

# Model Ramsey'a-Cass'a-Koopmans'a

Dr hab. Joanna Siwińska-Gorzelał

# Plan wykładu

- Wprowadzenie do modelu
- Metody matematyczne
- Rozwiązanie modelu
- Wnioski
  
- Uwaga – na slajdach znajdują się wyłącznie główne elementy; sporo wyjaśnień jest omawianych podczas wykładu, natomiast nie ma ich na slajdach

# Wprowadzenie do modelu

- W modelu Solowa stopa oszczędności była dana, co jest pewną wadą modelu (pomimo, że w długim okresie okazuje się całkiem rozsądnym założeniem)
- Model RCK zakłada, że stopa oszczędności jest zmienną wybraną przez gospodarstwa domowe w procesie optymalizacji (czy stopa oszczędności zmienia się wraz z dochodem?)
- Gospodarka jest nadal zamknięta
- Dla ułatwienia założymy, że brak jest postępu technicznego, czyli  $A$  jest stałe
- Założymy też stałe tempo wzrostu liczby ludności, równe  $n$ 
$$L_t = L_0 e^{nt}$$
- Pomijamy subskrypty czasu (zamiast  $x_t$  piszemy  $x$ )

# Gospodarstwa domowe

- Gospodarstwa domowe dostarczają na rynek pracę w zamian za płacę  $w$ , konsumują oraz oszczędzają
- Horyzont gospodarstwa domowego jest nieskończony
- Gospodarstwo domowe maksymalizuje użyteczność, gdzie  $c$  to konsumpcja na głowę:

$$U = \int_0^{\infty} u[c(t)] e^{-\rho t} e^{nt} dt$$

$$\rho > 0 \quad \rho > n$$

$$u'(c) > 0 \quad u''(c) < 0$$

$$\lim_{c \rightarrow 0} u'(c) = \infty \quad \lim_{c \rightarrow \infty} u'(c) = 0$$

# Gospodarstwo domowe

- G.D. oszczędza i gromadzi aktywa  $A$  (ograniczenie budżetowe)

$$\dot{A} = rA + wL - C$$

- ..i w ujęciu na głowę (na głowę)

$$\dot{a} = w + ra - c - na$$

- Gra Ponziego (piramida finansowa) jest wykluczona

# Metody matematyczne

- Napotykamy tu na problem dynamicznej optymalizacji w czasie ciągłym – metodą do wykorzystania jest Hamiltonian
- Musimy określić zmienne kontroli (które „wybieramy” lub też „kontrolujemy”) i stanu (które zależą od naszego wyboru, ale my ich bezpośrednio nie wybieramy)
- Musimy zmaksymalizować pewną funkcję, która zależy od obu tych zmiennych, biorąc pod uwagę „zachowanie” zmiennej stanu
- Dokładniej...

# Metody matematyczne

$$\max_{c(t)} = \int_0^T v(k_t, c_t) dt,$$

- Przy warunkach :

$$\dot{k} = g(k_t, c_t)$$

$$k_{t=0} = 0$$

$$k_{t=T} e^{-rT} \geq 0$$

# Hamiltonian - procedura

- Krok pierwszy – konstruujemy Hamiltonian

$$H = v(k, c) + \lambda * g(k, c)$$

- Krok drugi –liczymy pochodną po zmiennej kontrolnej, którą przyrównujemy do zera

$$\frac{dH}{dc} = 0$$

- Krok trzeci liczymy pochodną po zmiennej stanu i przyrównujemy ją do minus pochodnej mnożnika po czasie

$$\frac{dH}{dk} = -\dot{\lambda}$$

- Krok czwarty – warunek transwersalności

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \lambda_t k_t = 0$$



# Powróćmy do gospodarstwa domowego

- Krok pierwszy – konstruujemy Hamiltonian:

$$H = u(c)e^{(n-\rho)t} + \lambda(w + (r-n)a - c)$$

- Krok drugi – liczymy pochodną po zmiennej kontrolnej, którą przyrównujemy do zera

$$\frac{dH}{dc} = u'(c)e^{(n-\rho)t} - \lambda = 0$$

- Krok trzeci liczymy pochodną po zmiennej stanu i przyrównujemy ją do minus pochodnej mnożnika po czasie

$$\frac{dH}{da} = -\lambda(r+n) = \dot{\lambda}$$

- Krok czwarty – warunek transwersalności

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \lambda_t a_t = 0$$

# Funkcja użyteczności gospodarstwa domowego

- Załóżmy, że funkcja użyteczności gospodarstwa domowego ma konkretną postać:

$$u(c_t) = \frac{c_t^{1-\theta} - 1}{1-\theta}$$

- Z czego wynika:

$$H = \frac{c_t^{1-\theta} - 1}{1-\theta} e^{(n-\rho)t} + \lambda(w + (r-n)a - c)$$

- Policzmy, co trzeba

$$\frac{dH}{dc} = e^{(n-\rho)t} \frac{(1-\theta)c^{-\theta}(1-\theta)}{(1-\theta)^2} - \lambda = e^{(n-\rho)t} c^{-\theta} - \lambda = 0$$

$$(1) \quad e^{(n-\rho)t} c^{-\theta} = \lambda$$

$$\frac{dH}{da} = \lambda(r-n) = -\dot{\lambda}$$

$$\frac{\dot{\lambda}}{\lambda} = -r + n$$

# Obliczenia

$$(1) \quad e^{(n-\rho)t} c_t^{-\theta} = \lambda_t \Rightarrow \quad (2) (n-\rho)e^{(n-\rho)t} c_t^{-\theta} + e^{(n-\rho)t} (-\theta)c_t^{-\theta-1} \dot{c} = \dot{\lambda}$$

podzielmy (2) przez (1)

$$(n-\rho) - \theta \frac{\dot{c}}{c} = \frac{\dot{\lambda}}{\lambda}$$

- Podstawiamy:

$$-r + n = -\rho + n - \theta \frac{\dot{c}}{c}$$

$$\frac{\dot{c}}{c} = \frac{-r + \rho}{-\theta}$$

$$\frac{\dot{c}}{c} = \frac{r - \rho}{\theta}$$

# Firmy

- Funkcja produkcji jest neoklasyczna

$$Y = F(K, N)$$

- Firmy maksymalizują zysk

$$\Pi = \int_{t=0}^{\infty} e^{-rt} F(K, N) - wL - RK$$

$$R = r + d$$

- Wiemy, że to oznacza:

$$\frac{dF}{dK} = MPK = R$$

$$\frac{dF}{dN} = MPN = w$$

- W wielkościach per capita

$$Y = Nf(k) = Nf\left(\frac{K}{N}\right)$$

$$\frac{dY}{dK} = Nf'(k) \frac{1}{N} = f'(k)$$

$$\frac{dY}{dN} = f(k) + Nf'(k) \frac{-K}{N^2} = f(k) - f'(k)k$$

# Rynki

- Rynki łączą gospodarstwa domowe i firmy;
- Skoro gospodarka jest zamknięta, to

$$a_t = k_t$$

$$ra_t = (R - d)k_t$$

- Z tego wynika, że

$$\dot{k} = Rk + w - dk - nk - c$$

$$\dot{k} = f'(k) * k + f(k) - f'(k) * k - (d + n)k - c$$

$$\dot{k} = f(k) - c - (d + n)k$$

# Mamy więc rozwiązanie

$$\dot{c} = \frac{1}{\theta}(R - d - \rho) = \frac{1}{\theta}(r - \rho) \quad \text{oraz}$$

$$\dot{k} = f(k) - c - (d + n)k$$

Cieężko powiedzieć, co z tego wynika tak na pierwszy rzut oka....

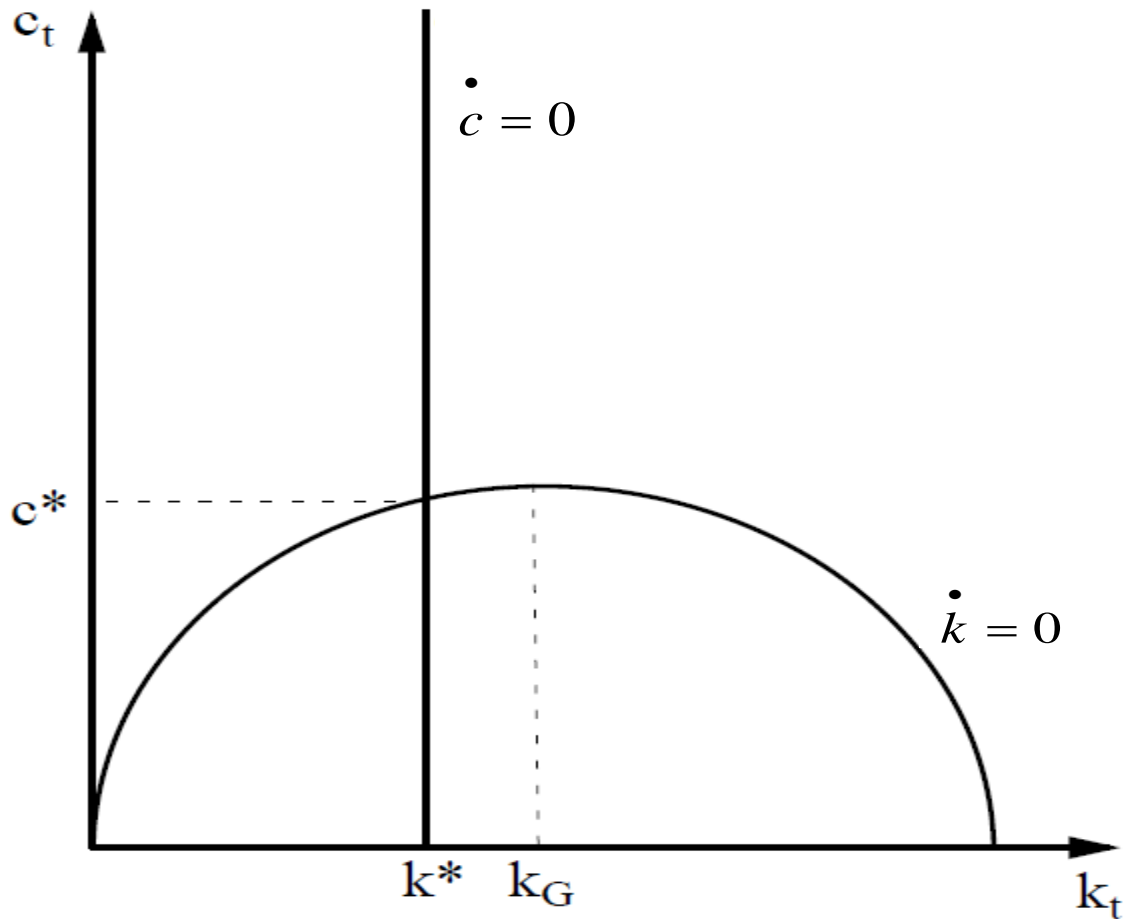
# Diagram fazowy

- Określmy, kiedy  $c$  oraz  $k$  nie rosną i spróbujmy narysować..

$$\dot{c} = 0 \Rightarrow r = \rho$$

$$\dot{k} = 0 \Rightarrow y - c = (d + n)k \Rightarrow c = y - (d + n)k$$

# Diagram fazowy





# Diagram fazowy

- Skąd wiemy, że linia „stabilnej konsumpcji” przecnie dzwon „stabilnego kapitału” na lewo od szczytu?
- Z rachunków...

$$\begin{aligned} \dot{c} &= 0 && \text{gdy} \\ f'(k) &= \rho + d \end{aligned}$$

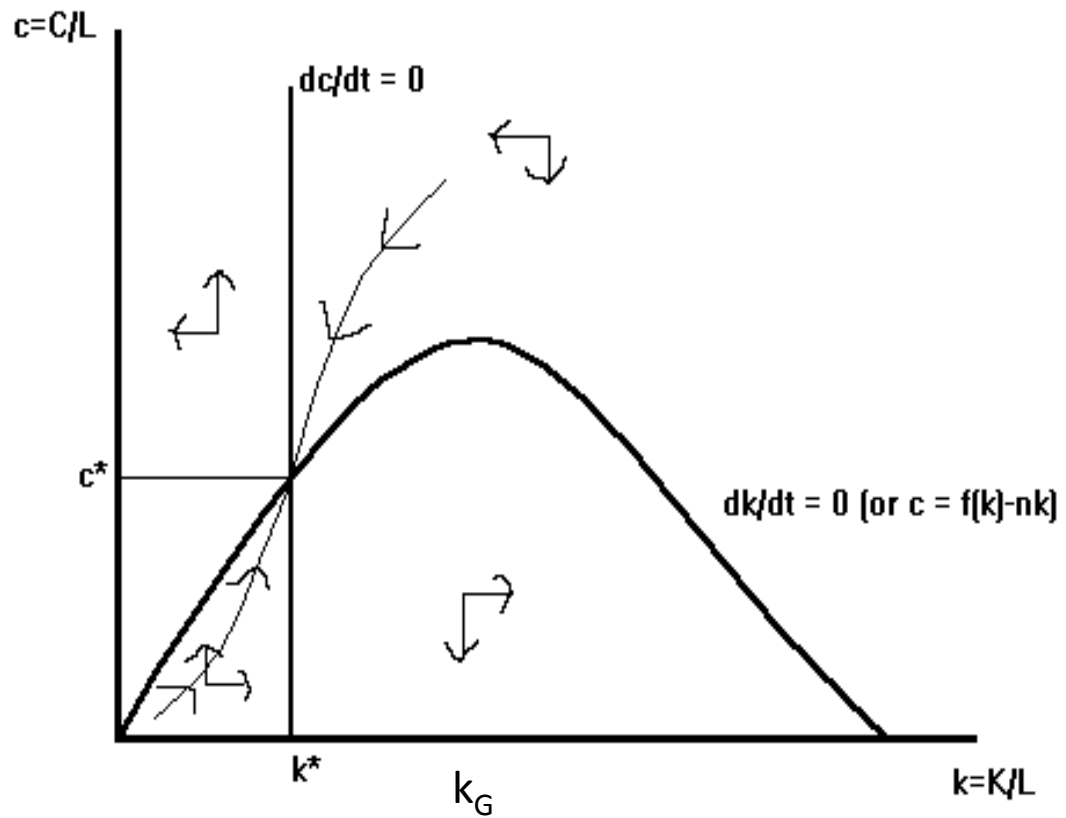
$$\begin{aligned} \dot{k} &= 0 && \text{gdy} \\ c &= f(k) - (d + n)k \\ \frac{dc}{dk} &= 0 \implies f'(k_G) = d + n \end{aligned}$$

*wiemy, że*

$$\rho > n$$

...czyli wielkość kapitału, wyznaczająca linię „stabilnej konsumpcji” musi być mniejsza niż kapitał, który wyznacza maksymalną konsumpcję, gdy kapitał jest stabilny, czyli  $k_G$

# Diagram fazowy – dynamika



# Wnioski

- Kraj osiągnie stan ustalony
- Kiedy kraj zmierza do stanu ustalonego, to stopa oszczędności będzie się zmieniać, co wyznacza kształt ścieżki siodłowej, który z kolei zależy od  $\Theta$
- Wielkość  $\rho$  (dyskonto przyszłości) wyznacza poziom kapitału na głowę w stanie ustalonym, czyli wyznacza też wielkość oszczędności

# Wnioski

- Niskie  $\Theta$  – nie zależy nam na wygładzaniu konsumpcji w czasie – kapitał rośnie szybko, gospodarka szybko zmierza do stanu ustalonego
- Wysokie  $\Theta$  – zależy nam na wygładzaniu konsumpcji w czasie – konsumujemy stosunkowo dużo, kapitał rośnie wolno, gospodarka wolno zmierza do stanu ustalonego