Praktikum Klassische Physik I

Versuchsvorbereitung:
P1-53,54,55: Vierpole und Leitungen

Christian Buntin

Gruppe Mo-11

Karlsruhe, 16. November 2009

Inhaltsverzeichnis

1 Hoch- und Tiefpass

Ein *R-C-Spannungsteiler* bezeichnet einen passiven Vierpol, der als Frequenzfilter funktioniert. Hohe (bzw. niedriger) Frequenzen werden durchgelassen, während hingegen niedriger (bzw. hohe) Frequenzen gesperrt werden.

Das *Abschwächungsverhältnis* gibt hierbei an, wie groß das Verhältnis zwischen Eingangs- und Ausgansspannung des Vierpoles bei einer bestimmten Frequenz ω ist.

Die *Phasenverschiebung* gibt an, wie weit die Phasen der Ein- und Ausgangsspannung auseinander liegen. Wenn man U_e und U_a in einem Diagramm über die Zeit t aufträgt, so lässt sich die Phasenverschiebung $\Delta\varphi$ berechnen:

$$\frac{\Delta t}{T} = \frac{\varphi}{2\pi} \Leftrightarrow \Delta\varphi = \frac{2\pi\Delta t}{T} = 2\pi f \Delta t = \omega\Delta t$$

1.1 Hochpass

Ein *Hochpass* besteht aus einem Kondensator C und einem Widerstand R, welche in Reihe an die Eingangsspannung U_e angeschlossen werden (siehe Abbildung 1). Die frequenzgefilterte Spannung U_a kann am Widerstand abgegriffen werden. Dabei werden nur Spannungen mit hoher Frequenz durchgelassen.Für diese Ausgansspannung gilt:

$$\begin{aligned}
U_a &= I_{\text{ges}} R = \frac{U}{R_{\text{ges}}} R = \frac{R}{R + \frac{1}{i\omega C}} U_e = \frac{R\left(R - \frac{1}{i\omega C}\right)}{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}} U_e = \frac{R^2\omega^2C^2 + iR\omega C}{R^2\omega^2C^2 + 1} U_e \\
|U_a| &= \frac{\sqrt{R^4\omega^4C^4 + R^2\omega^2C^2}}{R^2\omega^2C^2 + 1} |U_e| = \frac{R\omega C}{\sqrt{R^2\omega^2C^2 + 1}} |U_e|
\end{aligned}$$

Somit gilt für das Abschwächungsverhälntis $\frac{|U_a|}{|U_e|}$:

$$\frac{|U_a|}{|U_e|} = \frac{R\omega C}{\sqrt{R^2\omega^2C^2 + 1}}$$

Und für die Phasenverschiebung φ gilt:

$$\tan\varphi = \frac{\operatorname{Im} U_a}{\operatorname{Re} U_a} = \frac{1}{R\omega C} \Leftrightarrow \varphi = \arctan\frac{1}{R\omega C}$$

Am Zweikanaloszilloskop werden die Spannungen U_e und U_a dargestellt, wobei für U_a der Tastkopf benutzt wird, da dieser einen zehn mal größeren Innenwiderstand als die anderen Eingänge besitzt und die Spannungsmessung somit weniger verfälscht wird.

Es wird $|U_a|_{SS}$ und Δt bei bekannter Frequenz und Eingangsspannung und bei verschiedenen Widerständen R gemessen.

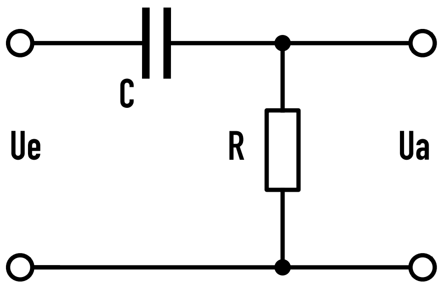

Abbildung 1: Hochpass[1]

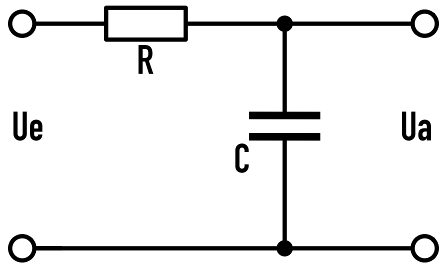

Abbildung 2: Tiefpass[2]

1.2 Tiefpass

Ein *Tiefpass* besteht aus einem Kondensator C und einem Widerstand R, welche in Reihe an die Eingangsspannung U_e angeschlossen werden (siehe Abbildung 2). Die frequenzgefilterte Spannung U_a kann am Kondensator abgegriffen werden. Dabei werden nur Spannungen mit niedriger Frequenz durchgelassen.Für diese Ausgansspannung gilt:

$$U_a = I_{\text{ges}} \frac{1}{i\omega C} = \frac{U}{R_{\text{ges}}} \frac{1}{i\omega C} = \frac{\frac{1}{i\omega C}}{R + \frac{1}{i\omega C}} U_e = \frac{1}{iR\omega C + 1} U_e$$
$$|U_a| = \frac{1}{\sqrt{R^2\omega^2C^2 + 1}} |U_e|$$

Somit gilt für das Abschwächungsverhälntis $\frac{|U_a|}{|U_e|}$:

$$\frac{|U_a|}{|U_e|} = \frac{1}{\sqrt{R^2\omega^2C^2 + 1}}$$

Und für die Phasenverschiebung φ gilt:

$$\tan\varphi = \frac{\operatorname{Im} U_a}{\operatorname{Re} U_a} = -R\omega C \Leftrightarrow \varphi = \arctan(-R\omega C)$$

Es werden die selben Darstellungen und Messungen wie in Aufgabe 1.1 getätigt.

2 Differenzier- und Integrierglieder

2.1 Differenzierglied

Es wird der selbe Aufbau wie in Aufgabe 1.1 verwendet, allerdings wird statt einer sinusförmigen eine *dreieckförmige* Wechselspannung angelegt (siehe Abbildung 3).

[1]Quelle: `http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Hochpass.svg` (15.11.2009)
[2]Quelle: `http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Tiefpass.svg` (15.11.2009)

Es gilt: $U_a = IR = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}R$. Da $C = \frac{Q}{U_e}$ ist $Q = CU_e \Rightarrow \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = C\frac{\mathrm{d}U_e}{\mathrm{d}t}$. Somit gilt:

$$U_a = RC\frac{\mathrm{d}U_e}{\mathrm{d}t}$$

Da die Ausgangsspannung somit proportional zur zeitlichen Ableitung der Eingangsspannung ist, funktioniert der Hochpass hier als *Differenzierglied*. Allerdings muss dafür gelten, dass $\frac{f}{f_0} \ll 1$ ist, sonst ist das Verhältnis nicht mehr proportional. Da $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi\sqrt{RC}}$ ist, muss $f \ll \frac{1}{2\pi\sqrt{RC}}$ sein. Damit dies erfüllt ist, muss für den Widerstand gelten: $R \ll \frac{1}{4\pi^2 C f^2}$.

Es wird die Form der Ein- und Ausgangsspannung verglichen. Da bei einer Dreiecksspannung die Spannung konstant steigt bzw. fällt, wird eine Rechteckspannung als Ausgangsspannung erwartet.

2.2 Integrierglied

Es wird der selbe Aufbau wie in Aufgabe 1.2 verwendet, allerdings wird statt einer sinusförmigen eine *rechteckförmige* Wechselspannung angelegt (siehe Abbildung 3).

Es gilt:

$$U_a = \frac{1}{C}Q = \frac{1}{C}\int I\,\mathrm{d}t = \frac{1}{RC}\int (U_e - U_a)\,\mathrm{d}t$$

Da die Ausgangsspannung somit proportional zum Integral der Eingangsspannung ist, funktioniert der Hochpass hier als *Integrierglied*. Allerdings muss dafür gelten, dass $\frac{f}{f_0} \gg 1$ ist, sonst ist das Verhältnis nicht mehr proportional

Es wird die Form der Ein- und Ausgangsspannung verglichen. Da bei einer Rechteckspannung die Fläche unter der Kurve konstant steigt bzw. fällt, wird eine Dreieckspannung als Ausgangsspannung erwartet.

2.3 Weitere Untersuchungen

i) Das Differenzierglied wird mit anderen Wechselspannungen betrieben:

Sinusspannung: Erwartet wird der Verlauf einer cos-Kurve

Rechteckspannung: Erwartet wird ein Peak an den senkrechten Kanten der Rechteckspannung

ii) Das Integrierglied wird mit anderen Wechselspannungen betrieben:

Sinusspannung: Erwartet wird der Verlauf einer $-\cos$-Kurve

Dreieckspannung: Erwartet wird ein parabelartiger Verlauf $\propto t^2$

iii) Am Hochpass wird die Frequenz der Eingangsspannung variiert und dabei die Amplitude der Ausgangsspannung beobachtet.

iv) Am Tiefpass wird die Frequenz der Eingangsspannung variiert und dabei die Amplitude der Ausgangsspannung beobachtet.

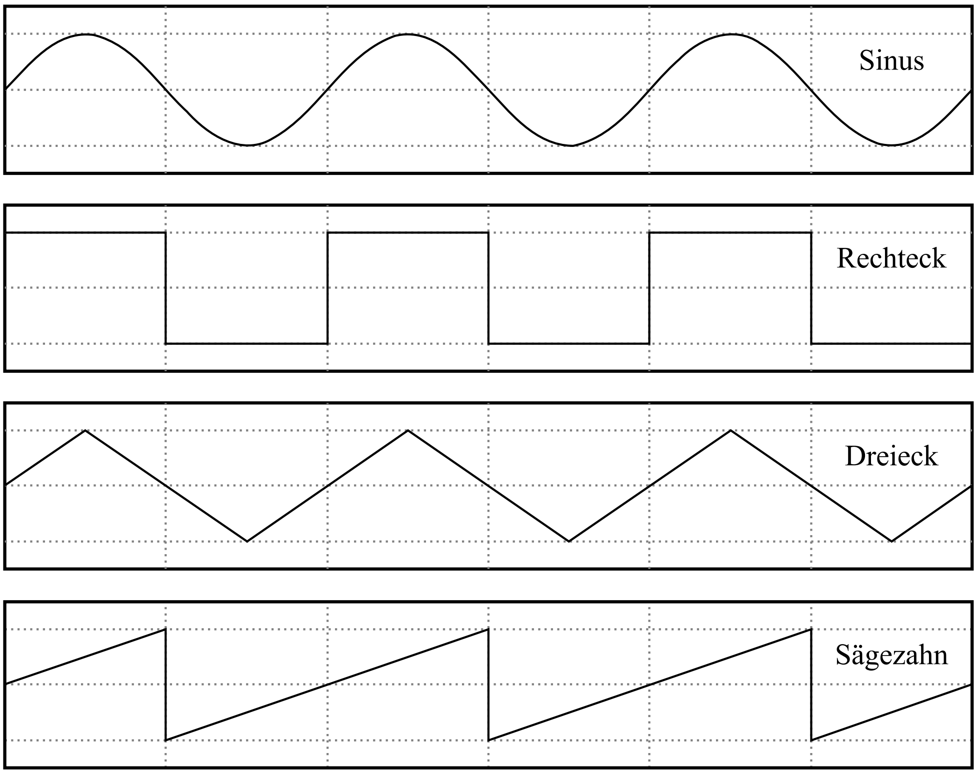

Abbildung 3: Verschiedene Spannungsformen[3]

[3] Quelle: `http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Waveforms_de.svg` (15.11.2009)

3 Drosselkette

Eine *Drosselkette* besteht aus mehreren hintereinander geschalteten *Vierpolen*. Ein Vierpol ist eine Schaltung mit 2 Anschlusspaaren (daher der Name) mit bestimmten Eigenschaften, wie zum Beispiel eine Phasenverschiebung zwischen Eingangs- und Ausgangswechselspannung oder frequenzabhängige Änderungen der Amplitude. Diese Eigenschaften sind die *Übertragungseigenschaften* des Vierpols.

3.1 Charakteristischer Widerstand

Schließt man an das Ende der Drosselkette den *charakteristischen Widerstand* Z_0 an, so werden die Wellen, welche durch die Drosselkette laufen, nicht reflektiert.

Dazu wird eine Rechteckspannung an die Drosselkette angelegt und der regelbare Abschlusswiederstand Z_A so eingestellt, dass der beobachtete Spannungsablauf möglichst unbeeinflusst von Reflexionen am Ende der Kette ist.

Für den charakteristischen Widerstand gilt nach Vorbereitungsmappe:

$$Z_0 = \frac{\sqrt{\frac{L}{C}}}{\sqrt{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}} \text{ mit } \omega_0 = \frac{2}{\sqrt{LC}}$$

. Wenn $\omega \ll \omega_0$ ist (wie im Versuch), lässt sich die Gleichung nähern:

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}} \text{ für } \omega \ll \omega_0$$

3.2 Grenzfrequenz

Gesucht ist die *Grenzfrequenz*, ab der sich U_a stark mit der Frequenz f ändert. Dabei muss der Abschlusswiederstand Z_A aufgrund seiner Frequenzabhängigkeit nachgeregelt werden.

Nach der Vorbereitungsmappe gilt für die Grenzfrequenz:

$$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{2}{2\pi\sqrt{LC}} = \frac{1}{\pi\sqrt{LC}}$$

3.3 Berechnung der Kapazitäten und Induktivitäten

Es gilt:

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}} \Leftrightarrow \sqrt{C} = \frac{\sqrt{L}}{Z_0} \Leftrightarrow \sqrt{L} = Z_0\sqrt{C}$$

Einsetzten in die Gleichung für die Grenzfrequenz:

$$f_0 = \frac{1}{\pi\sqrt{LC}} = \frac{Z_0}{\pi\sqrt{L}\sqrt{L}} \Leftrightarrow L = \frac{Z_0}{\pi f_0}$$

$$f_0 = \frac{1}{\pi\sqrt{LC}} = \frac{1}{\pi\sqrt{C}Z_0\sqrt{C}} \Leftrightarrow C = \frac{1}{\pi f_0 Z_0}$$

3.4 Phasenverschiebung

Es wird die Phasenverschiebung der einzelnen Glieder der Drosselkette (jeweils mit Abschlusswiderstand) bei verschiedenen Frequenzen mittels des Zweikanaloszilloskops untersucht. Bei der Grenzfrequenz sollte die Phasenverschiebung gerade π betragen und die Phasenverschiebungen von hintereinander geschalteten Gliedern sollten sich addieren.

Δt wird wie in Aufgabe 1 in das Bogenmaß umgerechnet: $\Delta\varphi = 2\pi f \Delta t$.

Für die Phasenverschiebung einer Drosselkette mit n Gliedern gilt nach der Vorbereitungsmappe:

$$\Delta\varphi = 2n \arcsin\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) = 2n \arcsin\left(\frac{f}{f_0}\right)$$

Somit müssen die Frequenzen f_k bestimmt werden, bei denen eine Phasenverschiebung von $k \cdot \pi$ auftritt: $\Delta\varphi = k\pi$ mit $k \in \{1{,}2{,}3{,}4{,}5\}$

Dann gilt:

$$\Delta\varphi = k\pi = 2n \arcsin\left(\frac{f}{f_0}\right) \Leftrightarrow \sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right) = \frac{f}{f_0} \Leftrightarrow f_0 = \frac{f}{\sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right)}$$

3.5 Reflexion am Kettenende

Das Kettenende wird kurzgeschlossen ($Z_A = 0$) und am Kettenanfang wird ein Widerstand eingebaut, um Reflexionen dort zu vermeiden. Als Eingangsspannung wird eine Rechteckspannung verwendet.

Da das Ende kurzgeschlossen ist, erfolgt dort eine Reflexion mit einer Phasenumkehr. Somit sollten sich zwei gegenphasig schwingende Rechteckspannungen ergeben, was zur Auslöschung dieser beiden führt.

4 Koaxialkabel

4.1 Charakteristischer Widerstand

Der charakteristische Widerstand Z_0 des Koaxialkabels wird wie in Augabe 3.1 bestimmt, allerdings hier mit einer Wechselspannungsfrequenz von $f \approx 1{,}1$ MHz.

4.2 Verzögerungszeit (direkt)

Die *Verzögerungszeit* ist der Zeitunterschied Δt zwischen Eingangs- und Ausgangssignal, relativ zur Kabellänge. Für sie gilt:

$$\tau' = \frac{\Delta t}{l} = \frac{1}{v_{\text{Phase}}}$$

Hier wird dafür die Eingangs- und Ausgangsspannung gleichzeitig am Oszilloskop betrachtet und die Zeitdifferenz bestimmt.

4.3 Verzögerungszeit (über Reflexion)

Zur alternativen Messung der Verzögerungszeit kann die Reflexion am kurzgeschlossenen Ende wie in Aufgabe 3.5 verwendet werden. Dabei wird die Überlagerung des Generatorsignals mit dem reflektiertem Signal beobachtet. Allerdings wird dabei die doppelte Wegstrecke zurückgelegt:

$$\tau' = \frac{\Delta t}{2l}$$

4.4 Dielektrizitätskonstante

Es soll die relative *Dielektrizitätskonstante* des Koaxialkabels aus den Ergebnissen der jeweiligen Aufgaben bestimmt werden.

- $\varepsilon_r\{C_l, r_i, r_a\}$: Für die Kapazität eines Zylinderkondensators gilt: $C = 2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r \frac{l}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}$ Somit gilt:

$$\varepsilon_r = \frac{C_l}{2\pi\varepsilon_0 l} \ln\left(\frac{r_a}{r_i}\right)$$

- $\varepsilon_r\{\tau'\}$: Für die Phasengeschwindigkeit gilt: $v_{\text{Phase}} = \frac{1}{L'C'} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r\mu_r}}$ Somit gilt:

$$\varepsilon_r = \frac{c^2}{\mu_r v_{\text{Phase}}^2} = \frac{c^2 \tau'^2}{\mu_r}$$

- $\varepsilon_r\{Z_0, r_i, r_a\}$: Für den charakteristischen Widerstand gilt: $Z_0 = \sqrt{\frac{L'}{C'}}$. Darüber hinaus ist $L' = \frac{\mu_0\mu_r}{2\pi} \ln\left(\frac{r_a}{r_i}\right)$ und $C' = \frac{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}{\ln\left(\frac{r_a}{r_i}\right)}$. Somit gilt:

$$Z_0 = \sqrt{\frac{\frac{\mu_0\mu_r}{2\pi}\ln\left(\frac{r_a}{r_i}\right)}{\frac{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}{\ln\left(\frac{r_a}{r_i}\right)}}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\mu_0\mu_r}{\varepsilon_0\varepsilon_r}} \ln\left(\frac{r_a}{r_i}\right) \Rightarrow \varepsilon_r = \frac{1}{4\pi^2 Z_0^2}\frac{\mu_0\mu_r}{\varepsilon_0} \ln\left(\frac{r_a}{r_i}\right)^2$$