Model Ramsey'a-Cass'a-Koopmans'a

Dr hab. Joanna Siwińska-Gorzelak

Plan wykładu

- Wprowadzenie do modelu
- Metody matematyczne
- Rozwiązanie modelu
- Wnioski

- Uwaga – na slajdach znajdują się wyłącznie główne elementy; sporo wyjaśnień jest omawianych podczas wykładu, natomiast nie ma ich na slajdach

Wprowadzenie do modelu

- W modelu Solowa stopa oszczędności była dana, co jest pewną wadą modelu (pomimo, że w długim okresie okazuje się całkiem rozsądnym założeniem)
- Model RCK zakłada, że stopa oszczędności jest zmienną wybieraną przez gospodarstwa domowe w procesie optymalizacji (czy stopa oszczędności zmienia się wraz z dochodem?)
- Gospodarka jest nadal zamknięta
- Dla ułatwienia załóżmy, że brak jest postępu technicznego, czyli A jest stałe
- Załóżmy też stałe tempo wzrostu liczby ludności, równe n

$$L_t = L_o e^{nt}$$

- Pomijamy subskrypty czasu (zamiast x_t piszemy x)

Gospodarstwa domowe

- Gospodarstwa domowe dostarczają na rynek pracę w zamian za płacę *w*, konsumują oraz oszczędzają
- Horyzont gospodarstwa domowego jest nieskończony
- Gospodarstwo domowe maksymalizuje użyteczność, gdzie c to konsumpcja na głowę:

$$U = \int_0^\infty \{u[c(t)]e^{-\rho t}e^{nt}\}dt$$

$$\rho > 0 \qquad \rho > n$$

$$u'(c) > 0 \qquad u''(c) < 0$$

$$\lim_{c \to 0} u'(c) = \infty \qquad \lim_{c \to \infty} u'(c) = 0$$

Gospodarstwo domowe

- G.D. oszczędza i gromadzi aktywa A (ograniczenie budżetowe)

$$\dot{A} = rA + wL - C$$

- ..i w ujęciu na głowę (na głowę)

$$\dot{a} = w + ra - c - na$$

- Gra Ponziego (piramida finansowa) jest wykluczona

Metody matematyczne

- Napotykamy tu na problem dynamicznej optymalizacji w czasie ciągłym – metodą do wykorzystania jest Hamiltonian
- Musimy określić zmienne kontroli (które „wybieramy” lub też „kontrolujemy”) i stanu (które zależą od naszego wyboru, ale my ich bezpośrednio nie wybieramy)
- Musimy zmaksymalizować pewną funkcję, która zależy od obu tych zmiennych, biorąc pod uwagę „zachowanie” zmiennej stanu
- Dokładniej…

Metody matematyczne

$$\max_{c(t)} = \int_0^T v(k_t, c_t)\,dt,$$

- Przy warunkach :

$$\dot{k} = g(k_t, c_t)$$

$$k_{t=0} = 0$$

$$k_{t=T} e^{-rT} \geq 0$$

Hamiltonian - procedura

- Krok pierwszy – konstruujemy Hamiltonian

$$H = v(k,c) + \lambda * g(k,c)$$

- Krok drugi –liczymy pochodną po zmiennej kontrolnej, którą przyrównujemy do zera

$$\frac{dH}{dc} = 0$$

- Krok trzeci liczymy pochodną po zmiennej stanu i przyrównujemy ją do minus pochodnej mnożnika po czasie

$$\frac{dH}{dk} = -\dot{\lambda}$$

- Krok czwarty – warunek transwersalności

$$\lim_{t \to \infty} \lambda_t k_t = 0$$

Powróćmy do gospodarstwa domowego

- Krok pierwszy – konstruujemy Hamiltonian:

$$H = u(c)e^{(n-\rho)t} + \lambda(w + (r-n)a - c)$$

- Krok drugi –liczymy pochodną po zmiennej kontrolnej, którą przyrównujemy do zera

$$\frac{dH}{dc} = u'(c)e^{(n-\rho)t} - \lambda = 0$$

- Krok trzeci liczymy pochodną po zmiennej stanu i przyrównujemy ją do minus pochodnej mnożnika po czasie

$$\frac{dH}{da} = -\lambda(r+n) = \dot{\lambda}$$

- Krok czwarty – warunek transwersalności

$$\lim_{t \to \infty} \lambda_t a_t = 0$$

Funkcja użyteczności gospodarstwa domowego

- Załóżmy, ze funkcja użyteczności gospodarstwa domowego ma konkretną postać:

$$u(c_t) = \frac{c_t^{1-\theta} - 1}{1-\theta} \qquad \theta > 0; \theta \neq 1$$

- Z czego wynika:

$$H = \frac{c_t^{1-\theta} - 1}{1-\theta} e^{(n-\rho t)} + \lambda(w + (r-n)a - c)$$

- Policzmy, co trzeba

$$\frac{dH}{dc} = e^{(n-\rho)t} \frac{(1-\theta)c^{-\theta}(1-\theta)}{(1-\theta)^2} - \lambda = e^{(n-\rho)t} c^{-\theta} - \lambda = 0$$

$$(1) \qquad e^{(n-\rho)t} c^{-\theta} = \lambda$$

$$\frac{dH}{da} = \lambda(r-n) = -\dot{\lambda}$$

$$\frac{\dot{\lambda}}{\lambda} = -r + n$$

Obliczenia

$$(1) \qquad e^{(n-\rho)t} c_t^{-\theta} = \lambda_t \Rightarrow \qquad (2)(n-\rho)e^{(n-\rho)t} c_t^{-\theta} + e^{(n-\rho)t}(-\theta) c_t^{-\theta-1} \dot{c} = \dot{\lambda}$$

$$podzielmy(2) \quad przez \quad (1)$$

$$(n-\rho) - \theta \frac{\dot{c}}{c} = \frac{\dot{\lambda}}{\lambda}$$

- Podstawiamy:

$$-r + n = -\rho + n - \theta \frac{\dot{c}}{c}$$

$$\frac{\dot{c}}{c} = \frac{-r+\rho}{-\theta}$$

$$\boxed{\frac{\dot{c}}{c} = \frac{r-\rho}{\theta}}$$

Firmy

- Funkcja produkcji jest neoklasyczna

$$Y = F(K, N)$$

- Firmy maksymalizują zysk

$$\Pi = \int_{t=0}^{\infty} e^{-rt} F(K, N) - wL - RK$$

$$R = r + d$$

- Wiemy, że to oznacza:

$$\frac{dF}{dK} = MPK = R$$

$$\frac{dF}{dN} = MPN = w$$

- W wielkościach per capita

$$Y = Nf(k) = Nf\left(\frac{K}{N}\right)$$

$$\frac{dY}{dK} = Nf'(k)\frac{1}{N} = f'(k)$$

$$\frac{dY}{dN} = f(k) + Nf'(k)\frac{-K}{N^2} = f(k) - f'(k)k$$

Rynki

- Rynki łączą gospodarstwa domowe i firmy;
- Skoro gospodarka jest zamknięta, to

$$a_t = k_t$$
$$ra_t = (R - d)k_t$$

- Z tego wynika, że

$$\dot{k} = Rk + w - dk - nk - c$$
$$\dot{k} = f'(k) * k + f(k) - f'(k) * k - (d+n)k - c$$
$$\dot{k} = f(k) - c - (d+n)k$$

Mamy więc rozwiązanie

$$\frac{\dot{c}}{c} = \frac{1}{\theta}\left(R - d - \rho\right) = \frac{1}{\theta}\left(r - \rho\right) \qquad oraz$$

$$\dot{k} = f(k) - c - (d + n)k$$

Ciężko powiedzieć, co z tego wynika tak na pierwszy rzut oka....

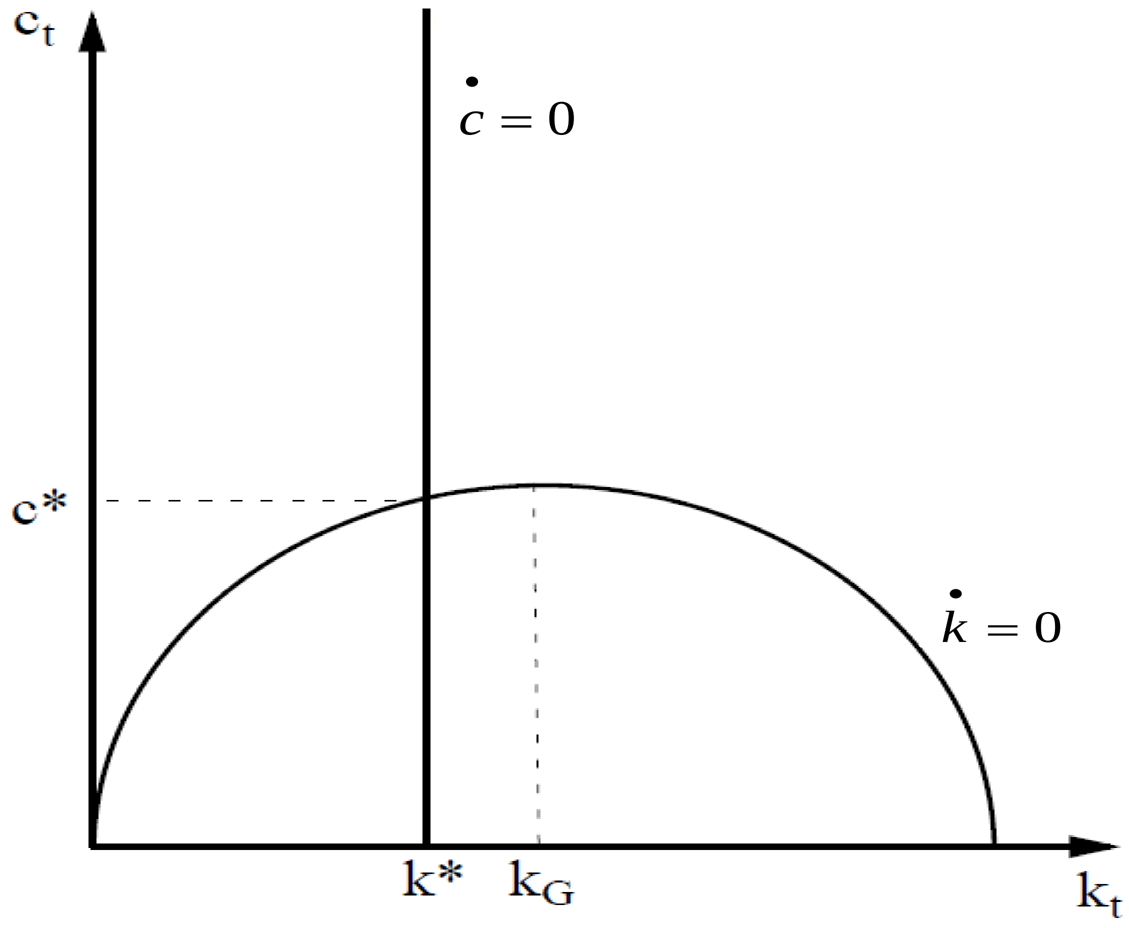
Diagram fazowy

- Określmy, kiedy c oraz k nie rosną i spróbujmy narysować..

$$\frac{\dot{c}}{c} = 0 \Rightarrow r = \rho$$

$$\dot{k} = 0 \Rightarrow y - c = (d + n)k \Rightarrow c = y - (d + n)k$$

Diagram fazowy



Rysunek zaczerpnięty z wykładów dr hab. Marcina Kolasy
http://web.sgh.waw.pl/~mkolas/EARF/Ramsey.pdf

Diagram fazowy

- Skąd wiemy, że linia „stabilnej konsumpcji” przetnie dzwon „stabilnego kapitału” na lewo od szczytu?
- Z rachunków…

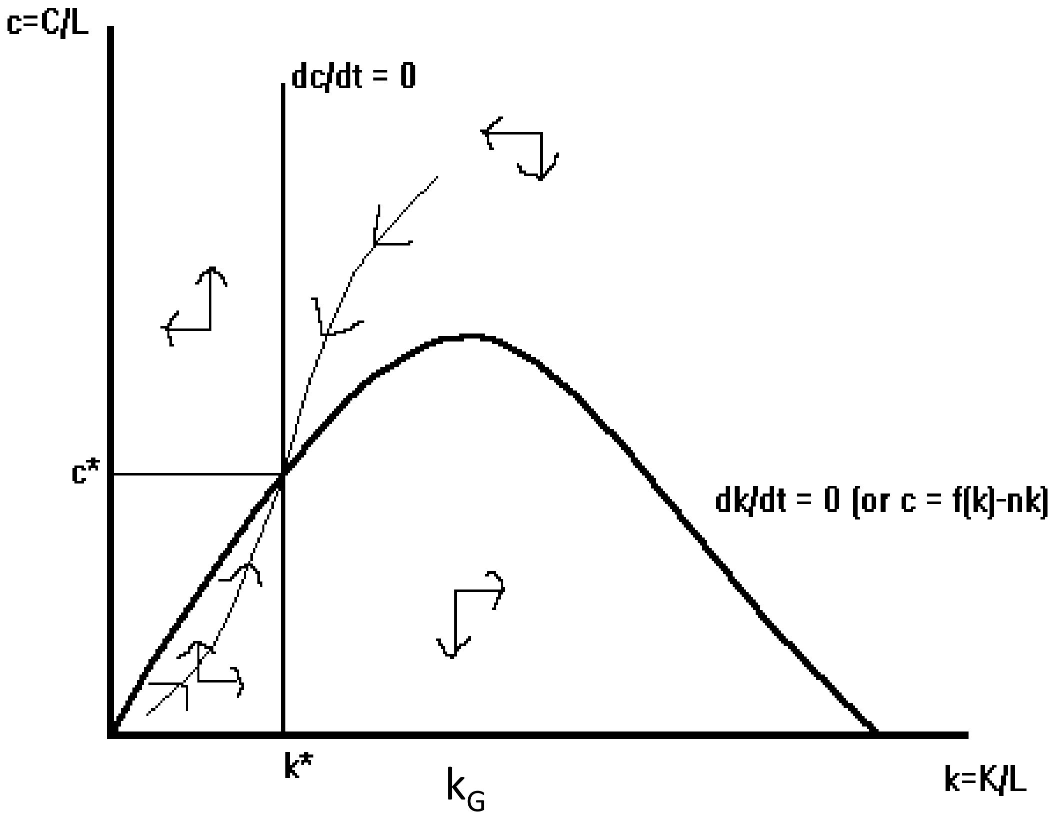
$$\dot{c} = 0 \qquad gdy$$
$$f'(k) = \rho + d$$

$$\dot{k} = 0 \qquad gdy$$
$$c = f(k) - (d+n)k$$
$$\frac{dc}{dk} = 0 \Rightarrow f'(k_G) = d + n$$

$$wiemy, że$$
$$\rho > n$$

…czyli wielkość kapitału, wyznaczająca linię „stabilnej konsumpcji” musi być mniejsza niż kapitał, który wyznacza maksymalną konsumpcję, gdy kapitał jest stabilny, czyli k_G

Diagram fazowy – dynamika



Wnioski

- Kraj osiągnie stan ustalony
- Kiedy kraj zmierza do stanu ustalonego, to stopa oszczędności będzie się zmieniać, co wyznacza kształt ścieżki siodłowej, który z kolei zależy od θ
- Wielkość ρ (dyskonto przyszłości) wyznacza poziom kapitału na głowę w stanie ustalonym, czyli wyznacza też wielkość oszczędności

Wnioski

- Niskie ϴ – nie zależy nam na wygładzaniu konsumpcji w czasie – kapitał rośnie szybko, gospodarka szybko zmierza do stanu ustalonego
- Wysokie ϴ – zależy nam na wygładzaniu konsumpcji w czasie – konsumujemy stosunkowo dużo, kapitał rośnie wolno, gospodarka wolno zmierza do stanu ustalonego

Podsumowanie intuicyjne

- Funkcja produkcji jest neoklasyczna , czyli na przykład

$$Y = K^{\alpha}(AN)^{1-\alpha} \qquad A = 1$$

$$y = k^{\alpha} \quad gdzie$$

$$y = \frac{Y}{N} \qquad k = \frac{K}{N}$$

- Dla ułatwienia zakładamy brak postępu technicznego
- Wnioski są bardzo podobne do tych wynikających z modelu Solowa:
  - Gospodarka osiągnie stan ustalony, w którym kapitał na głowę i produkcja na głowę są stałe

Podsumowanie intuicyjne

- Chcemy się przekonać, jak będą się kształtowały oszczędności i konsumpcja gospodarstw domowych
- Gospodarstwa domowe maksymalizują użyteczność, wtedy, gdy

$$\frac{\dot{c}}{c} = \frac{r-\rho}{\theta}$$

- ..konsumpcja będzie rosła czyli kiedy „wynagrodzenie” za oszczędzanie jest wyższe niż stopa dyskontowa
- ..obecnie ograniczamy konsumpcję (oszczędzamy), za to w przyszłości konsumujemy więcej

Podsumowanie intuicyjne

- Gospodarstwa domowe oszczędzają; fundusze te są wykorzystane przez przedsiębiorstwa na inwestycje
- Przedsiębiorstwa inwestują, gdyż chcą osiągnąć optymalną wielkość kapitału , obliczoną dzięki :

$$\frac{dY}{dK} = \frac{dy}{dk} = R = r + d$$

- Obie strony traktują stopę procentową r jako daną; jest ona jednak kształtowana w wyniku równowagi pomiędzy popytem na fundusze (przedsiębiorstwa), a ich podażą (gospodarstwa domowe)

Podsumowanie intuicyjne

- W rezultacie stopa procentowa r równa jest krańcowemu produktowi kapitału plus deprecjacji , a więc

$$\frac{\dot{c}}{c} = \frac{r - \rho}{\theta} = \frac{f'(k) - d - \rho}{\theta}$$

- To równanie jest uniwersalne – będziemy go wielokrotnie używać

Podsumowanie intuicyjne

- W przypadku modelu RCK widzimy, że ponieważ $f'(k)$ jest coraz mniejszy, kiedy rośnie kapitał, to istnieje taka wielkość kapitału, dla której tempo wzrostu konsumpcji na głowę będzie równe zero.
- Jednocześnie, dla każdej wielkości kapitału, istnieje określona wielkość konsumpcji (i odpowiadającym jej oszczędnościom), która sprawi, że kapitał na głowę będzie stabilny (nie będzie ani przyrastał, a ni spadał)
- Ponieważ wszelkie inne rozwiązania są nieoptymalne, to maksymalizujące użyteczność gospodarstwa domowe długim okresie wybiorą właśnie tę stabilną wielkość konsumpcji i kapitału (stan ustalony)