuso que curvas como la de Koch eran las más apropiadas para describir una línea de costa. Su libro *Les objets fractals: forme, hasard et dimension* ([Ma2]) publicado en 1975[22] y traducido a más de 15 idiomas, puso de manifiesto la utilidad de estos objetos (cuyo nombre acuñó) en la modelización de muchos procesos de la Naturaleza. Al mismo tiempo, el rápido desarrollo de los ordenadores personales hizo posible el acces a imágenes gráficas de gran belleza, obtenidas por procesos iterativos utilizados para la descripción de objetos fractales, lo que contribuyó no poco a la popularización de los mismos.

4.2.- Paradojas de la Teoría de Conjuntos.

A pesar de las reticencias iniciales, poco a poco se fue consolidando la idea de que la *Teoría de Conjuntos* podía ser la base sobre la cual construir toda la Matemática. Así pues, una sólida fundamentación de la Teoría de Conjuntos, proporcionaría la ansiada base firme sobre la que asentar toda la Matemática.

Pero, como sabemos, la noción de conjunto no es tan simple como parece. En efecto, ya en 1895 Cantor había encontrado una dificultad importante en el desarrollo de su teoría. Es muy fácil ver que si **A** es un conjunto con n elementos, hay exactamente 2^n subconjuntos de **A** (incluyendo el vacío y el total). En particular, el número de elementos del conjunto de partes de **A** (es decir, su *cardinal*) es estrictamente mayor que el de **A.** Cantor demostró la validez de este hecho para cualquier conjunto **A**: el cardinal del conjunto formado por todos los subconjuntos de **A** es *estrictamente* mayor que el de **A.** Pero, si consideramos el conjunto **U** de *todos* los conjuntos, cada uno de sus subconjuntos es un elemento de **U,** luego el conjunto de sus partes es un subconjunto de **U** y, por tanto, ¡su cardinal no puede ser mayor que el de **U**!

Por la misma fecha, Cantor encontró también otra paradoja en su teoría de números ordinales: Puesto que, como él mismo había probado, cualquier conjunto de ordinales está bien ordenado (y, por tanto, tiene un número ordinal), si consideramos el conjunto de *todos* los ordinales, éste tendrá un ordinal estrictamente *mayor* que cualquier otro, en particular ¡estrictamente mayor que sí mismo!. Cantor no dio difusión a estas paradojas (aunque las comentó con Dedekind y Hilbert, al menos). **C. Burali-Forti** (1861-1931) publicó en 1897 ([Bur]) una versión esencialmente equivalente a la paradoja de los ordinales, por lo que ésta se conoce actualmente como **paradoja de Burali-Forti.**

Pero lo peor estaba aún por venir. En 1901 **B. Russell** (1872-1970) descubrió la paradoja que lleva su nombre, que puso en cuestión los intentos de fundamentar sólidamente las Matemáticas en la Teoría de Conjuntos. La paradoja de Russell apunta precisamente contra la noción misma de conjunto: una entidad de la que se sabe en todo momento si un objeto cualquiera pertenece o no a ella. Con más precisión: el llamado *axioma de comprehensión*, introducido por Cantor, establece que cualquier predicado $P(x)$ con una variable libre x, determina un conjunto cuyos elementos son precisamente los objetos que satisfacen $P(x)$. El axioma lo que hace es formalizar la idea intuitiva de que un conjunto queda determinado al dar una propiedad que caracteriza a sus elementos. Pues bien, Russell consideró como $P(x)$ la propiedad *"x es un conjunto que no es un elemento de x"*. Consideremos entonces el conjunto (axioma de comprehensión) **U** formado por los conjuntos que cumplen $P(x)$. Hay muchos elementos en **U**: por ejemplo, el

[22] Hay versión española: *Los objetos fractales: forma, azar y dimensión*. Tusquets, 1987. Véase también [GMMR]

conjunto de todas las capitales de provincia de España *no* es una capital de provincia. También hay conjuntos que no pertenecen a **U,** como por ejemplo el conjunto formado por los conjuntos con más de un elemento, o el conjunto de los objetos que no son peces ¡Pero el conjunto **U** tiene la contradictoria propiedad de que pertenece a **U** si y sólo si no pertenece a **U**![23]

El efecto de la paradoja de Russell fue devastador para muchos matemáticos, como fue el caso del alemán **F. L. G. Frege** (1848-1925), considerado uno de los fundadores de la moderna lógica simbólica. En 1879 Frege había construido y publicado uno de los primeros sistemas lógicos rigurosos (un cálculo de predicados de segundo orden), con el objetivo, declarado en el Prólogo, de *"probar las verdades básicas de la aritmética por medio de la lógica pura"* (lo que hace de Frege uno de los primeros *logicistas*). En 1893 apareció el primero de los volúmenes de su monumental *Die Grundgesetze der Arithmetik* ("Las Leyes básicas de la Aritmética"), en el que presentaba un sistema formal con más reglas de inferencia que el construido en 1879. El segundo volumen estaba en prensa cuando Frege recibió el 16 de Junio de 1902 una carta de Russell en la que, con gran delicadeza, éste le hacía ver que su paradoja permitía demostrar que sus sistema formal era inconsistente. Tras una amplia correspondencia con Russell, Frege modificó uno de sus axiomas, explicando en un apéndice que lo hacía para restaurar la consistencia del sistema. Pero esta modificación afectaba a muchos de los resultados del Volumen 1, que quedaban así en entredicho. Desgraciadamente, incluso con esta modificación, el sistema seguía siendo inconsistente, aunque probablemente Frege nunca lo supo[24]. De todas formas, Frege quedó muy afectado y lo cierto es que nunca publicó el Volumen 3 de su obra magna (de hecho, no publicó nada entre 1904 y 1917, fecha de su jubilación; después escribió algunos brillantes artículos de contenido filosófico, y en 1923 llegó a la conclusión de que su intento de fundamentar la aritmética en la lógica estaba equivocado).

Como consecuencia de ésta y otras paradojas (algunas de las cuales las describiremos en la siguiente sección), aumentaron las críticas hacia los que intentaban sustentar las matemáticas en la Teoría de Conjuntos. En el cuarto Congreso Internacional de Matemáticas, celebrado en Roma en 1908, el famoso matemático **H. Poincaré** (1854-1912) calificó a la Teoría de Conjuntos como *"un interesante caso patológico"* y predijo que *"las generaciones posteriores considerarán la teoría cantoriana como una enfermedad que se ha superado"*. En el mismo sentido, **H. Weyl** (1885-1955) se refirió a los alephs cantorianos como *"una niebla dentro de una niebla"*.

Los dos últimos matemáticos que hemos citado forman parte de un distinguido grupo, en el que, con mayor o menor énfasis, se pueden incluir también, entre otros, a **Borel, Hadamard, Lebesgue** y, sobre todo, **L. E. J. Brouwer** (1881-1966), que reciben el nombre genérico de *intuicionistas*. Aunque las posturas varían de uno a otro (y tendremos ocasión de ver otras opiniones de Poincaré y Weyl más adelante), en general coinciden en rechazar el cantorismo y el infinito actual. Sólo los objetos y conceptos que pueden definirse en un número finito de etapas, es decir, que pueden construirse, son aceptables. Para Brouwer, las ideas matemáticas forman parte *a priori* de la mente

---

[23] Una versión semántica de esta paradoja es la conocida *paradoja del barbero*: En un pueblo, el barbero afeita a todos los hombres que no se afeitan a sí mismos, y sólo a ellos. ¿Quién afeita al barbero? La solución obvia es que ¡un barbero como el descrito no puede existir! Nótese la analogía con la solución a la paradoja de Russell dada por la teoría de tipos (véase Sección 4.4.)

[24] **Lesniewski** demostró la inconsistencia del sistema de Frege poco después de su muerte.

humana, con independencia de la experiencia. Sólo a partir de lo intuitivamente dado y por un proceso constructivo, se pueden obtener nuevos desarrollos. En su argumento, Brouwer llega a rechazar el principio del *tercio excluso,* empleado en todas las demostraciones por *"reducción al absurdo"*[25]

A pesar de todo, poco a poco las teorías de Cantor fueron ganando adeptos en la comunidad matemática. Pronto se vio su utilidad en otras ramas de la Matemática, como en la teoría de la medida, la topología y la teoría de funciones. El gran defensor y propagador de las ideas de Cantor en Alemania fue D. Hilbert, quien en 1926 proclamó: *"Nadie podrá expulsarnos del paraíso que Cantor creó para nosotros"* ([Hi4]).

4.3.- Paradojas lógicas y semánticas.

La más antigua de todas las paradojas es la llamada ***paradoja del mentiroso***, formulada por **Eublides** en el siglo IV A. de C.[26]., y que en su expresión más simple estriba en decidir si cuando alguien dice *"estoy mintiendo"* miente o no. Pues si miente, entonces está diciendo la verdad; y si dice la verdad, está mintiendo. Así que no hay manera de evitar la contradicción.

Esta paradoja ha sido discutida por filósofos y lógicos a lo largo de miles de años, y se han descubierto multitud de variantes. Entre ellas, no puedo menos que citar, en este año post-cervantino, la que aparece en el Capítulo 51 de la segunda parte de *"El Quijote"*: La farsa montada por los Duques conduce a Sancho a conseguir su mayor deseo y obtener el gobierno de la Ínsula Barataria, donde es sometido a continuas pruebas para diversión de sus anfitriones. Durante una de las audiencias, un forastero le presenta a Sancho un caso peliagudo:

> *Señor, un caudaloso río dividía dos términos de un mismo señorío [...] Sobre este río estaba una puente, y al cabo della, una horca y una como casa de audiencia en la cual de ordinario había cuatro jueces, que juzgaban la ley que puso el dueño [..]del señorío, que era en esta forma: "Si alguno pasare por esta puente de una parte a otra, ha de jurar primero adónde y a qué va; y si jurare verdad, déjenle pasar; y si dijere mentira, muera por ello ahorcado"[...] Sucedió, pues, que tomando juramento a un hombre, juró y dijo que iba a morir en la horca que allí estaba. Repararon los jueces en el juramento y dijeron: "Si a este hombre le dejamos pasar libremente, mintió en su juramento y, conforme a la ley, debe morir; y si le ahorcamos, [...] habiendo jurado verdad, por la misma ley debe ser libre."Pídese a vuesa merced, señor gobernador, qué harán los jueces...* ([Ce; Tomo IV, Cap. LI])

La respuesta de Sancho es ejemplar: puesto que hay razones para condenar y para dejar pasar libremente al viajero, decide que los jueces le dejen libre al, *"pues siempre es alabado más el hacer el bien que el mal"* y recuerda un consejo que Don Quijote le

---

[25] Véase el capítulo p y $\hat{p}$ de [DH], donde se presenta con gran claridad el famoso contraejemplo de **Brouwer** a la ley de tricotomía de los números reales.

[26] A veces se llama paradoja del mentiroso a la conocida como *paradoja de Epiménides,* un cretense del siglo VI A. de C. Se cree que a él se refiere **San Pablo** en su Epístola a Tito, cuando dice: "Todos los cretenses son mentirosos, glotones perezosos,..., ha dicho uno sus propios profetas." Lo paradójico es que si Epiménides dice la verdad, ¡entonces miente!. Sin embargo, si Epiménides miente, no se obtiene ninguna contradicción. Es irónico que San Pablo añada que "el testimonio aportado es cierto".

había dado antes de partir, que fue que *"cuando la justicia estuviese en duda, me decantase a la misericordia."* Solución, pues, de sentido común, ante una situación totalmente irreal.

En su bien conocido tratado de Álgebra, **R. Godement** atribuye a Cervantes una curiosa variación de la paradoja (véase [God; §0, Ex. 8])

Hay muchas otras variantes de estas paradojas, que involucran, tanto el elusivo término de "verdad" como el fenómeno de la autorreferencia. Pueden verse ejemplos en [Bu], [Sm1], [Sm2], etc.

A comienzos del siglo XX surgieron versiones mucho más elaboradas y profundas de paradojas semánticas, en las que se eliminaba el recurso a la noción de "verdad" o "falsedad". Comencemos con la versión semántica de la paradoja de Russell, conocida como ***paradoja de Grelling,*** enunciada por **K. Grelling** (1886-1941) y **L. Nelson** (1882-1927) en 1908: En cualquier idioma, como por ejemplo el español, hay adjetivos que se describen a sí mismo (como "polisilábico", que es una palabra polisilábica) y otros no (como "verde" o "redondo"). Llamemos *autológicos* a los primeros y *heterológicos* a los segundos. ¿Qué clase de adjetivo es "heterológico"? Si no se describe a sí mismo, entonces es heterológico, luego se describe a sí mismo; si se describe a sí mismo, sería autológico, asi que no se describe a sí mismo.

Las dos últimas paradojas que vamos a considerar representan variaciones sobre el problema de "dar un nombre" a un determinado objeto. La más sencilla de ellas fue formulada por un desconocido bibliotecario, **G. G. Berry**, que se la contó a B. Russel, quien la publicó en 1906. Se conoce como ***paradoja de Berry*** y dice así: Todo número natural se puede describir en un determinado idioma (por ejemplo, el español) por un número finito de palabras (aunque no de manera única; por ejemplo, 5 puede describirse como "cinco", "el segundo número primo impar", "el único primo que divide a 25", etc.) El conjunto de los números naturales que pueden describirse con 100 letras o menos en castellano es claramente finito (hay 35^{100} expresiones que se pueden formar con las 28 letras del alfabeto, las cinco vocales acentuadas, la *ü*, más un espacio en blanco). Su complementario, por tanto, no es vacío. Sea u_0 el menor de los elementos de este conjunto. u_0 es pues *el menor número natural que no puede describirse con cien o menos letras en castellano.* Pero ¡acabamos de dar una descripción de u_0 con menos de 100 letras (85, contando los espacios en blanco)! Notemos que podemos usar un proceso mecánico para escribir las 35^{100} expresiones y examinarlas una por una. Aunque puede ser que algunas expresiones no sepamos si definen o no un número natural, la frase anterior de 85 letras está seguro en la lista.

La última de las paradojas semánticas que vamos a considerar es la llamada ***paradoja de Richard***, formulada por el francés **J. Richard** (1862-1956) en una carta a L. Olivier, publicada en 1905 en la *Revue Genérale des Sciences* . En esencia, consiste en lo siguiente: Como en la paradoja de Berry, los números reales pueden describirse con un número finito de palabras en un determinado lenguaje, por ejemplo el español (Richard, por supuesto, utilizó el francés). Como antes, distintas frases pueden originar el mismo número real (como "pi" o "la razón de la longitud de una circunferencia a su diámetro", etc. Se supone también que describir un número real significa que, aunque no conozcamos su desarrollo decimal completo, tenemos un procedimiento para encontrar, para cada *n,* la *n*-ésima cifra de su desarrollo decimal; También utilizaremos la convención usual de considerar, en caso de dos representaciones decimales posibles, la que tiene infinitos 9.) Ordenemos las frases que describen números reales en español según el número de letras que contienen (contando los espacios en blanco) y las frases que tengan el mismo número de letras, las ordenamos alfabéticamente. Es claro que, dada una descripción finita de un número real en español, si añadimos a continuación "dividido por dos" tenemos otra frase que describe un número real, y que será *posterior* a la primera, en la ordenación considerada. Así pues, hemos dado un procedimiento que asigna a cada número natural n el número real $R(n)$ descrito por la frase que ocupa el lugar n en nuestra ordenación. Podemos suponer además, por comodidad, que $R(n)$ pertenece a [0,1] (basta restar la parte entera del real original.) Como el conjunto de los reales en [0,1] es no numerable, existen infinitos de estos números que no podemos nombrar (en el sentido descrito anteriormente) en español. Consideremos ahora el siguiente número real en [0,1]: "aquel cuya n-sima cifra decimal es o bien uno, si la n-sima cifra decimal de $R(n)$ es cero; o bien la n-sima cifra decimal de $R(n)$ disminuída en una unidad." De esta manera, ¡hemos descrito con un número finito de palabras un número real que, por su propia definición, no coincide con ninguno de los $R(n)$!

Notemos la semejanza en la construcción del número paradójico con la demostración de Cantor de la no numerabilidad de los reales de [0,1]. También merece destacarse que se puede sustituir en el argumento la descripción de números reales en un idioma determinado por cualquier procedimiento M (un programa de ordenador, un ser extraterrestre, etc.) que asigne a ciertas cadenas finitas de símbolos (de longitud arbitraria) un número real. La conclusión es la misma: existe siempre un número real describible en un número finito de símbolos que el proceso M no puede nombrar[27].

El mismo Richard se dio cuenta de la debilidad de la paradoja: no se puede describir el número paradójico diagonal hasta que no se conozca la lista *completa* de los números $R(n)$, que es un conjunto infinito y no puede describirse con un número finito de palabras.

Las dos últimas paradojas plantean la cuestión de si el hecho de tener un nombre implica ya alguna clase de existencia, así como algunas interesantes cuestiones sobre nuestras capacidades para describir racionalmente el Universo, y la realidad misma. Quizá la moraleja que debamos extraer es que *"ningún esquema finito puede capturar la esencia de cómo conectamos lo real con lo ideal, la realidad física y la mental, el lenguaje y el pensamiento."* ([Ru; Cap. 3])

4.4.- La búsqueda de soluciones.

Todas las paradojas que hemos expuesto en las dos últimas secciones tienen su origen en la utilización, en una u otra forma, de un proceso *recursivo* o *auto-referente*[28]. Este hecho ya fue reconocido por Russell, al señalar que la razón de su paradoja estriba en definir un objeto en términos de una clase que contiene al objeto definido. Poincaré acuñó el término *impredicativo* para referirse a este tipo de procesos autorreferentes,

---

[27] Otra manera de ver la paradoja, especialmente conveniente si entendemos M como un programa de ordenador que tiene como "output" números reales, es que la instrucción "genere el número real obtenido por el proceso de diagonalización de todos los reales con M-nombre" (es decir, el descrito más arriba), hace que el programa no se detenga jamás, y por tanto no produzca ningún "output".

[28] O *bucles extraños*, como expresivamente los llama **D. R. Hofstadter** en su muy recomendable [Ho], donde se exploran hábilmente las conexiones de estos fenómenos con los dibujos de Escher o algunas composiciones de Bach (especialmente, la *Musikalisches Opfer*). Y todo ello, para proporcionar una de las más completas (y entretenidas) exposiciones en torno al Teorema de Gödel y sus consecuencias.

que según él debían excluirse de la matemática para evitar paradojas. El problema es que hay una gran cantidad de resultados básicos en matemáticas que se apoyan en objetos o definiciones impredicativas, como, por ejemplo, los conceptos de extremo superior o inferior de un conjunto, la definición de la función *max{x,y}* en el plano, o la demostración de Cantor de la no numerabilidad del conjunto de números reales. Así pues, eliminar todas las definiciones y procesos impredicativos de las matemáticas tendría un coste muy alto. De hecho, el famoso matemático Hermann Weyl, uno de los mejores representantes de la escuela intuicionista, hizo un intento serio en este sentido, pero tuvo que abandonarlo por irrealizable. Por otro lado, la proscripción total de la autorreferencia en el lenguaje ordinario llevaría a situaciones absurdas: frases como "este libro está escrito en español" deberían prohibirse o, al menos, no asignarles un valor de verdad definido. Más aún, frases que en sí mismas no son autorreferentes, al combinarse producen el efecto de la paradoja del mentiroso[29]:

"La siguiente afirmación, es falsa"

"La afirmación precedente es verdadera"

B. Russell señaló otro problema con la misma noción de *propiedad impredicativa* (es decir, que se aplica a sí misma): la propiedad de no ser impredicativa ¿es impredicativa o no? (de hecho, ésta es otra formulación de la paradoja de Grelling.)

B. Russell y A. Whitehead propusieron otro método para eliminar las paradojas originadas por el uso de la autorreferencia en su monumental obra *Principia Mathematica* ([RW]): la *teoría de tipos*. Su idea, como antes había defendido Frege, era derivar toda la Matemática de la lógica. Por tanto, primero debía desarrollarse un sistema lógico que evitara las paradojas. Para ello, establecen primero con precisión un sistema axiomático, a partir de un *lenguaje objeto*, que contiene las constantes, variables y los conectivos lógicos usuales, así como las reglas de inferencia. A continuación, desarrollan la teoría de clases, entendiendo por tal el conjunto de objetos que satisfacen una cierta función proposicional. Introducen cuidadosamente la noción de correspondencia biyectiva entre clases, que permite establecer la noción de *número cardinal*, y a partir de ahí se supone que continuaría el desarrollo de la aritmética y el resto de la matemática. Pero para evitar las paradojas producidas por la autorreferencia, Russel y Whitehead establecen una jerarquía estricta entre las proposiciones y los conjuntos que definen. Así, los conjuntos de "tipo" 0 no pueden tener entre sus miembros otros conjuntos; las funciones proposicionales que se aplican exclusivamente a conjuntos de tipo 0, serían a su vez de tipo 0. Los conjuntos de "tipo" 1 son o bien de tipo 0 o bien conjuntos cuyos elementos son de tipo 0, mientras que las funciones proposicionales de tipo 1 sería aquellas cuyas variables son funciones proposicionales de tipo 0. En general, los conjuntos de un tipo dado o bien son conjuntos de un tipo más bajo o sus elementos son conjuntos de un tipo inferior. Del mismo modo, una función proposicional cuyas variables son de tipo menor o igual que n, es de tipo $n+1$. Las proposiciones y conjuntos "admisibles" son los que pertenecen a algún tipo finito. Así, clases como "el conjunto de todos los conjuntos" quedan excluidas de la categoría de conjunto, pues no pertenece a ningún tipo finito. También resulta que ningún conjunto puede contenerse a sí mismo como elemento, ya que entonces debería pertenecer a un tipo más alto que su propio tipo.

[29] Variación de la llamada "paradoja de la tarjeta de Jourdain", propuesta por **P. E. B. Jourdain** en 1913. Se trata de una tarjeta que en un lado tiene escrito "la frase del otro lado es verdadera", mientras que en el otro se lee "la frase del otro lado es falsa".

Del mismo modo, la primera de las dos frases escritas más arriba (equivalentes a la paradoja del mentiroso), al referirse a la segunda, debería ser de tipo mayor que ésta. Pero, por otro lado, la segunda oración debería ser de tipo mayor que la primera, pues también hace referencia a ella. Como consecuencia, en la teoría de tipos *ambas* oraciones carecerían de sentido.

La teoría de tipos eliminaría, pues, los *bucles extraños* en la teoría de conjuntos y en la lógica, pero su aplicación para el desarrollo de las matemáticas usuales provoca enormes dificultades. Por ejemplo, una demostración sobre una propiedad de los números enteros no podría utilizar, en principio, números reales o complejos (que pertenecen a conjuntos de tipo mayor que los números enteros); habría que plantearla, pues, en un tipo mayor que el natural. La noción de igualdad de objetos (conjuntos, proposiciones, etc.) debe establecerse para cada tipo, con lo que existen infinitas relaciones de igualdad. Por otro lado, a lo largo de la demostración hay que ser extremadamente cuidadoso para no utilizar proposiciones o conjuntos de tipo superior… un verdadero engorro. Pero, además, ¡ninguna afirmación sobre la misma teoría de tipos tendría acomodo en un nivel de tipo finito!, con lo que carecería de sentido.

Por otro lado, al deducir de la lógica todas las matemáticas, éstas quedan vacías de contenido y se reducen a mera especulación formal. La interrelación con la realidad física y su modelización, no tiene ninguna explicación. De ahí la famosa frase de Russel de que *"en matemáticas nunca sabemos de lo que estamos hablando ni si lo que decimos es cierto."* Y finalmente, la cuestión fundamental: el sistema desarrollado en los *Principia* ¿es *consistente*? (es decir, a salvo de contradicciones).

Por supuesto, al aplicar un esquema jerarquizado como el que hemos sugerido al lenguaje cotidiano, aparecerían como carentes de sentido muchas construcciones perfectamente válidas.

Así pues, estos intentos para resolver las paradojas, o involucraban a su vez nociones paradójicas (como la de *definición impredicativa*) o eran formalismos tan artificiales que resultaban inútiles para la mayoría de los matemáticos.

Otro intento para resolver las antinomias de la teoría de conjuntos y poder edificar sobre ella sólidamente el resto del edificio matemático, fue tratar de restringir la noción de conjunto y establecer cuidadosamente sus reglas de uso, es decir, *axiomatizar* la teoría. El mismo Cantor era consciente, como ya hemos dicho, de los problemas que podían surgir en la teoría, y en 1899, en una carta a Dedekind, intenta una clasificación de las *multiplicidades* en dos clases: las *consistentes*, (que no causan problemas) y las *inconsistentes*, entre las que estarían la clase de todos los conjuntos o la de todos los ordinales. Pero el primero en abordar seriamente el problema fue E. Zermelo, de quien ya hemos hablado. En 1908 publicó su sistema axiomático ([Ze]) (que incluía el *Axioma de Elección*), desarrollado y mejorado posteriormente por **A. Fraenkel** (1891-1965), dando origen a lo que se conoce como *Axiomática de Zermelo-Fraenkel* o *ZF*, que es la que se utiliza habitualmente en la actualidad (con o sin el axioma de elección). El sistema ZF evita las paradojas al restringir los tipos de conjuntos admisibles, aunque incluye entre ellos los suficientes para el desarrollo de las matemáticas usuales. Posteriormente, J. Von Neumann propuso algunas variaciones, haciendo distinción entre *clases* y *conjuntos* (que son clases que, a su vez, son miembros de otra clase). Como señaló von Neumann, la contradicción puede aparecer no por la introducción de las clases, sino por considerarlas miembros de otras clases.

La axiomática ZF, como hemos dicho, resulta adecuada para el desarrollo de las matemáticas usuales y evita las paradojas conocidas. Por otro lado, la axiomática presupone la lógica subyacente (con las dificultades a que podría dar origen un desarrollo sistemático de la misma) e incluye un axioma de existencia de conjuntos infinitos, lo que provocó en su momento ciertas reacciones en contra. Además, su *consistencia* no ha sido demostrada. Como observó agudamente Poincaré, *"hemos puesto una cerca para proteger al rebaño de los lobos, pero no sabemos si hemos dejado algunos lobos dentro de la cerca."* Es decir, nadie nos garantiza que no podamos encontrar nuevas paradojas en el futuro.

Esta situación es claramente insatisfactoria. Hilbert había ya abordado el problema de la consistencia de la geometría, reduciéndolo al de la consistencia de la aritmética (que es, de hecho, el segundo de los famosos 23 problemas que planteó en 1900; véase Sección 4.1.1.). Alarmado por las propuestas radicales para reelaborar las matemáticas por parte de los intuicionistas[30], Hilbert propuso un programa para dar una *demostración* de la consistencia de las matemáticas, basada en métodos puramente finitistas, de modo que ni el mismo Brouwer la pudiera rechazar. En sus propias palabras:

> *"Mis investigaciones acerca de los nuevos fundamentos de las matemáticas tienen como propósito eliminar de manera definitiva cualquier duda en relación a la confiabilidad de la inferencia matemática.[…]*
>
> *Una solución completa de estas dificultades requiere de una teoría cuyo objeto de estudio sea la demostración matemática misma…"* ([Hi3])

Y en otro lugar,

> *"Lo primero que tenemos que hacer es percatarnos con toda claridad que, a la larga, las paradojas nos colocan en una situación absolutamente intolerable[…] ¿En donde podríamos buscar la certeza y la verdad si el pensamiento matemático mismo falla?[…] la tesis de que todo problema en las matemáticas posee una solución es compartida por todos los matemáticos […] ¡en las matemáticas no hay* ignorabimus![31] ([Hi4])

Así pues, lo que propone Hilbert con su Teoría de la Demostración (*Beweistheorie*) es

> *"dar una base firme y segura a las matemáticas […] que se convierten así en una especie de tribunal de suprema instancia para la evaluación y resolución de cuestiones de principio."* ([Hi4])

Para ello, Hilbert propone la *formalización* completa del sistema estudiado. Eso requiere explicitar claramente el listado o vocabulario completo de signos que se van a emplear, junto con as Reglas de Formación de las expresiones válidas en el sistema (la *gramática*, para seguir con el símil lingüístico.) A continuación, hay que especificar las Reglas de Transformación, que describen como pasar de una fórmula válida a otra. Finalmente, para comenzar la tarea, se seleccionan algunas expresiones válidas como *axiomas*. Un "teorema" del sistema es toda fórmula válida obtenida a partir de los axiomas mediante las reglas de transformación[32]. Aunque, en principio, este proceso

---

[30]Dice **Hilbert**: *"…Weyl y Brouwer intentan ofrecer una fundamentación de las matemáticas que echa por la borda todo aquello que les resulta incómodo… Al seguir a tales reformadores, nos exponemos a perder una gran parte de nuestros más valiosos conceptos, resultados y métodos."* ([Hi2])

[31] **Hilbert** se refiere a la afirmación de **Du Bois-Reymond** acerca de la limitación esencial de la razón para conocer la Naturaleza, resumida en su frase *Ignoramus et ignorabimus.*

[32] En el Capítulo I de [Ho], se desarrolla un sistema formal muy sencillo, pero que expone con gran claridad lo que supone la *formalización* (de hecho, se utiliza sistemáticamente a lo largo de la obra para

elimina totalmente el significado de las expresiones que aparecen en el sistema, que se convierte en un mero juego formal (de ahí el nombre de *formalista* con el que se conoce este programa), Hilbert sostiene que no puede prescindirse nunca de las consideraciones intuitivas y de contenido, esenciales para la elección *razonable* de los axiomas. Los problemas matemáticos se refieren a objetos reales y tienen respuestas provistas de significado. Si llegó a propugnar una interpretación formalista de las matemáticas fue porque estaba dispuesto a pagar ese precio por la certidumbre.

Pero la formalización completa del sistema era sólo una parte del programa. Una lista de signos sin significado de tal sistema formal, no afirma absolutamente nada. Lo que pretendía Hilbert era desarrollar una teoría de las propiedades combinatorias del lenguaje formal, considerado como un conjunto finito de símbolos regidos por las reglas de inferencia, que permitiera hacer afirmaciones *sobre* una expresión determinada del sistema. Este lenguaje informal *acerca* de la Matemática lo llamó Hilbert *Metamatemática*. Los enunciados metamatemáticos son pues afirmaciones sobre los signos del sistema formal y su disposición. La demostración de la consistencia de un sistema formal dado consistiría en probar por enunciados metamatemáticos finitistas que nunca puede obtenerse en el sistema una fórmula y su negación (por ejemplo, si se trata de la aritmética, probar que la expresión “$1 \neq 1$” no es nunca un teorema del sistema.) [33]

En el excelente artículo *La demostración de Gödel,* ([NN]) se establece una interesante analogía entre esta idea de Hilbert y el juego del ajedrez, interpretando éste como un sistema formal (*cálculo* para los autores):

> *El ajedrez es un juego de 32 piezas de forma determinada, jugado en un tablero cuadrado que contiene 64 subdivisiones cuadradas; Las piezas pueden moverse de acuerdo con reglas fijas. Es obvio que puede jugarse sin atribuir ninguna “interpretación” a las piezas ni a sus distintas posiciones en el damero [...] Las piezas y las subdivisiones cuadradas del tablero corresponden a los signos elementales del cálculo; las configuraciones permitidas de las piezas en el tablero corresponden a las fórmulas del cálculo; las posiciones iniciales de las piezas en el tablero corresponden a los axiomas o fórmulas iniciales del cálculo; las configuraciones subsiguientes corresponden a las fórmulas derivadas a partir de los axiomas (esto es, a los teoremas); y las reglas del juego corresponden a las reglas de derivación del cálculo. Además, aunque las configuraciones de las piezas en el tablero, igual que las fórmulas del cálculo, carecen de “significación”, los enunciados acerca de esas configuraciones, igual que los enunciados metamatemáticos acerca de las fórmulas, tienen pleno significado. Un enunciado del metaajedrez puede afirmar, por ejemplo, que hay 20 posibles jugadas de apertura para las blancas [...] o que si las blancas no tienen más que dos caballos y el rey, y las negras sólo el rey, es imposible que las blancas den mate [...] Pueden establecerse teoremas generales del metaajedrez mediante métodos de razonamiento finitistas que consisten en el sucesivo examen de un número finito de configuraciones...* ([NN; p. 67])

---

poner ejemplos e ilustrar conceptos.) Más interesantes pueden ser los Capítulos VII y VIII , donde se introducen, con gran claridad y multitud de ejemplos, otros dos sistemas formales: el cálculo proposicional y lo que el autor llama *Teoría de Números Tipográfica,* así como una aproximación al Programa de Hilbert.

[33] La demostración de la consistencia del cálculo proposicional usual puede verse en [NN; págs. 70-73].

Hacia 1930 el Programa de Hilbert parecía bien encaminado, gracias a los esfuerzos del propio Hilbert y sus estudiantes **W. Ackermann** (1896-1962), **P. Bernays** (1888-1977) y J. von Neumann. En particular, se había podido demostrar la consistencia absoluta para un sistema de aritmética de los números naturales que permite la adición (aunque no la multiplicación.) Sin embargo, el año siguiente apareció un artículo revolucionario que ponía de manifiesto que el programa de Hilbert era irrealizable.

4.5 Los límites del Método Axiomático.

El artículo a que nos referimos ([Go]) lleva el expresivo título de *"Sobre proposiciones formalmente indecidibles de* Principia Matemática *y sistemas afines, I"* y provocó una verdadera conmoción en la comunidad matemática, al mostrar que existe una limitación intrínseca en el método axiomático-deductivo. Su autor, **K. Gödel** (1906-1978), era por entonces un joven docente en la Universidad de Viena, asistente asiduo a las reuniones del Círculo de Viena, al que pertenecía su maestro **H. Hahn** (1879-1934). Su trabajo demolía el programa de Hilbert en varios aspectos, al mostrar que *todo sistema formal* [en el sentido del Programa de Hilbert] *consistente y que contenga a la aritmética, es necesariamente incompleto*, es decir, existen enunciados aritméticos verdaderos que no pueden ser probados en el sistema (de hecho, existen enunciados *indecidibles*, esto es, tales que ni ellos ni su negación son teoremas del sistema.) Tras este Primer Teorema de Incompletitud, Gödel probó que la afirmación de la *consistencia* del propio sistema formal no puede demostrarse en el sistema (a menos que se utilicen reglas de inferencia no finitarias, cuya propia consistencia es tan discutible como la misma consistencia de la aritmética[34]). Este Segundo Teorema de Incompletitud mostraba claramente el fracaso del Programa de Hilbert en su sentido original.

La demostración de Gödel está inspirada, como él mismo reconoció, en el argumento de la paradoja de Richard, aunque evitando el uso falaz de la autorreferencia lingüistica que aparece en ella. Para ello, Gödel establece un método (*numeración de Gödel)* para asignar biunívocamente un entero (*número de Gödel*) a cada signo, fórmula o demostración del sistema formal. De esta manera, el sistema formal se representa en la aritmética. El paso decisivo es utilizar los números de Gödel para aritmetizar la metamatemática del sistema, de modo que todo enunciado metamatemático del mismo queda reflejado por una relación aritmética entre números naturales. Por ejemplo, el enunciado metamátemático "*m* es el número de Gödel de una sucesión de fórmulas cuya línea final es la fórmula con número de Gödel *n*" estará representado por una determinada fórmula aritmética Dem(m,n), y lo mismo su negación. Pues bien, la idea crucial en el argumento de Gödel consiste en construir una fórmula dentro del sistema que es la paráfrasis formal del enunciado "la fórmula cuyo número de Gödel es *n* es indemostrable" y que tiene número de Gödel precisamente *n.* Es pues una fórmula que afirma su propia indemostrabilidad, lo que equivale a introducir la paradoja del mentiroso en el propio corazón de cualquier sistema formal. Basándose en que el sistema es consistente, Gödel prueba entonces que la fórmula en cuestión es indemostrable en el sistema (aunque, por un razonamiento metamatemático sencillo, puede probarse que es *verdadera*.)

Los resultados de Gödel supusieron el golpe de gracia para el Programa de Hilbert y un tremendo aldabonazo sobre las limitaciones del método axiomático y la naturaleza

[34] **G. Gentzen** (1909-1945), un alumno de Hilbert, logró probar la consistencia de la teoría de números y distintas partes del análisis en 1936, utilizando el principio de inducción transfinita.

del propio mecanismo de razonamiento de los seres humanos[35]. Como el personaje K. de **Kafka** ([Ka]) podemos recorrer las calles de aldea, conversar con sus habitantes, discutir con las autoridades, enviar mensajeros, pero nunca conseguiremos acceder al castillo. Del mismo modo, la noción de *verdad absoluta* parece inalcanzable para el pensamiento racional.

Sin embargo, es de destacar que el mismo Gödel adoptara una postura radicalmente platónica sobre las matemáticas: para él, los objetos matemáticos tienen una existencia real, independiente del conocimiento que tengamos de ellos. Por un proceso que Gödel llamó *intuición matemática,* podemos llegar a conocer ciertos hechos sobre el universo de las matemáticas, así como aprender algunos métodos correctos de razonamiento. En este sentido, la intuición matemática es un proceso tan fiable como nuestras percepciones ordinarias.. Pero como los hechos matemáticos que descubrimos son descripciones de un universo matemático real preexistente, ¡no hay posibilidad de que se dé una contradicción en las matemáticas! Por tanto, siempre que consideremos una descripción de nuestro estado presente de conocimiento de las matemáticas, podemos estar seguros de la consistencia de esa descripción. Lo que viene a decir el segundo teorema de incompletitud es que la mente humana es incapaz de *mecanizar* (en palabras de Gödel) todas nuestras intuiciones matemáticas, es decir, encontrar una descripción finitaria de nuestra percepción de las matemáticas.

Las conclusiones de Gödel son también relevantes para dilucidar los límites de la Inteligencia Artificial. En 1936 **A. Turing** (1912-1954) contestó al *entscheidungsproblem* ("problema de decisión") de Hilbert, sobre si las matemáticas son decidibles, es decir, si hay un método definido que pueda aplicarse a *cualquier* sentencia matemática y que nos diga si esa sentencia es cierta o no. En su trabajo [Tu1], Turing estableció el modelo matemático de lo que luego sería un computador programable general, la *máquina de Turing*[36], y demostró que había problemas que una tal máquina no podía resolver (el llamado *problema de la parada*). Estos trabajos complementaban y extendían los teoremas de incompletitud de Gödel y fueron el punto de partida de un amplio campo de creación y debate, que llega hasta la actualidad. A este respecto, quisiera citar los sorprendentes resultados de **G. Chaitin**: en 1987, este matemático construyó una ecuación diofántica exponencial (e.d., contiene también términos de la forma x^y) en 17.000 variables, parametrizada por un parámetro k. Chaitin demostró que, para resolver su ecuación[37] para m valores del parámetro k en un sistema formal dado, los axiomas del sistema debían tener una complejidad (es decir, *tamaño* de información, en un sentido preciso) superior a $m+C$, siendo C una constante independiente de los axiomas. Por tanto, esta ecuación sobrepasa a cualquier sistema formal, que necesariamente tiene una complejidad finita y, por tanto, ¡no puede tratar más que un número finito de casos de la ecuación! (*cfr*. [Ch1].)

A partir de los años 70 del siglo pasado, la trascendencia de los resultados de Gödel y Turing sobrepasó los límites estrictamente académicos y comenzaron a apare-

---

[35] No obstante, "El formalismo ha sido uno de los grandes dones que nos ha hecho el siglo XX. No para el razonamiento o la deducción matemática, sino para la programación, para el cálculo, para la computación." ([Ch2]).

[36] Véase el delicioso trabajo [Tu2], en el que se describe el proceso que hoy se conoce como *test de Turing* para tratar determinar si un interlocutor desconocido es una máquina o un ser humano , a través de una serie de preguntas y respuestas.

[37] O simplemente contestar si tiene un número finito o infinito de soluciones.

cer gran cantidad de obras, dirigidas a un público más amplio, en las que se trataban estos temas. Entre ellas, auténticos *best-sellers*, como [Pe1] y [Pe2], o el ya citado [Ho], en donde, además de una amplia y muy clara exposición de los resultados de Gödel, y Turing, se exploran las relaciones con temas tan diversos como la música de Bach, los dibujos de Escher, la filosofía Zen o la Inteligencia Artificial. [Ru] es también muy recomendable (la tesis doctoral del autor versa precisamente sobre Gödel). Y, pese a los años transcurridos desde su aparición, [NN] sigue siendo una de las exposiciones más claras sobre el Teorema de Gödel[38].

[38] En [Sm2], el autor adopta el formato de una novela de misterio (el inspector Craig, de Scotland Yard pide la ayuda de un amigo matemático para descubrir la combinación de una caja fuerte "a prueba de robos"), para acercarse al Teorema de Gödel y el "*extraordinario fenómeno de la autorreproducción*".

5. Conclusión

Hasta bien entrado el siglo XIX, la mayor parte de los descubrimientos matemáticos estaban motivados, fundamentalmente, por la necesidad de obtener nuevas herramientas que permitieran modelizar y describir con mayor precisión los fenómenos de la Naturaleza. Y ese papel de la matemática como herramienta y lenguaje de la ciencia en general, sigue siendo fundamental en el desarrollo de nuevas teorías. En palabras del Premio Nobel de Física de 1963 **E. P. Wigner** (1902-1995) en su famoso artículo *La irrazonable efectividad de las matemáticas en las Ciencias Naturales,*

> *El milagro de la adecuación del lenguaje de las matemáticas para la formulación de las leyes físicas es un don maravilloso que ni entendemos ni merecemos. Deberíamos estar agradecidos por ello, con la esperanza de que continúe siendo válido en el futuro y que se extienda […] a otras ramas del conocimiento.* ([Wi])

Pero, ésta ya no es la única motivación para el desarrollo matemático. Desde el último tercio del siglo XIX, con la aparición de las geometrías no euclídeas, se han ido introduciendo en matemáticas nuevos conceptos y desarrollos que no tienen una contrapartida inmediata en el mundo real. Bien es verdad que muchos de esos desarrollos han resultado a la postre decisivos para la elaboración de nuevas teorías sobre distintos aspectos de la Naturaleza: la geometría Riemaniana, desarrollada en la segunda mitad del siglo XIX, es fundamental para la formulación por Einstein de la teoría general de la Relatividad en 1916. Los espacios de Hilbert, introducidos y estudiados a partir de 1906, son la base de la formulación de la Mecánica Cuántica por J. von Neumann [39], que permitió unificar los formalismos ondulatorio y matricial existentes. El estudio de los conjuntos convexos en el espacio *n*-dimensional iniciado a principios del siglo XX, es la base de la formulación axiomática de la teoría del equilibrio económico que valió el Premio Nobel en Economía de 1983 a **G. Debreu.** La teoría de ondas de choque necesaria para la construcción de los primeros reactores nucleares en los años 1940, estaba prácticamente desarrollada en un libro publicado ¡en 1903![40]. Ejemplos de estas *matemáticas prefabricadas,* en palabras de **S. Bochner** (1899-1982), se encuentran por doquier (*cfr.* [Bo]).

Por otro lado, paradojas como la de Banach-Tarski ponen claramente en evidencia lo que debiera resultar obvio: las matemáticas son el lenguaje idóneo para modelizar y describir la Naturaleza, pero el modelo **no** es la realidad[41]. En particular, el espacio físico tridimensional en el que nos movemos **no** es el espacio euclídeo matemático $\mathbb{R}^3$, en

---

[39] Véase [vN2].

[40] Se trata de *Leçons sur la propagation des ondes et les équations de l'hydrodinamique,* de **J. Hadamard.**

[41] Véase la cita de **S. Hawking** en la Introducción.

el que (con la ayuda del axioma de elección, es cierto) tiene lugar fenómenos, como la paradoja de Banach-Tarski, obviamente imposibles en el mundo *real*.

Por otro lado, la crisis sobre los fundamentos de las matemáticas junto con los resultados espectaculares de Gödel y sus continuadores, han provocado una cierta sensación de desconcierto entre los matemáticos, al tener que renunciar al carácter de irrefutable del que gozaba su Ciencia. Veamos algunos ejemplos de esta actitud:

> *...Los esfuerzos para conseguir el rigor más extremo han conducido a un callejón sin salida, en el que ya no existe acuerdo sobre lo que éste significa. Las matemáticas continúan vivas y vitales, pero sólo sobre una base pragmática.* ([Kl1])

> *...Una demostración en matemáticas no es más que una comprobación de los productos de nuestra intuición. Obviamente, no poseemos, y probablemente nunca tendremos, un estándar de demostración que sea independiente del tiempo, de lo que queramos probar o de la persona o escuela de pensamiento que lo emplee… Lo sensato parece que es admitir que no existe tal cosa como la verdad absoluta en matemáticas […] Nuestra intuición sugiere ciertos resultados [...] que comprobamos por lo que llamamos una demostración.* ([Wil])

> *Si quiere usted que las matemáticas tengan sentido, ha de abandonar usted la certeza. Si quiere usted certeza, elimine el significado.* (El alumno Kapa en [La1])

A pesar de todo, la actitud oficial predominante en la manera de exponer y presentar las matemáticas a mediados del siglo XX fue el método axiomático-deductivo. Hay diversas razones para ello. Por un lado, como señala [DH], su conexión con el positivismo lógico, la corriente dominante en la filosofía de la ciencia en esa época. Por otro lado, la influencia del grupo colectivo autodenominado **N. Bourbaki**[42] y la publicación de su monumental obra *Éléments de Matematique,* paradigma de la exposición formalista de las matemática. Tampoco es desdeñable la sensación de seguridad que proporciona el sentirse dentro de unos límites "seguros". Y, por qué no, también una cierta componente estética. La influencia formalista llegó incluso a invadir las escuelas primarias, con el nombre de *Matemática Moderna*.

Pero a partir de 1970, la situación fue cambiando. Las nuevas exigencias de la tecnología, la economía y la creciente influencia de los computadores y la transmisión de la información, hizo que renaciera el interés por áreas inactivas durante mucho tiempo o surgieran nuevos campos de investigación en matemáticas, sobre todo relacionados con la computación, modelización y simulación o el estudio del azar. Temas como los procesos estocásticos, los fractales, las ondículas, la teoría de códigos, los sistemas dinámicos, las técnicas combinatorias, etc., despiertan un interés creciente entre los investigadores. En estos campos, además de los métodos deductivos tradicionales, toma cada vez más importancia el uso del ordenador, no sólo para conjeturar resultados, sino como instrumento *esencial* para obtenerlos. En el interesante artículo [Da] el autor contrapone el término *estructura*, omnipresente en la matemática de los años 1960, con el de *modelo*, empleado sistemáticamente en una parte importante de la matemática actual. Hasta tal punto esto es así, que en el Congreso Internacional de Matemáticas celebrado en Berlín en 1998, **D. Mumford** formuló la vieja polémica entre matemática pura y aplica-

[42] Véase [Bo3]. La declaración programática del grupo está recogida en [Bou1] y [Bou2].

da en términos de *“matemáticos que demuestran teoremas versus los que construyen modelos”* ([Mu])[43].

En todo caso, parece cierto que, dado un sistema formal, la lógica de primer orden debe conducir a resultados absolutamente correctos. Pero la matemática real (*matemática informal* de Lakatos), la que hacen los matemáticos en su quehacer diario, **jamás** se escribe en lenguaje formalizado. Las demostraciones son establecidas por *consenso de los cualificados*. Incluso cuando surgen diferencias de opinión entre los expertos, las dudas de resuelven por la comunicación y la explicación, nunca por la transcripción de la demostración al cálculo de predicados de primer orden (cosa, por otro lado, prácticamente imposible).

Pero, además, el método de formalización de las demostraciones choca frontalmente con la experiencia de la creación matemática. Como dice **S. Feferman**:

En su trabajo, el matemático fía en intuiciones sorprendentemente vagas, y avanza a tientas, marcha atrás en demasiadas ocasiones. Está claro que, en su forma actual, la lógica es incapaz de dar una descripción directa ni del desarrollo histórico de las matemáticas ni de la experiencia cotidiana de los profesionales. Es igualmente claro que la búsqueda de unos fundamentos definitivos a través de los sistemas formales, ha fracasado en llegar a conclusión convincente alguna.

Abundando en esta idea, tras poner como ejemplos la demostración del Teorema de los Cuatro colores por **K. Appel** y **W. Haken**, en la que se emplea de manera esencial un programa de ordenador, o la clasificación de los grupos finitos simples (suma de unos 100 teoremas individuales y unas 15.000 páginas escritas), **P. Davis** y **R. Hersh** insisten en la dimensión colectiva que tiene actualmente la noción de *demostración correcta* en Matemáticas[44]:

> *Los matemáticos de todos los campos se apoyan unos en el trabajo de otros; la confianza mutua que les permite hacerlo reside en el sistema social del que forman parte. No se limitan a utilizar resultados que sean capaces de demostrar por sí mismos a partir de primeros principios. Cuando un teorema ha sido publicado en una revista seria, cuando el nombre del autor es conocido, cuando el teorema ha sido citado y utilizado por otros matemáticos, se considera que el teorema está debidamente establecido.* ([DH; pág. 278])

Durante la verificación de la demostración de **A. Wiles** del Último Teorema de Fermat, varios matemáticos reconocieron que la dimensión social e institucional de la confianza depositada en las opiniones de algunos de los revisores era al menos tan importante como el rigor empleado en sus comprobaciones.

Así pues, en los comienzos de este siglo XXI, la idea del *consenso entre los cualificados* dentro del cuerpo social de la Comunidad Matemática es la predominante para determinar, en último término, la aceptación de un resultado como correcto.

[43] Véase también [Bo4] y [Go].

[44] La misma idea se expone en [Da].

BIBLIOGRAFÍA

[A1] Aristóteles, *Física.* Biblioteca Clásica Gredos Nº 203, Madrid, 1995

[A2] ——————, *Mecánica*. Biblioteca Clásica Gredos Nº 277, Madrid, 2000.

[AKL] A. D. Aleksandrov, A. N. Kolmogorog, M. A. Laurentiev (eds.), *La matemática: su contenido, métodos y significado.* 3 Vols. Alianza Editorial, Madrid, 1974.

[Ba1] S. Banach, *Sur le probléme de la mesure.* Fundamenta Mathem., **4** (1923), 7-33.

[Ba2] ——————, *Über die Baire'sche Kategorie gewisser Funktionenmengen.* Studia Math. **3** (1931), 174-179.

[BaT] ——————, A. Tarski, *Sur la decomposition des ensembles de points en parties respectivement congruentes.* Fundamenta Mathem., **6** (1924), 244-277.

[Be] E. T. Bell, *The place of rigor in Mathematics.* Amer. Math. M. (1934), 599-607.

[Bla] M. Blanco, *Las parábolas y las paradojas. Paradojas matemáticas en un cuento de Borges.* Cuadernos Hispanoamericanos, **437** (1986), 5-26.

[Blu] L. M. Blumenthal, *A paradox, a paradox, a most ingenious oparadox.* Amer. Math. M. (1940), 346-353.

[B1] C. Boyer, *The History of the Calculus and its conceptual development.* Dover Pub., New York, 1959.

[B2] C. Boyer, *Historia de la Matemática.* Alianza Universidad Textos, **94**. Alianza Editorial, 1986.

[Bg1] J. L. Borges, *Discusión.* Alianza Editorial, Madrid, 1976.

[Bg2] ——————, *Ficciones.* Buenos Aires, Emecé, 1966.

[Bg3] ——————, *El hacedor.* Buenos Aires, Emece, 1960.

[Bo] S. Bochner, *The role of Mathematics in the rise of Science.* Princeton, 1966. (Hay una versión en español publicada en Alianza Universidad Ciencia, nº 689. Madrid, 1991.)

[BoR] F. Bombal, B. R. Salinas, *The Tychonoff product theorem for compact Hausdorff spaces does not imply the axiom of choice: a new proff. Equivalent propositions.* Collectanea Mathematica, **24** (1973), 3-14.

[Bo1] F. Bombal, *La teoría de la medida: 1875-1925.* En "Seminario de Historia de la Matemática I", págs. 107-143. Universidad Complutense, 1991.

[Bo2] ——————, *Los modelos matemáticos de la mecánica cuántica.* En "La Ciencia en el siglo XX", Seminario Matemático *Orotava* de Historia de la

Ciencia, Actas IV y V, págs. 115-146. Consejería de Educación de Canarias. 1999.

[Bo3] ——————, *Bourbaki*. En “Historia de la Matemática en el siglo XX”, págs. 313-312. Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Madrid, 1998.

[Bo4] ——————, *Matemáticas y desarrollo científico*. Lección inaugural del Curso Académico 2000-2001 en la U.C.M. Madrid, 2000.

[Bol] B. Bolzano, *Las paradojas del Infinito,* Mathema, UNAM, México, 1991.

[Bot] U. Bottazzini, *The higher calculus: A history of Real and Complex analysis from Euler to Weierstrasss*. Spriger, Berlín, 1986.

[Bou1] N. Bourbaki, *Foundations of Mathematics for the working mathematician.* Journal of Symbolic Logic, **14** (1948), 1-14.

[Bou2] ——————, *The Architecture of Mathematics*. American Math. Monthly, **57** (1950), 221-232.

[Br] C. Bruter, *Sur la nature des mathématiques.* Gauthier.Villars, París, 1979.

[Bu] B. H. Bunch, *Mathematical fallacies and paradoxes.* Van Nostrand Reinhold Co., New York, 1982.

[Bur] C. Burali-Forti, *Una questione sui numeri transfiniti.* Rendiconti del Circolo Mat. di Palermo **11**, (1897), 154-164.

[Ca] J. L. Casti, *Five golden rules. Great theories of 20th-century Mathematics and why they matter*. J. Wiley & Sons, New York, 1996.

[C] A. L. Cauchy, *Curso de Análisis*. Mathema. UNAM, México, 1994.

[Ce] M. De Cervantes, *El ingenioso hidalgo Don Quijote de la Mancha.* (Partes I y II). Ed. Codex, Madrid, 1965.

[CR] R. Courant, H. Robbins, *What is Mathematics?* Oxford Univ. Press, 14th. Ed., 1969 (Traducción española: ¿*Qué es la Matemática?* Aguilar, Madrid.)

[Ch1] G. J. Chaitin, *Conversations with a mathematician. Math, Art, Science and the limits of reason.* Springer, 2002.

[Ch2] ——————, *Ordenadores, paradojas y fundamentos de las matemáticas,* Investigación y Ciencia, julio 2003, 28-35.

[Da] A. Dahan Dalmedico, *An image conflict in mathematics after 1945.* En “Changing images in Mathematics. From the French Revolution to the New Millennium”, U. Bottazzini and A. Dahan Dalmedico, Ed., Routledge, London, 2001.

[D] G. Debreu. *Teoría del valor. Un análisis axiomático del equilibrio económico.* Bosch Casa Editorial. Barcelona, 1973.

[DD] F. Diener, M. Diener (editores), *Nonstandard Analysis in practice.* Springer, Berlin, 1995.

[DH] P. J. Davis, R, Hersh, *Experiencia Matemática.* MEC y Labor, Barcelona, 1982.

[DHK] L. Dubins, M. Hirsch, J. Karush, *Scissors congruence.* Israel J. Math. **1** (1963), 239-247.

[Di1] J. Dieudonné, *The work of Bourbaki during the last thirty years.* Notices of the Amer. Math. Soc. (1982), 618-623.

[Di2] ———— (Ed.), *Abrégé d'Histoire des Mathématiques, 1700-1900.* 2 Vols., Hermann, París, 1978.

[Di3] ————, *History of Functional Analysis.* North Holland. Amsterdam, 1981.

[DM] D. van Dalen, A. F. Monna, *Sets and integration: an outline of the development.* Nordhoff, Groninga, 1972.

[Du] W. Dunham, *Journey through Genius. The great theorems of Mathematics.* J. Wiley & Sons, Inc. New York, 1990.

[Ed] C. H. Edwards, *The historical development of the calculus.* Springer-Verlag, New York, 1979.

[Ei] A. Einstein, *Sobre la teoría de la relatividad especial y general.* Alianza, LB 1048. Madrid, 1984.

[Eu1] L. Euler, *Introducción al Análisis de los Infinitos.* Edición a cargo de A. J. Durán y F. J. Pérez. Real Sociedad Matemática Española, 2000.

[Eu2] ————, *De la controverse entre Messrs. Leibnitz et Bernouilli sur les logarithmes négatifs et imaginaires.* Mem. de l'académie des sciences de Berlin, **5** 1749 (pub. 1751), 139-179; *Opera* (1) **17**, 195-232.

[Fe] R. P. Feynman, *El carácter de la Ley Física.* Tusquets, Barcelona 2000.

[FW] M. Foreman, F. Wehrung, *The Hahn-Banach theorem implies the existence of a non-Lebesgue measurable set.* Fund. Math. **138** (1991), 13-19.

[Ga] A. Galindo, *Tras el tiempo.* Discurso inaugural del año académico 1994-1995 en la Real Academia de Ciencias de Madrid. 1994.

[Gar] R. J. Gardner, *Convex bodies equidescomposable by locally discrete groups of isometries.* Mathematika **32** (1985), 1-9.

[GG] I. Grattan-Guinness (Ed.), *From the Calculus to Set Theory: 1630-1910.* Durckworth, London, 1980. (Hay traducción española en Alianza Editorial, 1984.)

[GMMR] M. de Guzmán, M. A. Martín, M. Morán, M. Reyes, *Estructuras fractales y sus aplicaciones.* Labor, Barcelona, 1993.

[Go] K. Gödel, *Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Matemática und verwandter Systeme I.* Monaschefte für Mathematik und Physik, **38** (1931), 173-198.

[God] R. Godement, *Cours d'algèbre.* Hermann, Paris, 1963.

[Gow] W. T. Gowers, *The two cultures of Mathematics.* En "Mathematics: Frontiers and Perspectives". American Math. Soc., 2000.

[Gr] A. Grünbaum, *Modern Science and Zeno's paradoxes.* George Allen and Unwin Pub., Londres, 1968.

[GW] R. J. Gardner, S. Wagon, *At long last, the circle has been squared.* Notices of the Amer. Math. Soc., **36** (1989), 1338-1343.

[H] T. Hawkins, *Lebesgue's theory of integration: its origins and development.* Chelsea, New York, 1979.

[Ha] S. W. Hawking, *Historia del Tiempo.* Ed. Crítica, Barcelona, 1988.

[He1] T. L. Heath, *The works of Archimedes.* Reimpresión de Dover (1953) de la edición de Cambridge University Press (1897), incluyendo el suplemento de 1912 sobre *El Método.*

[He2] ——————, *The thirteen books of Euclid's Elements* (3 Vols.) New York, Dover, 1956.

[He3] ——————, *Mathematics in Aristotle.* Oxford University Press, 1949.

[Hei] S. J. Heims, *J. Von Neumann y N. Wiener.* Biblioteca Salvat de grandes biografías, 2 Vols. Salvat Ed., Barcelona, 1989.

[Hi1] D. Hilbert, *Über die stetige Abbildung einer Linie auf ein Flächenstück.* Math. Ann., 38 (1891), 459-460.

[Hi2] ——————, *Neuebegründung der Mathemaik.* Texto de la Conferencia presentada al Seminario de Matemáticas de la Universidad de Hamburgo en 1922. Traducción española: *La nueva fundamentación de las matemáticas,* en "Fundamentos de las Matemáticas", Mathema, UNAM, México, 1993.

[Hi3] ——————, *Die logischen Drundlagen der Mathematik.* Maahematische Annalen, **88** (1923), 151-165. Traducción española: *Los fundamentos lógicos de las Matemáticas.* En *Fundamentos de las Matemáticas,* Mathema, UNAM, México, 1993.

[Hi4] ——————, *Über das Unendliche.* Mathematische Annalen, **95** (1926), 161-190. Hay traducción española: *Acerca del infinito*, incluida en la recopilación *Fundamentos de las Matemáticas,* Mathema, UNAM, México, 1993.

[Ho] D. R. Hofstadter, *Gödel, Escher, Bach. Un eterno y grácil bucle.* Tusquets Ed., 1987.

[Hos] G. F. A. de L'Hospital, *Analyse des Infiniment Petits, pur l'intelligence des Lignes Courbes.* París, 1696.

[J1] M. Jammer, *The Philosophy of Quantum Mechanics.* Wiley Interscience, New York, 1974.

[J2] ——————, *The conceptual development of Quantum Mechanics.* en "The History of Modern Physics, 1800-1950", Vol. 12. American Institute of Physics, 1989.

[Jo] P. Jordan, *Die Quantenmechanik und die Grundprobleme der Biologie und Psychologie.* Die Naturwissesnschaften, **20** (1932), 815-821.

[Ka] F. Kafka, *El Castillo*. Emecé, Buenos Aires, 1967.

[Ke] H. J. Keisler, *Elementary Calculus. An infinitesimal Approach.* Prindle, Weber & Schmidt, Boston 1976. Segunda edición, 1986.

[KN] E. Kasner, J. Newman, *Matemáticas e Imaginación.* Librería Hachette, S.A., Buenos Aires, 1951.

[Kl1] M. Kline, *Mathematical thought from ancient to modern times.* Oxford University Press, New York, 1972.

[Kl2] ——————, *Mathematics, the loss of certainty.* Oxford University Pressi, New York, 1980.

[KM] I. Kleiner, N. Movshovitz-Hadar, *The role of Paradoxes in the evolution of Mathematics.* Amer. Math. Monthly, (1994), 963-974.

[La1] I. Lakatos, *Pruebas y refutaciones.* Alianza Editorial, Madrid. 2ª Ed. 1982.

[La2] ——————, *Matemáticas, ciencia y epistemología.* Alianza Ed., Madrid, 1981.

[L1] M. Laczkovich, *Equidescomposability and discrepancy; a solution of Tarski's circle-squaring problem.* J. Reigne Angew. Math. **404** (1990), 77-117.

[L2] ——————, *Paradoxes in Measure Theory.* Handbook of Measure Theory, Vol. 1, (E. Pap, Editor), 83-123. Elsevier, 2002.

[Le1] H. Lebesgue, *Intégrale, longueur, aire.* Annali di Mat. (3), 7, (1902), 231-259.

[Le2] ——————, *Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives.* Gauthier-Villars, París, 1904.

[Le3] ——————, *Leçons sur les séries trigonométriques.* Gauthier-Villars, París, 1906.

[Lee] H. D. P. Lee, *Zeno of Elea: a text with translation and notes.* A. M. Hakkert, Amsterdam, 1967.

[Li] F. Le Lionnais, *Las grandes corrientes del pensamiento matemático.* Eudeba, Buenos Aires, 1962.

[M] Yu. I. Manin, *Mathematics as Profession and Vocation.* En "Mathematics: Frontiers and Perspectives". Amer. Math. Soc., 2000.

[Ma1] B. Mandelbrot, *How long is the coast of Britain? Statistical self similarity and fractional dimension.* Science, **156** (1967), 636-638.

[Ma2] ——————, *Les objets fractals: forme, hasard et dimension.* Flammarion, París, 1975.

[Mar] M. Martínez, *Algo más sobre la historia de la teoría de la medida (1904-1930): La paradoja de Banach-Tarski.* En "Seminario de Historia de la Matemática I", págs. 335-430. Universidad Complutense, 1991.

[Max] E. A. Maxwell, *Fallacies in Mathematics. Cambridge* University Press, London, 1959.

[Maz] S. Mazurkiewicz, *Sur les fonctions non dérivables.* Studia Math., **1** (1929), 92-94.

[Mo] R. Morris, *La historia definitiva del Infinito.* Ediciones B, Barcelona, 2000.

[Mu] D. Mumford, *Trends in the profession of mathematics.* Berlín Intelligencer, 1998.

[N] E. P. Northrop, *Paradojas Matemáticas.* Uteha, México, 1960.

[NN] E. Nagle, J. R. Newman, *La demostración de Gödel.* En "Sigma, El Mundo de las Matemáticas", Vol. 5. Eds. Grijalbo, Barcelona, 1968.

[Nw] J. R. Newman, *Sigma, el mundo de las matemáticas, Vol 1.* Eds. Grijalbo, Barcelona, 1968.

[P] E. Palma, *El primer libro de texto del cálculo infinitesimal, el "analyse" del marqués de L'Hospital.* Tesina de Licenciatura. Madrid, 1986.

[Pa] A. L. T. Paterson, *Amenability.* Math. Surveys Monographs, Vol. 29. Amer. Math. Soc., Providence, R.I. 1988.

[Paw] J. Pawlikowski, *The Hahn-Banach teorem implies the Banach-Tarski paradox.* Fund. Math. (1991), 21-22.

[Pea] G. Peano, *Sur une courbe que remplit une aire.* Math. Ann, 36 (1880), 157-160.

[Pe1] R. Penrose, *La nueva mente del Emperador.* Mondadori, Madrid, 1991.

[Pe2] ——————, *Las sombras de la mente.* Crítica, 1996.

[Pes] I. N. Pesin, *Classical anmd modern integration theories.* Academic Press, New York, 1971.

[PR] *Los filósofos presocráticos, Vol. II.* Biblioteca Clásica Gredos, Nº 24. Gredos, Madrid, 1979.

[Re] C. Reid, *Hilbert.* Springer-Verlag, New York, 1970.

[R] F. Riesz, *Untersuchungen über Systeme integrirbarer Funktionen.* Math. Ann., (1910), 449-497.

[Ri] K. Ribnikov, *Historia de las Matemáticas.* Mir, Moscú, 1987.

[Ro] A. Robinson, *Non-Standard Analysis.* North Holland Pub., Amsterdam, 1966.

[Ru] R. Rucker, *Infinite and the mind. The Science and Philosophy of the Infinite.* Birkhäuser, 1982.

[RW] B. Russell, A. N. Whitehead, *Principia Mathematica,* 3 vols. Cambridge Univ. Press, 1910, 1912, 1913.

[Sa] W. C. Salmon, *Zeno's Paradoxes.* Bobbs-Merrill, New York, 1970.

[SL] K. D. Stroyan, W. A. Luxemburg, *Introduction to the Theory of Infinitesimals.* Academic Press, New York, 1976.

[Sm1] R. Smullyan, *¿Cómo se llama este libro?: el enigma de Drácula y otros pasatiempos lógicos.* Ed. Cátedra, Madrid, 1983.

[Sm2] ——————, *¿La dama o el tigre?: y otros pasatiempos lógicos ; Incluyendo una novela matemática que presenta el gran descubrimiento de Gödel.* Ed. Cátedra, Madrid, 1983.

[SR] J. M. Sánchez Ron, *El origen y desarrollo de la relatividad.* Alianza Universidad, 362. Alianza Ed., Madrid, 1983.

[Sto] M. H. Stone, *Applications of the theory of Boolean rings to general topology.* Trans. Amer. Math. Soc. **41** (1937), 375-481.

[St] K. Stromberg, *The Banach-Tarski paradox.* American Mathematical Monthly, **86** (1979), 151-161.

[Str] D. J. Struik, *A source book in mathematics 1200-1800.* Cambridge, Ma. Harvard University Press, 1969.

[Ta1] A. Tarski, *Sur les fonctions additives dans les classes abstraites et leur applications au problème de la mesure.* C. R. Séances Soc. Sci. Lettres Varsovie, (1929), 114-117.

[Ta2] ——————, *Algebraische Fassung des Massproblems.* Fund. Math. **31** (1938), 47-66.

[Tat] R. Taton (Ed.), *Histoire générale des sciences.* 5 Vols. Presses Univ. de France, París, 1957-1961. (Hay traducción al español por Destino, Barcelona, 1971-1975, y por Orbis, Barcelona, 1988.)

[Te] G. Temple, *100 Years of Mathematics.* Duckworth, London, 1981.

[Tu1] A. Turing, *On computable numbers, with an application to the Entscheidungsproblem*- Proceedings of the London Mathematical Society, Ser. 2, Vol. 42, (1936-1937), 230-265.

[Tu2] ——————, *¿Puede pensar una máquina?* En "Sigma, el mundo de las Matemáticas", Vol. 6, 36-60.Ed. Grijalbo, Barcelona, 1969.

[vN1] J. von Neumann, *Zur allgemeinen Theorie des Masses.* Fund. Math. **13** (1929), 73-116

[vN2] J. von Neumann, *Fundamentos matemáticos de la mecánica cuántica.* Publicaciones del Instituto de Matemáticas "Jorge Juan", Madrid, 1949.

[VW] B. L. Van der Waerden, *Sources of Quantum Mechanics.* Dover Pub., 1968.

[W] S. Wagon, *The Banach-Tarski paradox.* Cambridge University Press, Cambridge 1985.

[We] K. Weierstrasss, *Über dies analytische Darstellbarkeit sogenannter willkürlicher Funktionen einer reellen Veränderlichen.* Sitzungsberichte der Akademie zu Berlin, (1885), 633-639 y 789-805.

[Wes] R. S. Westfall, *The life of Isaac Newton.* Cambridge University Press, 1996.

[Wi] E. Wigner, *The unreasonable effectiveness of Mathematics in the Natural Sciences.* Commun. Appl. Math. **13** (1960), 1-14.

[Wil] R. L. Wilder, *The nature of mathematical proof.* Amer. Math. M. (1944), 309-323.

[Yn] F. J. Ynduráin, *Espacio, tiempo, materia.* Discurso leído en el acto de recepción en la Real Academia de Ciencias de Madrid. 1996.

[Ze] E. Zermelo, *Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre:I.* Math. Annalen, **65** (1908), 261-281.