Geometría Diferencial
Segundo Cuatrimestre, 2007

Lista de ejercicios prácticos N° 2
Generalidades de variedades

1 Variedades Topológicas

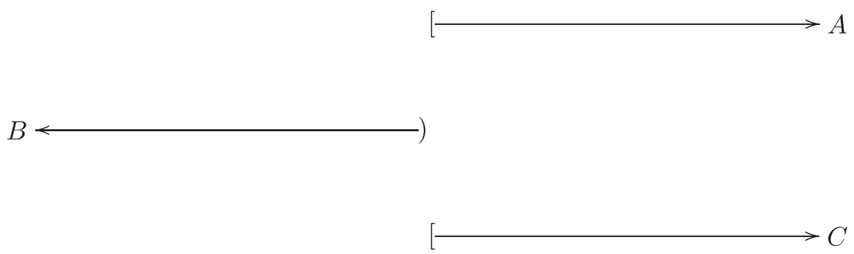
En esta sección, variedad significa variedad topológica.

Ejercicio 1.1. *Probar que toda variedad es localmente compacta, localmente arcoconexa y sus componentes conexas son abiertas. Demostrar además que toda variedad es unión numerable de compactos.*

Ejercicio 1.2. *Probar que toda variedad conexa es arcoconexa.*

Ejercicio 1.3. *Sea X el subconjunto de $\mathbb{R}^2$ definido de la siguiente manera: $X = A \cup B \cup C$, donde*

$$A = \{(x, y) : x \geq 0, y = 1\}$$
$$B = \{(x, y) : x < 0, y = 0\}$$
$$C = \{(x, y) : x \geq 0, y = -1\}$$



Definimos en X la siguiente topología: en $A \setminus \{(0, 1)\}$, $C \setminus \{(0, -1)\}$ y B tomamos la topología de subespacios de $\mathbb{R}^2$ y como entornos abiertos de los puntos $(0, 1)$ y $(0, -1)$ tomamos respectivamente los conjuntos

$$N_\varepsilon^+ = \{(x, 1) : 0 \leq x < \varepsilon\} \cup \{(x, 0) : -\varepsilon < x < 0\}$$

y

$$N_\varepsilon^- = \{(x, -1) : 0 \leq x < \varepsilon\} \cup \{(x, 0) : -\varepsilon < x < 0\},$$

para todo $\varepsilon > 0$. Probar que X es localmente euclideano (i.e., todo punto tiene un entorno homeomorfo a un abierto de $\mathbb{R}^n$) pero no es una variedad.

Ejercicio 1.4. *Probar que toda variedad es paracompacta.*

Ejercicio 1.5. *Probar que un espacio paracompacto, localmente euclideano y Hausdorff no tiene necesariamente una base numerable.*

Ejercicio 1.6. *Verificar que un abierto de una variedad, es una variedad (de la misma dimensión). Verificar que el producto cartesiano de dos variedades es naturalmente una variedad (su dimensión es la suma).*

2 Variedades diferenciables

2.1 Generalidades

Ejercicio 2.1. *Probar que si $(X, \mathcal{D})$ es una variedad diferenciable y (ϕ_i, U_i) son cartas compatibles con el atlas, entonces son cartas compatibles entre sí. Deducir que toda variedad diferenciable tiene un único atlas maximal equivalente.*

Ejercicio 2.2. *Sea M una variedad diferenciable de dimensión n con estructura diferenciable dada por el atlas maximal $\mathcal{D}$.*

(i) Sean $V \subset M$ y $W \subset \mathbb{R}^n$ abiertos no vacíos y $\psi : V \to W$ un homeomorfismo, tales que para cada $p \in V$ existe una carta $(U, \phi) \in \mathcal{D}$ en p tal que

$$\phi \circ \psi^{-1} : \psi(U \cap V) \to \phi(U \cap V)$$

es un difeomorfismo. Probar que $(V, \psi) \in \mathcal{D}$.

(ii) Sean $(U, \phi) \in \mathcal{D}$, $W \subset \mathbb{R}^n$ abiertos y $\psi : U \to W$ una biyección tal que las funciones

$$\psi \circ \phi^{-1} : \phi(U) \to W$$
$$\phi \circ \psi^{-1} : W \to \phi(U)$$

son diferenciables. Deducir de (i) que $(U, \psi) \in \mathcal{D}$.

(iii) Sea $p \in M$.

(a) Probar que existe $(U, \phi) \in \mathcal{D}$ con $p \in U$ y $\phi(p) = 0$.

(b) Construir $(U, \phi) \in \mathcal{D}$ con $p \in U$ tal que $\phi(p) = 0$ y $\phi(U) = B(0, r) = \{u \in \mathbb{R}^n : \|u\| < r\}$.

(c) Construir $(U, \phi) \in \mathcal{D}$ con $p \in U$ tal que $\phi(p) = 0$ y $\phi(U) = \mathbb{R}^n$.
Sugerencia: Considerar la función

$$f : B(0,1) \to \mathbb{R}^n$$
$$u \mapsto \frac{u}{1 - \|u\|^2}.$$

Ejercicio 2.3. *En $\mathbb{R}$ definimos las cartas $(\mathbb{R}, \mathrm{id})$ y $(\mathbb{R}, \varphi)$, donde $\varphi(x) = x^3$. Probar que estas cartas no son compatibles. Deducir que los atlas maximales que contienen a cada una de estas cartas son distintos. Por último, probar que estas dos estructuras de variedad diferenciable sobre $\mathbb{R}$ son difeomorfas.*

Ejercicio 2.4. *Probar que la noción de diferenciabilidad de una función $f : M \to \mathbb{R}$ depende sólo de la clase de equivalencia del atlas de M. Probar que la noción de diferenciabilidad de una función $f : M \to N$ depende sólo de las clases de equivalencia de los atlas de M y N.*

Ejercicio 2.5. *Probar que $\mathrm{id}_M : M \to M$ es diferenciable. Probar que la composición de funciones diferenciables lo es.*

Ejercicio 2.6. *Sea V un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión $n \geq 1$ y $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ una base. A partir del isomorfismo $\mathbb{R}$-lineal*

$$\phi : V \to \mathbb{R}^n$$
$$\sum_{i=1}^{n} a_i v_i \mapsto (a_1, \ldots, a_n),$$

consideremos sobre V la (única) topología que hace de ϕ un homeomorfismo.

(i) Verificar que dicha topología no depende de $\mathcal{B}$.

(ii) Sea $\mathcal{D}$ la estructura diferenciable generada por el atlas $\{(V, \phi)\}$. Probar que $\mathcal{D}$ no depende de $\mathcal{B}$.

*$\mathcal{D}$ se denomina la **estructura diferenciable usual de** V.*

Ejercicio 2.7. *Sea M una variedad diferenciable de dimensión n y $U \subset M$ un abierto no vacío. Considerando en U la topología inducida por M, mostrar que U hereda, de manera natural, una estructura diferenciable que hace de U una variedad diferenciable de dimensión n.*

Deducir que los conjuntos

(i) $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) : \det(A) \neq 0\}$, $d = n^2$.

(ii) $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C}) = \{A \in M_n(\mathbb{C}) : \det(A) \neq 0\}$, $d = 2n^2$.

resultan naturalmente variedades diferenciables de dimensión d.

Ejercicio 2.8. *Sea $X = \mathbb{R}^n \cup \{*\}$, donde $* \notin \mathbb{R}^n$. Se consideran dos cartas sobre X: $(\mathbb{R}^n, \mathrm{id})$ y (U, ϕ), donde $U = X \setminus \{0\}$,*

$$\begin{aligned} \phi : U &\to \mathbb{R}^n \\ x &\mapsto \begin{cases} x & \text{si } x \neq *, \\ 0 & \text{si } x = *. \end{cases} \end{aligned}$$

Probar que con esta estructura, todo punto de X tiene un entorno homeomorfo a un abierto de $\mathbb{R}^n$, que el cambio de coordenadas de este atlas es diferenciable, pero X no es Hausdorff.

Ejercicio 2.9. *Sean M una subvariedad de dimensión m de $\mathbb{R}^n$, $W \subset \mathbb{R}^m$ un abierto no vacío y $f = (f_1, \ldots, f_n) : W \to \mathbb{R}^n$ diferenciable, que satisface las siguientes propiedades:*

(i) *Existe un abierto $V \subset \mathbb{R}^n$ tal que $f(W) = V \cap M$.*

(ii) *$f : W \to V \cap M$ es un homeomorfismo (considerando en $V \cap M$ la topología inducida por la de $\mathbb{R}^n$, o equivalentemente, por la de M).*

(iii) *Para todo $u \in W$, $\mathrm{ran}(Df(u)) = m$ $(1 \leq i, j \leq m)$.*

Probar que $(V \cap M, f^{-1})$ es una carta compatible con la estructura diferenciable de M.

Sugerencia: Para cada $p \in V \cap M$, considerar la carta (U, ϕ) con $p \in U$ inducida por cartas usuales (W, ψ) de $\mathbb{R}^n$ adaptadas a M y aplicar el Ejercicio (2.2), item (iii)).

Ejercicio 2.10. *Construir una variedad diferenciable M de dimensión 2 incluida en $\mathbb{R}^3$ tal que la inclusión $i : M \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ sea continua pero no diferenciable.*

Ejercicio 2.11. *Sea M una variedad diferenciable y (U, ϕ) una carta de M. Considerando a U y a $\phi(U)$ como variedades diferenciables con las estructuras inducidas por M y $\mathbb{R}^n$ respectivamente, verificar que $\phi : U \to \phi(U)$ es un difeomorfismo.*

Ejercicio 2.12. *Sea $f = (f_1, \ldots, f_k) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ $(n > k)$ una función diferenciable y $b \in \mathrm{Im}(f)$ un valor regular. Sea $M = f^{-1}(b)$ dotada de la única estructura diferenciable que la hace una subvariedad de $\mathbb{R}^n$ de dimensión $n - k$. Verificar que*

$$T_p(M) = \{u \in \mathbb{R}^n : \langle \mathrm{grad}(f_j)(p), u \rangle = 0,\ 1 \leq j \leq k\}.$$

Ejercicio 2.13. *Sea M una variedad diferenciable de dimensión n, $p \in M$ y $\{v_1, \ldots, v_n\}$ una base (ordenada) de $T_p(M)$. Construir una carta (U, ϕ) de M alrededor de p tal que*

$$\partial_i|_p = v_i, \qquad \forall\, i = 1, \ldots, n.$$

Ejercicio 2.14. *Sea V un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión n y $\mathcal{B} = \{v_1, ..., v_n\}$ una base ordenada. Considerando a V como una variedad diferenciable considerada en el Ejercicio (2.6), sea (V, ϕ) la carta inducida por $\mathcal{B}$. Dado $u \in V$, se define*

$$\begin{aligned} J_u : V &\to T_u(V) \\ \sum_{i=1}^n a_i v_i &\mapsto \sum_{i=1}^n a_i \partial_i|_u. \end{aligned}$$

Probar que J_u es un isomorfismo canónico (i.e., no depende de la base $\mathcal{B}$).

Ejercicio 2.15. *Sea M una variedad diferenciable y $f \in \mathcal{F}(M)$. Probar que la aplicación $df : TM \to \mathbb{R}$ es diferenciable.*

Ejercicio 2.16. *Sea M una variedad diferenciable de dimensión n y (U, ϕ) una carta de M. Dado $p \in U$, sea $a = \phi(p)$. Probar que $d(\phi^{-1})(a) : T_a(\mathbb{R}^n) \to T_p(M)$ satisface*

$$d(\phi^{-1})(a)(J_a(e_i)) = \partial_i|_p, \qquad \forall\, i = 1, \ldots, n,$$

donde $\{e_1, \ldots, e_n\}$ es la base canónica de $\mathbb{R}^n$.

Ejercicio 2.17. *Sean M y N variedades diferenciables y $f : M \to N$ un morfismo diferenciable. Probar que:*

(i) *Si f es constante, entonces $df(p) = 0$, para todo $p \in M$.*

(ii) *Si M es conexa y $df(p) = 0$ para todo $p \in M$, entonces f es constante.*

2.2 Ejemplos de variedades

Ejercicio 2.18. *Consideremos $\mathbb{R}^{n+1}$ con su producto interno usual, y a la esfera S^n como subvariedad de $\mathbb{R}^{n+1}$. Fijemos un punto a en la esfera que llamaremos polo sur, y $-a$ al polo norte. Consideremos $\{a\}^\perp$, que es un subespacio de dimensión n (isomorfo a $\mathbb{R}^n$) y los abiertos $U_+ = S^n \setminus \{a\}$ y $U_- = S^n \setminus \{-a\}$. Se definen las* ***proyecciones estereográficas***

$$\begin{aligned} u_+ : U_+ &\to \{a\}^\perp \\ x &\mapsto \frac{x - \langle x, a\rangle a}{1 - \langle x, a\rangle} \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} u_- : U_- &\to \{a\}^\perp \\ x &\mapsto \frac{x - \langle x, a\rangle a}{1 + \langle x, a\rangle}. \end{aligned}$$

Demuestre la validez de las fórmulas inversas:

$$\begin{aligned} u_+^{-1}(y) &= \frac{|y|^2 - 1}{|y|^2 + 1} a + \frac{2}{|y|^2 + 1} y, \\ u_-^{-1}(y) &= -\frac{|y|^2 - 1}{|y|^2 + 1} a + \frac{2}{|y|^2 + 1} y. \end{aligned}$$

Pruebe además la identidad

$$\begin{aligned} (u_- \circ u_+^{-1})(y) &= \frac{y}{|y|^2}, \\ (u_+ \circ u_-^{-1})(z) &= \frac{z}{|z|^2}. \end{aligned}$$

Hacer un dibujo en $\mathbb{R}^3$ tomando $a = (0, 0, -1)$ (el polo sur), de manera tal que $a^\perp$ es el plano xy, dibujando la esfera unitaria. Convénzase que estas fórmulas son efectivamente la proyección estereográfica.

Ejercicio 2.19. *Probar que los siguientes conjuntos tienen una estructura de variedad diferenciable de dimensión d y encontrar un atlas.*

(i) *Espacio proyectivo $\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) = S^n/\sim$, donde $x \sim y$ si $x = \pm y$, $d = n$.*

(ii) *Espacio proyectivo definido de la forma: $\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) = (\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\})/\sim$, donde $x \sim y$ sii son l.d. Demostrar la equivalencia de las definiciones.*

(iii) *Toro $T^n = S^1 \times \cdots \times S^1$ (n veces), $d = n$.*

(iv) *Cilindro $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1\} \cong S^1 \times \mathbb{R}$, $d = 2$.*

Ejercicio 2.20. *Considerando a cada una de las variedades con la estructura diferenciable anteriormente definida sobre ella, probar que las siguientes inclusiones son diferenciables:*

(i) $i : S^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$.

(ii) $i : S \hookrightarrow E$, *S subespacio de un espacio vectorial de dimensión finita E.*

(iii) $i : U \hookrightarrow M$, *$U \subset M$ abierto no vacío de una variedad diferenciable M.*

(iv) $i : \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \hookrightarrow M_n(\mathbb{R})$

(v) $i : T_p(M) \to TM$, *donde M es una variedad diferenciable y $p \in M$.*

Analizar en cada caso si se trata o no de inmersiones o sumersiones.

Ejercicio 2.21. *Probar que los siguientes conjuntos tienen una estructura de variedad diferenciable de dimensión d empleando el teorema de la función implícita:*

(i) $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) : \det(A) = 1\}$, $d = n^2 - 1$.

(ii) $\mathrm{SL}(n,\mathbb{C}) = \{A \in M_n(\mathbb{C}) : \det(A) = 1\}$, $d = 2n^2 - 2$;

(iii) $\mathrm{O}(n,\mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) : AA^t = I\}$, $d = n(n-1)/2$.

(iv) $\mathrm{SO}(n,m) = \{A \in M_{n+m}(\mathbb{R}) : AI_{n,m}A^t = I_{n,m},\ y\ \det(A) = 1\}$, *donde* $I_{n,m}$ *es una matriz diagonal con* n *unos y* m *menos unos.*

(v) $\mathrm{U}(n) = \{A \in M_n(\mathbb{C}) : AA^* = I\}$, $d = n^2$. *(Sugerencia: si* $B = AA^*$*, entonces* $B^* = B$*, por lo tanto* B *tiene valores reales en la diagonal, y los valores por encima de la diagonal determinan a los valores por debajo de la diagonal; con estos datos, puede contar la cantidad de ecuaciones que significa* $AA^* = 1$*);*

(vi) $\mathrm{SU}(n) = \{A \in U(n) : \det(A) = 1\}$, $d = n^2 - 1$.

Ejercicio 2.22. *Sea* I *la matriz identidad de* $M_n(\mathbb{R})$.

(i) Probar que el espacio tangente $T_I(\mathrm{GL}(n,\mathbb{R}))$ *es* $M_n(\mathbb{R})$.

(ii) Sea $\det : \mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^\times$ *la función determinante. Probar que* $d(\det)(I) : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ *(identificando los tangentes) es la traza.*

(iii) Describir $T_I(\mathrm{SL}(n,\mathbb{R}))$.

Ejercicio 2.23. *Sea* $\mathbb{H} = \mathbb{R}\oplus\mathbb{R}.i\oplus\mathbb{R}.j\oplus\mathbb{R}.k$ *el álgebra de cuaterniones, es decir, el* $\mathbb{R}$*-espacio vectorial de dimensión* 4 *con base* $\{1,i,j,k\}$ *con la tabla de multiplicación (que resulta asociativa) dada por* $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $ij = k = -ji$, $jk = i = -kj$, $ki = j = -ik$. *Si* $w = a + bi + cj + dk$ *(con* $a,b,c,d \in \mathbb{R}$*), se define* $\bar{w} = a - bi - cj - dk$*, y* $\mathrm{Re}(w) = a$. *De la identificación* $\mathbb{H} \simeq \mathbb{R}^4$*, consideramos en* $\mathbb{H}$ *el producto interno definido positivo* $\langle\, ,\rangle$ *proveniente del euclídeo de* $\mathbb{R}^4$. *Verificar:*

(i) $w\bar{w} = |w|^2$, $\mathrm{Re}(w\bar{w}') = \langle w, w'\rangle$.

(ii) Todo elemento $w \neq 0$ *es invertible, es decir,* $\mathbb{H}$ *es un anillo de división.*

(iii) La multiplicación $\mathbb{H}\times\mathbb{H} \to \mathbb{H}$ *y la inversión* $\mathbb{H}\setminus\{0\} \to \mathbb{H} \to \{0\}$ *son morfismos diferenciables.*

(iv) $\overline{ww'} = \bar{w}'\bar{w}$

Sugerencia: Considerar los casos $w = 1,i,j,k$, $w' = 1,i,j,k$ *y extender por* $\mathbb{R}$*-bilinealidad.*

Concluir que $|ww'| = |w||w'|$.

(v) $S^3 = \{w \in \mathbb{H} : |w| = 1\}$ *es un subgrupo, es una variedad diferenciable de dimensión* 3 *y la multiplicación e inversión son diferenciables.*

(vi) $(\mathbb{R})^\perp = \mathbb{R}.i \oplus \mathbb{R}.j \oplus \mathbb{R}.k$*, que identificamos con* $\mathbb{R}^3$ *mediante la extensión* $\mathbb{R}$*-lineal de*

$$\begin{aligned} i &\mapsto e_1,\\ j &\mapsto e_2,\\ k &\mapsto e_3. \end{aligned}$$

Si $w \in S^3 \subset \mathbb{H}$*, se define la aplicación*

$$\begin{aligned} s_w : (\mathbb{R})^\perp &\to (\mathbb{R})^\perp\\ v &\mapsto wvw^{-1}. \end{aligned}$$

(a) Ver que w *induce la identidad si y sólo si* $w = \pm 1$.

(b) $|v| = |wvw^{-1}|$*, y por lo tanto se tiene definida una aplicación* $S^3 \to \mathrm{O}(3,\mathbb{R})$*, y como* S^3 *es conexo, de hecho la imagen está contenida en* $\mathrm{SO}(3,\mathbb{R})$*. Ver que esta aplicación es morfismo de grupos, diferenciable, con núcleo* $\{\pm 1\}$.

Ejercicio 2.24. *Sean* X *e* Y *subvariedades de* $\mathbb{R}^n$ *tales que* $X \subset Y$. *Probar que* X *es una subvariedad (sumergida) de* Y *y que para todo* $p \in X$ *vale que*

$$p + T_p(X) \subset p + T_p(Y).$$

Deducir que los conjuntos

$$\begin{aligned} M &= \{(x_1,x_2,x_3) : x_1^2 - x_2^2 = 0\},\\ M' &= \{(x_1,x_2,x_3) : x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0\} \end{aligned}$$

no pueden ser subvariedades de $\mathbb{R}^3$.

Ejercicio 2.25. *La curva $\mathcal{L}$ definida por la función*

$$\begin{aligned} \alpha : (0, 2\pi) &\to \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto (\operatorname{sen}(t), \operatorname{sen}(2t)) \end{aligned}$$

se denomina ***lemniscata****. Probar que no existe estructura diferenciable sobre la lemniscata que la haga una subvariedad de $\mathbb{R}^2$.*

Demostrar lo mismo para $M = \mathcal{L} \times (0,1) \subset \mathbb{R}^3$, donde $\mathcal{L}$ es la lemniscata.

Ejercicio 2.26. *Sea M una variedad diferenciable y (U, ϕ) una carta de M con $\phi(U) = \mathbb{R}^n$. Sea $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un isomorfismo y sea $\psi = \varphi \circ \phi$. Probar que (U, ψ) es una carta en M y calcular la matriz de cambio de base de $\{\frac{\partial}{\partial \psi^j}|_p\}$ a $\{\frac{\partial}{\partial \phi^i}|_p\}$ ($p \in U$).*

Ejercicio 2.27. *Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto y $f : U \to \mathbb{R}^m$ diferenciable (en el sentido clásico). Probar que también es diferenciable como aplicación entre variedades, viendo a U y a $\mathbb{R}^m$ con las estructuras diferenciables usuales. Analizar la relación entre $Df(a)$ en el sentido clásico y $Df(a)$ en el sentido de variedades para $a \in U$.*

Ejercicio 2.28. *Sea M una variedad compacta de dimensión n y $f : M \to \mathbb{R}^n$ diferenciable. Probar que f no puede ser no singular en todo punto.*

Ejercicio 2.29. *Probar que una función diferenciable $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ no puede ser inyectiva. ¿Y si sólo fuese continua?.*

Ejercicio 2.30. *Sea M una subvariedad de dimensión m de $\mathbb{R}^n$ e $i : M \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ la inclusión. Dada una carta (U, ϕ) de M, sea $f = i \circ \phi^{-1} : \phi(U) \to \mathbb{R}^n$. Probar:*

(i) *Existe un abierto V de $\mathbb{R}^n$ tal que $U = V \cap M$ y $f : \phi(U) \to V \cap M$ es una biyección.*

(ii) *$f : \phi(U) \to V \cap M$ es un homeomorfismo.*

(iii) *f es diferenciable.*

(iv) *$\operatorname{ran}(Df(a)) = m$ para todo $a \in \phi(U)$, $1 \le i, j \le n$. (Esto es decir que f es una inmersión).*

Ejercicio 2.31. *Sea M una subvariedad de dimensión m de $\mathbb{R}^n$ y $f : U \to \mathbb{R}^n$ una parametrización de M. Mostrar que $df(a)(\mathbb{R}^m) = T_{f(a)}(M)$ para todo $a \in U$.*

Ejercicio 2.32. *Sean M_1 y M_2 variedades diferenciables. Consideremos la variedad diferenciable $M_1 \times M_2$, con las proyecciones canónicas $\pi_i : M_1 \times M_2 \to M_i$, $i = 1, 2$.*

(i) *Si P es una variedad diferenciable y $f : P \to M_1 \times M_2$ es una función, probar que es diferenciable si y sólo si $\pi_i \circ f$, $i = 1, 2$ son diferenciables. Deducir que*

$$\begin{aligned} \Delta : M &\to M \times M \\ x &\mapsto (x, x) \end{aligned}$$

es diferenciable.

(ii) *Si $(p_1, p_2) \in M_1 \times M_2$, probar que $T_{(p_1,p_2)}(M_1 \times M_2)$ es canónicamente isomorfo a $T_{p_1}(M_1) \times T_{p_2}(M_2)$.*

(iii) *Si $(p_1, p_2) \in M_1 \times M_2$, se definen las inyecciones $j_{p_i} : M_i \to M_1 \times M_2$, $i = 1, 2$, de la forma*

$$\begin{aligned} j_{p_1}(m) &= (m, p_2) \\ j_{p_2}(n) &= (p_1, n). \end{aligned}$$

Sea $v \in T_{(p_1,p_2)}(M_1 \times M_2)$, y sean $v_i = d\pi_i(p_1, p_2)(v) \in T_{p_i}(M_i)$, $i = 1, 2$. Sea $f \in \mathcal{F}(M_1 \times M_2)$. Probar que

$$v(f) = v_1(f \circ j_{p_1}) + v_2(f \circ j_{p_2}).$$

(iv) *Probar que $T(M_1 \times M_2)$ es difeomorfo a $TM_1 \times TM_2$.*

Ejercicio 2.33. *(i)* *Probar que la función $f : S^n \to \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ definida por $f(x_0, \ldots, x_n) = (x_0 : \cdots : x_n)$ es diferenciable.*

(ii) *Encontrar un difeomorfismo entre $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ y S^1.*

Ejercicio 2.34 (Acción de un grupo en una variedad). *Sea G un grupo y M una variedad diferenciable. Decimos que G* ***actúa por difeomorfismos*** *si se tiene una aplicación*

$$\begin{aligned} G \times M &\to M \\ (g,x) &\mapsto g.x \end{aligned}$$

tal que $g.(h.x) = (gh).x$ y $1_G.x = x$ para todos $g, h \in G$ y $x \in M$, y de manera que para cada $g \in G$, la aplicación

$$\begin{aligned} g.(-) : M &\to M \\ x &\mapsto g.x \end{aligned}$$

es diferenciable (y por lo tanto un difeomorfismo con inversa $x \mapsto g^{-1}.x$). Equivalentemente, una acción de un grupo en una variedad diferenciable es un morfismo de grupos

$$\rho : G \to \mathrm{Aut}(M),$$

donde $\mathrm{Aut}(M)$ es el grupo de automorfismos diferenciables de M con la composición. La equivalencia de las definiciones se obtiene de

$$g.x = \rho(g)(x).$$

Se define el ***conjunto de órbitas*** *$X = M/G$ de la forma siguiente. M/G es el conjunto de clases de equivalencia definidas a parte de la relación siguiente: $x \sim y$ si y sólo si existe $g \in G$ tal que $y = g.x$.*

Diremos que la acción es ***fiel*** *o* ***efectiva*** *si ρ es un monomorfismo (i.e., es inyectivo). De forma equivalente, si $g \in G$ satisface que $g.x = x$, para todo $x \in M$, entonces $g = 1_G$. Más aún, la acción se dice* ***libre*** *si para todo $g \neq 1_G$ y todo $x \in M$, $g.x \neq x$. Trivialemente, vemos que una acción libre es efectiva.*

A su vez, la acción se dice ***propia*** *si el morfismo (continuo)*

$$\begin{aligned} G \times M &\to M \times M \\ (g,x) &\mapsto (g.x, x) \end{aligned}$$

es propio, i.e., la imagen inversa de un compacto es compacto, donde G tiene la topología discreta (i.e., todo subconjunto es abierto).

Más aún, la acción se dice ***propiamente discontinua****, si para todo $x \in M$ existe un abierto $U \subset M$, con $x \in U$, tal que para todo $g \in G$, $g \neq 1$, vale que $U \cap g.U = \emptyset$; y si x e y son dos elementos cualesquiera en la misma órbita existen abiertos $U, V \subset M$ tales que $x \in U$, $y \in V$ y $U \cap g(V) = \emptyset$, para todo $g \in G$.*

Si la acción es libre y propia, es propiamente discontinua. Probar que en este caso existe una estructura diferenciable en X tal que $p : M \to X$ (la proyección canónica) es un difeomorfismo local.

Sugerencia: Sea (U, φ) una carta de M tal que $U \cap g.U = \emptyset$ para todo $g \neq 1$; ver que se pueden definir cartas en $p(U)$ vía $\psi([x]) = \varphi(x)$, $x \in U$).

- *(i) Probar que una función $f : X \to N$ en una variedad diferenciable N es diferenciable si y sólo si $f \circ p$ lo es.*
- *(ii) Ver que $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ es un ejemplo de esta construcción.*
- *(iii) $\mathbb{Z}^n$ actúa en $\mathbb{R}^n$ por*

  $$(a_1, ..., a_n).(x_1, ..., x_n) = (x_1 + a_1, ..., x_n + a_n).$$

  Probar que la variedad cociente es difeomorfa a $\mathbb{T}^n = (S^1)^n = S^1 \times \cdots \times S^1$. Esta variedad se denomina ***toro n-dimensional****.*
- *(iv) $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ actúa en $\mathbb{T}^2$ vía $1.(x,y) = (x,y)$ y $(-1).(x,y) = (-x,-y)$ ($x, y \in S^1$). El cociente K se denomina* ***botella de Klein****.*

Ejercicio 2.35 (Pegado de variedades). *Sea $\{(X_i, \mathcal{A}_i)\}_{i \in I}$ una familia de variedades diferenciables de dimensión n y para par $(i,j) \in I^2$, un abierto $U_{ij} \subset X_i$, (consideremos en U_{ij} la estructura de variedad diferenciable heredada de X_i). Supongamos también que para cada $i \neq j$ tenemos un difeomorfismo $\varphi_{ij} : U_{ij} \to U_{ji}$ tal que*

- *(i) Para cada $i, j \in I$, $\varphi_{ji} = \varphi_{ij}^{-1}$.*
- *(ii) Para cada i, j, k, $\varphi_{ij}(U_{ij}) = U_{ji} \cap U_{jk}$, y $\varphi_{ik} = \varphi_{jk} \circ \varphi_{ij}$ en $U_{ij} \cap U_{ik}$.*

Mostrar que existe una variedad diferenciable $(X, \mathcal{D})$ y morfismos $\psi_i : X_i \to X$ para cada i tales que *(i)* ψ_i *es un difeomorfismo entre* X_i *y un abierto de* X.

(ii) *Los abiertos* $\psi_i(X_i)$ *cubren* X.

(iii) $\psi_i(U_{ij}) = \psi_i(X_i) \cap \psi_j(X_j)$.

(iv) $\psi_i = \psi_j \circ \varphi_{ij}$ *en* U_{ij}.

Ejercicio 2.36. *Sean* $X_1 = X_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1, |z| < 2\}$ *dos cilindros. Sean*

$$U_{12} = \{(x, y, z) \in X_1 : |z| > 1\},$$
$$U_{21} = \{(x, y, z) \in X_2 : |z| > 1\}$$

y $\varphi_{12} : U_{12} \to U_{21}$ *definida por*

$$\varphi_{12}(x, y, z) = \begin{cases} (x, y, 3 - z) & \text{si } z > 1, \\ (x, y, -3 - z) & \text{si } z < -1. \end{cases}$$

Probar que la variedad que se obtiene pegando X_1 *y* X_2 *con los datos de pegado es difeomorfa al toro.*

Ejercicio 2.37. *Describir de manera explícita la construcción de* $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ *como pegado de tres copias de* $\mathbb{R}^2$.

Ejercicio 2.38. *Sea* $M^r_{m\times n}(\mathbb{R}) = \{A \in M_{m\times n}(\mathbb{R}) : \operatorname{ran}(A) = r\}$. *Probar que* $M^r_{m\times n}(\mathbb{R})$ *es una subvariedad de* $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ *de dimensión* $mn - (m - r)(n - r) = r(m + n - r)$.

Sugerencia: Si $A \in M^r_{m\times n}(\mathbb{R})$, *permutando sus filas podemos escribirla como*

$$\begin{pmatrix} M & N \\ P & Q \end{pmatrix}$$

con $M \in \mathrm{GL}(r, \mathbb{R})$.

Si consideramos la matriz invertible

$$B = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ -PM^{-1} & I_{m-r} \end{pmatrix}$$

y multiplicamos por A, *tenemos*

$$BA = \begin{pmatrix} M & N \\ 0 & Q - PM^{-1}N \end{pmatrix}$$

¿Qué tiene que pasar para que BA *tenga rango* r*?.*

Ejercicio 2.39 (Grassmaniana de k-planos en $\mathbb{R}^n$). *Consideremos la variedad* $X = M^k_{k\times n}(\mathbb{R})$ *de matrices de* $k \times n$ *de rango* k. *Verificar que es un abierto de* $M_{k\times n}(\mathbb{R})$.

Consideremos en X *la relación de equivalencia dada por* $A \sim B$ *si y sólo si existe* $G \in \mathrm{GL}(k, \mathbb{R})$ *tal que* $A = GB$. *Probar que dos matrices están relacionadas si y sólo si sus filas generan el mismo subespacio de dimensión* k *de* $\mathbb{R}^n$.

Al conjunto cociente de X *por la relación de equivalencia* $\sim$ *lo llamamos Grassmaniana de* k*-planos en* $\mathbb{R}^n$ *y lo notamos* $G(k, \mathbb{R}^n)$. *El párrafo anterior muestra que es el espacio de subespacios vectoriales de dimensión* k *de* $\mathbb{R}^n$. *Si* S *es un subespacio de dimensión* k *de* $\mathbb{R}^n$, *lo vemos como un punto de* $G(k, \mathbb{R}^n)$ *usando cualquier matriz cuyas filas sean una base de* S.

Vamos a ver que $G(k, \mathbb{R}^n)$ *es una variedad diferenciable de dimensión* $k(n - k)$.

Consideremos para cada $I = \{i_1, \dots, i_k\} \subset \{1, \dots, n\}$ *el siguiente subconjunto*

$$U_I = \pi(\{A : \det(A_I) \neq 0\}) = \{\bar{A} : \det(A_I) \neq 0\},$$

donde A_I *es el menor de* $k \times k$ *de* A *cuyas columnas son* $i_1, \dots, i_k$, $\pi : M^k_{k\times n}(\mathbb{R}) \to G(k, \mathbb{R}^n)$ *es la proyección al cociente y* $\bar{A} = \pi(A)$. *Probar que* $U_I = \{S \in G(k, \mathbb{R}^n) : S \cap V_{I^c} = 0\}$, *donde* V_{I^c} *es el subespacio de dimensión* $n - k$ *de* $\mathbb{R}^n$ *generado por* $\{e_j : j \notin I\}$.

Vamos ahora a definir un sistema de coordenadas locales en U_I. *Lo hacemos para* $I = \{1, \dots, k\}$ *para facilitar la notación. Dado* $\bar{A} \in U_I$, *consideramos la matriz*

$$A_I^{-1}A = (I_k \mid B),$$

donde I_k *es la identidad de* $k \times k$. *Definimos entonces* $\varphi_I : U_I \to \mathbb{R}^{k(n-k)}$ *como* $\varphi_I(\bar{A}) = B$, *donde* B *es como arriba. Probar que esta asignación está bien definida.*

Probar que $\{(U_I, \varphi_I)\}$ *define un atlas en* $G(k, \mathbb{R}^n)$.

Sugerencia: Hacer primero el caso $G(2, \mathbb{R}^4)$ *para entender la construcción.*

Consideremos ahora la aplicación $p : M^k_{k\times n}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^{\binom{n}{k}}$ dada por

$$p(A) = (\det(A_I))_I$$

donde I recorre todos los subconjuntos de k elementos de $\{1, \ldots, n\}$ (ordenados de alguna manera). Probar que p induce una aplicación diferenciable

$$P : G(k, \mathbb{R}^n) \to \mathbb{P}^N(\mathbb{R}),$$

donde $N = \binom{n}{k} - 1$.

Probar que P es una inmersión.

*Si $S \in G(k, \mathbb{R}^n)$ es un subespacio de dimensión k de $\mathbb{R}^n$, al punto $P(S)$ lo llamamos las **coordenadas de Plücker** de S.*

Notemos que $G(1, \mathbb{R}^{n+1}) = \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$.

Ejercicio 2.40 (Variedades complejas). *Sea $U \subset \mathbb{C}^n$ un abierto no vacío y $f = (f_1, \ldots, f_m) : U \to \mathbb{C}^m$. Decimos que f es analítica si alrededor de cada punto de U, cada f_i tiene una expansión como serie de potencias (no trivial: esto equivale a que cada f_i sea holomorfa en cada variable por separado). Hacer la definición obvia de **variedad compleja de dimensión** n. Notar que tal variedad M también resulta una variedad diferenciable de dimensión $2n$, que la notamos con M^∞. Definir qué significa que una función $f : M \to N$ entre variedades complejas sea analítica.*

Para cada $p \in M$, un vector tangente v a M en p es una $\mathbb{C}$-derivación en p, $v : \mathcal{O}(M) \to \mathbb{C}$ (siendo $\mathcal{O}(M)$ el conjunto de funciones analíticas de M en $\mathbb{C}$). Con M_p notamos al espacio tangente (complejo) de vectores tangentes a M en p.

Probar que se pueden identificar naturalmente los espacios $T_p(M)$ y $T_p(M^\infty)$.

Sugerencia: Coordenadas locales complejas $z_1, \ldots, z_n$ alrededor de p dan lugar a coordenadas locales reales

$$x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n,$$

donde $z_r = x_r + iy_r$. Por lo tanto, existen bases

$$\{\frac{\partial}{\partial z_1}|_p, \ldots, \frac{\partial}{\partial z_n}|_p\}$$
$$\{\frac{\partial}{\partial x_1}|_p, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}|_p, \frac{\partial}{\partial y_1}|_p, \ldots, \frac{\partial}{\partial y_n}|_p\}$$

de $T_p(M)$ y de $T_p(M^\infty)$ como $\mathbb{C}$ y $\mathbb{R}$ espacios vectoriales respectivamente. Probar que bajo esta identificación natural, $\frac{\partial}{\partial z_r}|_p = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x_r}|_p - i\frac{\partial}{\partial y_r}|_p)$.

Recordemos que una función $f = u + iv : U \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es analítica si y sólo si es diferenciable y satisface las ecuaciones de Cauchy-Riemann:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y},$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Probar que esto equivale a que $df(p) : T_p(U^\infty) \to T_{f(p)}(\mathbb{C}^\infty)$ sea $\mathbb{C}$-lineal para todo $p \in U$ (viendo a U y a $\mathbb{C}$ como variedades complejas). Deducir que una función diferenciable $f : U \subset \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ es analítica si y sólo si $df(p) : T_p(U^\infty) \to T_{f(p)}(\mathbb{C}^\infty)$ es $\mathbb{C}$-lineal para todo $p \in U$.

Sean M y N variedades complejas, y $f : M \to N$ diferenciable. Probar que f es analítica si y sólo si $df(p) : T_p(M^\infty) \to T_{f(p)}(N^\infty)$ es $\mathbb{C}$-lineal para todo $p \in M$.

*Una variedad compleja de dimensión 1 se llama una **superficie de Riemann**.*

Ejercicio 2.41. *Probar que S^2 es una superficie de Riemann, denominada la **esfera de Riemann**.*

Sugerencia: Las proyecciones estereográficas dan las cartas.

Ejercicio 2.42 (Espacio proyectivo complejo). *Consideremos en $\mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$ la siguiente relación de equivalencia: $z \sim w$ si y sólo si $z = \lambda w$ para algún $\lambda \in \mathbb{C}^\times$. Sea M el conjunto de clases de equivalencia. Notamos con $(z_0 : \cdots : z_n)$ la clase de un punto $(z_0, \ldots, z_n)$. Sean $U_i = \{(z_0 : \cdots : z_n) \in M : z_i \neq 0\}$ (notar que la condición está bien definida) y $\varphi_i : U_i \to \mathbb{C}^n$ definidas por*

$$\varphi_i(z_0 : \cdots : z_n) = (\frac{z_0}{z_i}, \ldots, \frac{z_{i-1}}{z_i}, \frac{z_{i+1}}{z_i}, ..., \frac{z_n}{z_i}).$$

*Probar que las cartas (U_i, φ_i) definen en M una estructura de variedad diferenciable de dimensión $2n$ y una estructura de variedad compleja de dimensión n. Esta variedad se llama **espacio proyectivo complejo** de dimensión (compleja) n y lo notamos con $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$.*

(i) Probar que $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ *es difeomorfo como variedad compleja (y por lo tanto como variedad diferenciable) a* S^2.

(ii) ¿Es cierto que $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ *es difeomorfo (como variedad diferenciable) a* $\mathbb{P}^{2n}(\mathbb{R})$*?*

Figure 1: Hermann Klaus Hugo Weyl (9 de noviembre de 1885, Elmshorn-9 de diciembre de 1955, Zürich). Estudió diversos tópicos dentro de la matemática, como topología, análisis armónico, geometría diferencial y riemanniana, con fuerte interés en la física matemática. Contribuyó en el desarrollo de la teoría de la Relatividad Especial y General. En su obra *Die Idee der Riemannschen Fläche* en 1913 definió rigurosamente el concepto de variedad como se conoce actualmente.