Joanna Siwińska-Gorzelak

Makroekonomia zaawansowana; grudzień 2018

Zbiór zadań wraz z odpowiedziami –przygotowanie przed egzaminem

We wszystkich zadaniach zakładamy, że gospodarstwa domowe są opisane dokładnie tak, jak w modelu Ramseya, który był analizowany na wykładzie, czyli: pełna racjonalność, nieskończony horyzont czasowy; funkcja użyteczności zależy wyłącznie od sumy zdyskontowanej konsumpcji i jest dana wzorem

$$U = \int_0^{\infty} \{u(c_t)e^{-\rho t}e^{nt}\}dt$$

$$\rho > 0 \qquad \rho > n$$

oraz

$$u(c_t) = \frac{c_t^{1-\theta} - 1}{1-\theta} \qquad \theta > 0; \theta \neq 1$$

Zanim przystąpicie Państwo do rozwiązywania zadań, powtórzcie sobie proszę wyprowadzenie wzoru na tempo wzrostu konsumpcji z wykładu 2&3. Nie przestawiam tego wyprowadzenia w rozwiązaniach (bo zostało ono omówione na wykładzie).

Treść zadania – na czarno; odpowiedzi – na zielono.

Zadanie 1. Wzrost poziomu technologii a stan ustalony w modelu Ramseya.

Załóżmy, że funkcja produkcji ma postać Cobb-Douglasa

$$Y = AK^{\alpha}L^{1-\alpha}$$

Gdzie A oznacza poziom technologii, K – kapitał; L – siła robocza (równa liczbie ludności)

a) Zapisz funkcję produkcji na jednostkę pracy

$$y = Ak^{\alpha}; \quad k = \frac{K}{L}; y = \frac{Y}{L}$$

b) Wykorzystując model Ramseya, zapisz wzór opisujący tempo wzrostu konsumpcji oraz tempo wzrostu kapitału na jednostkę pracy. Jak na stan ustalony wpływa jednorazowy wzrost technologii A?

Zapiszmy równania na tempo wzrostu konsumpcji (proszę się upewnić, że rozumiecie Państwo, co oznaczają parametry). Pamiętajmy, że R równa się krańcowemu produktowi kapitału na pracownika.

$$\frac{\dot{c}}{c} = \frac{R - d - \rho}{\theta} = \frac{A\alpha k^{\alpha-1} - d - \rho}{\theta}$$

Zapiszmy równanie na przyrost kapitału na pracownika.

$$\dot{k} = Ak^{\alpha} - c - (d+n)k$$

$$\frac{\dot{k}}{k} = Ak^{\alpha-1} - \frac{c}{k} - (d+n)$$

Widzimy, ze zarówno przyrost tempo wzrostu konsumpcji, jak i kapitału nie są stałe, tylko maleją wraz ze wzrostem kapitału na głowę. Istnieje więc stan ustalony, w którym zarówno kapitał, jak i konsumpcja na głowę są stałe. Sprawdźmy to

Aby stwierdzić, czy istnieje stan ustalony i jak zmienia się pod wpływem A, musimy naszkicować wykres fazowy; a więc znaleźć kombinację c i k, dla których

$$\dot{k} = 0 \; oraz \; \dot{c} = 0$$

Posiłkując się wykresem fazowym stwierdzamy, że stan ustalony istnieje. Stwierdzamy, że:

$$\dot{c} = 0 \; gdy \; A\alpha k^{\alpha-1} = d + \rho$$

$$k = \left(\frac{d+\rho}{A\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}} = \left(\frac{A\alpha}{d+\rho}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

Oraz

$$\dot{k} = 0 \quad gdy \quad Ak^{\alpha} - (d+n)k = c$$

Wzrost technologii oznacza więc przesunięcie (pół)prostej $\dot{c} = 0$ w prawo, czyli w stanie ustalonym zasób kapitału na głowę rośnie.

Wzrost technologii oznacza również zmianę położenia krzywej wyznaczającej stabilny kapitał (krzywa w kształcie dzwonu). Wzrost A ciągnie ją w górę oraz przesuwa jej wierzchołek w prawo.

Odpowiedź: wzrost A powoduje wzrost konsumpcji na głowę i kapitału na głowę w stanie ustalonym. Nie wpływa jednak na długookresowe tempo wzrostu produkcji na głowę, które wynosi zero.

c) Załóżmy teraz, że funkcja produkcji na głowę ma postać: y= Ak (jest liniowa). Ile wynosi tempo wzrostu produkcji na głowę?

$$\frac{\dot{c}}{c} = \frac{R - d - \rho}{\theta} = \frac{A - d - \rho}{\theta}$$

Tempo wzrostu wszystkich zmiennych – konsumpcji, kapitału i produkcji na głowę jest stałe. Nie ma więc stanu ustalonego. Wzrost A w sposób trwały zwiększa tempo wzrostu.

Zadanie 2. Tempo wzrostu w modelu learning-by-doing.

Załóżmy, że wraz ze wzrostem zasobu kapitału rośnie jednocześnie wiedza, jak go wykorzystywać. Jest to założenie słynnego modelu *learing-by-doing* Romera z lat 80-tych

Dokładniej, przyjmijmy, że funkcja produkcji dla firmy i

$$Y_i = K_i^{\alpha}(A_i L_i)^{1-\alpha}$$

Gdzie A_i jest zasobem wiedzy w firmie. Zakładamy stały zasób pracy L_i.

Ponieważ wiedza jest dobrem publicznym, to z wiedzy „wytworzonej" w danej firmie mogą korzystać wszyscy, co oznacza:

$$A_i = A$$

To z kolei oznacza, że funkcja produkcji dla firmy ma postać:

$$Y_i = K_i^{\alpha}(A L_i)^{1-\alpha}$$

Zakładamy też, ze wzrost zasobu kapitału (inwestycje) prowadzi do proporcjonalnego wzrostu wiedzy A, więc obecny stan wiedzy A_t jest rezultatem sumy inwestycji wszystkich firm do tej pory...

$$A_t = \int_{t=1}^{\infty} \varphi \dot{K}_t \, dt = \varphi K_t$$

... czyli jest proporcjonalny do zasobu kapitału w gospodarce.

a) Korzystając z faktu, że poziom wiedzy jest proporcjonalna do aktualnego zasobu kapitału, zapisz funkcję produkcji dla firmy i oraz funkcję produkcji dla całego kraju. Przyjmujemy, że firma traktuje ogólny zasób wiedzy (równy zasobowi kapitału) jako niezależny od jej decyzji (egzogeniczny).

Produkcja dla pojedynczej firmy:

$Y_i = K_i^{\alpha}(\varphi K L_i)^{1-\alpha}$ (zauważ różnicę pomiędzy K_i – kapitał w firmie i oraz K – całkowity kapitał w gospodarce)

... oraz dla całej gospodarki. Zauważmy, że f-cja jest liniowa względem K

$Y = K^{\alpha}(KL)^{1-\alpha} = K(\varphi L)^{1-\alpha}$

b) Zapisz powyższe funkcje produkcji, w postaci per capita.

Dzielimy lewą i prawą stronę przez L; wielkości *per capita* zapisujemy; jako małe litery: k=K/L; y= Y/L

$y_i = k_i^{\alpha}(\varphi K)^{1-\alpha}$ (indywidualna funkcja produkcji)

$$y = \frac{K^{\alpha}(\varphi KL)^{1-\alpha}}{L^{\alpha}L^{1-\alpha}} k^{\alpha}(\varphi L)^{1-\alpha}k^{1-\alpha} = k(\varphi L)^{1-\alpha}$$

c) Zapisz warunek maksymalizacji zysku firmy i zmaksymalizuj względem zasobu kapitału na głowę w firmie k_i

Zysk firmy to:

$$\pi_i = k_i^{\alpha}(\varphi K)^{1-\alpha} - w - Rk_i$$

Maksymalizacja oznacza (firma traktuje K jako dany):

$$\frac{d\pi_i}{dk_i} = \alpha k_i^{\alpha-1}(\varphi K)^{1-\alpha} = R$$

Ponieważ K=k*L oraz wszystkie firmy są takie same, to możemy zapisać:

$$\alpha k^{\alpha-1}(\varphi kL)^{1-\alpha} = \alpha(\varphi L)^{1-\alpha} = R$$

d) Zapisz optymalne tempo wzrostu konsumpcji per capita, używając rezultatu z c). Czy dynamika konsumpcji jest stała? Co można stwierdzić na temat tempa wzrostu produktu per capita?

$$\frac{\dot{c}}{c} = \frac{r-\rho}{\theta} = \frac{r-\rho}{\theta} = \frac{\alpha(\varphi L)^{1-\alpha} - d - \rho}{\theta}$$

Tempo wzrostu konsumpcji per capita jest stałe; wyznacza ono też tempo wzrostu produkcji per capita. Zauważmy, że stałe tempo wzrostu wynika z faktu, że funkcja produkcji jest liniowa względem kapitału. Występuje też efekt skali (L) – większe L przyspiesza tempo wzrostu

Zadanie 3 – postęp techniczny jak skutek sił rynkowych, wpływ podatków

Załóżmy dwa sektory wytwarzające dobra i usługi – sektor dóbr i usług konsumpcyjnych (D&U) oraz sektor wytwarzający dobra pośrednie – nazwijmy go sektorem badań i rozwoju (B&R).

Sektor dóbr i usług produkuje dobra z godnie z funkcją:

$$Y = AL^{1-\alpha}\sum_{j=1}^{N} X_j^{\alpha}$$

gdzie „X_j" to dobra pośrednie typu „j". Każdy typ „j" to nowy wynalazek, który powstaje w sektorze B&R. Wynalazca nowego typu „j" – ma patent, więc tylko ona może produkować to dobro. Wynalazca jest więc monopolistą w produkcji danego typu j. N oznacza ilość wynalazków (ilość j), a wzrost N równoważny jest z postępem technicznym

Wiemy, że firmy w sektorze D&U kupią od sektora B&R określoną ilość dobra X z każdej linii „j" – ilość ta ustalona jest w taki sposób, by zmaksymalizować zysk firm D&U, biorąc pod uwagę cenę dobra X, wyznaczoną przez monopolistę-wynalazcę. Cena dobra X to 1/α (wyjaśnienie tej ceny zostało podane na slajdach do wykładu 8.

Przyjmijmy, że ilość dobra X, którą po powyższej cenie chcą kupić firmy z sektora D&U równa jest F (możemy tę wielkość obliczyć, ale do celów tego zadania nie musimy – ale proszę się upewnić, że wiecie Państwo, jak to zrobić). Koszt stworzenia wynalazków jest stały i równy η (to znaczy trzeba przeznaczyć η zasobów, żeby stworzyć nową linię j), a koszt wytworzenia każdej kolejnej jednostki X z danej linii j(jak już linia j została wynaleziona) równa jest 1.

Przyjmijmy, że rząd nakłada podatek równy pewnej stałej T na zyski ze sprzedaży dóbr X (sprzedawcą jest wynalazca, czyli firma sektra R&D, kupującym jest sektor D&U). Podatek kwotowy T pomniejsza zysk ze sprzedaży dobra X (nie zmienia on jednak ani ceny, ani ilości sprzedanych dóbr) Jakie będzie to miało konsekwencje dla tempa wzrostu produkcji na głowę?

Najpierw musimy obliczyć zysk wynalazcy ze sprzedaży w danym okresie:

$$\left(\frac{1}{\alpha}-1\right)*F-T=\frac{1-\alpha}{\alpha}F-T$$

Następnie obliczamy dzisiejszą zdyskontowaną wartość zysku od teraz aż do nieskończoności

$$\pi(t)=\int_t^{\infty}\left(\left[\frac{1-\alpha}{\alpha}F-T\right]e^{-rt}\right)dt=\frac{1-\alpha}{\alpha}F-T\int_t^{\infty}e^{-rt}dt$$

Wiemy, że jest to równoznaczne z:

$$\pi(t)=\{\frac{1-\alpha}{\alpha}F-T\}\frac{1}{r}$$

Ponieważ do sektora B&R każdy może „wejść", zostać wynalazcą i otrzymywać zyski, to warunkiem równowagi jest zrównanie powyższego zysku z kosztami wynalezienia danego j, które to wynoszą η. Dostosowanie stopy procentowej gwarantuje tę równość.

Na tej podstawie obliczamy r, a mając r, możemy obliczyć tempo wzrostu.

$$\left[\frac{1-\alpha}{\alpha}F-T\right]\frac{1}{r}=\eta$$

$$\left[\frac{1-\alpha}{\alpha}F-T\right]\frac{1}{\eta}=r$$

$$\gamma=\frac{\dot{c}}{c}=\frac{r-\rho}{\theta}=\frac{\frac{\frac{1-\alpha}{\alpha}F-T}{\eta}-\rho}{\theta}$$

Wniosek :Ponieważ podatki zmniejszą zyski, to obniżają tempo wzrostu produkcji na głowę.

Motorem wzrostu jest działalność sektora B&R. Jest to jednocześnie sektor, który absorbuje fundusze oszczędzających (przypomnijmy – wynalazki wymagają nakładów) i generuje stopę zwrotu w postaci r („nagroda" za oszczędzanie). Nałożenie podatków obniża przychody tego sektora, a więc obniżają się bodźce skłaniające do oszczędzania. W efekcie spadają oszczędności; a więc ilość dostępnych funduszy, co wpływa ujemnie na powstawanie wynalazków, a więc tempo wzrostu.

Zadanie 4. Rząd w modelu Ak

Załóżmy, że funkcja ma postać:

$$y_t=k^{\alpha}g^{1-\alpha}$$

Gdzie g to produktywne wydatki rządowe na pracownika. Jednak (inaczej niż na wykładzie), wydatki rządowe mogą być produktywne i wtedy są oznaczone jako „g" oraz nieproduktywne. Wiadomo, że wydatki produktywne stanowią część μ całkowitych wydatków publicznych *w*, gdzie 0<μ<1. Całkowite wydatki publiczne są dane przez „*w*"; zaś g=μ*w. Budżet rządu jest zawsze zbilnaowany

$$\tau y=w=\frac{g}{\mu}$$

Gdzie ĩ oznacza stopę podatkową. Krańcowy prywatny produkt kapitału pomniejszony jest o wielkość podatków, czyli równy jest $\frac{dy}{dk}(1-\tau)$

Oblicz stopę wzrostu konsumpcji na osobę (*per capita*)? Czy jest ona stała? Co z tego wynika dla tempa wzrostu produkcji na osobę? Co stanie się z tempem wzrostu, gdy udział wydatków produktywnych wydatkach ogółem spadnie?

Wiemy, że:

$$\frac{\dot{c}}{c}=\frac{r-\rho}{\theta}=\frac{R-d-\rho}{\theta}$$

Wiemy także, że maksymalizacja zysku firmy oznacza:

$$\frac{dy}{dk}(1-\tau) = (1-\tau)\alpha k^{\alpha-1} g^{1-\alpha} = R$$

Zastanówmy się teraz, co możemy powiedzieć o g.

$$\tau y = w = \frac{g}{\mu}$$

$$\tau k^{\alpha} g^{1-\alpha} = \frac{g}{\mu}$$

$$\mu \tau k^{\alpha} = g^{\alpha}$$

$$(\mu\tau)^{1/\alpha} k = g$$

Z tego wynika, że

$$(1-\tau)\alpha k^{\alpha-1}(\mu\tau)^{(1-\alpha)/\alpha} k^{1-\alpha} = R$$

$$(1-\tau)\alpha(\mu\tau)^{(1-\alpha)/\alpha} = R$$

Rozumiemy również (proszę się upewnić, że tak jest w istocie), że koszt użytkowania jednostki kapitału dany przez R, jest równy stopie procentowej r oraz stopie deprecjacji, czyli

$$(1-\tau)\alpha(\mu\tau)^{(1-\alpha)/\alpha} = r + d$$

Z tego wynika, że

$$\frac{\dot{c}}{c} = \frac{r-\rho}{\theta} = \frac{(1-\tau)\alpha(\mu\tau)^{(1-\alpha)/\alpha} - d - \rho}{\theta}$$

Spadek udziału wydatków produktywnych μ oznacza spadek tempa wzrostu konsumpcji oraz produkcji na głowę .

Zadanie 5. Koszty wynalazków - na podstawie model Romera (1990);

Uwaga: Zadanie TRUDNE –do poćwiczenia i przemyślenia; natomiast na pewno nic tak trudnego nie będzie na egzaminie

.

Podczas wykładu został zaprezentowany model wzrostu opartego na postępie technicznym, który był zmodyfikowaną wersją artykułu Romer z 1990 roku pod tytułem "*Endogenous technical change*". W tym zadaniu zajmiemy się oryginalnym modelem

Większość założeń jest identyczna do tych, jakie znamy z wykładu.

Zakładamy, ze gospodarka składa się z 2 sektorów – sektora produkującego dobra i usługi (D&U) i sektora badań i rozwoju (B&R).

Funkcja produkcji przeciętnej firmy „i" działającej w sektorze D&U ma postać:

$$Y_i = A{L_i}^{1-\alpha} \sum_{j=1}^{N} X_{i,j}^{\alpha}$$

gdzie „X_j" to dobra pośrednie typu „j". Każdy typ „j" to nowy wynalazek, który powstaje w sektorze B&R. Wynalazca nowego typu „j" – ma patent, więc tylko ona może produkować to dobro – wynalazca jest więc monopolistą w produkcji danego typu j.

Romer zakłada, ze sektor B&R jest pracochłonny, czyli wynalezienie nowego typu j wymaga określonego nakładu pracy.

Dokładniej, Romer zakłada, że pojawianie się nowych wynalazków można opisać wzorem:

$$\dot{N} = \frac{NL_R}{\eta}$$

Czyli tempo wzrostu technologii:

$$\frac{\dot{N}}{N} = \frac{L_R}{\eta}$$

Gdzie η pokazuje ile jednostek pracy L_R trzeba do wynalezienia nowego typu j (gdzie L_R to ilość ludzi pracujących w sektorze B&R, co oznacza, ze w sektorze dóbr i usług pracuje (L-L_R) ludzi, gdzie L to całkowita siła robocza)

Z powyższego wiadomo, że koszt wynalezienia kolejnego typu j to:

$$w\eta/N,$$

gdzie w to płaca, która jest taka sama w obu sektorach D&U oraz B&R. Wynalazki wymagą więc nakładów pracy – stąd koszt płacowy; a iloraz η/N pokazuje, ilu potrzebujemy pracowników do wynalezienia kolejnego typu j

Zauważmy, ze Romer zakłada, że im więcej jest istniejących wynalazków, tym łatwiej wynajdywać nowe (*"standing on the shoulders of giants"*). Uwaga – na wykładzie zakładaliśmy, że ten koszt wynalazków wynosi η.

Jak to obliczaliśmy w czasie wykładu, monopolistyczna cena za każde X_j wynosi

$$P_j = \frac{1}{\alpha}$$

a) **Wyprowadź wzór na funkcję popytu na X_j, oraz podstawiając cenę – ilość dobra X**

ODPOWIEDŹ

Musimy obliczyć ile X_j, będą chciały kupić firmy z sektora D&U. Musimy więc skorzystać z warunku maksymalizacji zysku, gdzie zysk to

$Y_i - PX_{j,i} - wL_i$.

Zysk jest maksymalny, wtedy gdy krańcowy produkt (w tym przypadku X_j) będzie równy cenie.

Obliczamy więc:

$$\frac{dY_i}{dX_{j,i}} = AL_i^{1-\alpha}\alpha X_{j,i}^{\alpha-1} = P_j$$

Żeby obliczyć ilość X_j, zamiast P podstawiamy $1/\alpha$

$$\frac{dY_i}{dX_{j,i}} = AL_i^{1-\alpha}\alpha X_{j,i}^{\alpha-1} = \frac{1}{\alpha}$$

$$AL_i^{1-\alpha}\alpha^2 = X_i^{1-\alpha}$$

$$X_i = A^{\frac{1}{1-\alpha}} L_i \alpha^{\frac{2}{(1-\alpha)}}$$

b) **Jaka jest optymalna wielkość X_j dla całej gospodarki, skoro wiemy, że całkowita siła robocza w sektorze D&U wynosi $L-L_R$**

ODPOWIEDŹ

Wszystkie firmy są takie same, więc możemy obliczyć wielkość X_j dla całej gospodarki zastępując L_i we wzorze powyżej wielkości dla pojedynczej firmy, wielkościami zagregowanymi; a w szczególności ilość pracowników w pojedynczej firmie zastępujemy wielkością siły roboczej w sektorze D&U: $L-L_R$

$$X = A^{\frac{1}{1-\alpha}}(L - L_R)\alpha^{\frac{2}{(1-\alpha)}}$$

Zauważmy, że powyższy wzór wyznacza wielkość każdego X_j

c) **Oblicz dzisiejszą zdyskontowaną wartość zysków, jakie z produkcji X_j czerpie wynalazca (monopolista) – nie uwzględniając na razie kosztów wynalezienia (i zakładając, ze krańcowy koszt produkcji wynosi 1 – tak jak na wykładzie)**

ODPOWIEDŹ

Zysk z produkcji dobra X_j w każdym okresie wynosi :

$$\pi(t) = X(P_j - 1)$$

gdzie P_j to cena dobra X a 1 to koszt krańcowy. Ponieważ monopolista czerpie zyski aż „do końca świata”, to dzisiejsza zdyskontowana wartość zysków to:

$$\pi(t) = \int_t^\infty \quad (A^{\frac{1}{1-\alpha}}(L - L_R)\alpha^{\frac{2}{(1-\alpha)}}\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)e^{-rt})dt$$

Co jest tożsame z:

$$\pi(t) = A^{\frac{1}{1-\alpha}}(L - L_R)\alpha^{\frac{2}{(1-\alpha)}}\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)\int_t^\infty e^{-rt}\,dt$$

d) **Oblicz koszt <u>wynalezienia</u> kolejnej linii j. W tym celu oblicz wysokość płacy w sektorze D&U; ponieważ siła robocza może przepływać między sektorami, to jest również płaca w sektorze R&D.**

Z maksymalizacji zysku firmy w sektorze D&U wynika, że

$$w = (1-\alpha)\frac{Y_i}{L_i}$$

Jeżeli do funkcji produkcji dóbr i usług dla całej gospodarki podstawimy obliczoną w podpunkcie b) wielkość X, to otrzymamy funkcję produkcji postaci (gdzie N to ilość rodzajów (poszczególnych linii) X'ów, czyli ilość „j”

$$Y = A(L - L_R)^{1-\alpha}NA^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}(L - L_R)^{\alpha}\alpha^{\frac{2\alpha}{(1-\alpha)}}$$

Przekształcamy:

$$Y = (L - L_R) \quad N * A^{\frac{1}{1-\alpha}} * \alpha^{\frac{2\alpha}{(1-\alpha)}}$$

Z tego wynika, że płaca to:

$$w = (1-\alpha)\; N * A^{\frac{1}{1-\alpha}} * \alpha^{\frac{2\alpha}{(1-\alpha)}}$$

A koszt wynalazku to:

$$Koszt = (1-\alpha)\; N * A^{\frac{1}{1-\alpha}} * \alpha^{\frac{2\alpha}{(1-\alpha)}}\frac{\eta}{N} = (1-\alpha)A^{\frac{1}{1-\alpha}} * \alpha^{\frac{2\alpha}{(1-\alpha)}}\eta =$$

e) **W równowadze dzisiejszy zdyskontowany zysk z produkcji X'j jest równy kosztowi wynalazku. Na tej podstawie oblicz stopę procentową**

$$A^{\frac{1}{1-\alpha}}(L-L_R)\alpha^{\frac{2}{(1-\alpha)}}\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)\frac{1}{r}=(1-\alpha)A^{\frac{1}{1-\alpha}}*\alpha^{\frac{2\alpha}{(1-\alpha)}}\eta$$

Stopa procentowa musi więc być równa

$$(L-L_R)\left(\frac{1}{\alpha}\right)\frac{1}{r}=\alpha^{-2}\eta$$

$$\frac{(L-L_R)\alpha}{\eta}=r$$

f) Ile wynosi tempo wzrostu w tej gospodarce? :

Wykorzystujemy znany wzór na tempo wzrostu konsumpcji, które jednocześnie jest tempem wzrostu produkcji na głowę

$$\gamma=\frac{\dot{c}}{c}=\frac{r-\rho}{\theta}=\frac{\frac{(L-L_R)\alpha}{\eta}-\rho}{\theta}$$

. Zauważmy jednak, ze powyższe rozwiązanie jest niezadawalające, gdyż wiemy, że zatrudnienie w sektorze B&R, czyli L_R jest zmienną endogeniczną – czyli zależy od optymalizacji aktorów ekonomicznych. Nie jest to zewnętrzny parametr. Powinniśmy więc móc zastąpić tę zmienną egzogenicznymi parametrami. Spróbujmy więc wykorzystać wzór:

$$\frac{\dot{N}}{N}=\frac{L_R}{\eta}$$

Wiemy, że jedynym źródłem wzrostu w tej gospodarce jest postęp techniczny, więc ten wzór wyznacza nam jednocześnie tempo wzrostu produktu na głowę.

$$\gamma=\eta L_R$$

Przekształcamy więc wzór na tempo wzrostu konsumpcji w następujący sposób

$$\theta\gamma=\frac{(L-L_R)\alpha}{\eta}-\rho=\alpha\frac{L}{\eta}-\alpha\frac{L_R}{\eta}-\rho$$

I podstawiamy zamiast

$$\theta\gamma=\frac{(L-L_R)\alpha}{\eta}-\rho=\alpha\frac{L}{\eta}-\alpha\gamma-\rho$$

$$\theta\gamma+\alpha\gamma=\alpha\frac{L}{\eta}-\rho$$

$$\gamma = \frac{(\alpha \frac{L}{\eta} - \rho)}{(\theta + \alpha)}$$

I mamy wzór na tempo wzrostu, który zależy wyłącznie od zmiennych egzogenicznych.