PRODUCTO TENSORIAL DE ESPACIOS VECTORIALES

1. **Producto Tensorial:**

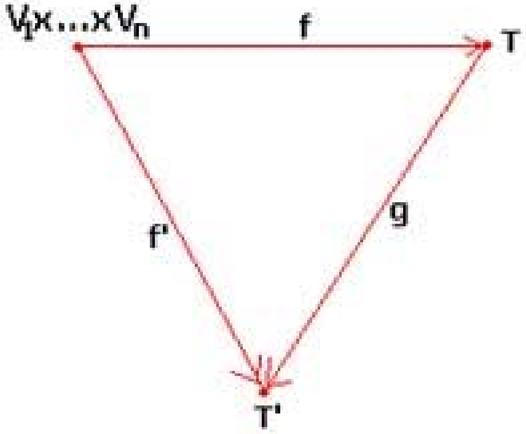
Consideremos los n espacios vectoriales V_1, ..., V_n, sobre el cuerpo conmutativo K, y sea χ la categoría cuyos objetos son los pares *(f,T),* donde T es un k-espacio vectorial y *$f:V_1x...xV_n \rightarrow T$* es una aplicación multilineal, tales que si *(f′,T′)* es otro objeto de la categoría χ, entonces todo morfismo del conjunto $((f,T),(f',T'))_{\chi}$ es un homomorfismo *$g:T \rightarrow T'$* tal que *$f'=g.f$.*

Definición 1:

Se denomina *producto Tensorial* de los k-espacios vectoriales $V_1,...,V_n$ a un objeto inicial (f,T) de la categoría χ. El espacio vectorial T se denomina también *producto tensorial de $V_1,...,V_n$,* y se denota por

$$T = V_1 \otimes ... \otimes V_n = \bigotimes_{i=1}^{n} V_i = T(V_1,...,V_n)$$

Definición equivalente a la anterior:

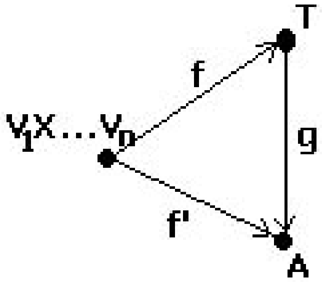


Un *Producto Tensorial* de los k-espacios vectoriales $V_1,...V_n$, es un k-espacio vectorial T junto con una aplicación multilineal $f \in L_n(V_1,...,V_n;T)$ tal que para todo k-espacio vectorial T′ y toda $f' \in L_n(V_1,...,V_n;T')$, se cumple que $\exists g \in Hom(T,T')$ único tal que el triángulo de la figura es conmutativo, es decir, *$f'=g.f$.*

Proposición 1:

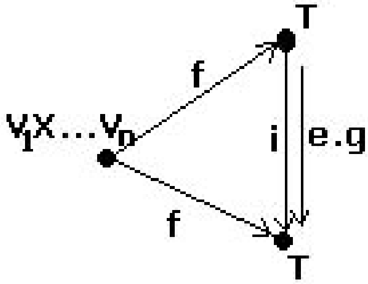
Si *(f, T)* es un producto tensorial de los k-espacios vectoriales $V_1,...,V_n$, entonces se verifica que $f(V_1x...xV_n) \subseteq T$ genera *T*.

Demostración:



Sea $A \subseteq T$ el subespacio de T engendrado por $f(V_1 x \ldots x V_n)$ y $f' \in L_n(V_1,\ldots,V_n;A)$ tal que e.f'=f, donde es $e: A \to T$ la identidad sobre A. Por tanto, existe un único $g: T \to A$ tal que

$$g \circ f = f'$$

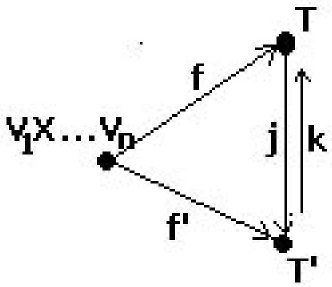


Premultiplicando por *e* resulta: $e \circ g \circ f = e \circ f' = f$. Considerando el segundo diagrama: existe un único homomorfismo (la identidad) i:T→T tal que i.f=f. Pero también es: e.g.f=f por lo que e.g=i lo que implica que e es sobreyectiva, por lo que A=T

Proposición 2 (unicidad):

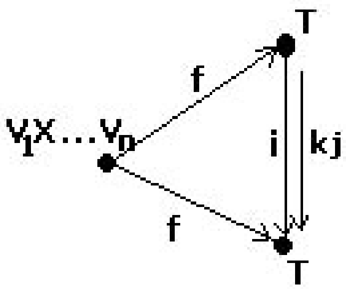
Si *(f,T)* y *(f',T')* son productos tensoriales de los k-espacios vectoriales $V_1,\ldots,V_n$, existe un único isomorfismo j:T→T' tal que $j \circ f = f'$.

Demostración:



Puesto que $f \in L_n(V_1,\ldots,V_n;T)$ y $f' \in L_n(V_1,\ldots,V_n;T')$ se tiene que existen homomorfismos j:T→T' y k:T'→T, únicos, tales que

$$\begin{matrix} j.f = f' \\ k.f' = f \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} k.j.f = k.f' = f \\ j.k.f' = j.f = f' \end{matrix}$$



Observando este segundo diagrama, se tiene que existe un único homomorfismo (la identidad) i_T:T→T tal que i.f=f. Pero también hemos visto que:

$$k.j.f = f \Rightarrow k.j = i_T$$

Análogamente obtendríamos que $j.k = i_T$. Y de ambas, que j=k^{-1} es un isomorfismo.

Proposición 3 (existencia):

Dados los k-espacios vectoriales V_1, ..., V_n, existe su producto tensorial.

Demostración:

Consideremos el k-módulo libre (i, F) sobre el conjunto $V_1x...xV_n$, que es, evidentemente, un k-espacio vectorial. Y sea N el subespacio vectorial engendrado por los elementos del tipo siguiente:

$$i\left(x_1,...,\lambda x_i+\mu x_i^{'},...x_n\right)-\lambda.i\left(x_1,...,x_i,...x_n\right)-\mu.i\left(x_1,...,x_i^{'},...x_n\right)$$

Y sea $T=F/N$ con la proyección natural p:F→T. Sea $f=p.i:V_1x...xV_n\to T$. Vamos a probar que (f, T) es un producto tensorial de V_1, ..., V_n.

1) Veamos que f es multilineal:

$$f(x_1,...,\lambda x_i+\mu x_i^{'},...,x_n)-\lambda.f(x_1,...,x_i,...,x_n)-\mu.f(x_1,...,x_i^{'},...,x_n)=$$
$$=p\left[i(x_1,...,\lambda x_i+\mu x_i^{'},...,x_n)\right]-\lambda.p\left[i(x_1,...,x_i,...,x_n)\right]-\mu.p\left[i(x_1,...,x_i^{'},...,x_n)\right]=$$
$$=p\left[i(x_1,...,\lambda x_i+\mu x_i^{'},...,x_n)-\lambda i(x_1,...,x_i,...,x_n)-\mu i(x_1,...,x_i^{'},...,x_n)\right]=0$$

Por tanto, es $f(x_1,...,\lambda x_i+\mu x_i^{'},...,x_n)=\lambda.f(x_1,...,x_i,...,x_n)+\mu.f(x_1,...,x_i^{'},...,x_n)$ y es *f* aplicación multilineal.

2) (f,T) es un producto tensorial:

Sea $g\in L_n\left(V_1,...,V_n;E\right)$. Como *(i,F)* es un k-módulo libre, $\exists j:F\to E$ tal que $j\circ i=g$

$$j\left[i(x_1,...,\lambda x_i+\mu x_i^{'},...,x_n)-\lambda.i(x_1,...,x_i,...,x_n)-\mu.i(x_1,...,x_i^{'},...,x_n)\right]=$$
$$=j\left[i(x_1,...,\lambda x_i+\mu x_i^{'},...,x_n)\right]-\lambda.j\left[i(x_1,...,x_i,...,x_n)\right]-\mu j\left[i(x_1,...,x_i^{'},...,x_n)\right]=$$
$$=g(x_1,...,\lambda x_i+\mu x_i^{'},...,x_n)-\lambda.g(x_1,...,x_i,...,x_n)-\mu.g(x_1,...,x_i^{'},...,x_n)=0$$

Esto nos indica que $N\subseteq Ker(j)$, lo que implica que j induce un homomorfismo *h:T→E* tal que $h\circ p=j$, por lo que en el siguiente diagrama se verifica que:

$$h\circ f=h\circ p\circ i=j\circ i=g$$

$$\begin{tikzcd}
V_1\times\dots\times V_n \arrow[r, "i"] \arrow[dr, "g"'] & F \arrow[r, "p"] \arrow[d, "j"] & T \arrow[dl, "h"] \\
 & E &
\end{tikzcd}$$

3) h es único:

Sea *k:T→E* cualquier homomorfismo de espacios vectoriales que satisfaga $k\circ f=g$. Como $f(V_1x...xV_n)\subseteq T$ genera a *T,* entonces, cualquier elemento de T puede escribirse como combinación lineal de elementos de $f(V_1x...xV_n)$:

$$\forall t\in T,\, t=\sum_{i=1}^{r}\lambda_i.f(x_{1i},...,x_{ni})$$

lo cual nos indica que

$$k(t)=\sum_{i=1}^{r}\lambda_i.k.f(x_1,...,x_n)=\sum_{i=1}^{r}\lambda_i.g(x_1,...,x_n)=h(t)\Rightarrow k=h$$

Por tanto, *(f,T)* es un producto tensorial de los espacios vectoriales $V_1,...,V_n$.

Nota: Si *(f,T)* es el producto tensorial de $V_1, ...,V_n$, como las aplicaciones multilineales no son inyectivas ya que se tiene por ejemplo que

$$f(x_1,...,\lambda x_n)=f(\lambda x_1,...,x_n) \quad y \quad (x_1,...,\lambda x_n)\neq(\lambda x_1,...,x_n)$$

nos indica que no podemos identificar $V_1,...,V_n$ con un subconjunto de $T=\bigotimes_{i=1}^{n} V_i$

La imagen por f del elemento $(x_1,...,x_n)\in V_1x...xV_n$ se denota por

$$f(x_1,...,x_n)=x_1\otimes...\otimes x_n$$

Como $f(V_1x...xV_n)$ genera a T, $\forall t\in T$ puede escribirse:

$$t=\sum_{i=1}^{r}\lambda_i.x_{1i}\otimes...\otimes x_{ni}, \text{ tal que } x_{ji}\in V_j$$

expresión que no es única. En particular si

$$B_1=\{u_{1i_1}\}, i_1\in I_1,......,B_n=\{u_{ni_n}\}, i_n\in I_n$$

son bases de $V_1,...,V_n$ respectivamente, un sistema de generadores de $V_1\otimes...\otimes V_n$ sería:

$$B=\{u_{1i_1}\otimes...\otimes u_{ni_n}\},\quad i_j\in I_j$$

2. **El Funtor Producto Tensorial:**

Consideremos una familia de homomorfismos entre k-espacios vectoriales:

$$f_i : V_i \to V_i^{'} \quad (i = 1,...,n)$$

Se tiene, entonces, una aplicación

$$\Pi f_i : V_1 x ... x V_n \to V_1^{'} x ... x V_n^{'} \qquad (1)$$

Consideremos la categoría Γ cuyos objetos son n-plas de k-espacios vectoriales y cuyos morfismos son aplicaciones del tipo (1) anterior. Sea también Φ la categoría cuyos objetos son los pares (f,A) donde A es un k-espacio vectorial y asimismo es $f : V_1 x ... x V_n \to A$ una aplicación multilineal entre k-espacios vectoriales, y tal que si (f′, A′) es otro objeto de Φ, todo morfismo del conjunto $\{(f, A), (f', A')\}_\Phi$ es un homomorfismo g:A→A′.

$$\begin{tikzcd}
V_1 x ... x V_n \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\Pi f_i"'] & V_1 \otimes ... \otimes V_n \arrow[d, "h"] \\
V_1' x ... x V_n' \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "\Pi g_i"'] & V_1' \otimes ... \otimes V_n' \arrow[d, "h'"] \\
V_1'' x ... x V_n'' \arrow[r, "f''"] & V_1'' \otimes ... \otimes V_n''
\end{tikzcd}$$

La operación Producto Tensorial de n k-espacios vectoriales nos permite definir una función T: Γ→Φ integrada por dos funciones:

1) Función objeto:

A cada n-pla de la categoría Γ, $V_1,...,V_n$, le hace corresponder su producto tensorial:

$$T(V_1,...V_n) = \left(f, \bigotimes_{i=1}^{n} V_i \right)$$

2) Función morfismo:

Si es $\Pi f_i : V_1 x ... x V_n \to V_1^{'} x ... x V_n^{'}$, entonces $f' \circ \Pi f_i \in L_n(V_1,...,V_n; \bigotimes_{i=1}^{n} V_i^{'})$ y esto implica que $\exists h : \bigotimes_{i=1}^{n} V_i \to \bigotimes_{i=1}^{n} V_i^{'}$ único tal que $h \circ f = f' \circ \Pi f_i$. Definimos, a partir de esto:

$T(\Pi f_i) = h$, que denotamos de la forma $T(f_1,...,f_n) = f_1 \otimes ... \otimes f_n$

Es inmediato que T es un funtor de la categoría Γ a la categoría Φ, $T:\Gamma \to \Phi$, puesto que si es

$\Pi g_i : V_i^{'} x...xV_n^{'} \to V_i^{''} x...xV_n^{''}$, entonces: $T\left(\Pi g_i \circ \Pi f_i\right) = h' \circ h = T(\Pi g_i) \circ T(\Pi f_i)$

El funtor T se denomina funtor producto tensorial. Si es $V_1=V_2=...=V_n=V$, se denomina *Funtor Producto Tensorial n-simo*, y lo podemos indicar por $T^n(V)$.

3. Propiedades del Producto Tensorial:

Proposición 4

Sean $V_1,\ldots,V_n$, E n+1 k-espacios vectoriales. Entonces:

1) $Hom\left(\overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}} V_i, E\right) \cong L_n\left(V_1,\ldots,V_n;E\right)$
2) $\left[V_1 \otimes \ldots \otimes V_n\right]^* \cong L_n\left(V_1,\ldots,V_n;k\right)$

Demostración:

1) Sea $f: V_1 x \ldots x V_n \to \overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}} V_i$ la aplicación tensorial. Se tiene que:

$$\forall h \in Hom\left(\overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}} V_i, E\right) \Rightarrow h \circ f = g \in L_n\left(V_1,\ldots,V_n;E\right)$$

Queda así definida una aplicación $\sigma: Hom\left(\overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}} V_i, E\right) \to L_n\left(V_1,\ldots,V_n;E\right)$ que se prueba fácilmente es un homomorfismo. Puesto que por hipótesis:

$$\forall g \in L_n\left(V_1,\ldots V_n;E\right), \dot{\exists} h : \overset{n}{\underset{i=1}{\otimes}} V_i \to E / h \circ f = g$$

es claro que el homomorfismo σ es un isomorfismo, como se pretendía probar.

2) Es consecuencia de 1). Bastaría hacer *E=k.*

Proposición 5:

Sean $V_1,\ldots,V_n$ k-espacios vectoriales. Entonces:

1) $V_1 \otimes k \cong V_1 \cong k \otimes V_1$.
2) Sea $\Pi\left(V_1,\ldots,V_n;(\ );\otimes\right)$ un producto tensorial construido combinando adecuadamente $V_1,\ldots,V_n$ (en este órden), paréntesis y el símbolo ⊗. Se tiene que existe un isomorfismo:

$$\sigma : \Pi\left(V_1,\ldots,V_n;(\ );\otimes\right) \to V_1 \otimes \ldots \otimes V_n$$

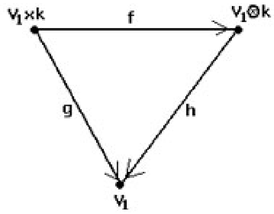
llamado *isomorfismo de asociatividad*, tal que si $x_i \in V_i$ es:

$$\sigma : \Pi\left(x_1,\ldots,x_n;(\ );\otimes\right) \to x_1 \otimes \ldots \otimes x_n$$

3) Existe un único isomorfismo, llamado *isomorfismo de conmutatividad*, tal que

Demostración:

1) Sea la aplicación bilineal $g: V_1 x k \to V_1$ tal que $g(x,d) = dx, \forall x \in V_1, \forall d \in K$.



En tales condiciones existe un único homomorfismo h:

$h: V_1 \otimes k \to V_1 / h \circ f = g$ en el triángulo anejo.

Como $g(x,1) = x, \forall x \in V_1 \Rightarrow$ g es suprayectiva $\Rightarrow$ es epimorfismo.

Para probar que ha es isomorfismo consideremos que $\forall t \in V_1 x k, \exists x_1,\ldots,x_n \in V_1$ y tambien $\exists \lambda_1,\ldots,\lambda_n \in k$ tales que

$$t = \sum_{i=1}^{n}(x_i \otimes \lambda_i) = \sum_{i=1}^{n}(\lambda_i x_i \otimes 1) = \sum_{i=1}^{n}(\lambda_i x_i) \otimes 1$$

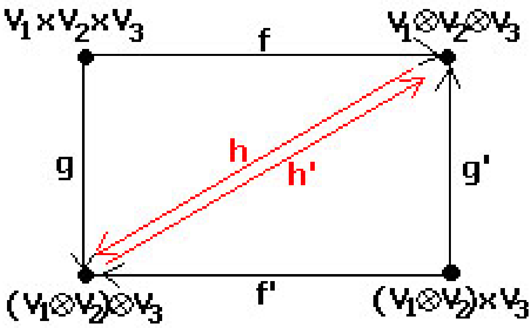
$$h(t) = h\left[\sum_{i=1}^{n}(\lambda_i x_i) \otimes 1\right] = h\left[f\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i, 1\right)\right] = g\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i, 1\right) = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i$$

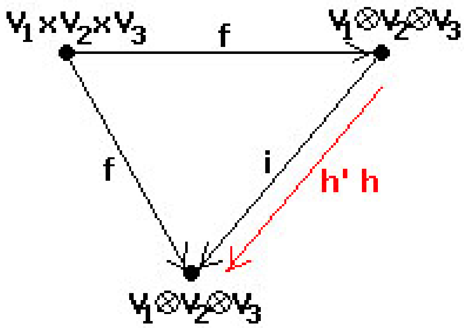
Por tanto, $h(t) = 0 \Leftrightarrow t = 0 \otimes t = 0 \Rightarrow$ h es monomorfismo $\Rightarrow V_1 \otimes k \approx V_1$

Un razonamiento análogo prueba que $k \otimes V_1 \approx V_1$

2) Aquí nos limitaremos a probar el caso de n=3, y también se cumple que

$$\Pi(V_1, V_2, V_3; (\ ); \otimes) = (V_1 \otimes V_2) \otimes V_3$$





Se tiene:

- La aplicación $g: V_1 x V_2 x V_3 \to (V_1 \otimes V_2) \otimes V_3$, tal que $g(x,y,z) = (x \otimes y) \otimes z$ es trivialmente multilineal.
- La aplicación, $\forall z \in V_3$, $b_z: V_1 x V_2 \to V_1 \otimes V_2 \otimes V_3$, tal que $b_z(x,y) = x \otimes y \otimes z$ es trivialmente multilineal. Esto implica que existe un homomorfismo único $\bar{b}_z: V_1 \otimes V_2 \to V_1 \otimes V_2 \otimes V_3$, tal que es

$$\bar{b}_z(x \otimes y) = x \otimes y \otimes z$$

- La aplicación $g': (V_1 \otimes V_2) x V_3 \to V_1 \otimes V_2 \otimes V_3$, definida por

$$g'\left(\sum c_i(x_i \otimes y_i), z\right) = \bar{b}_z\left(\sum c_i(x_i \otimes y_i)\right) = \sum c_i(x_i \otimes y_i \otimes z_i)$$

es, por todo lo dicho, una aplicación bilineal.

- Como consecuencia, existen *h, h'*, homomorfismos únicos tales que

$$h.f = g \Rightarrow h(x \otimes y \otimes z) = h.f(x,y,z) = g(x,y,z) = (x \otimes y) \otimes z$$
$$h'.f' = g' \Rightarrow h'((x \otimes y) \otimes z) = h'.f'((x \otimes y), z) = g'(x \otimes y), z) = x \otimes y \otimes z$$

Veamos que *h'.h.f=f:*

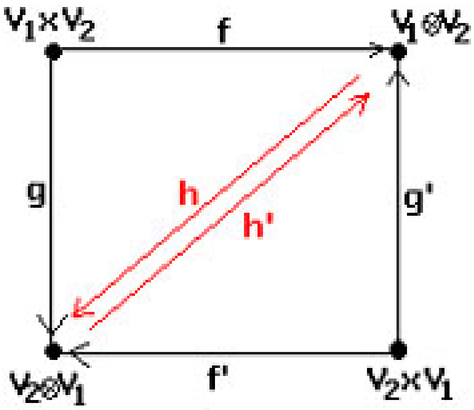
$$h'.h.f(x,y,z) = h'.h(x \otimes y \otimes z) = h'((x \otimes y) \otimes z) = x \otimes y \otimes z = f(x,y,z)$$

- En el segundo diagrama existe un solo homomorfismo i (identidad) tal que i.f =f. Pues $h'.h.f = f \Rightarrow h'.h = i$. Análogamente, si consideramos $(V_1 \otimes V_2) \otimes V_3$ en lugar de $V_1 \otimes V_2 \otimes V_3$ obtendríamos $h.h' = i$, y de ambas que $h' = h^{-1}$ es un isomorfismo, como se pretendía demostrar.

Para n>3 y combinaciones distintas a la no considerada aquí, la demostración es análoga, aunque obviamente más laboriosa.

3) Es análogo al caso anterior 2). Basta considerar el diagrama siguiente, en donde se verifica que

$$g(x,y) = y \otimes x, \quad g'(y,x) = x \otimes y, \quad \forall x \in V_1, \forall y \in V_2$$



Proposición 6:

Si los k-espacios vectoriales A y B son descomponibles en suma directa de espacios

$$A = \bigoplus_{\mu \in M} A_\mu, \quad B = \bigoplus_{\nu \in N} B_\nu$$

Entonces se verifica que

$$A \otimes B \cong S = \bigoplus_{\mu,\nu} A_\mu \otimes B_\nu$$

Demostración:

Sean los dos homomorfismos de inclusión $i_\mu : A_\mu \to A, \quad j_\upsilon : B_\upsilon \to B$ junto con su producto tensorial: $i_\mu \otimes j_\upsilon : A_\mu \otimes B_\upsilon \to A \otimes B$. Por definición, $\forall s \in S$ es:

$$s = \sum_{\mu,\upsilon \in F} x_{\mu\upsilon} \text{ , donde } F \subseteq MxN \text{ es finito y } x_{\mu\upsilon} \in A_\mu \otimes B_\upsilon$$

Definamos el homomorfismo $h : S \to A \otimes B$ tomando:

$$h(s) = \sum_{\mu,\upsilon \in F} \left(i_\mu \otimes j_\upsilon\right)\left(x_{\mu\upsilon}\right)$$

Consideremos las proyecciones naturales: $p_\mu : A \to A_\mu, \quad q_\upsilon : B \to B_\upsilon$ junto con su producto tensorial $p_\mu \otimes q_\upsilon : A \otimes B \to A_\mu \otimes B_\upsilon$. La aplicación

$$k : A \otimes B \to S \text{ tal que } k(a \otimes b) = \sum_{\mu,\upsilon} \left(p_\mu \otimes q_\upsilon\right)(a \otimes b)$$

es trivialmente un homomorfismo. Vamos a probar que *h.k* es el homomorfismo identidad sobre A⊗B. Sean $\forall a \in A, \forall b \in B.$ Entonces:

$$h[k(a \otimes b)] = h\left[\sum_{\mu,\upsilon} \left(p_\mu \otimes q_\upsilon\right)(a \otimes b)\right] = \sum_{\mu,\upsilon} \left(i_\mu \otimes j_\upsilon\right)\left(p_\mu \otimes q_\upsilon\right)(a \otimes b) =$$

$$= \sum_{\mu,\upsilon} \left\{\left[\left(i_\mu.p_\upsilon\right)(a)\right] \otimes \left[\left(j_\upsilon.q_\upsilon\right)(b)\right]\right\} = \left[\sum_\mu \left(i_\mu.p_\upsilon\right)(a)\right] \otimes \left[\sum_\upsilon \left(j_\upsilon.q_\upsilon\right)(b)\right] = a \otimes b$$

Como el conjunto $\{a \otimes b\}$ genera $A \otimes B \Rightarrow h.k$ es el homomorfismo identidad sobre $A \otimes B$. Para probar que k.h es el homomorfismo identidad sobre S, sean $\alpha \in M, \beta \in N, a \in A_\alpha, b \in B_\beta$ arbitrariamente dados. Entonces:

$$k[h(a \otimes b)] = k\left[\left(i_\alpha \otimes j_\beta\right)(a \otimes b)\right] = \sum_{\mu,\upsilon} \left(p_\mu \otimes q_\upsilon\right)\left[\left(i_\alpha \otimes j_\beta\right)(a \otimes b)\right] =$$

$$= \left[\sum_\mu \left(p_\mu.i_\alpha\right)(a)\right] \otimes \left[\sum_\upsilon \left(q_\upsilon.j_\beta\right)(b)\right] = a \otimes b$$

Como $\{a \otimes b\}$ genera *S* ⇒ *k.h* es el isomorfismo identidad sobre *S* ⇒ *h,k* son isomorfismos y la proposición queda probada.
n

Corolario:

Sean $B_1,\ldots,B_n$ bases de los k-espacios vectoriales V1,...,Vn respectivamente. Entonces $B = \left\{u_{1i_1} \otimes \ldots \otimes u_{ni_n}\right\}, \ i_j \in I_j$ es una base de $V_1 \otimes \ldots \otimes V_n$.

Demostración:

Por la anterior proposición es inmediato que $\left\{u_{1i_1} \otimes u_{2i_2}\right\}$ es una base de $V_1 \otimes V_2$ ya que $V_1 \otimes V_2 \cong \oplus\left[\left(u_{1i_1}\right) \otimes \left(u_{2i_2}\right)\right], \ i_j \in I_j$. Supóngase el corolario cierto para n-1 y vamos a probarle para n. Hacemos $A = V_1 \otimes ... \otimes V_{n-1}$, $B = V_n$. Por la proposición precedente, la familia $\{(u_{1i_1} \otimes ... \otimes u_{n-1,i_{n-1}}) \otimes u_{ni_n}\}$ es una base $A \otimes B$. Si aplicamos ahora el isomorfismo de asociatividad (proposición 5) resulta inmediatamente que B es una base de $V_1 \otimes ... \otimes V_n$.

Es inmediato que $\dim(V_1 \otimes ... \otimes V_n) = \dim V_1 ..... \dim V_n$.

En particular si es $V_1 = ... = V_n = V$ y es $B = \{u_1, ..., u_r\}$ una base de V, una base del producto tensorial *$T^n(V)$* será:

$$\{u_{i_1,...,} u_{ni_n}\}, \quad i_j \in VR_{r,n}$$

donde $(i_1, ..., i_n) \in VR_{r,n} =$ variaciones n-arias con repetición de los elementos (1,..r)

4. Álgebra Tensorial de un Espacio Vectorial:

La suma directa $T(V)=\overset{\infty}{\underset{r=0}{\oplus}} T^{r}(V)$ es obviamente un espacio vectorial N-graduado. Vamos a probar en lo que sigue que, definiendo cierta operación, $T(V)$ es un álgebra tensorial del k-espacio vectorial V.

Sea χ la categoría cuyos objetos son pares (f, A) donde A es una k-algebra asociativa y unitaria y f es un homomorfismo de k-espacios vectoriales f:V→A, y es tal que si (f', A') es otro objeto de χ, todo morfismo g del conjunto $\{(f,A),(f',A')\}_{\chi}$ es un homomorfismo de k-álgebras g:A→A' tal que g.f=f' y g(1)=1.

Definición 2:

Un álgebra tensorial del k-espacio vectorial V es un objeto inicial de la categoría χ. La k-algebra asociativa y unitaria T se denomina también *álgebra tensorial de V.*

Definición equivalente a la anterior:

Un *álgebra tensorial del k-espacio vectorial V* es una k-algebra asociativa y unitaria T junto con un homomorfismo de k-espacios vectoriales $\tau : V \rightarrow T$ tal que para toda k-algebra asociativa y unitaria T' y todo homomorfismo de k-espacios vectoriales $\tau' : V \rightarrow T'$ exista un solo homomorfismo de k-algebras $g:T\rightarrow T'$ y $g(1_T)=1_{T'}$, y $\tau' = g.\tau$

Proposición 7:

Si (τ, T) es un álgebra tensorial de V, entonces el conjunto $A=\tau(V)\cup\{1\}$ engendra a T.

Demostración:

Es análoga a la *Proposición 1*. Basta considerar M subálgebra de T engendrada por A.

Proposición 8 (unicidad):

Si (τ, T) y (τ', T') son dos álgebras tensoriales de V, existe un único isomorfismo de k-álgebras j:T→T' tal que $j.\tau = \tau'$

Demostración:

Análoga a la *Proposición 2*.

Proposición 9 (existencia):

Existe un álgebra tensorial del k-espacio vectorial V.

Demostración:

La demostración consiste en su construcción, que haremos sobre el k-espacio vectorial *T(V).*

- 1) Para que *T(V)* sea un k-álgebra asociativa y unitaria es preciso definir en *T(V)* una nueva operación o aplicación *T(V)xT(V)→T(V)* que sea bilineal, asociativa y unitaria. Aprovecharemos para ello el isomorfismo de asociatividad del producto tensorial (*Proposición 5)*.

  Existe un único isomorfismo $\sigma : T^r(V)xT^s(V) \to T^{r+s}(V)$ tal que:

  $$\sigma[(x_1 \otimes \ldots \otimes x_r) \otimes (y_1 \otimes \ldots \otimes y_s)] = x_1 \otimes \ldots \otimes x_r \otimes y_1 \otimes \ldots \otimes y_s \in T^{r+s}(V)$$

  Este isomorfismo nos permite definir una aplicación bilineal $\bar{\otimes}$:

  $$\bar{\otimes} : T^r(V)xT^s(V) \to T^{r+s}(V)$$

  tal que:

  $$\bar{\otimes}(x_1 \otimes \ldots \otimes x_r, y_1 \otimes \ldots \otimes y_s) = (x_1 \otimes \ldots \otimes x_r) \bar{\otimes} (y_1 \otimes \ldots \otimes y_s) =$$
  $$= x_1 \otimes \ldots \otimes x_r \otimes y_1 \otimes \ldots \otimes y_s$$

  que es asociativa, pues:

  $$\left[(x_1 \otimes \ldots \otimes x_r) \otimes (y_1 \bar{\otimes} \ldots \otimes y_s)\right] \bar{\otimes} (z_1 \otimes \ldots \otimes z_t) =$$
  $$= x_1 \otimes \ldots \otimes x_r \otimes y_1 \otimes \ldots \otimes y_s \otimes z_1 \otimes \ldots \otimes z_t$$
  $$(x_1 \otimes \ldots \otimes x_r) \bar{\otimes} \left[(y_1 \otimes \ldots \otimes y_s) \bar{\otimes} (z_1 \otimes \ldots \otimes z_t)\right] =$$
  $$= x_1 \otimes \ldots \otimes x_r \otimes y_1 \otimes \ldots \otimes y_s \otimes z_1 \otimes \ldots \otimes z_t$$

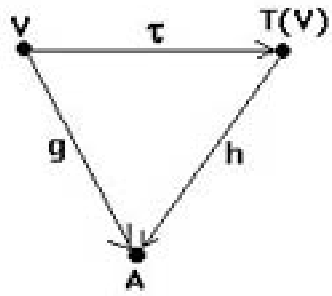
  Además, trivialmente se verifica que $(x_1 \otimes \ldots \otimes x_r) \bar{\otimes} 1 = x_1 \otimes \ldots \otimes x_r$

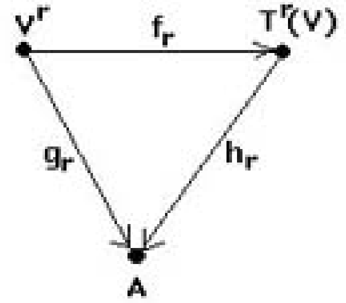
  Como $\forall x \in T(V)$ es: $x = \sum c_r . x_r$ tal que $c_r \in k, x_r \in T^r(V)$, la aplicación $T(V)xT(V) \to T(V)$ que buscamos, denotada también por $\bar{\otimes}$, es:

  $$\bar{\otimes}\left(\sum c_r x_r, \sum c_s x_s\right) = \sum c_r . c_s x_r \bar{\otimes} x_s \in T(V)$$

  Conclusión: $\left\{ T(V), +, \bar{\otimes} \right\}$ es un k-álgebra N-graduada asociativa y unitaria.

- 2) Sea $\tau : V \to T(V)$ tal que $\forall x \in V, \tau(x) = x \in T'(V) \subseteq T(V)$. Vamos a probar que el par $(\tau, T(V))$ es un álgebra tensorial de *V.* Sea *(g, A)* otro objeto de la categoría χ y vamos a demostrar que existe un solo homomorfismo de k-álgebras $h : T(V) \to A$ tal que $h(1) = 1$ y que $h.\tau = g$:





a) Definimos h(1)=1.

b) El homomorfismo de espacios vectoriales $g : V \to A$, puede ampliarse hasta una aplicación r-lineal $g_r : V^r \to A$, definida por

$$g_r(x_1, ..., x_n) = g(x_1)...f(x_n)$$

Puesto que $(f_r, T^r(V))$ es un producto tensorial r-simo de V, lo que implica que existe un único homomorfismo de espacios vectoriales $h_r : T^r(V) \to A$ tal que $h_r.f_r = g_r$ y, por tanto, tal que:

$$h_r(x_1 \otimes ... \otimes x_r) = h_r.f_r(x_1, ..., x_r) = g_r(x_1, ..., x_r) = g(x_1)...g(x_r)$$

c) Consideremos la aplicación $h : T(V) \to A$ tal que se cumpla

$$h\left(\sum c_r.x_r\right) = \sum c_r.h_r(x_r), \quad \forall \sum c_r.x_r \in T(V)$$

se prueba trivialmente que está bien definida y que es un homomorfismo de k-álgebras unitarias tal que $h(1) = 1$ y que $h.\tau = g$.

- 3) Veamos que h así definido es único. Si hubiese otro $k \in Hom(T(V), A)$ tal que $k(1) = 1,\ k.\tau = g$, debería ser:

$$k(x_1 \otimes ... \otimes x_r) = k(x_1) \otimes ... \otimes k(x_r) = k\tau(x_1) \otimes ... \otimes k\tau(x_r) =$$
$$= g(x_1) \otimes ... \otimes g(x_r) = h(x_1) \otimes ... \otimes h(x_r) =$$

Como la familia $\{x_1 \otimes ... \otimes x_r\},\ r \in N,$ es un sistema de generadores de T(V), lo que implica que k=h, y por tanto es único.

Queda así probado que $(\tau, T(V))$ es un álgebra tensorial de V.

5. El Funtor Álgebra Tensorial:

Sea Γ la categoría cuyos objetos son k-espacios vectoriales y cuyos morfismos son homomorfismos de k-espacios vectoriales. Sea Φ la categoría cuyos objetos son pares *(f,A)* donde *f:V→A* es un homomorfismo de k-espacios vectoriales, V un k-espacio vectorial, y A un k-álgebra arbitrario y tal que si *(f',A')* es otro objeto de Φ todo morfimo del conjunto $\{(f,A),(f',A')\}_\Phi$ es un homomorfismo de k-álgebras *g:A→A'.*

La operación álgebra tensorial nos permite definir una función *T: Γ→Φ* integrada por dos funciones:

1) Función objeto:

   A cada objeto V de *Γ* adjudica su álgebra tensorial $(\tau, T(V)) \in \Phi$

2) Función morfismo:

   Si $V, V' \in \Gamma,\ f: V \to V'$, entonces $\tau'.f: V \to T(V')$ es un homomorfismo de k-álgebras tal que $\tau'.f = h.$ Definimos:

$$T(f) = h \in \{(\tau, T(V)),(\tau', T(V'))\}_\Phi$$

Es trivial comprobar que la función $T: \Gamma \to \Phi$ es un funtor.

En efecto, si *g:V'→V'',* entonces:

$$\begin{aligned} T(g.f) &= \quad h'.h = T(g).T(f) \in \{(\tau, T(V)),(\tau'', T(V''))\} \\ T(i_d) &= \quad i_d \in \{(\tau, T(V)),(\tau, T(V))\}_\Phi \end{aligned}$$

Esto implica que T es un funtor covariante, que se llama *Funtor Álgebra Tensorial.*