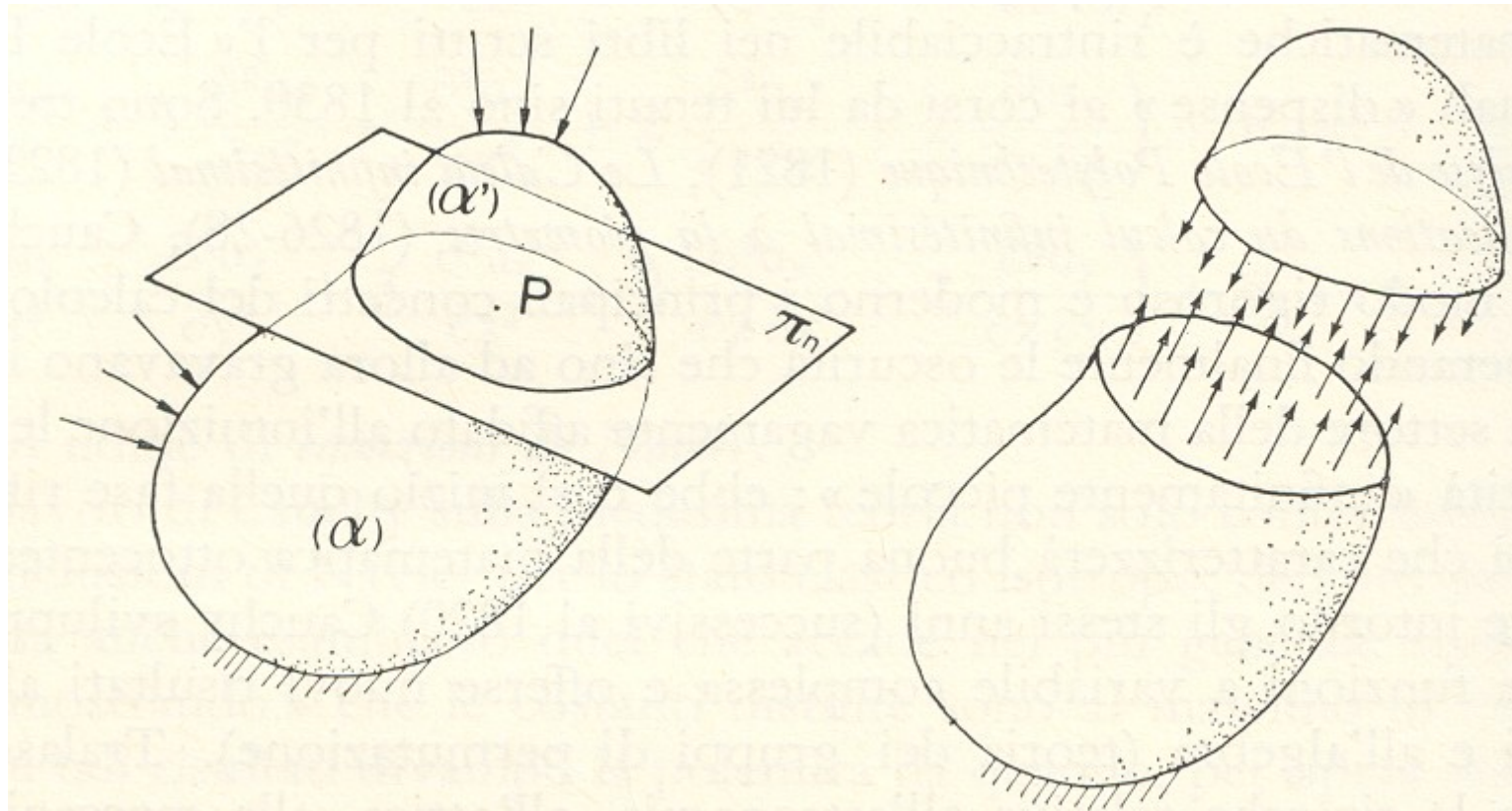


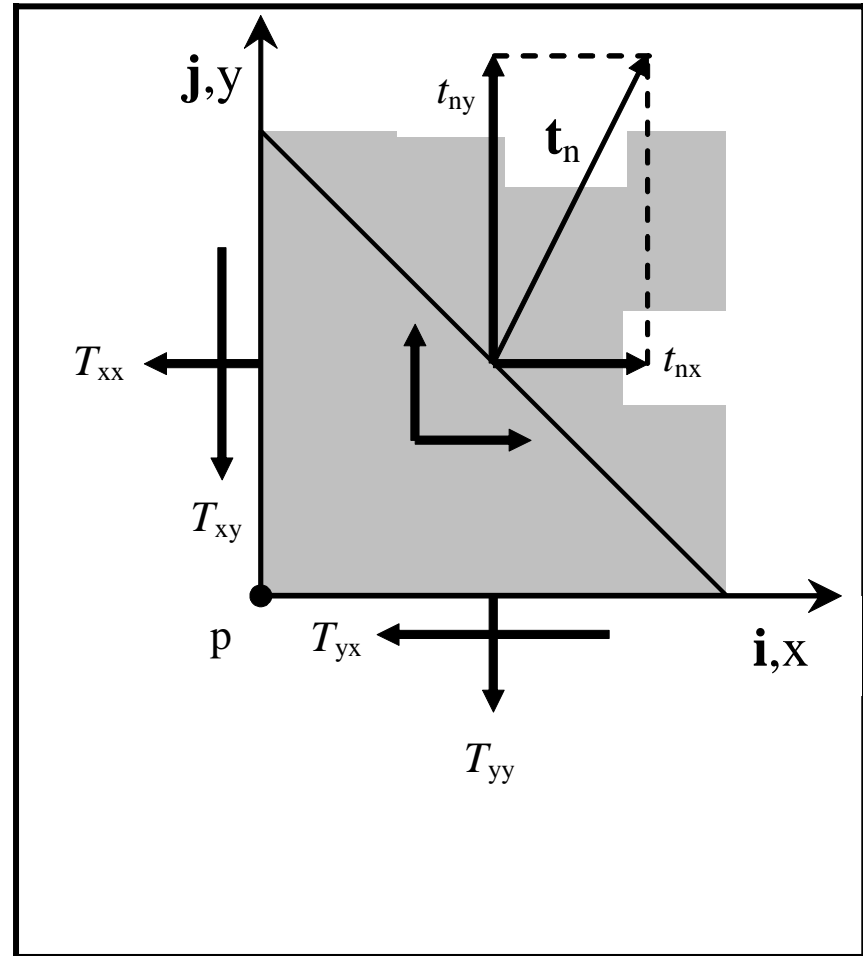
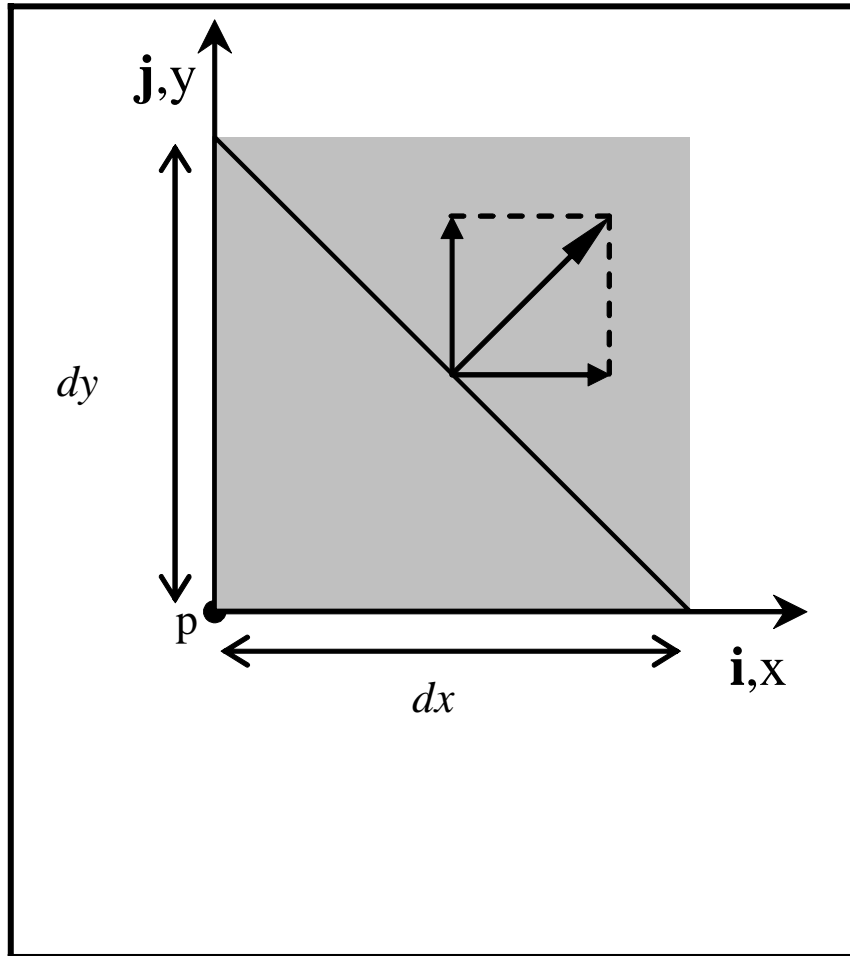
# Resistenza dei BioMateriali

***Sforzo***

# Vettore dello Sforzo



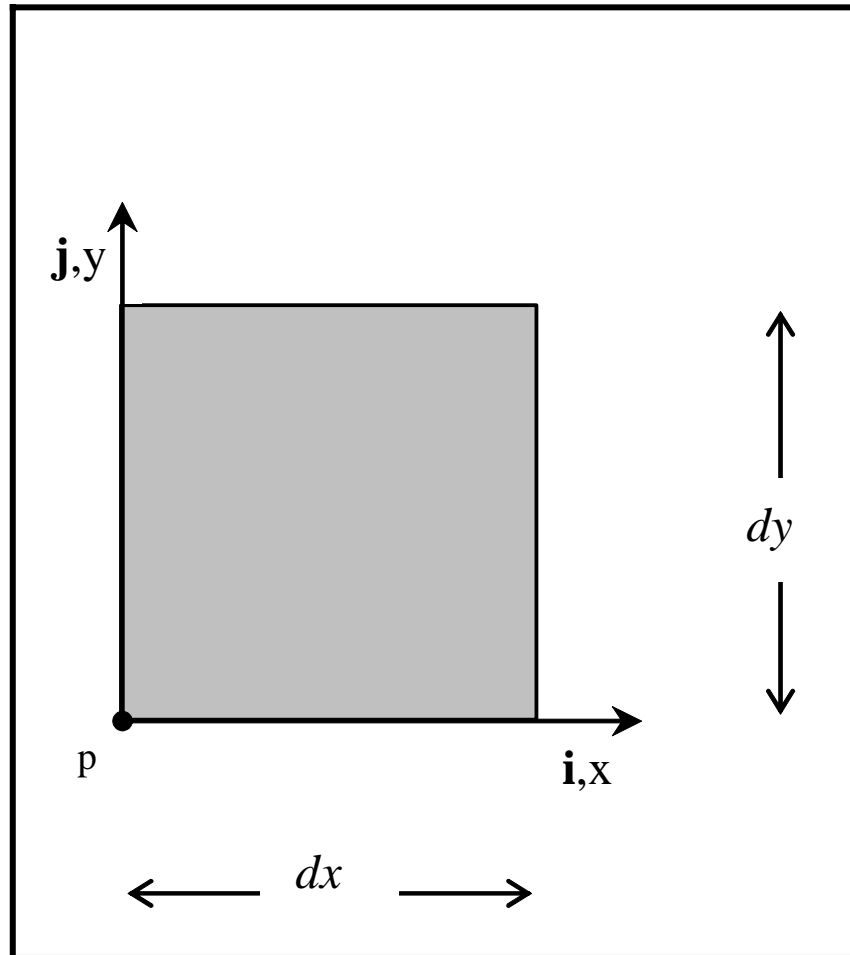
# Tensore dello Sforzo



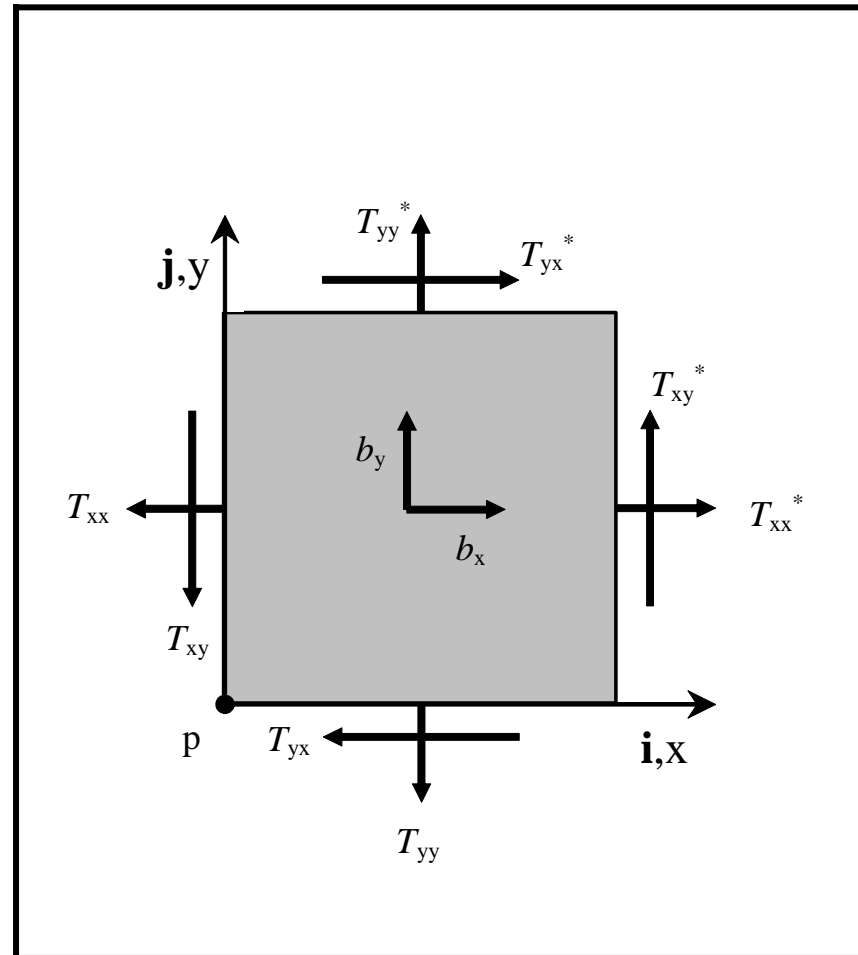
# Relazione Vettore/Tensore di Sforzo

$t_{nx} = T_{xx}n_x + T_{yx}n_y + T_{zx}n_z ;$	Forma scalare
$t_{ny} = T_{xy}n_x + T_{yy}n_y + T_{zy}n_z ,$	“
$t_{nz} = T_{xz}n_x + T_{yz}n_y + T_{zz}n_z .$	“
$t_{ni} = T_{ji}n_j \quad (i = 1,2,3)$	Forma indiciale
$\mathbf{t}_n = \begin{Bmatrix} t_{n1} \\ t_{n2} \\ t_{n3} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{21} & T_{31} \\ T_{12} & T_{22} & T_{13} \\ T_{13} & T_{23} & T_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{Bmatrix} = \mathbf{T}^T \mathbf{n},$	Forma matriciale / tensoriale

# Equazioni locali di Equilibrio



Resistenza dei  
BioMateriali

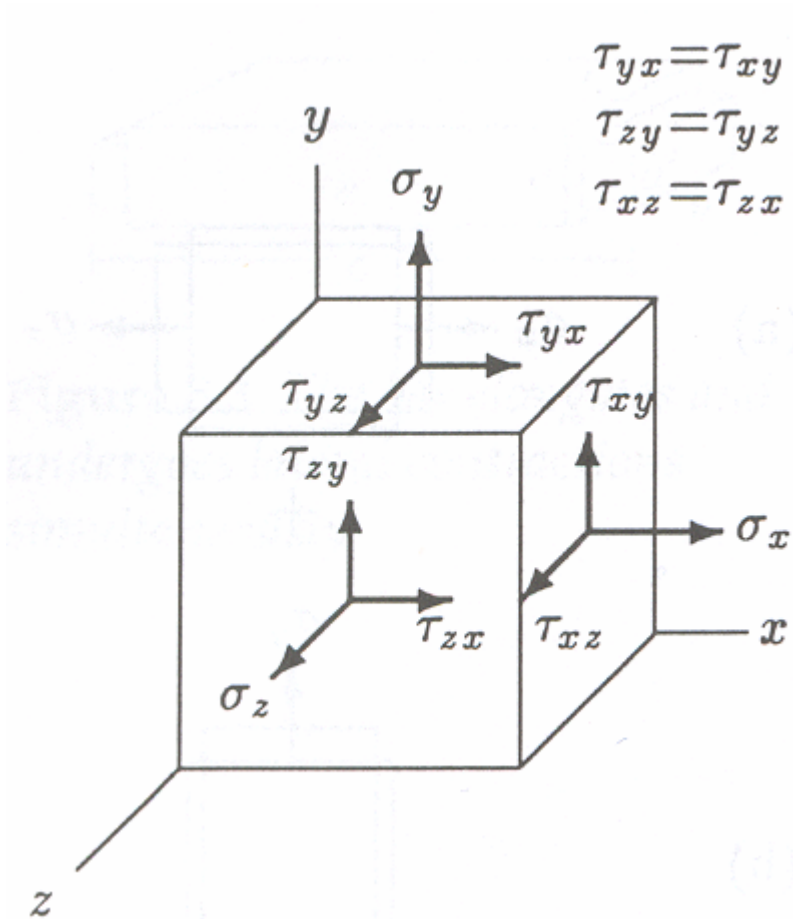


Sforzo R

# Equazioni locali di Equilibrio

$\frac{\partial T_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial T_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial T_{zx}}{\partial z} + b_x = 0,$	Forma scalare
$\frac{\partial T_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial T_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial T_{zy}}{\partial z} + b_y = 0,$	“
$\frac{\partial T_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial T_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial T_{zz}}{\partial z} + b_z = 0.$	“
$T_{ji,j} + b_i = 0 \quad (i = 1,2,3)$	Forma indiciale
$\begin{bmatrix} \partial T_{11}/\partial x_1 & \partial T_{21}/\partial x_2 & \partial T_{31}/\partial x_3 \\ \partial T_{21}/\partial x_1 & \partial T_{22}/\partial x_2 & \partial T_{32}/\partial x_3 \\ \partial T_{13}/\partial x_1 & \partial T_{23}/\partial x_2 & \partial T_{33}/\partial x_3 \end{bmatrix} + \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}; \quad \text{Div}T + \mathbf{b} = \mathbf{0}$	Forma matriciale / tensoriale

# Simmetria del Tensore di Sforzo



$$\tau_{yx} = \tau_{xy}$$

$$\tau_{zy} = \tau_{yz}$$

$$\tau_{xz} = \tau_{zx}$$

$$T_{yx} = T_{xy}$$

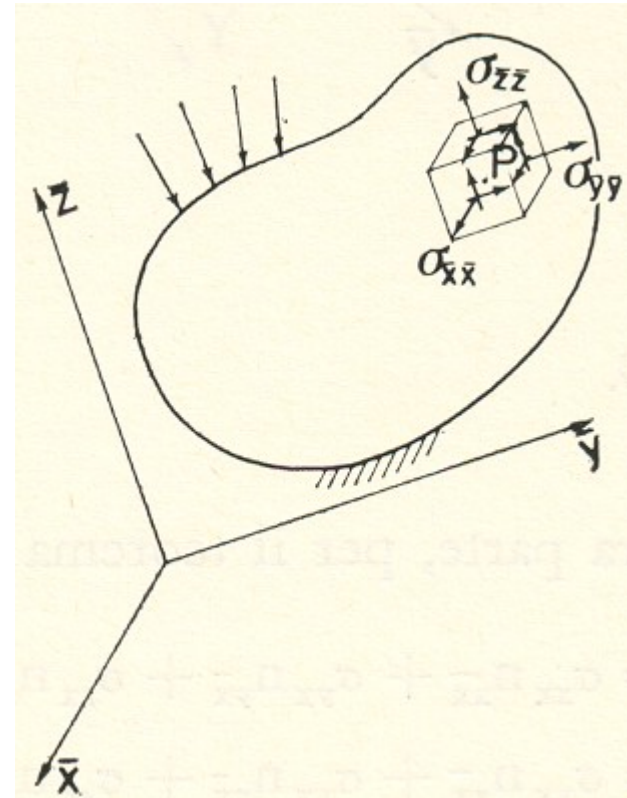
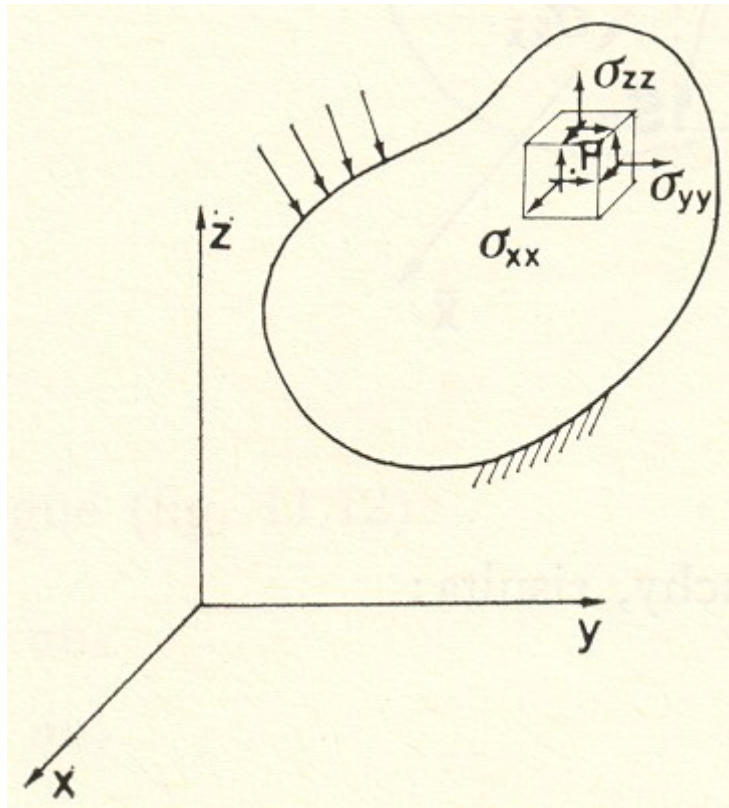
$$T_{zy} = T_{yz}$$

$$T_{xz} = T_{zx}$$

$$T_{ji} = T_{ij} \quad (i=1,2,3)$$

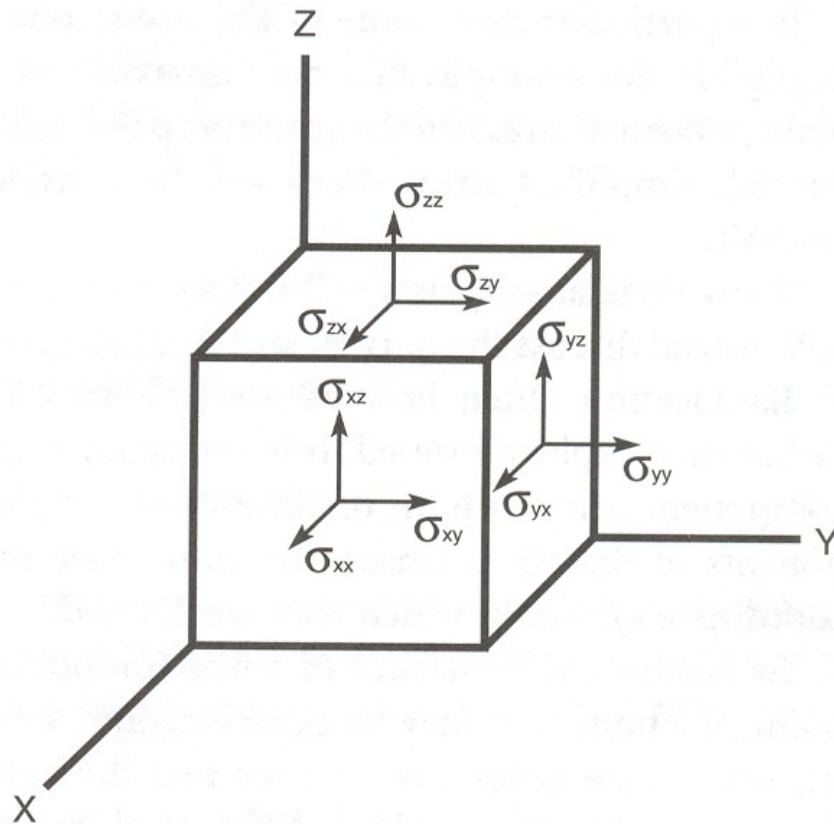
$$T^T = T \quad T \in \text{Sym}$$

# Rotazione del Sistema di Riferimento

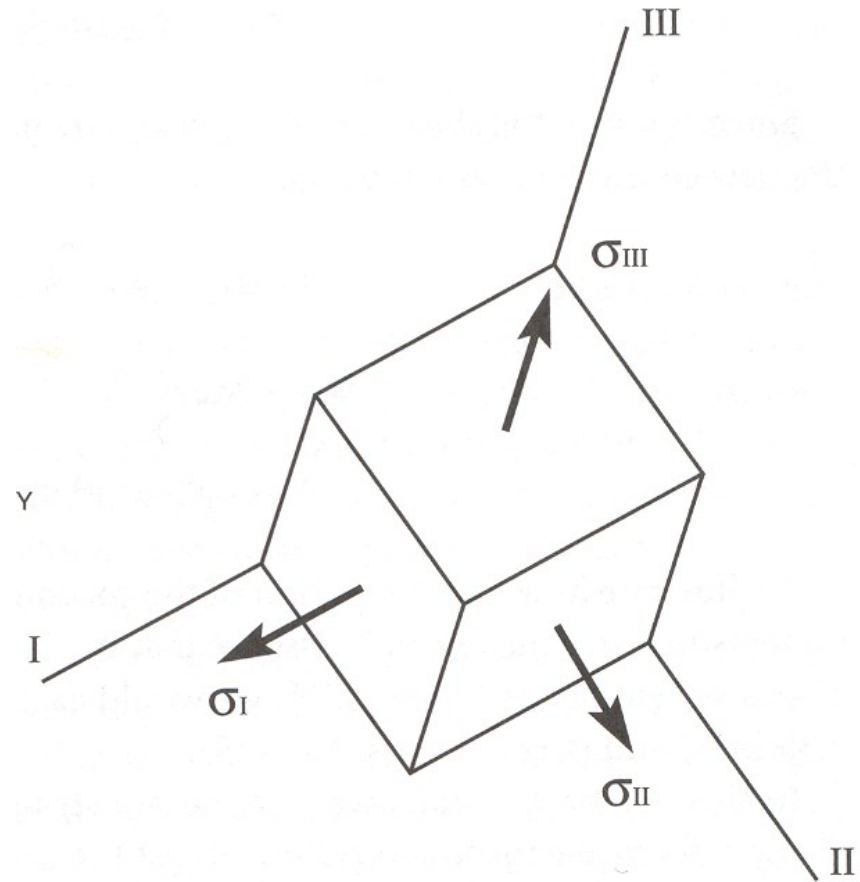




# Sforzi e Direzioni *principali*

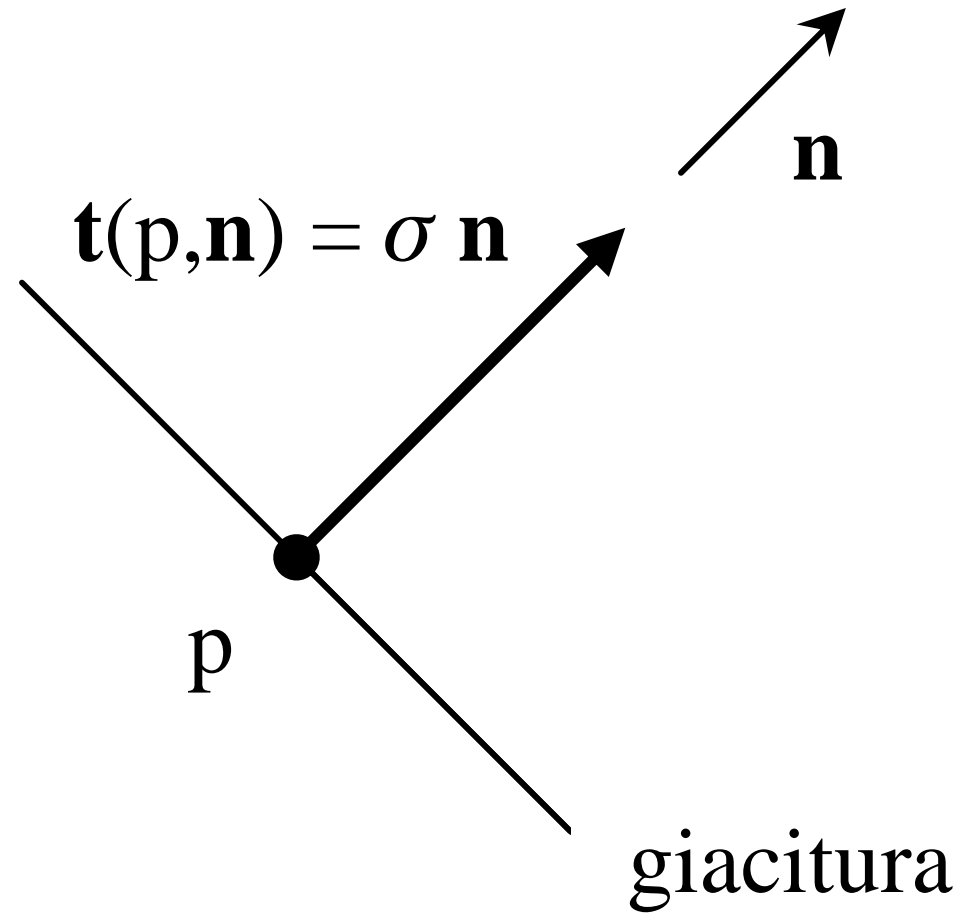


Resistenza dei  
BioMateriali



Sforzo S

# Parallelismo tra Vettore dello Sforzo e Versore della Normale alla Giacitura



# Problema degli *AutoValori*

$\mathbf{t}(p, \mathbf{n}) = \mathbf{T}^T \mathbf{n}$  relazione vettore/tensore dello sforzo

$\mathbf{T}^T \mathbf{n} = \sigma \mathbf{n}$  parallelismo tra  $\mathbf{t}$  e  $\mathbf{n}$ ,  $\sigma \in$



$(\mathbf{T} - \sigma \mathbf{I}) \mathbf{n} = 0$  (sistema omogeneo,  $\mathbf{I}$  = matrice identità)

$\text{Det} (\mathbf{T} - \sigma \mathbf{I}) = 0$  soluzione non banale del sistema omogeneo

$\sigma^3 - I_1 \sigma^2 - I_2 \sigma - I_3 = 0$  equazione caratteristica

# *Invarianti dello Sforzo*

- $I_1 = Tr T = T_{11} + T_{22} + T_{33}$
- $I_2 = \frac{1}{2} (T \cdot T - I_1^2)$
- $I_3 = Det T$
- $T \cdot T = \sum_{ij} T_{ij} T_{ij}$

# Sistema omogeneo di 3 equazioni algebriche in 4 incognite

- $(T_{11} - \sigma) n_1 + T_{12} n_2 + T_{13} n_3 = 0$
- $T_{21} n_1 + (T_{22} - \sigma) n_2 + T_{23} n_3 = 0$
- $T_{31} n_1 + T_{32} n_2 + (T_{33} - \sigma) n_3 = 0$

# Matrice dei coefficienti del sistema

- $(T_{11} - \sigma) \quad T_{12} n_2 \quad T_{13} n_3$
- $T_{21} n_2 \quad (T_{22} - \sigma) \quad T_{23} n_3$
- $T_{31} n_1 \quad T_{32} n_2 \quad (T_{33} - \sigma)$

# Sforzi *principali*

- L'equazione caratteristica di 3° grado ha 3 radici reali poiché  $T$  è simmetrico ed ha componenti  $T_{ij}$  reali:
- $\sigma_I > \sigma_{II} > \sigma_{III}$
- $\sigma_i \in \mathbb{R} \quad (i = I, II, III)$

# Problema degli *AutoVettori*

- 3 sistemi algebrici omogenei con **rango massimo 2**, cioè con non più di 2 equazioni indipendenti:

$$(T - \sigma_j I) \mathbf{n}_j = 0 \quad (j = I, II, III) \quad (I = \text{matrice identità})$$

- Condizione di normalizzazione:

$$|\mathbf{n}_j|^2 = n_{j1}^2 + n_{j2}^2 + n_{j3}^2 = 1 \quad (j = I, II, III)$$

( $\mathbf{n}_j$  versore ovvero vettore di modulo unitario)



# Sistema di riferimento principale

- Le direzioni principali sono i 3 versori:

$$\mathbf{n}_I \perp \mathbf{n}_{II} \perp \mathbf{n}_{III}$$

- Base del nuovo sistema di riferimento principale:

$$\mathbf{e}_I \equiv \mathbf{n}_I, \mathbf{e}_{II} \equiv \mathbf{n}_{II}, \mathbf{e}_{III} \equiv \mathbf{n}_{III}$$

## Tensore dello Sforzo nel Sistema di Riferimento Principale

$$[\mathbf{T}]_P = \begin{bmatrix} \sigma_I & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{II} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{III} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \sigma_I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{II} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{III} \end{bmatrix}$$

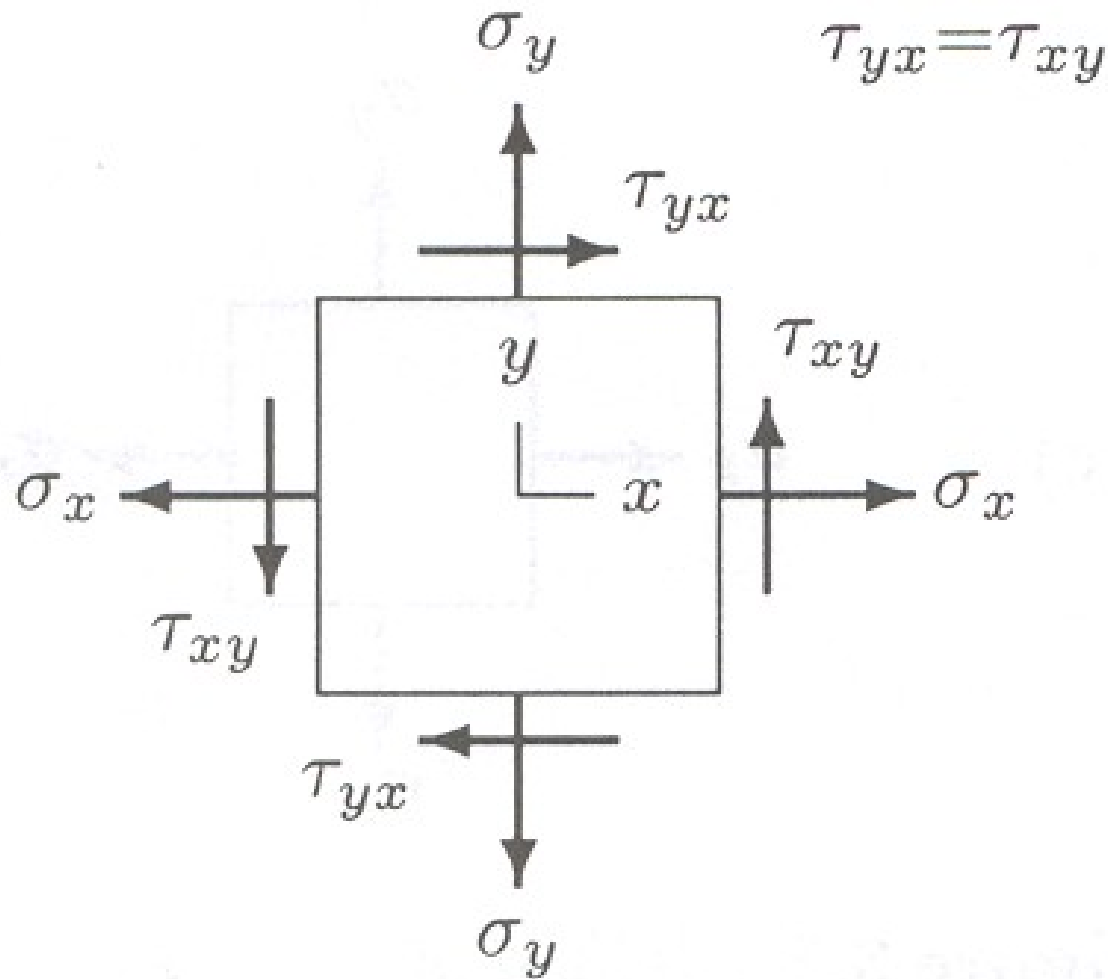
# Linee *isostatiche*

- Le 3 direzioni principali sono in generale diverse da posto a posto nella regione spaziale occupata dal corpo; esse definiscono ed inviluppano 3 curve mutuamente ortogonali dette *linee isostatiche*, cioè **quelle curve la cui tangente in ogni posto è diretta come una delle direzioni principali in quel posto.**
- **Secondo le tangenti alle isostatiche si hanno quindi per definizione solo sforzi assiali:** la conoscenza delle isostatiche permetterebbe di concentrare la sostanza costituente il corpo continuo in modo da realizzare esclusivamente componenti di trazione o compressione dello sforzo.

# Stato piano di Sforzo (2–D)

- Uno **Stato di Sforzo** in un posto  $p$  si dice **piano** allorché il Vettore dello Sforzo  $\mathbf{t}$  agente su una qualunque giacitura passante per  $p$  sia sempre contenuto in uno stesso piano, detto piano dello sforzo.
- Assumendo come **base** quella costituita dalle **Direzioni *principali***, si può esprimere il vettore dello sforzo  $\mathbf{t}$  agente su una generica giacitura  $\mathbf{n}$ .

# Stato piano di Sforzo (2-D)



# Condizioni necessaria e sufficiente

- $\mathbf{n} = n_I \mathbf{e}_I + n_{II} \mathbf{e}_{II} + n_{III} \mathbf{e}_{III}$
- $\mathbf{t} = \mathbf{T}_P^T \mathbf{n} = \sigma_I n_I \mathbf{e}_I + \sigma_{II} n_{II} \mathbf{e}_{II} + \sigma_{III} n_{III} \mathbf{e}_{III}$
- Piano dello Sforzo  $\mathbf{e}_I$ - $\mathbf{e}_{II}$ .
- Condizione necessaria:

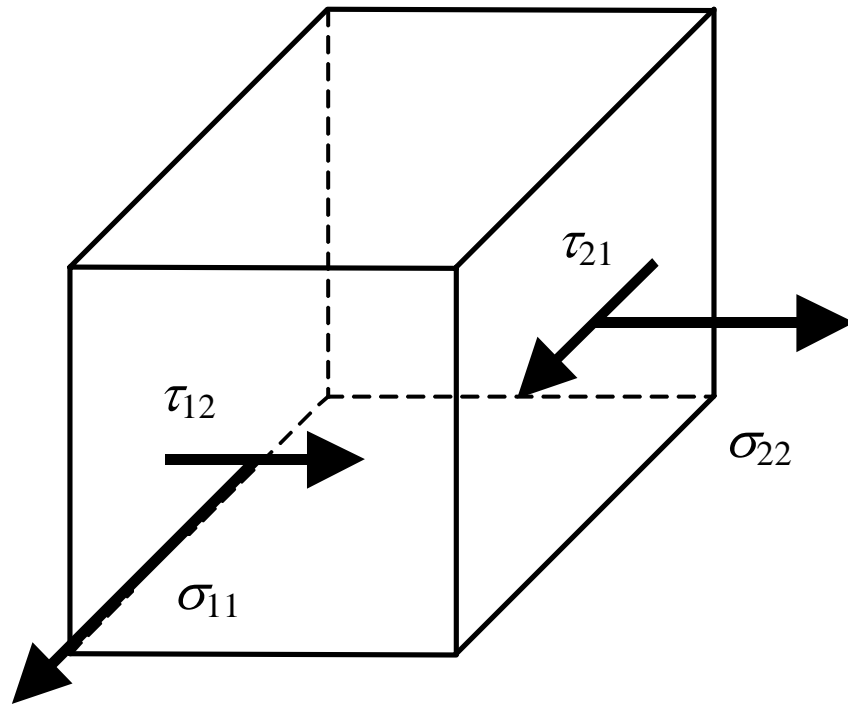
$$\sigma_{III} = 0 \Rightarrow \mathbf{t} = \sigma_I n_I \mathbf{e}_I + \sigma_{II} n_{II} \mathbf{e}_{II}$$

- Condizione sufficiente:

$$I_3 = \text{Det } \mathbf{T} = 0 \Rightarrow (\sigma^2 - I_1 \sigma - I_2) \sigma_{III} = 0$$

soddisfatta da  $\sigma_{III} = 0$

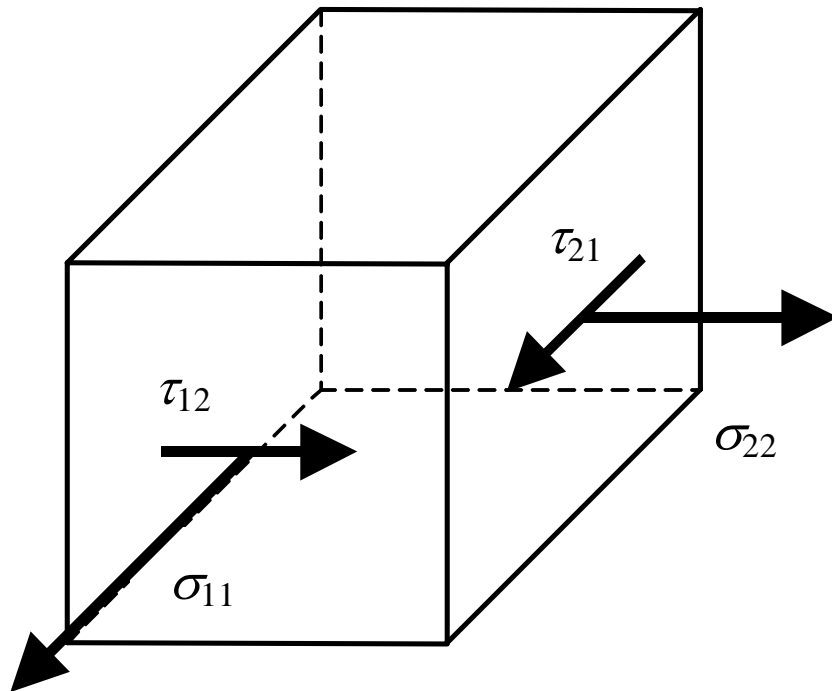
# Sforzi e Direzioni principali per uno Stato piano di Sforzo



Piano dello sforzo  $\mathbf{e}_1$ - $\mathbf{e}_2$ .  
Matrice di Sforzo:

$$[\mathbf{T}] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \tau_{12} & 0 \\ \tau_{21} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

# Problema degli AutoVettori e AutoValori



Problema degli  
AutoVettori:

$$(\sigma_{11}-\sigma)n_1 + \tau_{12}n_2 = 0$$

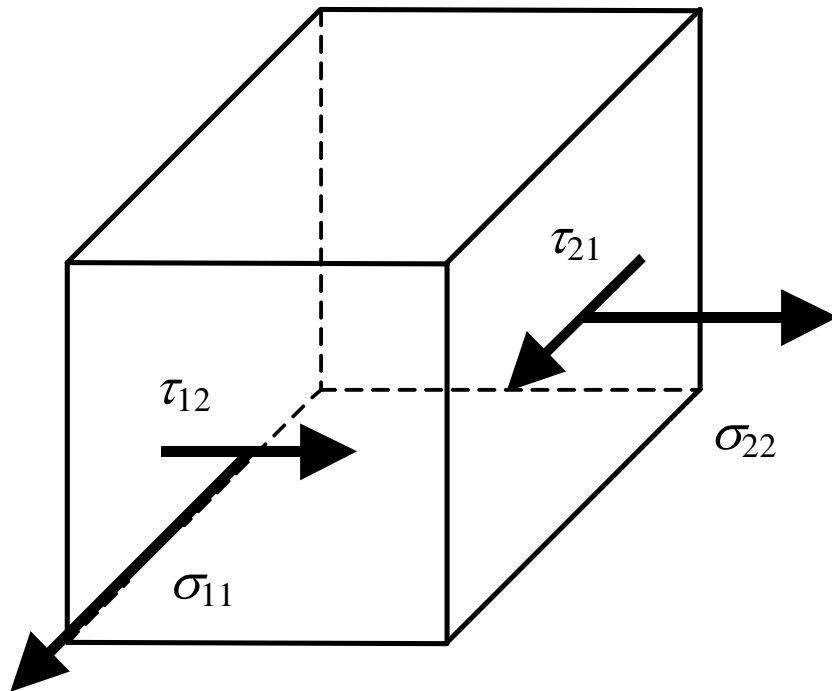
$$\tau_{21}n_1 + (\sigma_{22}-\sigma)n_2 = 0$$

Problema degli  
AutoValori:

$$(\sigma_{11}-\sigma)(\sigma_{22}-\sigma) - (\tau_{12})^2 = 0$$



# Equazione caratteristica



Equazione caratteristica  
di 2° grado:

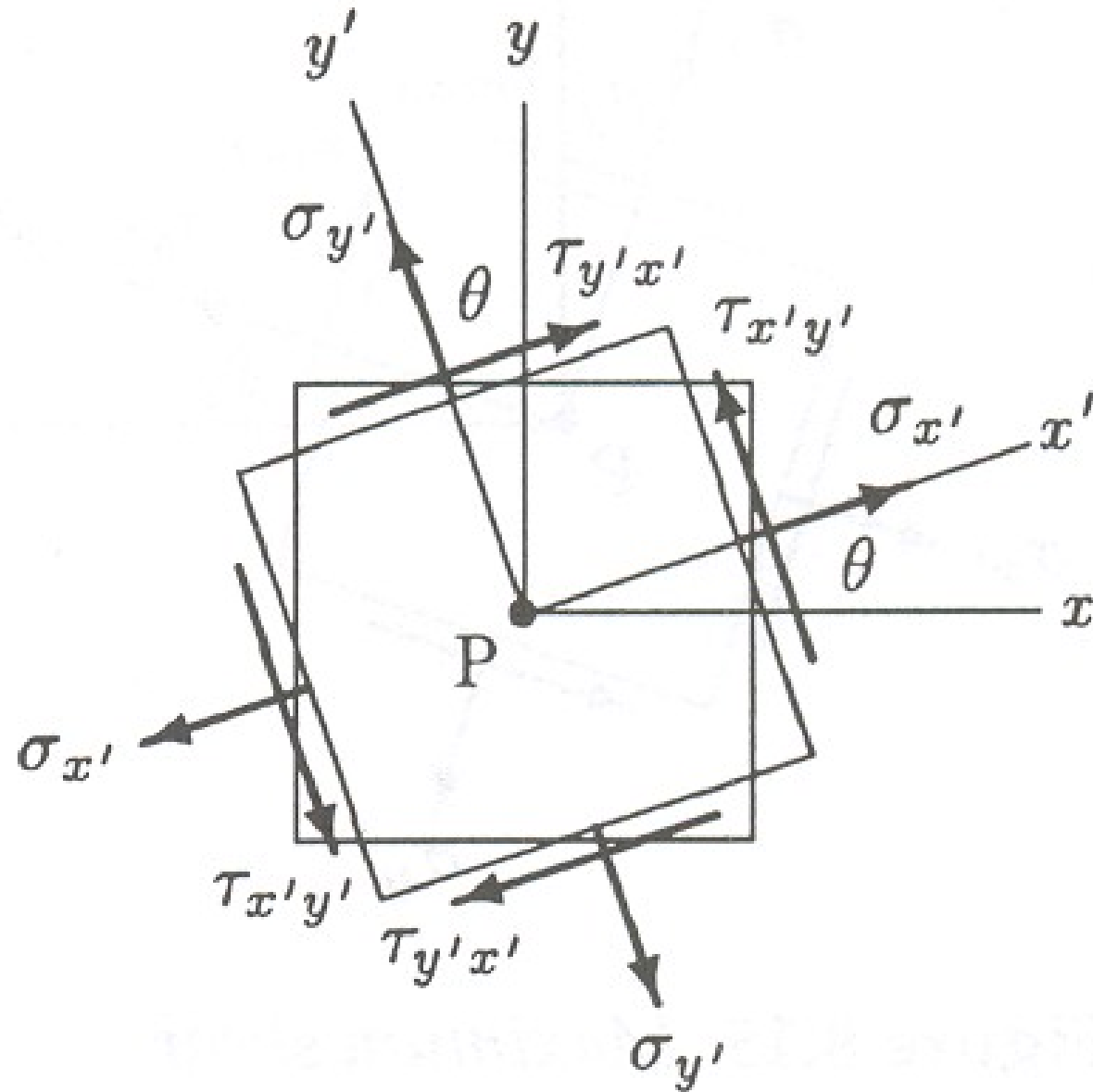
$$\sigma^2 - I_1 \sigma - I_2 = 0$$

$$I_1 = \sigma_{11} + \sigma_{22}$$

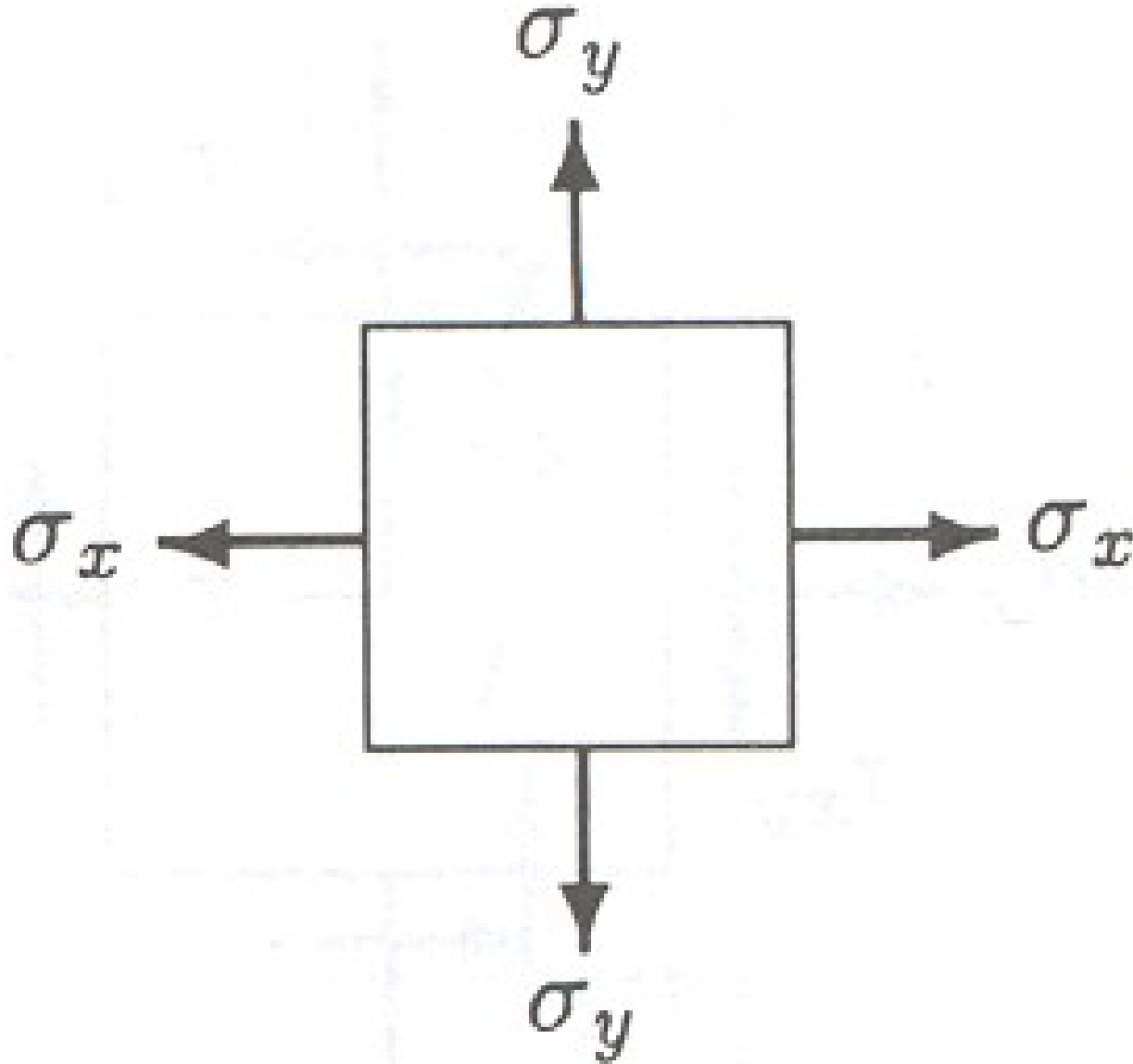
$$I_2 = \sigma_{11} \sigma_{22} + (\tau_{12})^2$$

$$I_3 = 0$$

# Rotazione del Sistema di Riferimento 2-D



# Sforzi e Direzioni *principali* 2-D



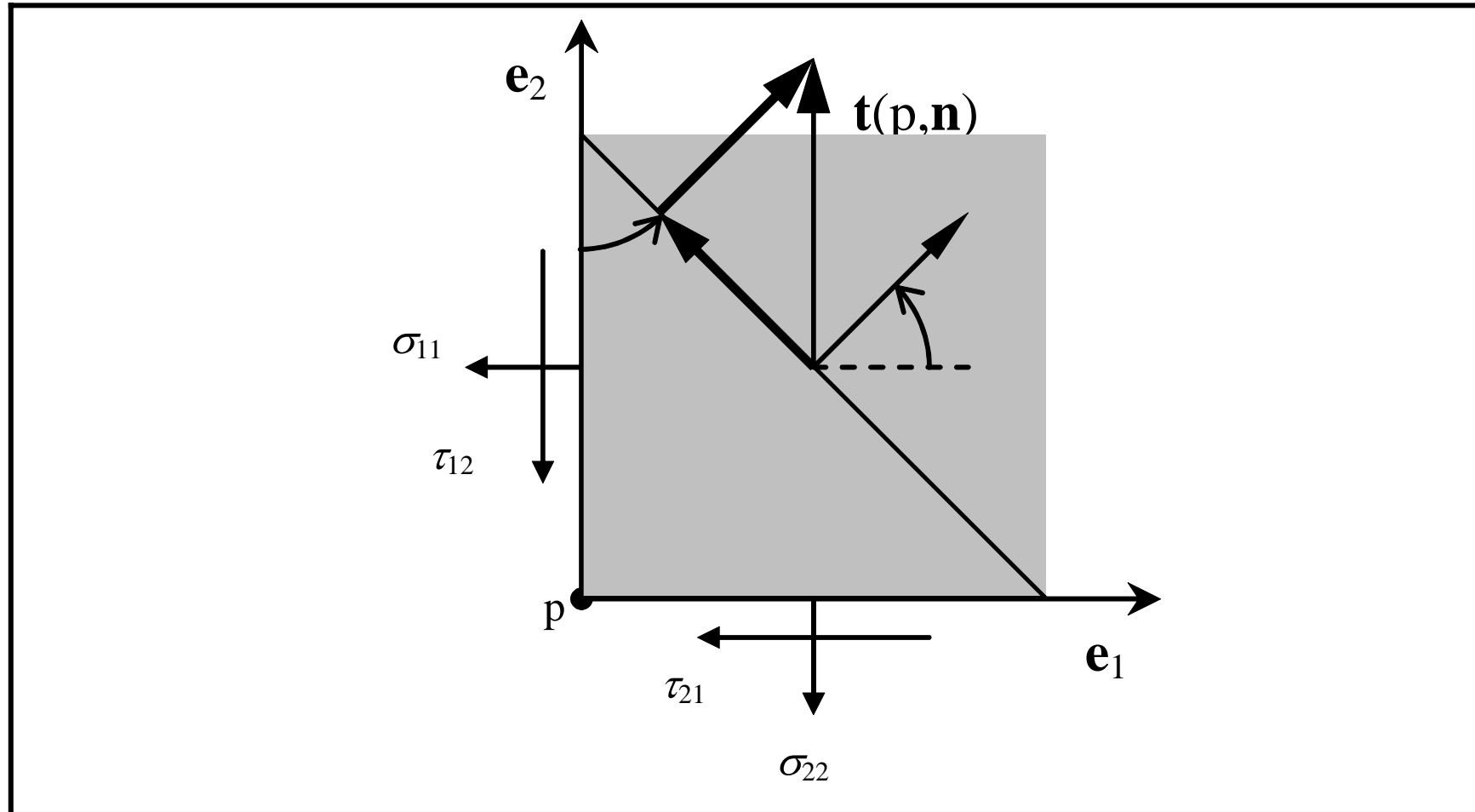
# Sforzi *principali* 2-D

- $\sigma_I = \frac{1}{2} (\sigma_1 + \sigma_2) + \{[\frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2)]^2 + (\tau_{12})^2\}^{\frac{1}{2}}$
- $\sigma_{II} = \frac{1}{2} (\sigma_1 + \sigma_2) - \{[\frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2)]^2 + (\tau_{12})^2\}^{\frac{1}{2}}$

# Direzioni *principali* 2-D

- $\theta_1 = \frac{1}{2} \text{ArcTang} [2 \tau_{12} / (\sigma_1 - \sigma_2)]$
- $\theta_{II} = \theta_1 + \pi / 2$

# Stato piano di Sforzo al variare della Giacitura



# Equazioni di Equilibrio delle forze nella direzioni $\sigma$ & $\tau$

- *Componente ortogonale al piano:*

$$\sigma = |\sigma| = \sigma_{11} \text{Cos}^2 \vartheta + \sigma_{22} \text{Sen}^2 \vartheta + 2\tau_{12} \text{Sen} \vartheta \text{Cos} \vartheta$$

- *Componente parallela al piano:*

$$\tau = |\tau| = (\sigma_{11} - \sigma_{22}) \text{Sen} \vartheta \text{Cos} \vartheta + \tau_{12} (\text{Cos}^2 \vartheta - \text{Sen}^2 \vartheta)$$

## Ricerca dei valori *stazionari* della Funzione $\sigma(\vartheta)$ al variare della Giacitura

- $\sigma_{,\vartheta} = -2\sigma_{11}\text{Cos}\vartheta \text{ Sen}\vartheta + 2\sigma_{22}\text{Sen}\vartheta \text{ Cos}\vartheta + 2\tau_{12}(\text{Cos}^2\vartheta - \text{Sen}^2\vartheta) = -2\tau$
- $\sigma_{,\vartheta} = 0 \Rightarrow \tau = 0 \Rightarrow$
- $\frac{1}{2}(\sigma_{11}-\sigma_{22})\text{Sen}2\vartheta - \tau_{12}\text{Cos}2\vartheta = 0 \Rightarrow \text{Tan}2\vartheta = \frac{2\tau_{12}}{(\sigma_{11}-\sigma_{22})}$
- $\vartheta_{\perp} = \frac{1}{2} \text{ArcTang}[\frac{2\tau_{12}}{(\sigma_{11}-\sigma_{22})}], \quad \vartheta_{\parallel} = \vartheta_{\perp} + \pi/2$



## Ricerca dei valori *stazionari* della Funzione $\sigma(\vartheta)$ al variare della Giacitura

- $\sigma_{,\vartheta\vartheta} = \partial\sigma_{,\vartheta} / \partial\vartheta =$   
 $\partial [- 2\sigma_{11}\text{Cos}\vartheta \text{ Sen}\vartheta + 2\sigma_{22}\text{Sen}\vartheta \text{ Cos}\vartheta +$   
 $2\tau_{12}(\text{Cos}2\vartheta - \text{Sen}2\vartheta)] / \partial\vartheta =$   
  
 $= - 2 [(\sigma_{11}-\sigma_{22})\text{Cos}2\vartheta + 2\tau_{12}\text{Sen}2\vartheta] =$   
  
 $= - 4 [\sigma - \frac{1}{2} (\sigma_{11}+\sigma_{22})]$

# Ricerca dei valori *stazionari* della Funzione $\sigma(\vartheta)$ al variare della Giacitura

$$(\partial^2\sigma / \partial\vartheta^2) = - 4 [\sigma - \frac{1}{2} (\sigma_{11}-\sigma_{22})]$$

- Sostituendo l'espressione

$$\sigma = \sigma_{11}\text{Cos}2\vartheta + \sigma_{22}\text{Sen}2\vartheta + 2\tau_{12}\text{Sen}\vartheta\text{Cos}\vartheta$$

- e assumendo a turno

$$\vartheta = \vartheta_{||} \text{ e } \vartheta = \vartheta_{\perp}$$

con  $\vartheta_{\perp} = \frac{1}{2} \text{ArcTang}[2\tau_{12}/(\sigma_{11}-\sigma_{22})]$ , e

$$\vartheta_{||} = \vartheta_{\perp} + \pi/2$$

- si ha

$$(\partial^2\sigma / \partial\vartheta^2)_{||,\perp} = \pm R$$

$$\text{con } R = \{[\frac{1}{2} (\sigma_{11}-\sigma_{22})]^2 + (\tau_{12})^2\}^{1/2} > 0$$

# Coincidenza dei valori *stazionari* della Funzione $\sigma(\vartheta)$ con gli sforzi principali

- Ponendo

$$\vartheta_1 = \frac{1}{2} \text{ArcTang}[2\tau_{12}/(\sigma_{11}-\sigma_{22})],$$

$$\vartheta_{II} = \vartheta_1 + \pi/2$$

- nell'espressione
- $\sigma = \sigma_{11}\text{Cos}2\vartheta + \sigma_{22}\text{Sen}2\vartheta + 2\tau_{12}\text{Sen}\vartheta\text{Cos}\vartheta$
- si ottengono gli sforzi principali:

$$\sigma_{I,II} = (\sigma_{11} + \sigma_{22})/2 \pm [1/4(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\tau_{12})^2]^{1/2}$$

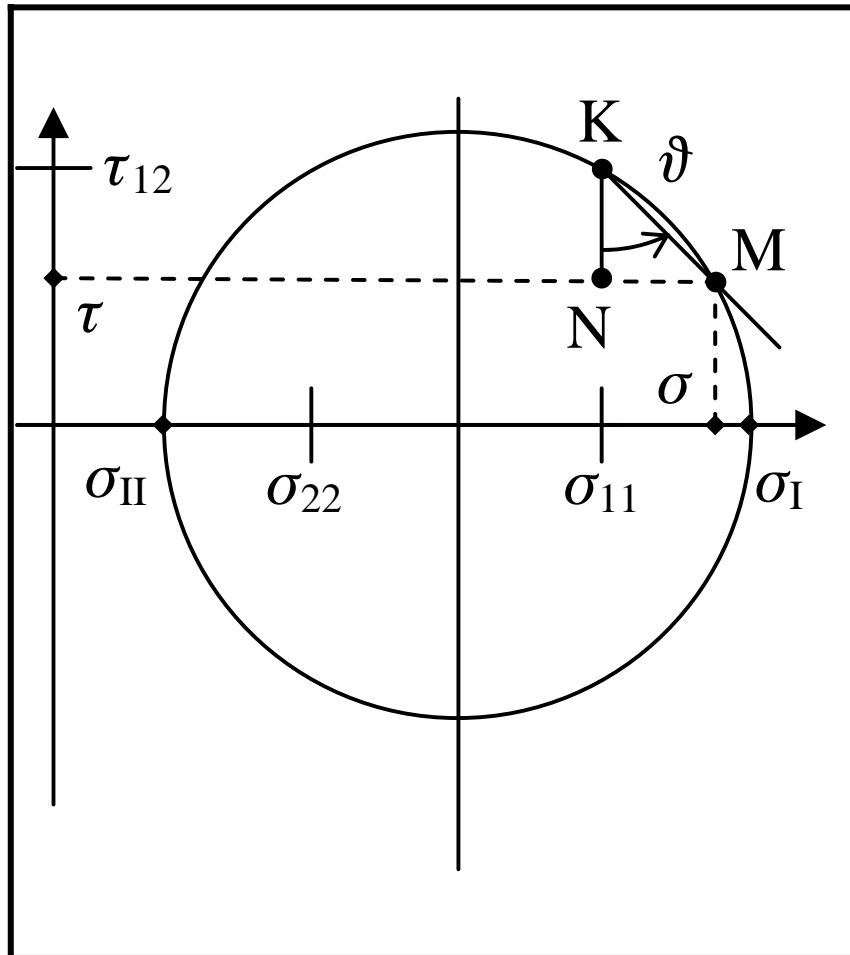
## Ricerca dei valori *stazionari* della Funzione $\tau(\vartheta)$ al variare della Giacitura

- $\tau_{,\vartheta} = 0 \Rightarrow \vartheta_{III} = \vartheta_I + \pi/4, \quad \vartheta_{IV} = \vartheta_{II} + \pi/4$
- $\tau_{\max} = -\tau_{\min} = \left[ \frac{1}{4}(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\tau_{12})^2 \right]^{1/2}$
- *Sistema di riferimento principale* ( $\tau_{12} = \tau_{21} = 0$ ):  
 $\tau_{\max} = -\tau_{\min} = [(\sigma_{11} - \sigma_{22})/2, \quad (\sigma_{11} > \sigma_{22})$

# Circonferenza di *Mohr* (2-D)

- $\sigma = \frac{1}{2}(\sigma_{11} + \sigma_{22}) + \frac{1}{2}(\sigma_{11} - \sigma_{22})\cos 2\vartheta + \tau_{12}\sin 2\vartheta$
- $\tau = \frac{1}{2}(\sigma_{11} - \sigma_{22})\sin 2\vartheta - \tau_{12}\cos 2\vartheta$
- $[\sigma - \frac{1}{2}(\sigma_{11} + \sigma_{22})]^2 + \tau^2 = [\frac{1}{2}(\sigma_{11} - \sigma_{22})]^2 + (\tau_{12})^2 = R^2$
- Centro:  $C \equiv [\frac{1}{2}(\sigma_{11} + \sigma_{22}), 0]$
- Raggio:  $R = \{[\frac{1}{2}(\sigma_{11} - \sigma_{22})]^2 + (\tau_{12})^2\}^{\frac{1}{2}}$

# Circonferenza di *Mohr* (2-D)



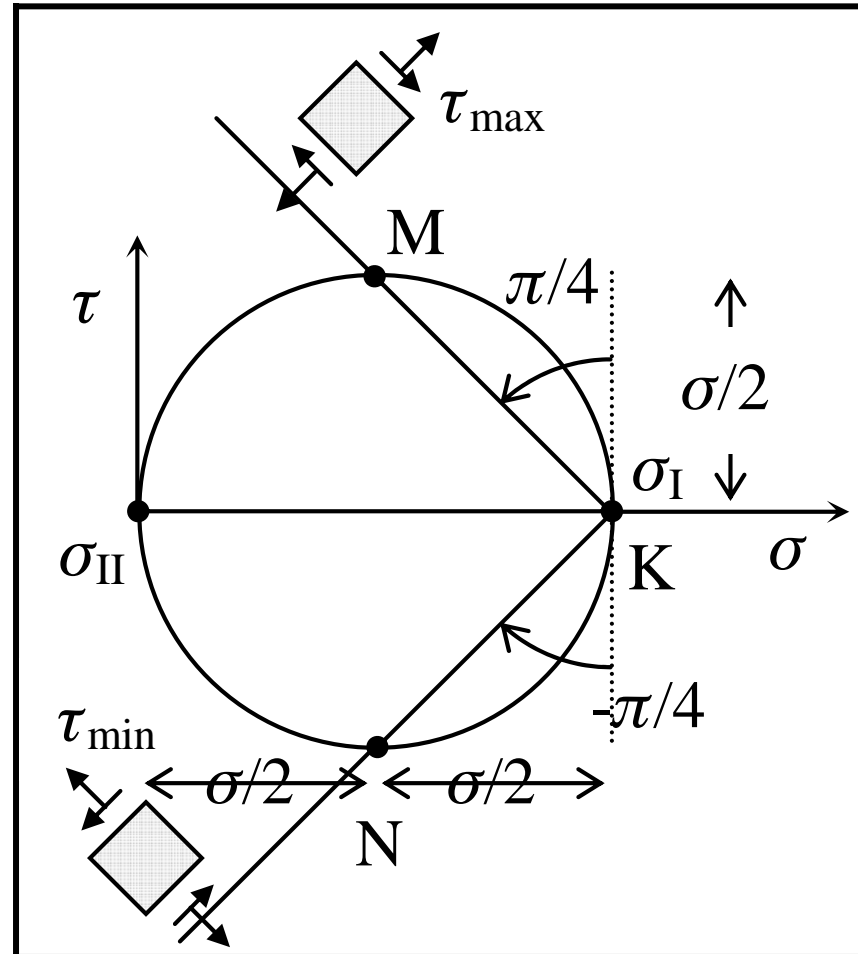
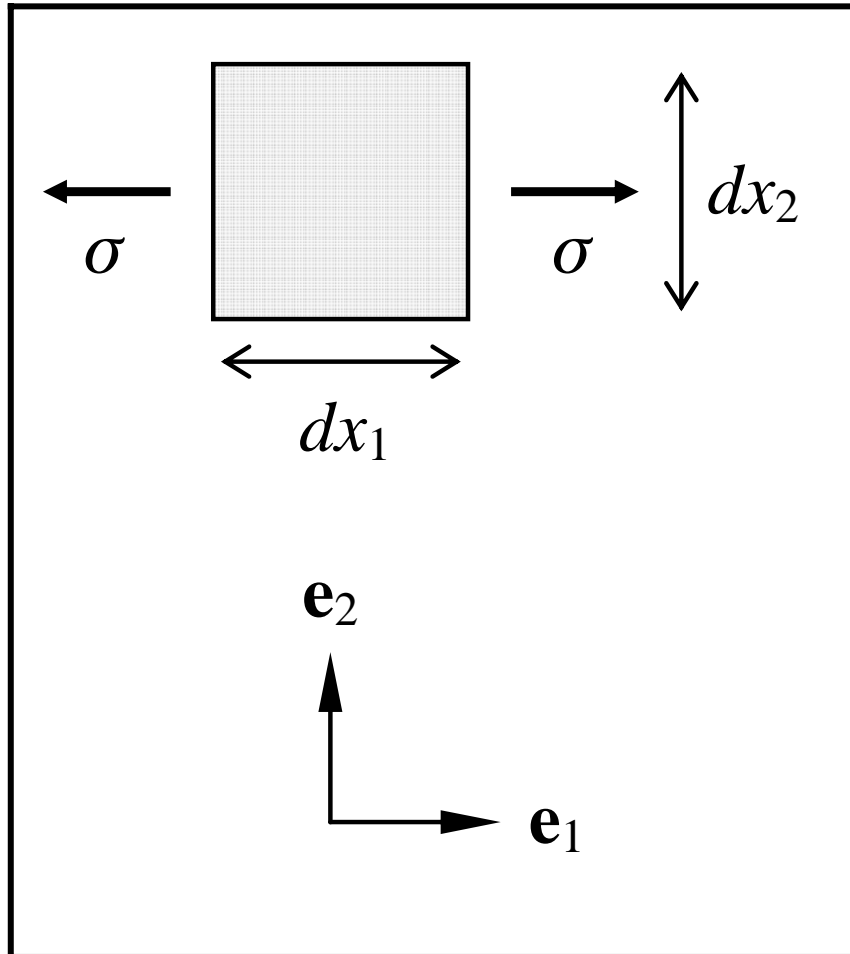
Tang  $\langle MKN \rangle =$

$MN / KN =$

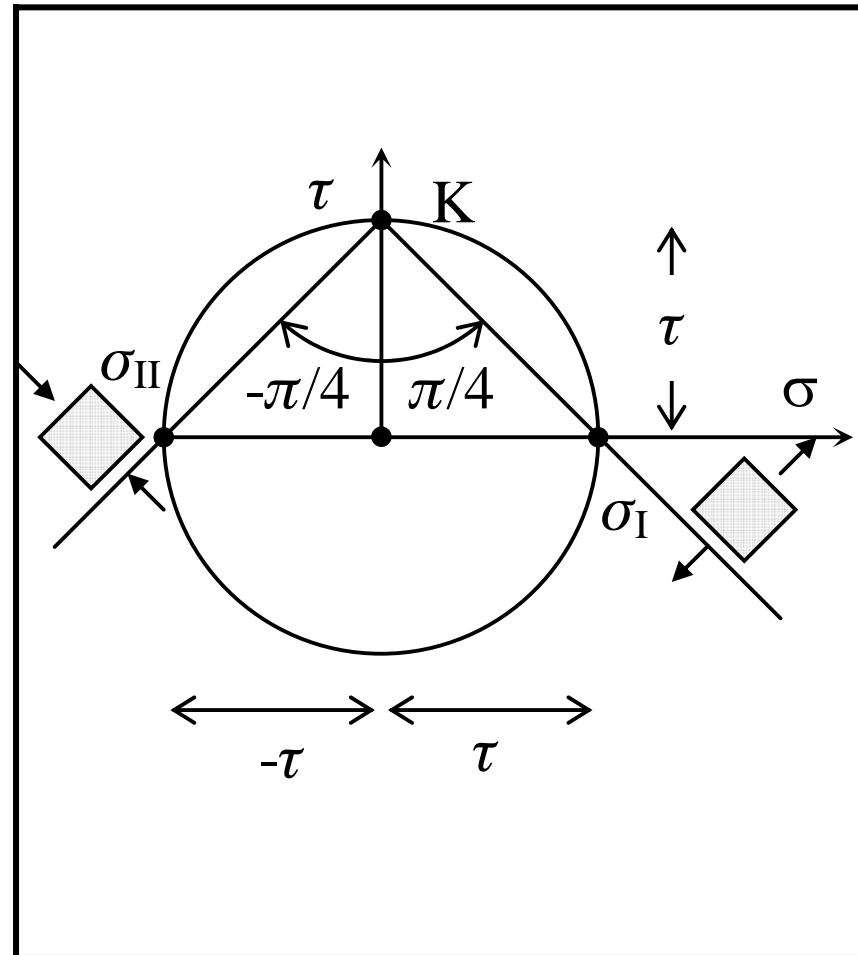
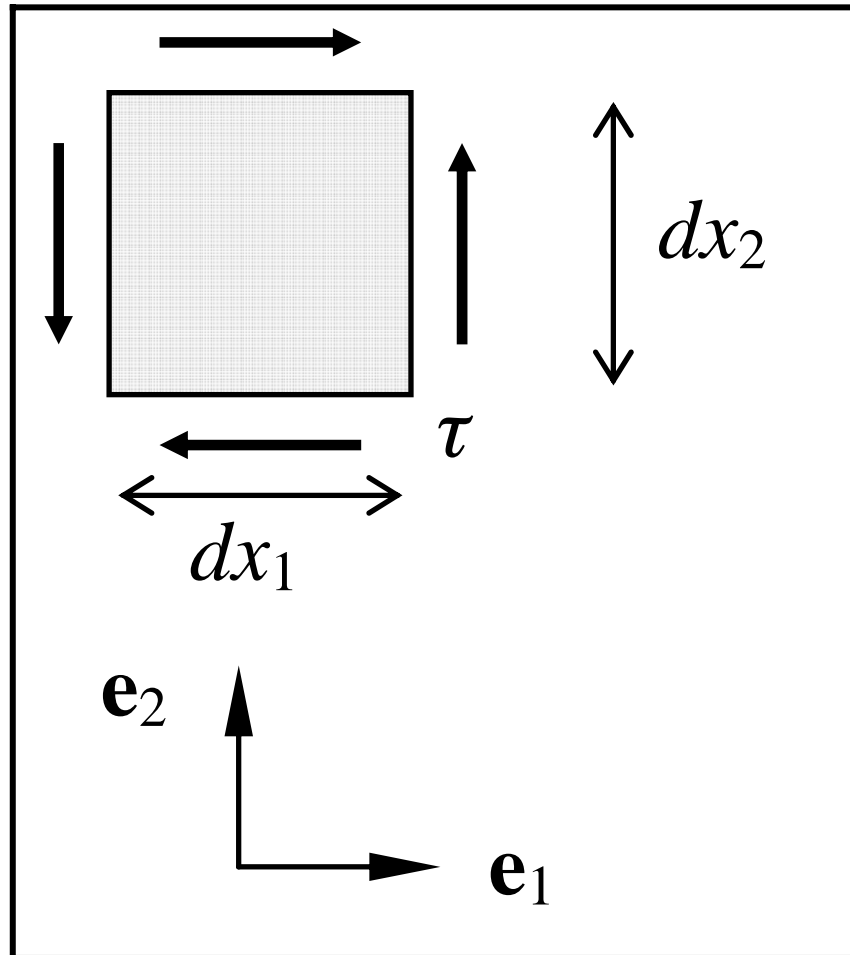
$(\sigma - \sigma_{11}) / (\tau_{12} - \tau) =$

Tang  $\vartheta$

# Sforzo *uniassiale*



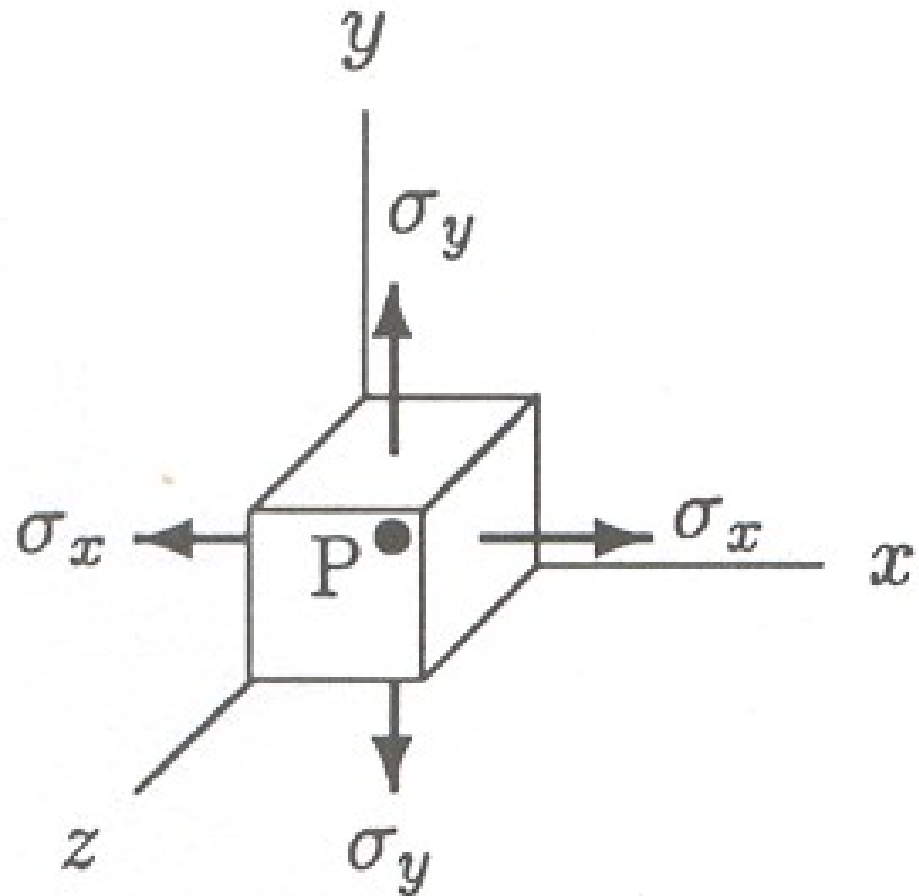
# Sforzo *tangenziale*





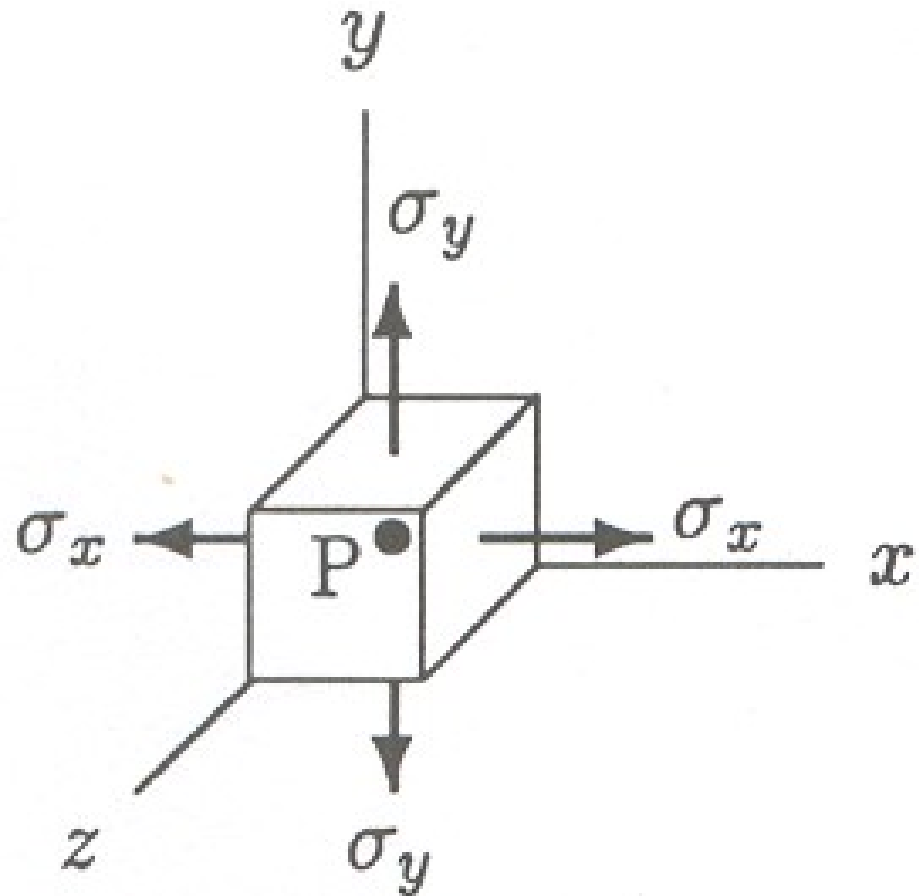
# Sforzo *triassiale*

- In ogni posto del corpo esiste almeno una terna di direzioni principali cui corrisponde una terna di sforzi principali.
- Se i 3 sforzi principali risultano tutti non nulli, essi caratterizzano uno stato di sforzo denominato *triassiale*.



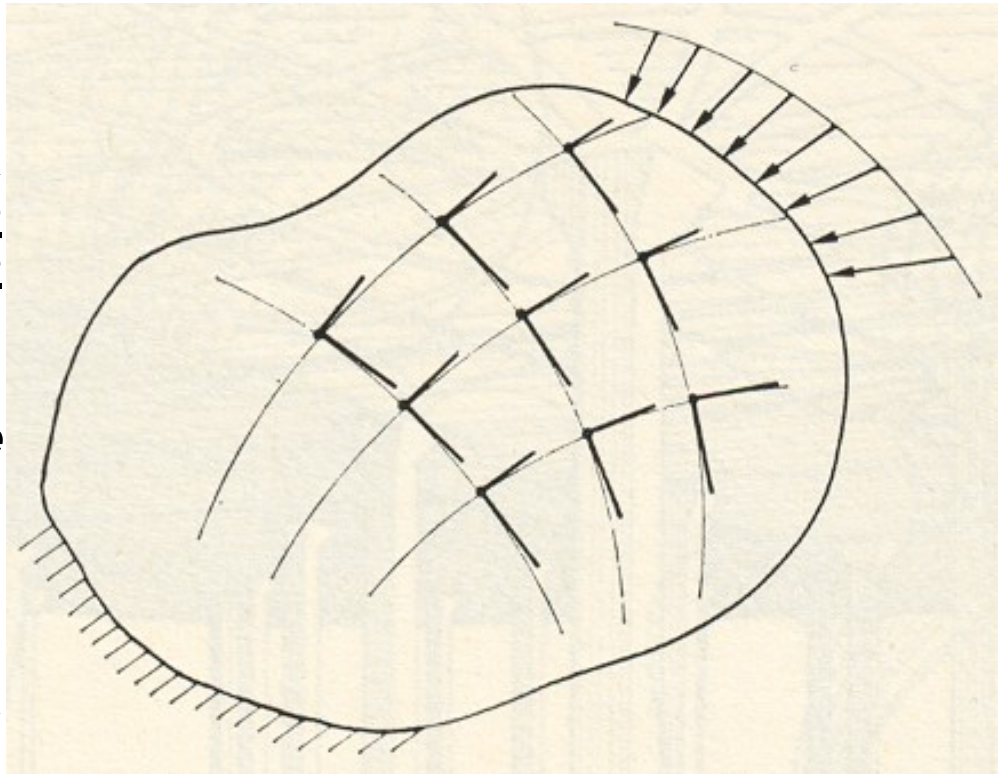
# Sforzo *biassiale*

- Quando almeno uno sforzo principale risulta nullo, lo stato di sforzo corrispondente è detto *biassiale* se i due rimanenti sforzi principali sono diversi da zero,
- *monoassiale* se un solo sforzo principale è diverso da zero.

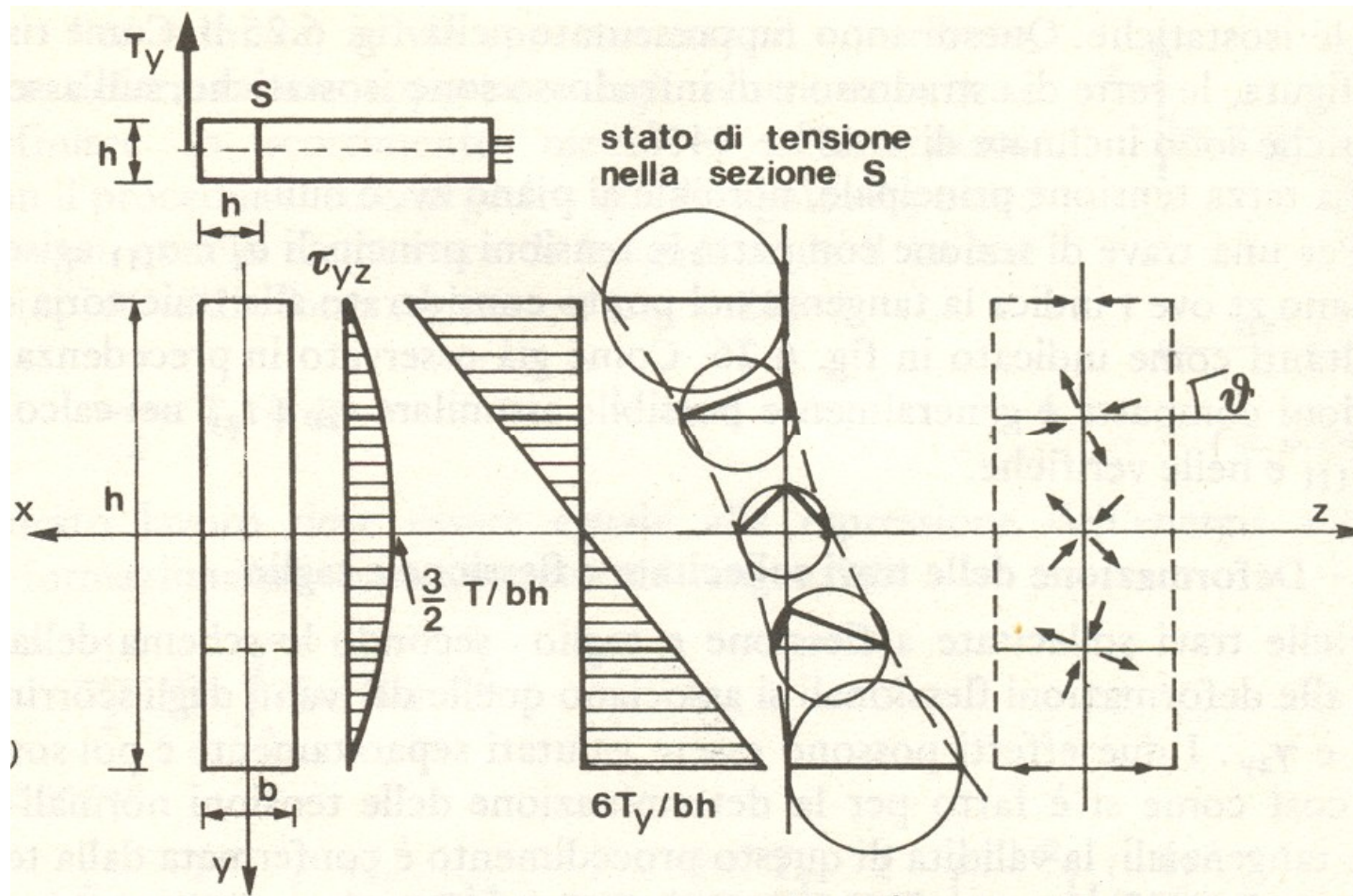


# Linee *isostatiche*

- Si immagini ora di porre in risalto, per ogni posto del corpo, le tre direzioni principali: il loro inviluppo conduce a definire **3 famiglie di linee curve mutuamente ortogonali.**
- Ad esse si dà il nome di *linee isostatiche*. **I punti sostanziali che si dispongono su una linea isostatica sono dunque soggetti, per definizione, esclusivamente ad una componente assiale dello sforzo, di trazione o di compressione.**



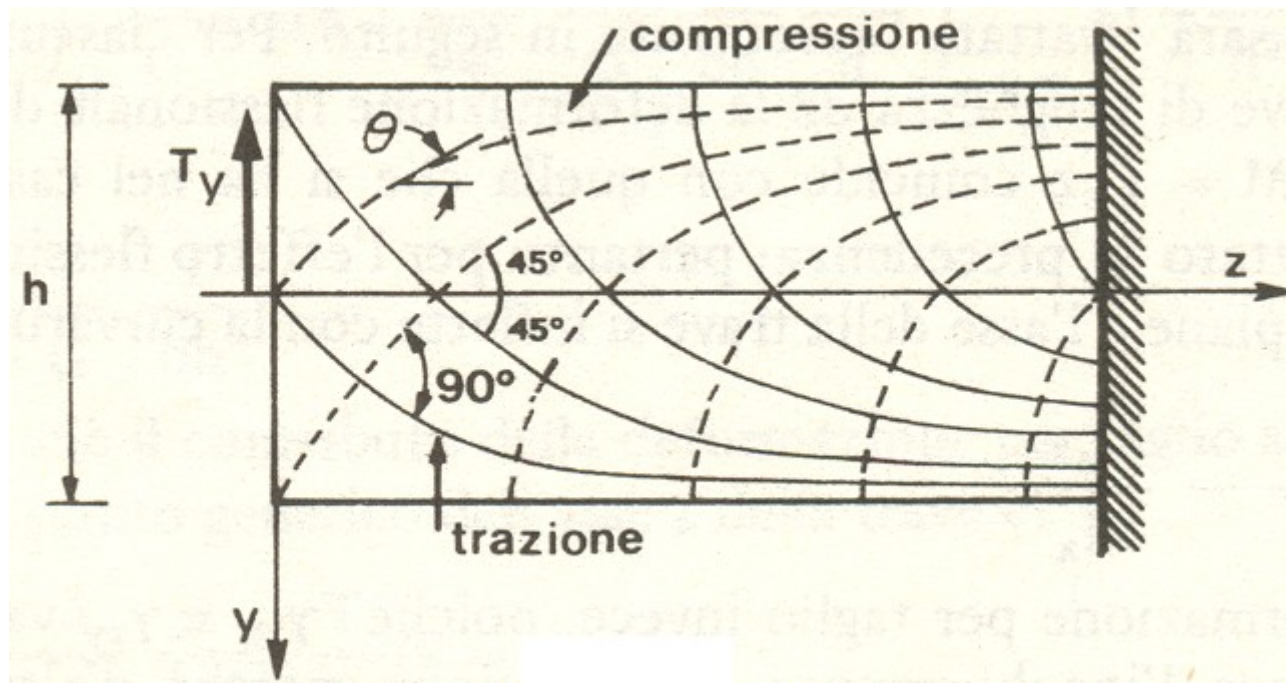
# Sforzi e Circonferenze di Mohr nella Sezione della Mensola



# Sforzi e Circonferenze di *Mohr* nella Sezione della Mensola

- Nella **Figura precedente** è mostrata la distribuzione delle componenti normale e tangenziale sulla sezione retta di una trave di sezione rettangolare con larghezza  $b$  piccola rispetto all'altezza  $h$ .
- La sezione  $S$  ( $\equiv D_h$ ) è considerata distante  $h$  dall'estremità della trave ove è applicata la forza trasversale  $T_y$  ( $\equiv Q_y$ ). A lato sono rappresentati (per  $y=\pm h/2$ ;  $y=\pm h/4$ ;  $y=0$ ) le circonferenze di *Mohr* degli sforzi e le direzioni principali.

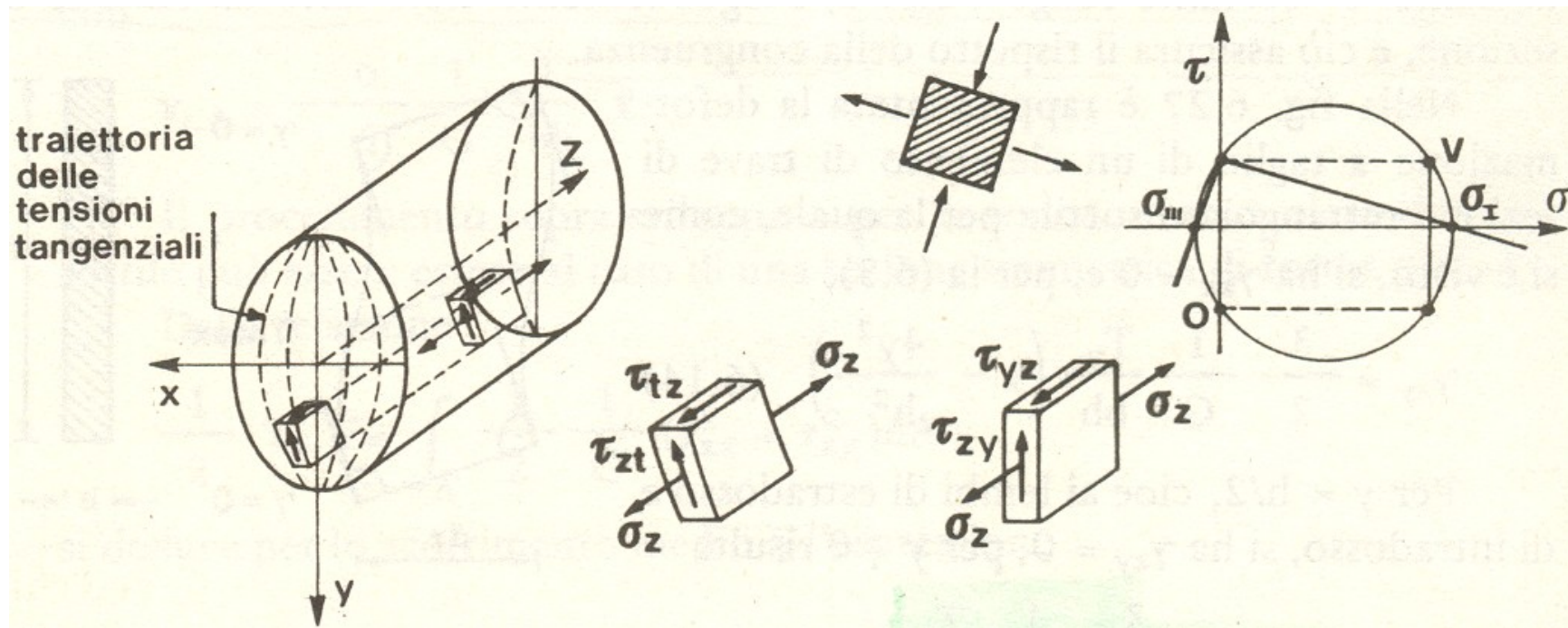
# Linee *isostatiche* nella Mensola



# Linee *isostatiche* nella Mensola

- Facendo variare la distanza  $z$  della sezione dall'estremità si possono disegnare le linee isostatiche. Esse sono rappresentate nella **Figura precedente**.
- Le rette di stradosso e di intradosso sono linee isostatiche; sull'asse  $z$  le linee isostatiche sono inclinate di  $+45^\circ$  e  $-45^\circ$ .
- Le linee curve risultano essere delle parabole.
- Il terzo sforzo principale, ortogonale al piano  $zy$ , è nullo.

# Sforzi e Circonferenze di *Mohr* lungo l'Asse della Mensola





# Sforzi e Circonferenze di *Mohr* lungo l'Asse della Mensola

- Per una trave di sezione compatta gli sforzi principali  $\sigma_I$  e  $\sigma_{III}$  agiscono nel piano “zt” ove “t” indica la retta tangente nel punto considerato alla traiettoria delle componenti tangenziali  $\tau$  dello sforzo risultanti dalla composizione delle componenti  $\tau_{zy}$  e  $\tau_{zx}$ , come indicato nella **Figura precedente.**

# Linee isostatiche *naturali*

- Nelle ossa umane e in generale in tutte le ossa che portano pesi, lo spazio interno è riempito di midollo, di vasi sanguigni e di altri tessuti; e tra questi tessuti viventi vi è un sottile reticolo, costituito da *trabecole* ossee, che formano il cosiddetto *tessuto spugnoso*.
- Gli antichi anatomici si accontentavano di descrivere questo tessuto spugnoso come una specie di sostanza alveolare irregolare; ma infine si scoprì che esiste un preciso ordine nella loro disposizione e diversi sono stati i tentativi di capirne il significato.
- L'anatomista scozzese Sir Charles **Bell** (1774-1842) sospettava la verità quando asseriva che “**questa minuta rete che costituisce la struttura interna dell'osso deve essere in rapporto con le forze che agiscono su di esso**”. Ma non riuscì a dimostrare quali forze fossero né quali fossero i rapporti fra esse e la struttura.

# Linee isostatiche *naturali*

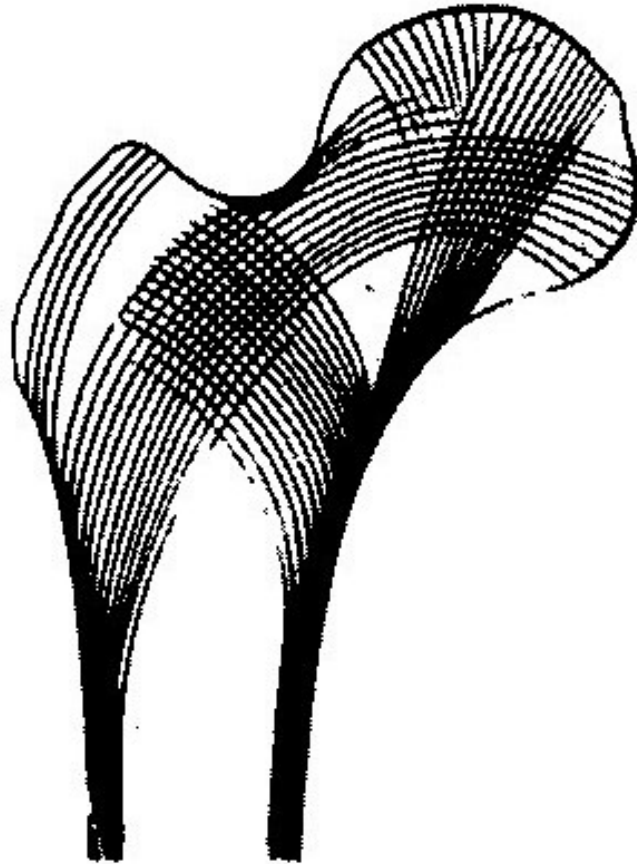
- L'anatomista americano Jeffries **Wyman** (1814-1874) si avvicinò molto al vero in un lavoro da lungo tempo dimenticato; egli espresse l'essenza di tutto l'argomento in due brevi paragrafi:
  1. le *trabecole* di quelle ossa che devono sopportare il peso del corpo sono disposte o nella direzione del peso o in modo tale da sostenere le *trabecole* che si trovano in questa direzione. Da un punto di vista meccanico, in tutte queste ossa esse si possono considerare come una serie di *puntoni* e *tiranti*;
  2. la direzione di queste *trabecole*, in alcune ossa dello scheletro umano, è caratteristica e si deve credere che essa sia in relazione con la posizione (*assetto*, *NdA*) eretta, assunta naturalmente solo dall'uomo".

# Linee isostatiche *naturali*

- Pochi anni dopo, la questione fu di nuovo ripresa con un'accuratezza più convincente. Fu mostrato dal professor ***von Meyer*** (1867) che
  - le *trabecole*, come sono visibili in una sezione longitudinale del femore, sono disposte lungo linee curve dalla *testa* alla *diafisi* vuota dell'osso,
  - e che questi fasci lineari sono intersecati da altri con una precisa regolarità di disposizione che **ogni incrocio è quasi ortogonale**; ovvero una serie di fibre o *trabecole* incrocia l'altra ad angolo retto in tutti i punti.

# *von Meyer e Culmann (1867)*

- L'ingegnere e professore **Culmann** di Zurigo capitò nella sala di dissezione del suo collega **Meyer**, proprio quando il medico anatomico stava esaminando una sezione di osso.



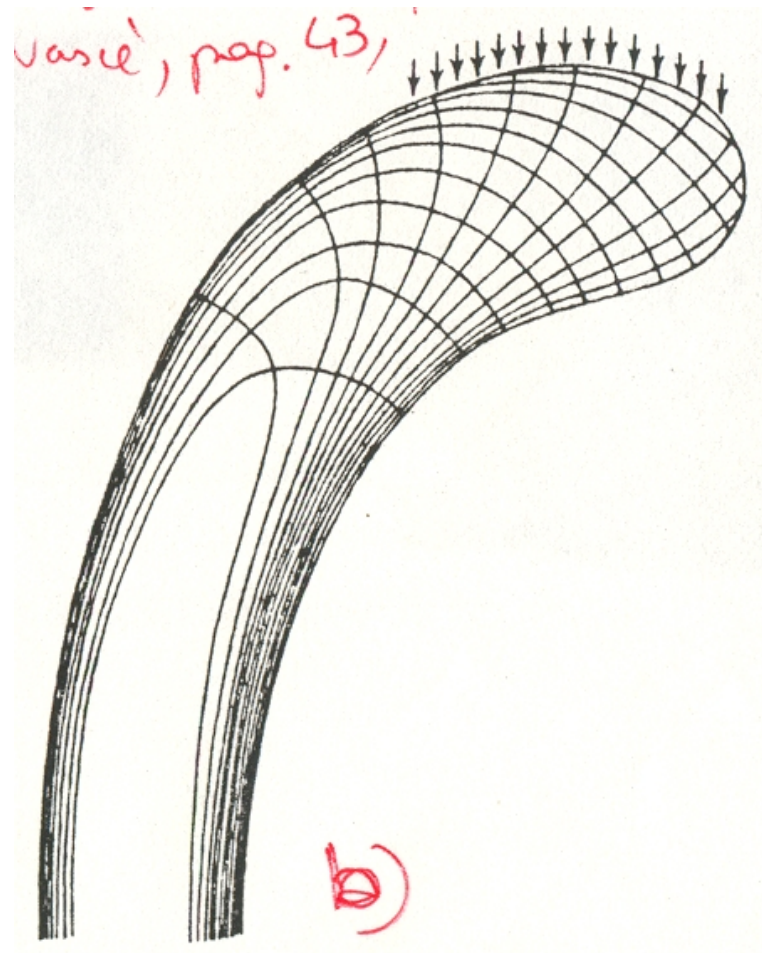
**Culmann**, che a quell'epoca era intento a progettare una gru, riconobbe subito che la disposizione delle trabecole ossee era il diagramma delle linee isostatiche, direzioni della trazione e della compressione, nella struttura caricata:

*la natura irrobustisce l'osso  
precisamente nel modo  
meccanicamente necessario.*

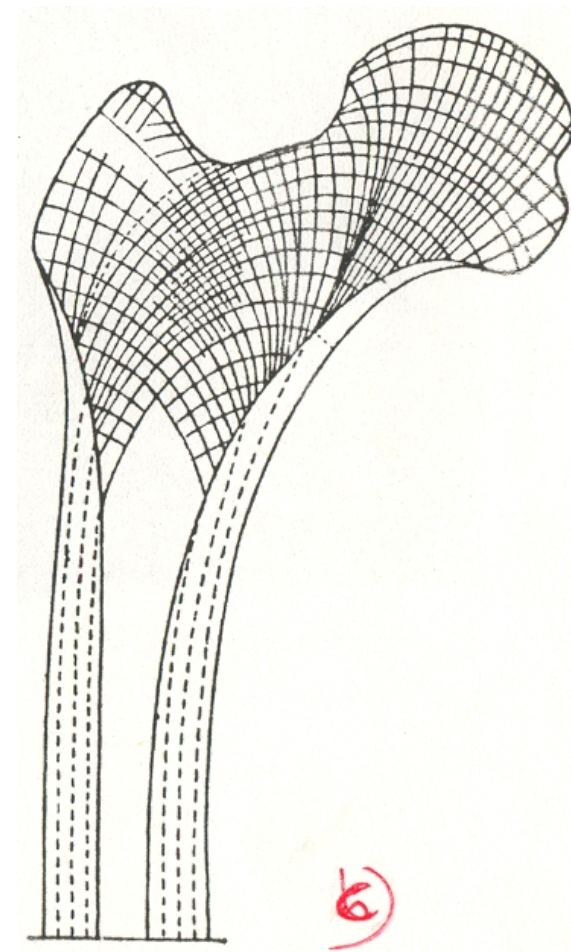
# La gru di *Culmann*

- Nel diagramma del braccio di una gru disegnata da *Culmann*, che qui si riporta nella **Figura seguente a sinistra**, si vede solo una modificazione, dovuta esclusivamente alla forma curva della struttura, delle linee di trazione e compressione già viste nella mensola.
- Nell'asta della gru, la parte concava o interna su cui sporge la testa caricata è la *membratura compressa*, la parte esterna è la *membratura tesa*;
- le **isostatiche di compressione**, partendo dalla superficie caricata, si riuniscono insieme sempre nella direzione della pressione risultante, finché formano un fascio stretto che corre lungo il lato compresso dell'asta;
- mentre le **isostatiche di trazione**, che scorrono all'insù, lungo il lato opposto dell'asta, si allargano nella testa incrociando ortogonalmente le linee di compressione.

# Gru di *Culmann* / Testa del Femore

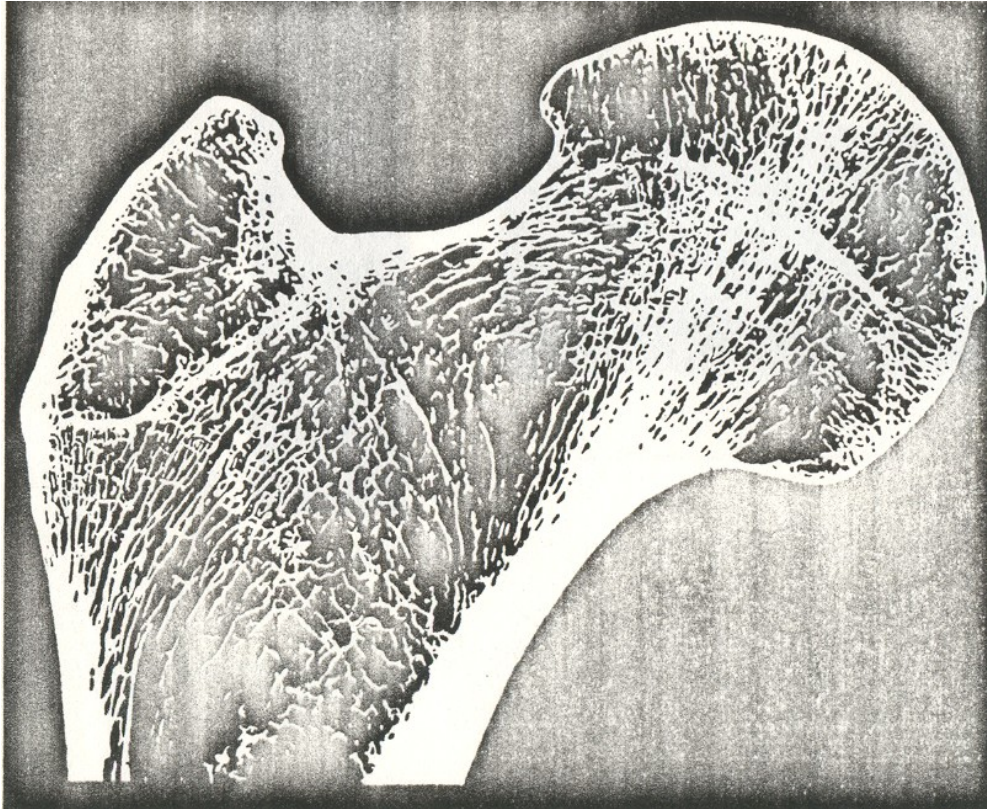


Resistenza dei  
BioMateriali



Sforzo S

# Testa del Femore

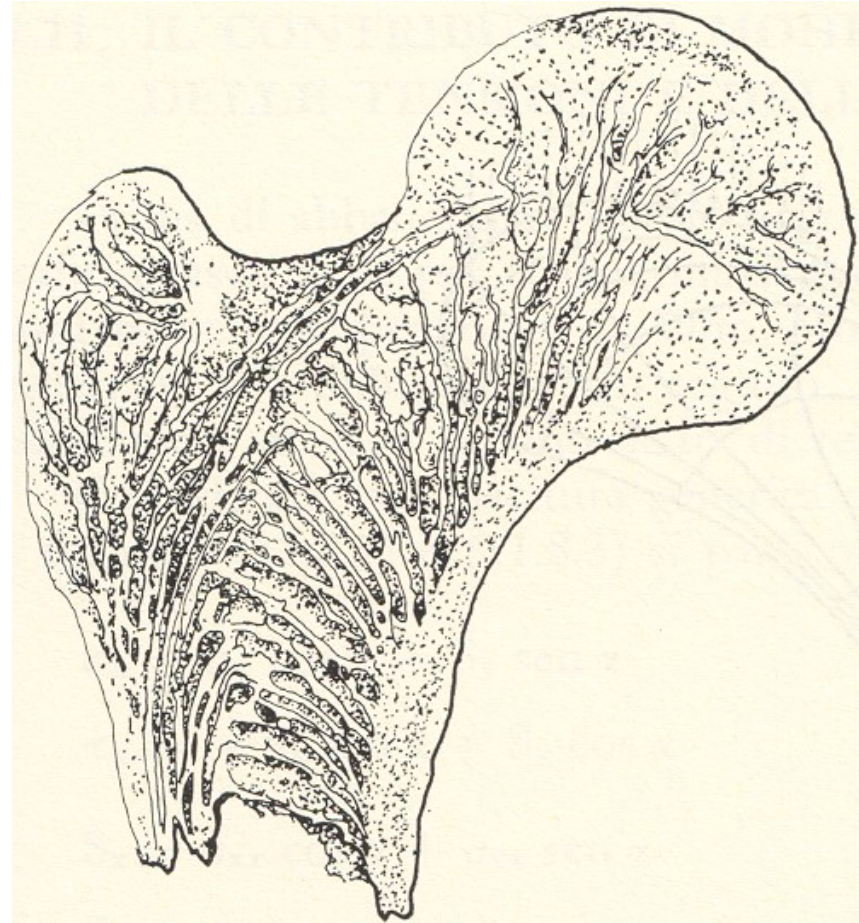


- La *testa* del femore è un po' più complicata nella forma e un po' meno simmetrica della gru schematica di *Culmann*, da cui differisce principalmente per il fatto che il suo carico è diviso in due parti, una parte che poggia sulla *testa* dell'osso, e una parte più piccola che poggia sul *grande trocantere*.
- Ma non si ha difficoltà a vedere che la disposizione anatomica delle *trabecole* segue in modo preciso la distribuzione meccanica delle curve isostatiche o, in altre parole, essa corrisponde perfettamente al digramma teorico della gru.



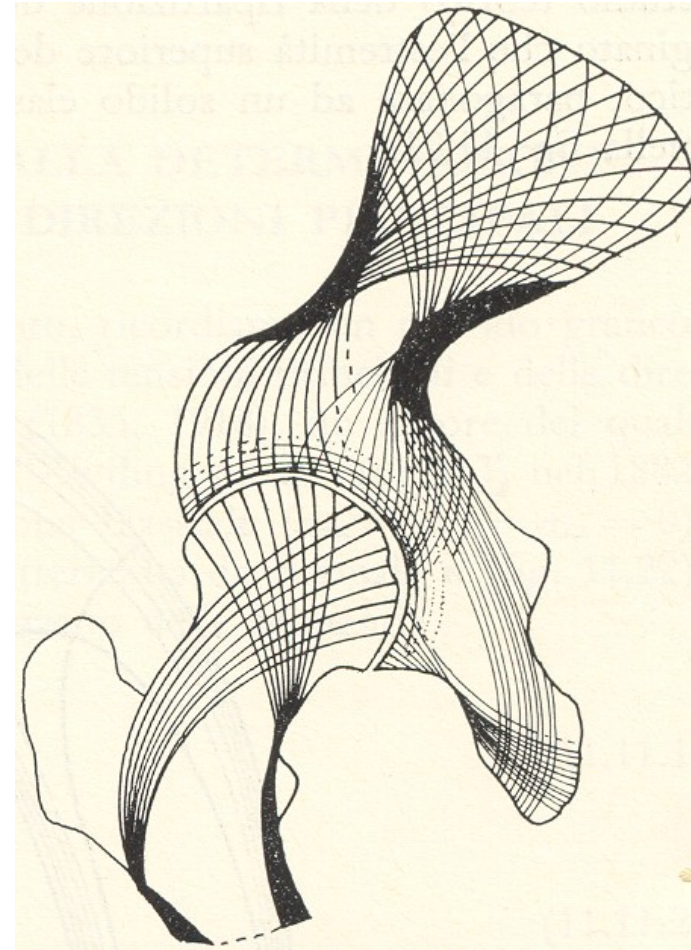
# Epifisi femorale

- Tenendo conto delle diverse situazioni, si può riconoscere la stessa regolarità di disposizione in qualsiasi altro osso che sopporti un peso in direzione sia assiale (compressione) sia trasversale (flessione).



# *Colonnetti* (1941)

- Si riporta di seguito l'opinione espressa in proposito dallo studioso torinese Gustavo *Colonnetti* nel suo celebre testo di *Scienza delle Costruzioni* (1941).
- “In verità la sostanza ossea è sempre disposta secondo *lamine* o *trabecole* più o meno sottili separate da numerose cavità: ed era noto da tempo come a questa particolare struttura si dovesse attribuire la grande resistenza alle sollecitazioni esterne che le ossa presentano in relazione coll'esiguo peso di materiale resistente che esse contengono.”



# Colonnetti (1941)

- In tempi relativamente recenti è stato poi osservato che la disposizione delle *trabecole* ossee non è affatto casuale, ma in modo ammirevole connessa con gli sforzi a cui esse debbono resistere.
- Ciò è confermato non soltanto dal modo con cui tali *trabecole* si formano e si sviluppano nel bambino, ma soprattutto dal modo con cui, nell'uomo già adulto, esse si modificano spontaneamente in quelle Ossa che, per qualsiasi ragione, assunte stabilmente posizioni anormali, vengono ad essere abitualmente sollecitate in modo diverso dal solito.

# Colonnetti

- Nei casi in cui la sollecitazione prevalente è più facilmente individuabile, si è potuto riconoscere che l'andamento delle trabecole ossee segue sensibilmente quello delle linee isostatiche.
- Tra gli esempi più caratteristici cito quello dell'*epifisi* superiore del Femore. In questo, come del resto in tutte le Ossa lunghe, il tessuto compatto si limita ad una guaina che lo riveste completamente: essa ha il massimo spessore nella parte media, o *diafisi*, il cui interno è occupato da una vasta cavità, il *canale midollare*.

# Colonnetti

- Verso le estremità, dalla guaina compatta si dipartono le *trabecole*, disposte in *gettate ad arco*, le quali intersecandosi mutuamente tra loro formano il *tessuto spugnoso* che occupa le *epifisi* dell'osso, su cui, attraverso le articolazioni, si trasmettono le principali forze esterne.
- Nel caso che ci occupa, **la predominate di queste forze è il peso del corpo** che, in posizione normale, grava sulla *testa* del femore.

# Colonnetti

- Per facilitare lo studio teorico della ripartizione degli sforzi interni, il Culmann ha immaginato che l'estremità superiore del femore si potesse, dal punto di vista statico, paragonare ad un solido elastico omogeneo avente il profilo disegnato nella **Figura della Gru**.
- Ridotta la conduzione di carico normale a quello schematicamente ivi indicata, egli ha potuto tracciare le linee isostatiche che si vedono riprodotte nella figura, e constatare la notevole affinità tra il loro andamento e quello delle *trabecole* ossee.

# Colonnetti

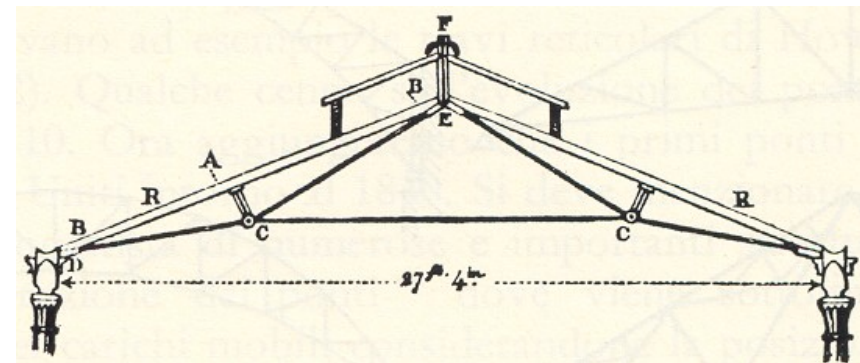
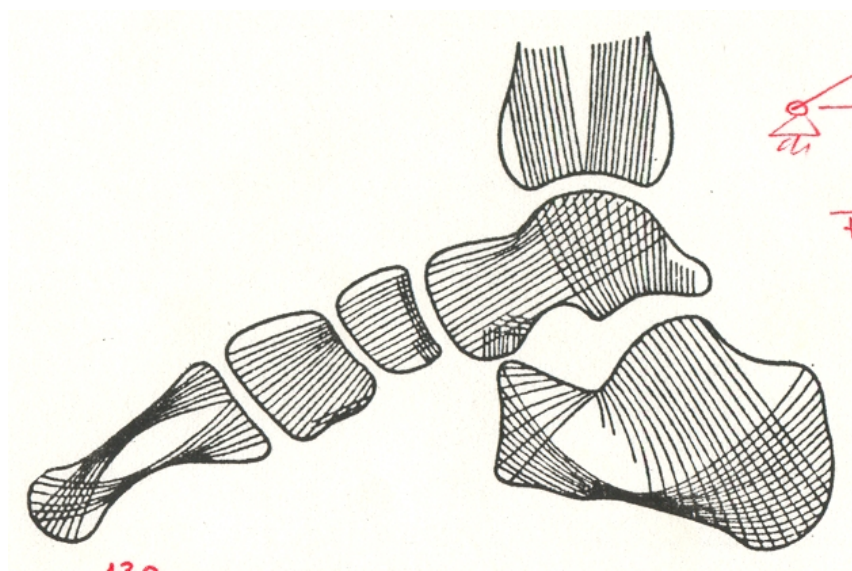
- Non occorre dire che il problema reale è incomparabilmente più complicato non solo per la forma irregolare dell'osso, ma per la continua variabilità della legge di ripartizione con cui lo stesso carico si trasmette attraverso l'articolazione *coxo-femorale*,
- e soprattutto per l'intervento di altre forze, esse pure variabilissime, come sono quelle sviluppate dai vari *muscoli rotatori*, i quali, come è noto hanno le loro inserzioni in corrispondenza del margine superiore e della faccia interna del *grande trocantere*.

# ***Colonnetti***

- Malgrado tutto ciò, ripetiamo, l'affinità sopra accennata sussiste evidentissima. E chi osservi con qualche attenzione la sezione di femore fotograficamente riprodotta (...) [**Figura Epifisi femorale**]
- non potrà che rilevare come in certe regioni, soprattutto in corrispondenza del collo del femore, **l'andamento delle *trabecole ossee* concordi perfettamente con quello delle linee isostatiche trovate da *Culmann***".



# Analogia Piede / Capriata



# Analogia Piede / Capriata

- La disposizione delle *trabecole* è leggibile anche nelle Ossa del Piede nella **Figura precedente a sinistra**.
- In particolare, nell'osso del *Calcagno* una parte del peso che viene a gravare sulla *testa* dell'osso viene trasmesso all'indietro al terreno e una parte in avanti, attraverso l'articolazione con l'osso *Cuboide*, all'arco del piede.
- Così si hanno, come avviene in una *capriata triangolare*, due membrature compresse divergenti, collegate da un membro teso che corrisponde all'asta orizzontale della capriata, **Figura precedente a destra**.

# Adattamento funzionale

- I risultati di ricerche teoriche e sperimentali inducono a pensare che il rimodellamento osseo è dovuto principalmente ad influenze *mecanobiologiche* sull'Osso durante l'*ontogenesi*.
- Ad esempio, per generare la struttura ossea trabecolare non è richiesta alcuna implicita informazione "posizionale" assegnata durante lo sviluppo o codificata nel *genoma*.

# Adattamento funzionale

- Fin qui, trattando degli sforzi e delle deformazioni dovuti alla trazione e alla compressione, si è ommesso di considerare **la componente tangenziale dello sforzo**, che **produce una variazione angolare** tra due fibre ovvero tende a spostare i punti sostanziali facendoli “scorrere” gli uni sugli altri.
- **La componente tangenziale dello sforzo è nulla sulle giaciture ortogonali alle linee isostatiche**, cioè di massima trazione o di minima compressione, ma essa **attinge valori stazionari (massimo e minimo) su piani inclinati di 45° rispetto alle direzioni principali**.
- Anche se non è possibile eliminare del tutto la componente tangenziale dello sforzo, **il pericolo di una rottura dovuta a questa componente dello sforzo si riduce se il materiale della costruzione è disposto lungo le linee isostatiche del sistema**, perché lungo queste linee detta componente è nulla.

# Adattamento funzionale

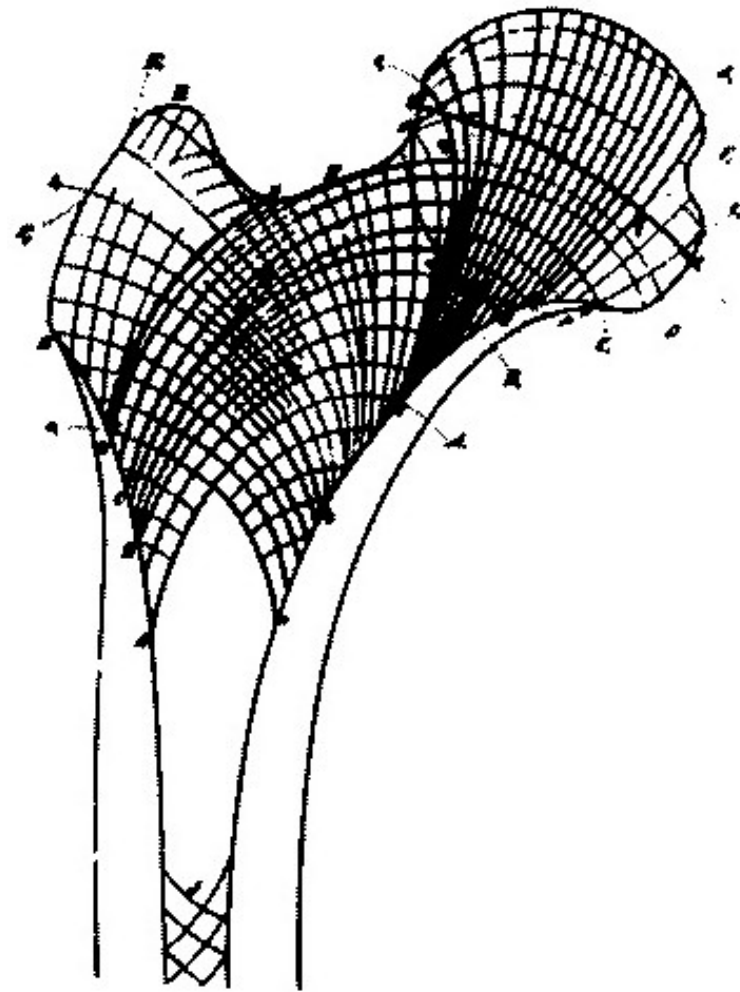
- Per applicare questi principi alla crescita e allo **sviluppo dell'osso**, si deve immaginare una *trabecola* collocata casualmente in qualsiasi direzione nell'interno dell'osso.
- **Se la *trabecola* giace nella direzione di una linea isostatica**, sarà soggetta, ad esempio, a trazione lungo il suo asse longitudinale e a compressione nella direzione trasversale, e quindi **si troverà in una posizione di “minimo disturbo”**;
- **ma se essa è inclinata rispetto alle linee isostatiche, su di essa agirà una componente tangenziale dello sforzo, che tenderà a farle mutare assetto.**

# Adattamento funzionale

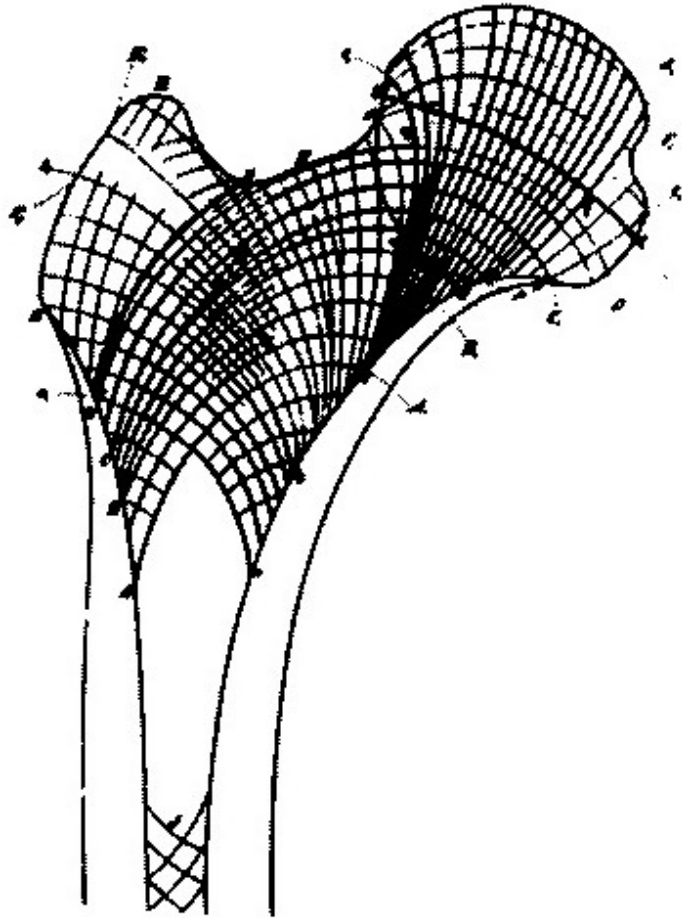
- Nello studiare l'aspetto biologico del fenomeno, si deve sempre ricordare che **l'osso non solo è vivo ma che è anche una struttura altamente "plastica" e rimodellabile**; le *trabecole* continuamente si formano, si deformano, vengono demolite.
- Non è necessario ricorrere alla ereditarietà per spiegare la configurazione e la disposizione delle *trabecole*: infatti si può seguire **la loro formazione in ogni momento della vita, sotto la diretta azione e il controllo delle forze cui il sistema è sottoposto.**
- **Se un osso rotto si risalda in modo tale che le sue parti vengono ad essere in qualche modo spostate dalla primitiva posizione, e quindi le linee isostatiche hanno una nuova distribuzione**, prima che siano passate molte settimane si può osservare che **il sistema *trabecolare* è stato completamente rimodellato, secondo le nuove linee isostatiche del sistema.**

# Adattamento funzionale

- Come J. *Wolff* (1892) fece osservare, **questo sistema di ricostruzione si estende molto lontano dalla zona di rottura**, e pertanto il fenomeno non può essere considerato come un puro accidente dovuto a processi fisiologici della riparazione e della cicatrizzazione;



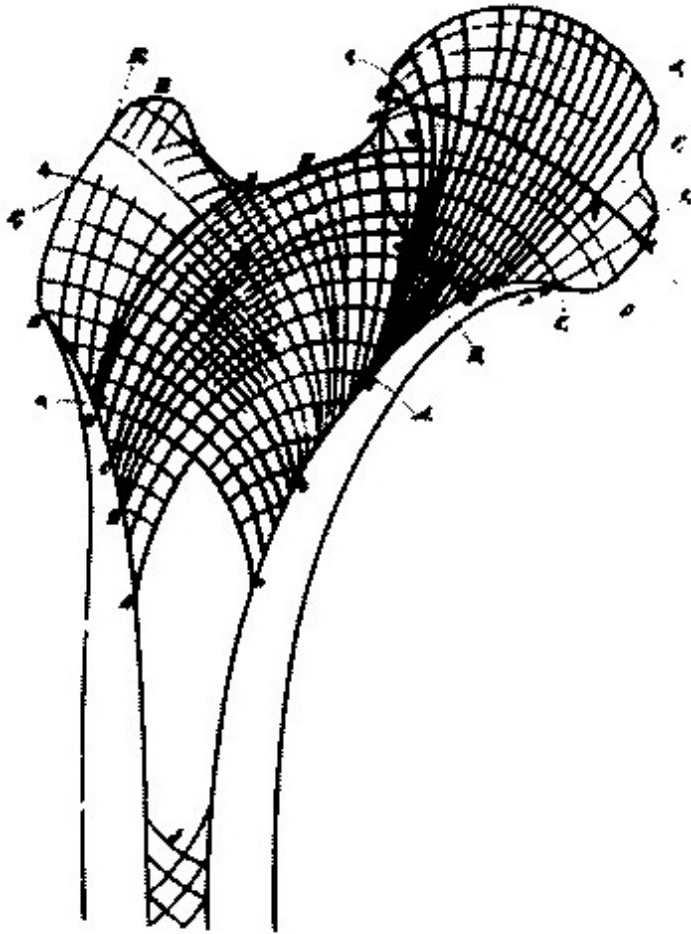
# Adattamento funzionale



- per esempio può capitare che, **dopo una frattura** del corpo dell'osso, **la disposizione delle trabecole si alteri e si ricostruisca completamente anche nelle estremità.**



# Adattamento funzionale

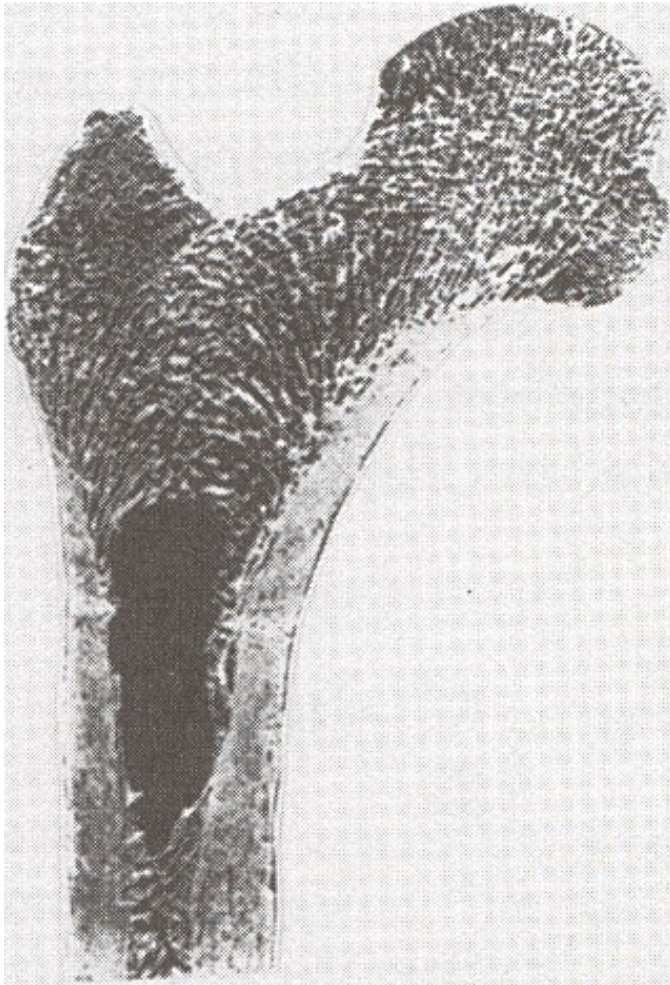


- Inoltre, nei casi di **trapianto dell'osso**, per esempio quando un metacarpo viene ricostruito con porzioni prese dalla parte inferiore dell'ulna, **la velocità con cui l'osso si riplasma è tale che le vecchie strutture dell'osso trapiantato non sono più distinguibili.**

# Adattamento funzionale

- Associata in parte allo stesso fenomeno, e in parte da considerarsi come un fatto separato, è quella importante verità fisiologica che dice che **una condizione di deformazione, provocata da uno sforzo, è uno stimolo alla crescita.**
- Questa constatazione è fondamentale nella biologia teoretica. **Più si cammina, più le soles delle scarpe diventano sottili, ma più si ispessisce invece la pelle della pianta dei piedi**, e ciò significa che **le cellule vive sono stimulate dalla pressione**, o da quella che si chiama usura, **a crescere e a moltiplicarsi.**
- Il chirurgo ortopedico sa, quando fascia un arto fratturato, che la fasciatura ha un effetto molto più importante, e non solo quello di tenere insieme le parti: **la pressione costante che la fasciatura applica all'arto è un diretto stimolo alla crescita e un agente attivo nel processo di riparazione.**

# Adattamento funzionale



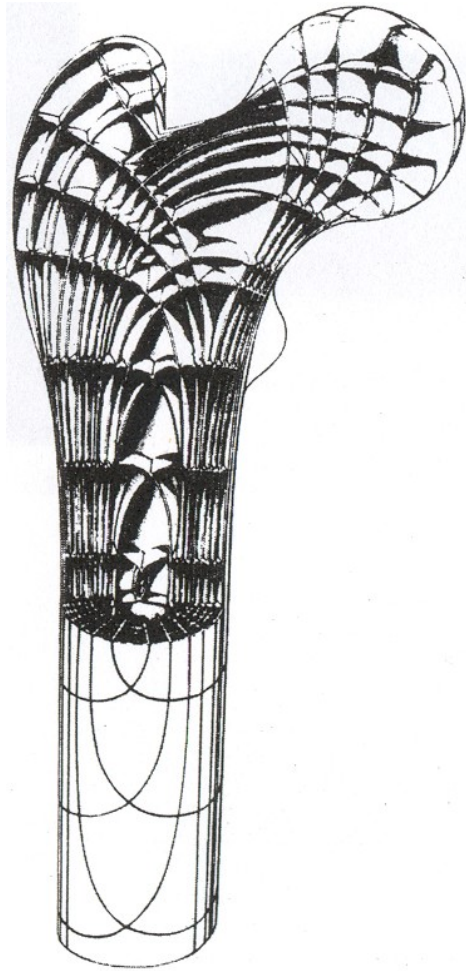
Resistenza dei  
BioMateriali

- I fenomeni della crescita possono essere quindi spiegati dalla tendenza che ha la crescita
  - i) ad essere accelerata dalla deformazione e
  - ii) ad essere orientata della **componente tangenziale dello sforzo** che produce gli effetti di **far scorrere le parti disposte obliquamente rispetto alle linee isostatiche**, lasciando indisturbate le parti disposte parallelamente rispetto ad esse.

# **Roux (1895)**

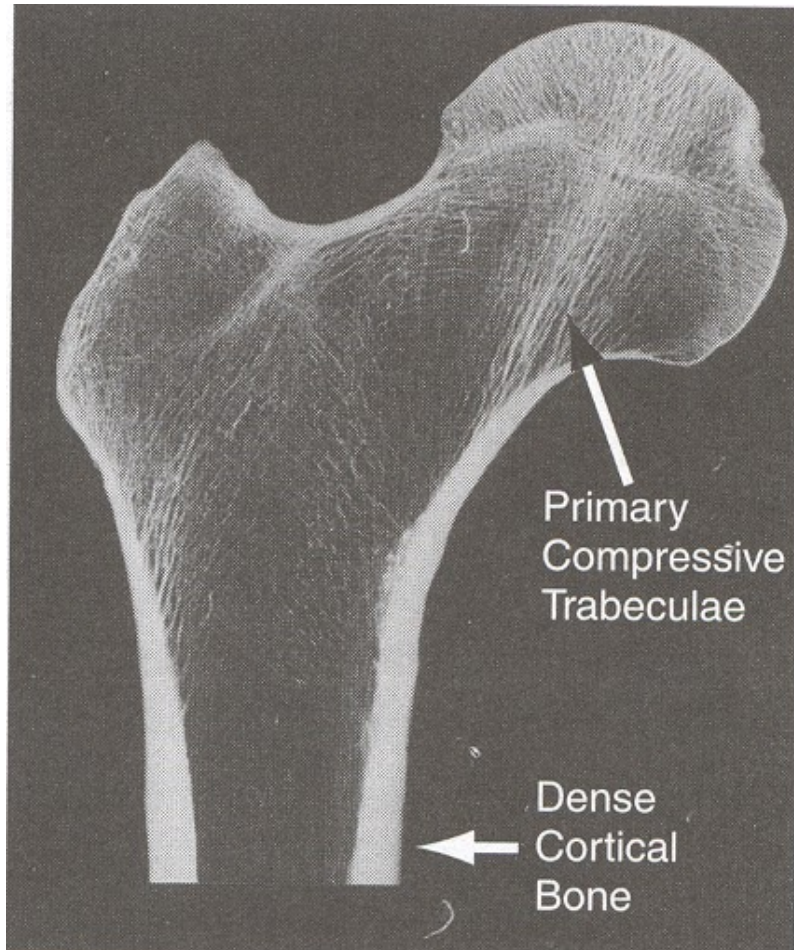
- Per l'Osso, l'anatomista tedesco Wilhelm **Roux** (1850-1924) formulò nel 1895 i **principi**
  - **dell'adattamento funzionale**, che significa lo “adattamento di un organo alla sua funzione mediante la pratica di quest'ultima”, e
  - **del progetto di massimo-minimo**, che significa che “si deve attingere la massima resistenza usando il minimo quantitativo di materiale”.
- **Roux** assume che attraverso il meccanismo di *ipertrofia* e *atrofizzazione*, l'osso si è funzionalmente adattato alle condizioni di vita dell'animale e ha raggiunto il **profilo massimo-minimo**.
- **Roux** suggerì anche che l'osso spugnoso rappresentasse una **struttura di traiettorie**.

# Adattamento funzionale



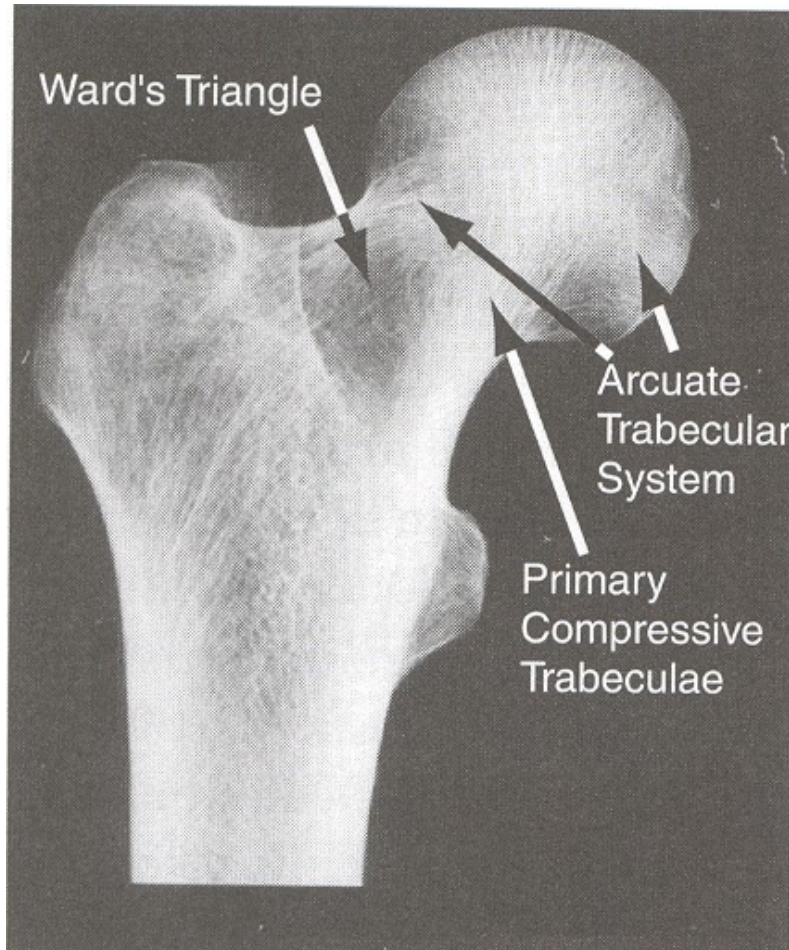
- Studi approfonditi sono stati condotti a partire dalla formulazione di *Roux* per mostrare che essa corrisponde alla realtà.
- *Pauwels* (1948) dimostrò che l'architettura della sostanza spugnosa corrisponde davvero ad un insieme di traiettorie.
- La costruzione teorica di *Kummer* (1972) di un sistema tridimensionale di traiettorie in un modello di femore riproduce la reale struttura dell'osso molto aderentemente.

# Adattamento funzionale



- In una radiografia *sagittale* dell'estremità *prossimale* di un femore di un uomo adulto si notano diversi aspetti morfologici caratteristici.
- Attraverso la *testa* del femore c'è un denso sistema di *trabecole* "comprese" che trasferiscono gli sforzi dalla superficie di contatto superiore fino alla regione *calcarea* della *corteccia mediale*.

# Adattamento funzionale



- Un sistema secondario “arcuato” di *trabecole* si getta ad arco dalla superficie di giunzione *infero-mediale* attraverso il *collo* superiore e nella regione *latero-metafisale*.
- Alla base del collo c'è una regione a bassa densità tra i sistemi “compresso” ed “arcuato”. Quest'area di densità ridotta è denominata “**Triangolo di Ward**”.
- Nella regione *distale* della *metafisi*, l'osso *spugnoso* comincia a scomparire, allorché diventa evidente il denso tronco *corticale* della *diafisi*.

# Adattamento funzionale

- L'Osso spugnoso orienta l'architettura trabecolare in risposta alla Storia quotidiana dello Sforzo. J. *Wolff* (1892) congetturò che l'orientazione trabecolare nell'Osso adattato corrisponde alle direzioni degli Sforzi principali che sono creati da una singola condizione di carico che rappresenta l'usuale carico di un Osso durante un certo periodo di tempo.
- Questo punto di vista sembra essere corretto se i carichi ciclici sono sempre applicati in identiche e coerenti direzioni durante un lungo intervallo di tempo. Nel considerare i carichi su un'articolazione come l'Anca, tuttavia, è chiaro che le direzioni di carico variano sensibilmente con il tempo e dipendono dall'attività fisica che viene svolta. Nessuna singola condizione di carico può generare la ricchezza dell'architettura trabecolare che è prodotta dalla Storia di carico completa.



# Adattamento funzionale

- Per stimare le direzioni della orientazione trabecolare prevalente nell'Osso adattato, si possono **calcolare le intensità e le direzioni degli Sforzi principali per un certo numero di condizioni di carico scelte per rappresentare al meglio la storia di carico quotidiana.** Si possono determinare le intensità degli sforzi normali sui piani variamente orientati in varie posizioni in una regione di Osso. Si calcola poi una media pesata per determinare la tessitura trabecolare nella struttura dell'Osso.
- Una conseguenza di questa idea di mediare nel tempo gli sforzi principali è che diventa possibile che si formi **Osso spugnoso con orientazioni principali che non sono ortogonali una rispetto all'altra.**

# Parametri *invarianti* dello Sforzo

- Dal momento che i valori delle componenti del Tensore di Sforzo dipendono dal Sistema di Riferimento, esse possono essere dette *varianti*.
- Tuttavia, a partire dalle componenti del Tensore di Sforzo si possono calcolare alcuni parametri che hanno valori costanti indipendentemente dal sistema di coordinate che si è usato.
- Questi parametri sono denominati *invarianti dello sforzo*. Due invarianti dello sforzo particolarmente utili sono:
  - la *componente normale sferica*,  $\sigma_s$ , e
  - la *componente tangenziale ottaedrica*,  $\tau_o$ .
- Questi parametri sono valori scalari che possono essere calcolati a partire dagli Sforzi principali.

# Parametri *invarianti* dello Sforzo

- Dal momento che i valori delle componenti del Tensore di Sforzo dipendono dal Sistema di Riferimento, esse possono essere dette *varianti*.
- Tuttavia, a partire dalle componenti del Tensore di Sforzo si possono calcolare alcuni **parametri** che hanno **valori costanti indipendentemente dal sistema di coordinate che si è usato**.
- Questi parametri sono denominati *invarianti dello sforzo*. Due invarianti dello sforzo particolarmente utili sono:
  - la *componente normale sferica*,  $\sigma_s$ , e
  - la *componente tangenziale ottaedrica*,  $\tau_o$ .
- Questi parametri sono **valori scalari** che possono essere **calcolati a partire dagli Sforzi principali**.

# Sforzo *idrostatico*

- La componente normale *sferica* (anche detta *isotropa* o *idrostatica*) dello sforzo è definita come il valore medio degli sforzi principali:

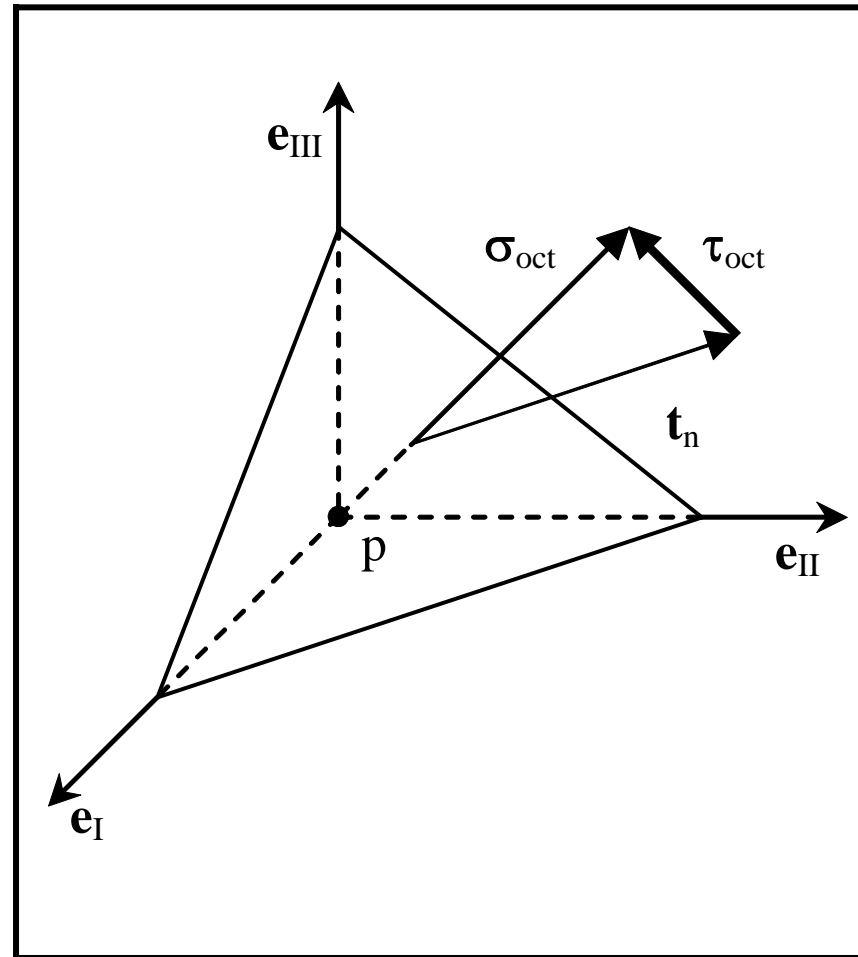
$$\sigma_s = (\sigma_I + \sigma_{II} + \sigma_{III}) / 3$$

# Sforzo *ottaedrico*

- La componente tangenziale *ottaedrica* è lo sforzo tangenziale che agisce sulla “faccia” di un *ottaedro* centrato sugli assi principali (*ottaedro principale*).

# Sforzo *ottaedrico*

- La componente tangenziale *ottaedrica* è lo sforzo tangenziale che agisce sulla “faccia” di un *ottaedro* centrato sugli assi principali (*ottaedro principale*).



# Sforzo *ottaedrico*

- Su di una giacitura di normale  $\mathbf{n}^T \equiv \{n_I, n_{II}, n_{III}\}$  comunque orientata rispetto agli assi principali  $x_I, x_{II}, x_{III}$ , le componenti dello sforzo sono:

$$t_{nI} = \sigma_I \cdot n_I, \quad t_{nII} = \sigma_{II} \cdot n_{II}, \quad t_{nIII} = \sigma_{III} \cdot n_{III}$$

- Nel caso particolare in cui la normale alla giacitura coincide con la trisettrice degli assi principali  $\mathbf{n}_O^T \equiv \{1/(3)^{1/2}, 1/(3)^{1/2}, 1/(3)^{1/2}\}$  si ha:

$$t_{oI} = \sigma_I / (3)^{1/2}, \quad t_{oII} = \sigma_{II} / (3)^{1/2}, \quad t_{oIII} = \sigma_{III} / (3)^{1/2}$$

# Sforzo *ottaedrico*

- Si calcoli ora la componente normale  $\sigma_o$  dello sforzo  $\mathbf{t}_o^T \equiv \{t_{oI}, t_{oII}, t_{oIII}\}$  nella direzione della trisettrice  $\mathbf{n}_o$  mediante il prodotto scalare:

$$\sigma_o = \mathbf{t}_o \cdot \mathbf{n}_o = (\sigma_I + \sigma_{II} + \sigma_{III}) / 3$$

- Il modulo dello sforzo ottaedrico si ottiene per differenza vettoriale tra lo sforzo totale  $\mathbf{t}_o$  e il suo componente normale  $\sigma_o \mathbf{n}_o$ :

$$\begin{aligned} \tau_o &= |\boldsymbol{\tau}_o| = |\mathbf{t}_o - \sigma_o \mathbf{n}_o| = \dots = \\ &= \{[(\sigma_I - \sigma_{II})^2 + (\sigma_I - \sigma_{III})^2 + (\sigma_{II} - \sigma_{III})^2] / 3\}^{1/2} \end{aligned}$$