Conjuntos convexos

Objetivos. Demostrar las propiedades básicas de los conjuntos convexos en un espacio vectorial real.

Prerrequisitos. Combinaciones convexas de vectores en un espacio vectorial real, la envoltura convexa del subconjunto de un espacio vectorial real.

En este tema suponemos que V es un espacio vectorial real o complejo. En el estudio de conjuntos convexos siempre nos restringimos a escalares reales. En otras palabras, tratamos V como un espacio vectorial real.

1 Definición (conjunto convexo)**.** Sea V un espacio vectorial real. Un conjunto $A \subseteq V$ se llama *convexo* si para cada par de vectores $a, b \in A$ y cada λ en $[0, 1]$ el vector $(1-\lambda)a+\lambda b$ pertenece al conjunto A.

En otras palabras, A se llama convexo, si contiene las combinaciones convexas de los pares de sus elementos: $\operatorname{conv}_2(A) \subseteq A$. En realidad, como muestra la siguiente proposición, el conjunto convexo contiene las combinaciones convexas de cualquier cualquier lista de sus elementos.

2 Proposición (un conjunto convexo coincide con su envoltura convexa)**.** *Sea $A \subseteq V$ un conjunto convexo. Entonces* $\operatorname{conv}(A) = A$.

Demostración. Por un lado, $A \subseteq \operatorname{conv}(A)$. Esta contención se cumple para cualquier conjunto, no necesariamente convexo.

Para cada m en $\mathbb{N}$, $\operatorname{conv}_m(A) \subseteq A$. Esta afirmación se demuestra fácilmente por inducción, usando una propiedad de las combinaciones convexas que demostramos antes: si $a_1, \ldots, a_{m+1} \in A$ y $w \in \operatorname{conv}(a_1, \ldots, a_m)$, entonces existe $u \in \operatorname{conv}(a_1, \ldots, a_m)$ tal que $w \in \operatorname{conv}(u, a_{m+1})$.

Finalmente, concluimos que $\operatorname{conv}(A) = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} \operatorname{conv}_m(A) \subseteq A$. □

3 Proposición (la intersección de conjuntos convexos es convexa)**.** *Sea* $\mathcal{A}$ *un conjunto de subconjuntos convexos de* V. *Pongamos*

$$B = \cap\mathcal{A} = \{x \in V\colon \quad \forall A \in \mathcal{A} \quad x \in A\}.$$

Entonces B *es un conjunto convexo.*

Idea de demostración. En la definición del conjunto convexo se usa solamente el cuantificador $\forall$ (no aparece el cuantificador $\exists$), y en la definición de la intersección de una colección de conjuntos también se utiliza solamente el cuantificador $\forall$. Dos cuantificadores $\forall$ conmutan. □

4 Proposición (la envoltura convexa de cualquier conjunto es un conjunto convexo)**.** *Sea* $X \subseteq V$. *Entonces el conjunto* $\operatorname{conv}(X)$ *es convexo.*

Demostración. Sean $a, b \in \operatorname{conv}(X)$ y sea $c \in \operatorname{conv}(a, b)$. Entonces existen $p, q \in \mathbb{N}$, $x_1, \ldots, x_p \in X$, $y_1, \ldots, y_q \in X$ tales que $a \in \operatorname{conv}(x_1, \ldots, x_p)$, $b \in \operatorname{conv}(y_1, \ldots, y_q)$. Como demostramos antes, esto implica que $c \in \operatorname{conv}(x_1, \ldots, x_p, y_1, \ldots, y_q)$, así que $c \in \operatorname{conv}(X)$. □

El siguiente teorema abarca varios resultados anteriores.

5 Teorema (criterio de convexidad de un conjunto en términos de su envoltura convexa)**.** *Sea* $X \subseteq V$. *Entonces* X *es convexo si y sólo si* $\operatorname{conv}(X) = X$.

Demostración. Se sigue de las proposiciones anteriores. □

6 Proposición (la envoltura convexa está contenida en cualquier conjunto convexo que contiene al conjunto original)**.** *Sea* $X \subseteq X$ *y sea* $A \subseteq V$ *un conjunto convexo tal que* $X \subseteq A$. *Entonces* $\operatorname{conv}(X) \subseteq A$.

Demostración. Por la monotonía de conv, tenemos $\operatorname{conv}(X) \subseteq \operatorname{conv}(A)$. Como A es convexo, por la Proposición 2 tenemos $\operatorname{conv}(A) = A$. Concluimos que $\operatorname{conv}(X) \subseteq A$. □

En la siguiente proposición comparamos subconjuntos de V por contención (no por la cardinalidad).

7 Proposición (la envoltura convexa de un conjunto es el mínimo entre todos los conjuntos convexos que lo contienen)**.** *Sea* $X \subseteq V$. *Entonces* $\operatorname{conv}(X)$ *es el mínimo elemento de la colección*

$$\big\{A \subseteq V\colon \quad X \subseteq A \quad \wedge \quad A \text{ es convexo}\big\}.$$

Demostración. Se sigue del hecho $A \subseteq \operatorname{conv}(A)$ y de las Proposiciones 4 y 6. $\square$

8 Proposición (la envolutura convexa como la intersección de cierta colección de conjuntos convexos)**.** *Sea $X \subseteq V$. Pongamos*

$$\mathcal{C} \coloneqq \big\{ A \subseteq V : \quad A \text{ es convexo} \quad \wedge \quad X \subseteq A \big\}.$$

Entonces $\operatorname{conv}(X) = \cap\mathcal{C}$.

9 Proposición (la operación "envoltura convexa" tiene propiedad idempotente)**.** *Sea $X \subseteq V$. Entonces*

$$\operatorname{conv}(\operatorname{conv}(X)) = \operatorname{conv}(X).$$

10 Ejercicio. Demostrar la Proposición 9.