Apéndice D

FUNCIONES ELÍPTICAS PARA EL DISEÑO DE FILTROS

FUNCIONES ELÍPTICAS PARA EL DISEÑO DE FILTROS

Abstracto – Este ensayo ofrece una descripción simple de las propiedades elementales de las funciones elípticas Jacobianas y de la transformación de Landen, la cual las conecta con las funciones circulares e hiperbólicas y por lo tanto, provee uno de los métodos más acertados en la evaluación de las funciones elípticas. El uso de funciones elípticas en la creación de filtros con igualdad de ondas de bajo paso está explicado y su evaluación numérica es ilustrada por medio de un ejemplo. Un programa Fortran para efectos del diseño incluido y un reemplazo más rápido y más acertado para el programa ELLIPAP de Matlab está dado.

INTRODUCCIÓN

Es ya conocido desde los años 30 que las funciones de transferencia de filtros de bajo paso con igualdad de ondas, que pierden respuesta en pasabanda y stopband pueden ser descritas con exactitud con las funciones elípticas Jacobianas. Dichos filtros son variadamente descritos como filtros Cauer, filtros de funciones elípticas y algunas veces sólo como filtros elípticos, aunque el último nombre debe ser desaprobado por la sugerencia de que los filtros tienen forma de huevo. Han sido ampliamente usados en el pasado para todo tipo de filtros análogos, y ahora se les encuentra una aplicación frecuente para los filtros digitales IIR.

Desafortunadamente, muy pocos ingenieros reciben instrucción en las propiedades de las funciones elípticas durante su educación, y la percepción se ha levantado que su evaluación numérica, como es necesitada en diseños de filtros, es complicada y a su vez difícil. Esto ha motivado a varios escritores a inventar formas para diseñar esta clase de filtros sin una referencia evidente para las funciones elípticas. Uno de los acercamientos más ingeniosos por Darlington, adapta la fracción racional de Chebyshev dentro de una secuencia de transformaciones en las que el resultado final es la transferencia de funciones de los filtros de funciones elípticas de grado impar.

El propósito de este ensayo tutorial, es el de dar una descripción simple de las propiedades de las funciones elípticas Jacobianas y su relación con las funciones circulares e hiperbólicas así como se aplican al problema filtro. No existe ningún intento de proporcionar un desarrollo matemático riguroso y formal de la teoría o, necesariamente probar cualquiera de los resultados descritos; la meta es sencillamente transmitir algo de la apreciación de las propiedades generales de éstas funciones. Se asume que el lector ha recibido una típica educación de graduado en ingeniería la cual ha incluido un curso en teoría de las variables complejas. Se le recomienda a los lectores que están interesados en perseguir la materia en mayor detalle que lean el libro clásico por Neville.

Esta discusión de la funciones elípticas Jacobianas lleva a una descripción de la transformación Landen, y de aquí hacia un método bastante acertado de computo de las funciones. Con estos antecedentes, mostramos como las funciones elípticas pueden ser utilizadas para definir la respuesta de filtro deseada por medio de un par de ecuaciones paramétricas en exactamente la misma manera como son usadas las funciones circulares para definir el filtro Chebyshev. Finalmente, describimos los detalles de cómo los polos y los ceros de la función de transferencia pueden ser calculados vía la transformación Landen.

FUNCIONES PERIÓDICAS

Funciones periódicas individuales.

Entre todas las funciones de una variable compleja, las funciones elípticas son distinguidas siendo doblemente periódicas. En este respecto son similares a, aunque de alguna manera más complicadas que, las muy comunes funciones elementales periódicas individuales. Una función periódica individual $f(z)$ con un periodo p satisface la relación $f(z+p) = f(z)$ para toda z, y de aquí también $f(z+mp) = f(z)$ para todos los enteros m.

La función básica elemental exp z es individualmente periódica con un periodo imaginario $p = j2\pi$, y éste mismo periodo imaginario es compartido por las funciones hiperbólicas sinh *z* y cosh *z* que son meramente combinaciones lineales de exp *z* y exp *(-z)*. Reemplazando a *z* por *jz* en la función exponencial, la cambia a una función periódica con un periodo real 2π, que es compartido por las funciones circulares sin *z* y cos *z.*

El plano complejo de la variable *z* de una función periódica individual puede, por virtud de la periodicidad, ser considerada como siendo disecada dentro de un numero infinito de tiras de periodos congruentes de amplitud *p* igual al valor del periodo. Correspondiente a un punto arbitrario *z* yaciendo en cualquiera de estas tiras, habrá un punto congruente en cualquiera de las otras tiras, en $z + mp$, tal que los valores de la función en todos estos puntos, sean idénticas. Las tiras de periodo para sin *z* y cos *z* son de amplitud 2π y de longitud infinita, yaciendo lado a lado, paralelos a los ejes imaginarios, mientras aquellos por sinh *z* y cosh *z* son los mismos, excepto que estos yacen paralelos al eje real. Esto se muestra en la figura 1.

Las funciones tan *z* y tanh *z*, por contraste, tienen periodos de π y $j\pi$ respectivamente, y así, sus tiras periódicas tendrán una amplitud π, y no 2π. Si $w = f(z)$, donde *f* es el seno o coseno circular hiperbólico, encontramos que una tira infinita de amplitud π, yaciendo dentro de una tira periódica y centrada alrededor de un cero de la función, será mapeada, uno a uno, encima del total del plano *w*, siendo que, si *f* es, ya sea una función tangente, entonces *f* está mapeada uno a uno del total de una tira periódica dentro del total del plano *w*.

Funciones Periódicas Dobles (Funciones Elípticas)

La existencia de funciones periódicas individuales entonces eleva la pregunta de si existen funciones con dos, o posiblemente más, periodos distintos. No es difícil demostrar que: 1) una no puede tener funciones con tres o más periodos y 2) si una función tiene dos periodos, la relación o proporción de los periodos no puede ser real; en otras palabras, los periodos deben apuntar en direcciones diferentes en el plano complejo y no yacer a lo largo de la misma línea recta. Sujeto sólo a ésta restricción, uno puede construir una función periódica doble, valorada individualmente con cualquiera de los dos números complejos asignados, p y q, como los periodos, así que tenemos $f(z + mp + nq) = f(z)$ para toda z y para todos los enteros m y n.

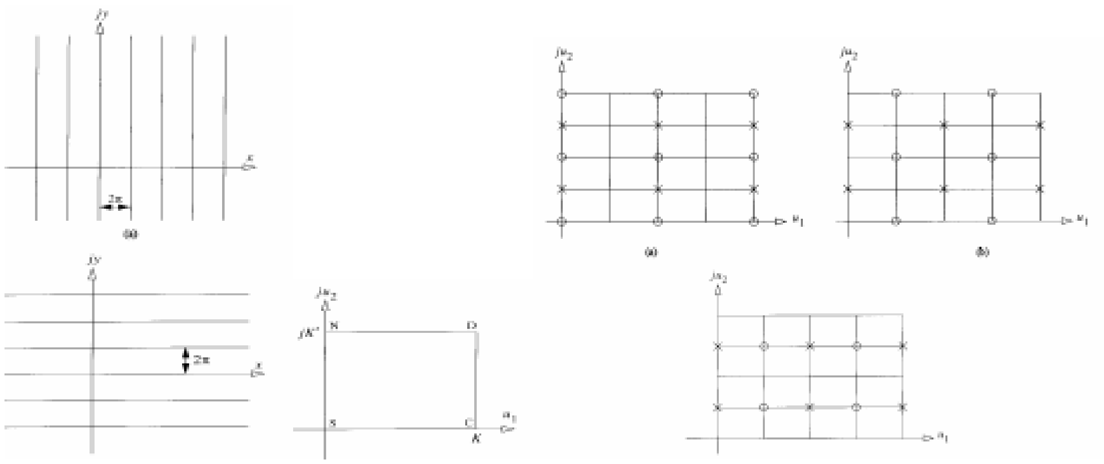
La doble periodicidad se asocia con cada valor de z un enrejado infinito doble dimensional de puntos $z + mp + nq$ en el plano z en el cual, los valores de las funciones son idénticos. Alrededor de éstos puntos, se puede visualizar una formación infinita de periodos de paralelogramas con lados p y q tales que, para cualquier valor de z , el enrejado forma un set de puntos congruentes en los paralelogramas. Así como el enrejado de puntos $z + mp + nq$ pueden ser igualmente bien descritos por $z + (m – n)p + n(p + q)$ o $z + m(p – q) + (n + m)q$ es claro que los periodos no son únicos y pueden ser tomados. Esto cambiaría la forma, aunque no el área del periodo correspondiente de paralelogramas.

Dentro de cada paralelogramo $f(z)$ debe poseer al menos una singularidad, por lo que de otra forma no poseería ninguna, y de aquí el teorema por Liouville sería una constante. Además, la integral de $f(z)$ alrededor de la frontera de un periodo de paralelograma se desvanecería, debido a las contribuciones de la integral de los lados opuestos del paralelograma se cancelarían debido a la periodicidad. De aquí, por el teorema de residuo de Cauchy, la suma de los residuos en las singularidades dentro del paralelogramo se debe desvanecer también. Como un simple polo con residuo cero no es ningún polo, así sigue que las funciones elípticas más sencillas tiene ya sea un polo doble con residuo cero, o dos polos simples con residuos opuestos e iguales.

La complejidad u orden de una función elíptica es medida por la suma del orden de los polos contenidos dentro de un periodo de paralelograma. Podemos ver que no hay funciones elípticas de orden uno, y dos variedades diferentes de orden dos. Puede ser rápidamente apreciado que si $f(z)$ es una función elíptica, así también es $1/f(z)$, con el mismo orden y periodos. Así continúa de esto que una función elíptica de orden dos tiene, ya sea un doble cero o dos ceros simples en cada periodo de paralelograma.

Una función elíptica de orden dos, con un polo doble de residuo cero por paralelograma, ha sido descrito primero por Weierstrass, y lleva su nombre. Su simplicidad hace de ella una herramienta fundamental en la teoría de la materia, y también puede ser usada como piedra angular para la construcción sistemática de las funciones elípticas de orden dos con dos polos simples por paralelograma. Más tarde, cuando propiamente normalizadas, las funciones Jacobianas que nos conciernen principalmente.

Para aplicaciones prácticas son mucho más útiles que las funciones Weierstrass cuyo descubrimiento ha depredado por muchas décadas. También tienen dos ceros simples por paralelograma así como dos polos simples.



III. Las Funciones Jacobianas.

En la misma forma que es conveniente tener seis funciones circulares diferentes, existen doce funciones elípticas Jacobianas diferentes. Así como el seno y la tangente tienen periodos de 2π y π, respectivamente, también las funciones Jacobianas tienen periodos que difieren de un grupo a otro por un factor de dos. Ha sido desde hace mucho la práctica estándar para describir los periodos en términos de cantidades que son referidas como los *periodos de cuartos*, que juegan el mismo rol para las funciones elípticas como π/2 para las funciones hiperbólicas y circulares.

La naturaleza de los problemas prácticos para los cuales las funciones Jacobianas encuentran aplicación normalmente requieren un periodo de cuarto, denotado por *K*, para ser real y uno denotado por *jK,* para ser imaginario. Restringiremos nuestra discusión para su especial, pero muy importante caso. El rectángulo en el primer cuadrante del plano complejo de la variable que tiene sus esquinas en los puntos 0, *K, jK* y *K + jK* es referido como el rectángulo fundamental. Las esquinas de éste rectángulo son denotadas por letras. La esquina en el origen es S (Starting Point) , la esquina opuesta diagonalmente es D, la esquina que coincide con el eje real es C, y la esquina que es normal a su eje real es N. (la alteración en esta descripción es intencionada como mnemonica) El arreglo es mostrado en la Fig. 2.

Toda función Jacobiana tiene un cero en una esquina de su rectángulo y un polo en alguna otra. Tan pronto el cero puede ser colocado en cualquiera de las cuatro esquinas, y el polo colocado en cualquiera de las esquinas restantes, esto nos da un total de 4 × 3 = 12 posibilidades; estas son las doce diferentes funciones Jacobianas mencionadas previamente. Cada una de las funciones tiene un nombre de dos letras que casi indica su patrón polo-cero. La primera letra es aquella de la esquina que contiene el cero, y la segunda, la que contiene el polo. Por lo tanto, la función sn, p. ej. Tiene un cero en S y un polo en N, y así en adelante.

El patrón polo-cero para cada una de las doce funciones se extiende justa y simplemente del rectángulo fundamental del resto del plano complejo. Ambos, polos y ceros para cada función están arreglados en el mismo enrejado de puntos geométrico básico.