Alumna: Júlia Folguera Profitós
Tutor: Antonio Closa Xipell

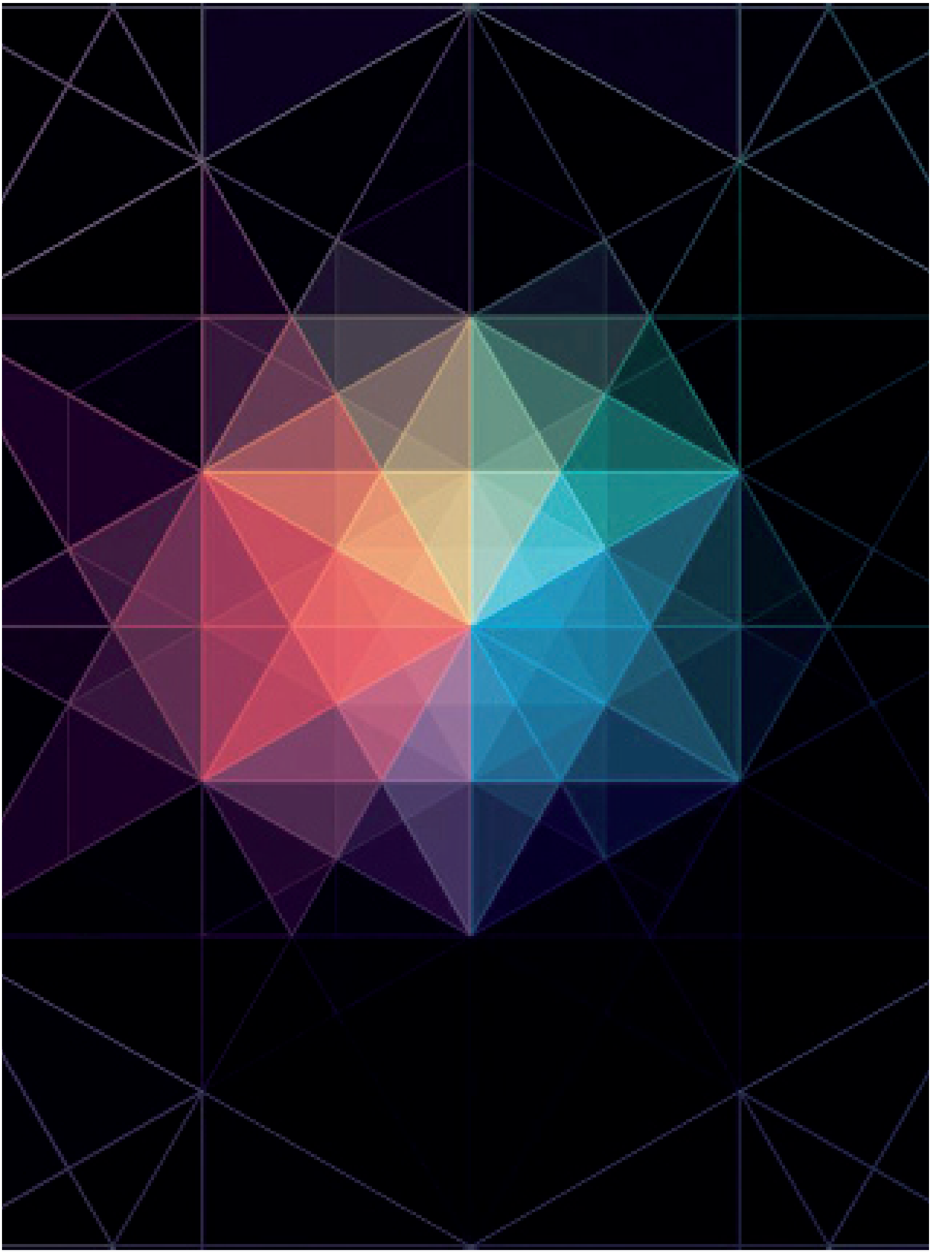
Aproximació a la geometria de la posició

Presentació

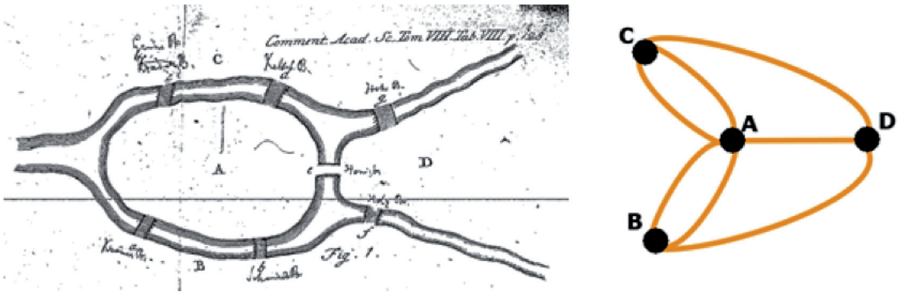
Aquest treball de recerca pretén ser una breu introducció a la teoria dels grafs, una branca de les matemàtiques, a través de dos problemes d'importància històrica: els set ponts de Königsberg i els quatre colors.
Per a cada problema, l'autora s'ha preguntat la seva demostració, i no només això, sinó també la història dels diversos intents de demostració abans d'aconseguir-se, ja que aquests poden ser tan útils com la mateixa demostració, i quin servei real pot fer la resolució dels problemes a la vida quotidiana.
El títol del treball és un homenatge a com va anomenar les noves matemàtiques Leonard Euler. Aquesta nova branca estudiava la relació o posició de diversos punts i arestes, però no li interessaven les distàncies, per això s'anomena geometria de la posició. Aquest nom s'ha perdut, i actualment s'anomena teoria dels grafs.

Metodologia

Entendre demostracions no és senzill. Per entendre els problemes, he necessitat la lectura de diversos llibres i revistes matemàtiques.
En el treball, per a cada un dels problemes, es presenta primer el problema, s'expli-



Il·lustració 1. Mapa de Königs-
berg per Euler i graf del mapa.



quen les formes més importants d'atacar el problema i d'intentar demostrar-lo cronològicament, s'ofereix el plantejament i la solució d'alguns problemes sorgits del primer i, finalment, problemes pràctics d'optimització aplicant conceptes introduïts anteriorment.
S'ha intentat mantenir el rigor de les matemàtiques, però utilitzant un llenguatge molt més lleuger de l'habitual de les matemàtiques d'un cert nivell, per amenitzar el treball. Totes les demostracions que han pogut ser demostrades mitjançant els coneixements de Batxillerat, ho han estat en el treball complet, però aquí no n'apareix cap, per la brevetat necessària d'un resum.

Cos del treball
El treball comença amb el problema dels set ponts de Königsberg, per ser considerat aquest el primer problema que es va resoldre amb la teoria dels grafs (tot i que Leonard Euler, qui ho va demostrar el 1735, no va utilitzar cap graf). El problema pregunta si es pot fer un recorregut travessant un sol cop per cada un dels set ponts de la ciutat de Königsberg (actualment Kaliningrad).
Aprofitant-se del problema, s'introdueixen els conceptes bàsics de graf, connexió

Il·lustració 2. Graf i graf dual de Catalunya amb 4 colors.

i grau del vèrtex; així com els recorreguts, senderons i circuits eulerians. Després d'explicar la seva resolució i la generalització demostrada per a qualsevol graf, s'explica el problema del carter xinès, un problema que s'aplica a la vida real i que busca la ruta més òptima que hauria de fer un carter per tots els carrers de la ciutat (repetint els mínims metres possibles) i que necessita els conceptes introduïts anteriorment per saber-se resoldre.

El problema dels quatre colors té un enunciat que sembla, igual que l'anterior, un veritable joc per a nens, i és que demana si per a qualsevol mapa de diverses regions són necessaris i suficients quatre colors per pintar-lo de manera que dues regions adjacents no tinguin el mateix color. El problema és un dels més curiosos de les matemàtiques, ja que malgrat la seva senzillesa es va tardar més de cent anys a demostrar-se la seva certesa, i part de la comunitat científica va tardar encara més a acceptar que havia estat demostrat, perquè tal i com veurem, es va utilitzar un suport mai utilitzat abans en les matemàtiques: l'ordinador.

Francis Guthrie, el 1852 va aconseguir pintar un mapa de la Gran Bretanya amb quatre colors, i va plantejar-se si aquest fet es podia generalitzar per a qualsevol mapa. Va plantejar la conjectura al seu germà, que, al seu torn, la va plantejar al professor de Morgan, qui demostrà la necessitat de quatre colors (és a dir, que alguns mapes

no es poden pintar amb menys de quatre colors).
Anys més tard, Arthur Cayley reviu el problema, demostrant que només és necessari resoldre'l per a mapes cúbics, que són aquells que en cada punt fronterer (format per la unió de fronteres) tenen tres línies frontereres, o en llenguatge de la teoria dels grafs, que cada vèrtex té grau 3, on el grau és la quantitat d'arestes incidents en un vèrtex.
L'any 1880 es publicà la «demostració» del problema per part d'Alfred Kempe. Era una demostració elegant i senzilla que va agradar i va ser acceptada per tothom, fins al cap d'onze anys, quan Heawood va publicar un contraexemple que va fer caure tota la demostració, de tal manera que encara ara els matemàtics intenten reformular la demostració de Kempe perquè sigui certa.
Ara bé, malgrat no ser certa la demostració, es va basar en els mateixos principis en què es basaria la demostració que finalment s'ha trobat com a bona. Existeix un conjunt finit de configuracions (regió o conjunt de regions) que han d'aparèixer en qualsevol mapa. Concretament, Kempe va demostrar, fent ús de la fórmula d'Euler per als poliedres (cares – arestes + vèrtexs = 2), que qualsevol mapa ha de contenir una regió amb 5 o menys regions veïnes. Coneixent això, demostra que qualsevol mapa que conte un digon (regió amb dos veïns), un triangle (amb tres veïns), un quadrat i finalment un pentàgon, és colorable amb quatre colors. Va ser en el pentàgon que es va equivocar.
Tot plegat ens ha ajudat a incorporar els conceptes d'arbre, graf dual, graf planari, nombre cromàtic o cadenes de Kempe, entre molts altres.

A continuació s'expliquen algunes demostracions de Heawood de problemes alternatius que es plantejava mentre estudiava aquest. Es demostren les condicions que ha de complir un mapa perquè siguin necessaris i suficients dos colors per pintar-lo, així com el teorema dèbil del problema dels quatre colors: el problema dels cinc colors, que utilitza un procediment molt semblant al dels quatre colors.
En trobar-se la demostració de Kempe falsa es va succeir un període on es van proposar demostracions que, tot i que no s'han provat gaire encertades, han ajudat a desenvolupar moltíssim la teoria dels grafs. La més important, probablement, és la proposada per Peter Guthrie Tait, qui demostra que pintar amb quatre colors les cares d'un graf planar equival a pintar amb tres colors les seves arestes. Va voler demostrar el teorema a partir d'aquest lema, però encara ningú no se n'ha sortit.
Els coneixements que tenia en aquest punt del treball em van ser molt útils i pràctics, perquè em van permetre elaborar un horari per als exàmens de final de trimestre de la meva escola i curs, amb les premisses que cap alumne podia fer dos exàmens alhora i n'havien de fer, com a màxim, tres per dia, més alguns altres paràmetres, com intentar no fer dos exàmens considerats difícils el mateix dia. Finalment, l'horari es va aplicar durant un trimestre, amb un cert èxit. A més, s'expliquen

altres problemes d'optimització, com el problema d'assignació, que busca la combinació més òptima de feines-candidats; o el problema del viatjant de comerç, possiblement el problema més estudiat en la teoria dels grafs, que busca la forma òptima de recórrer tots els vèrtexs d'un graf (el cicle hamiltonià més òptim per recórrer totes les capitals d'Europa amb el mínim temps possible, per exemple).

Finalment, i tancant el període de propostes creatives, trobem la de Birkhoff, qui proposa la construcció d'un polinomi cromàtic $P(\lambda)$, que és un polinomi que compta de quantes maneres diferents es pot pintar un mapa amb λ colors. Si s'hagués demostrat que per a qualsevol mapa $P(4) > 0$, s'hauria demostrat el teorema. Ara bé, només es va poder demostrar per a $\lambda \geq 5$, sent λ qualsevol nombre real, enter o no; fet que ens deixa amb l'encara ara investigat problema REAL dels quatre colors, que pregunta què passa amb els nombres no enters entre 4 i 5. A més, s'explica una curiosa relació entre aquest polinomi i el nombre d'or, considerat la proporció perfecta pels antics grecs.

Arribem al final de la història del problema. En el treball s'aprofundeix en els ja introduïts conjunts inevitables (conjunt de configuracions tals que qualsevol mapa ha de contenir almenys una configuració del conjunt) i configuracions reductibles, que és saber que es pot acolorir el mapa que conté una configuració mitjançant un mapa més simple, amb menys regions.

La demostració final es va basar en això: hi ha uns conjunts inevitables de configuracions tals que sabem del cert que qualsevol graf n'ha de dur almenys una, i que per tant un contraexemple mínim també l'ha de dur, però si sabem que la configuració és reductible, és a dir que se'n pot deduir que és colorable amb quatre colors a través d'una versió del mapa més simple a través d'inducció, llavors aquest contraexemple mínim no podria existir, i en conseqüència no existiria cap mapa que no pogués ser colorable amb quatre colors.

L'etapa final del problema es va caracteritzar per una mena d'esprint entre diversos matemàtics i informàtics per la resolució del problema, que finalment es va trobar en mans de Appel i Haken, el 1976, al cap de 125 anys d'ençà que Guthrie havia plantejat el problema, i van necessitar 1.482 configuracions.

Aquest va ser el primer problema que va utilitzar, de forma massiva, l'ordinador, en un temps on la majoria de matemàtics ni tan sols no en tenien. La seva acollida va ser molt freda, i va caldre que vinguessin altres demostracions millorades, com les de Neil Robertson, Daniel Sanders, Paul Seymour i Robin Thomas, perquè la majoria de matemàtics l'acceptessin com a bona.

Finalment, oferim una secció de problemes sorgits a partir d'aquest, com la demostració que qualsevol mapa sobre el tor (figura matemàtica com un dònut) necessita i li són suficients set colors per pintar-lo, o que en calen sis sobre la cinta de Möbius o la botella de Klein.

També expliquem altres problemes encara ara no resolts, com el dels imperis, que demana «quants colors són necessaris i suficients per pintar qualsevol mapa constituït per països formats per k regions separades entre elles, de manera que dos països adjacents en alguna de les seves regions estiguin pintats de colors diferents?». O el problema de la Terra-Lluna, molt semblant a l'anterior, però on cada regió a la Terra té k colònies a la Lluna.
Acabant ja el treball, i veient que, malgrat les dificultoses demostracions, els conceptes i enunciats dels problemes eren senzills, vaig plantejar-me portar aquesta branca de les matemàtiques en una classe als alumnes de primer d'ESO del meu centre. A través de jocs, alguns dels quals innovadors i diferents, vaig introduir els principals conceptes de la teoria, tot fent gaudir els alumnes.

Conclusions

He pogut entendre les demostracions dels problemes, així com conèixer i aplicar els conceptes a la realitat. A més, m'he adonat encara més de la simbiosi entre les matemàtiques i la vida real: la vida real ofereix problemes a les matemàtiques, amb accions molt quotidianes, com el passeig dominical dels ciutadans de Königsberg, i les matemàtiques retornen el favor a la realitat quotidiana a través de l'aplicació dels conceptes per millorar situacions, com va succeir en l'elaboració de l'horari d'exàmens.
Cal, com a mínim, esmentar la gran importància històrica dels dos problemes plantejats en el treball. El primer, els set ponts de Königsberg, presentat en un moment en què les matemàtiques significaven poc més que càlculs, va significar una abstracció molt gran, tan gran com per crear una nova branca de les matemàtiques, la topologia. El segon, els quatre colors, va iniciar el canvi de paradigma en com fer les demostracions: es va passar del paper i la ploma cap a l'assistència de l'ordinador.

Bibliografia

Anotar totes les fonts del treball seria impossible per l'extensió disponible. Ara bé, cal mencionar les més importants. — GIMBERT, J.; MORENO, R.; RIBÓ, J. M.; VALLS, M. Apropament a la teoria de grafs i els seus algorismes. Universitat de Lleida, 1998. —WILSON, R. Four Colors Suffice: how the map problem was solved. Revised color edition. Princeton University Press, 2014. — <http://mathworld.wolfram.com/> —Euler, L. Solutio Problematis ad Geometriam Situs Pertinentis. 1736 <http://eulerarchive.maa.org/docs/originals/E053.pdf>.