Convexidad y espacios L^p

Problemas para examen

Conjuntos convexos

1 Problema (Todos los subconjuntos convexos del eje real son intervalos)**.** Sea X un subconjunto convexo de $\mathbb{R}$. Denotamos por a y b ($a, b \in \overline{\mathbb{R}}$) su ínfimo y supremo:

$$a \coloneqq \text{ínf}(X), \qquad b \coloneqq \sup(X).$$

Demuestre que $(a, b) \subset X$.

Funciones convexas

2 Problema (Criterio de la convexidad de una función en términos de diferencias divididas del primer orden)**.** Sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo y sea $f\colon I \to \mathbb{R}$ una función. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) f es convexa $\smile$;

(b) $\Delta_f(x_1, x_2) \le \Delta_f(x_2, x_3)$ para todos $x_1, x_2, x_3 \in I$ tales que $x_1 < x_2 < x_3$;

(c) $\Delta_f(x_1, x_2) \le \Delta_f(x_1, x_3)$ para todos $x_1, x_2, x_3 \in I$ tales que $x_1 < x_2 < x_3$;

(d) $\Delta_f(x_1, x_3) \le \Delta_f(x_2, x_3)$ para todos $x_1, x_2, x_3 \in I$ tales que $x_1 < x_2 < x_3$.

3 Problema (Criterio de la convexidad de una función en términos de diferencias divididas del segundo orden)**.** Sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo y sea $f\colon I \to \mathbb{R}$ una función. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) f es convexa;

(b) $\Delta_f(x_1, x_2, x_3) \geq 0$ para todos puntos diferentes $x_1, x_2, x_3 \in I$.

4 Problema (Teorema (criterio de la convexidad de una función en términos de su primera derivada))**.** Sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo y sea $f\colon I \to \mathbb{R}$ una función continua en I y derivable en $\operatorname{int}(I)$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) f es convexa;

(b) f' es creciente.

5 Problema (Corolario (criterio de la convexidad de una función en términos de su segunda derivada))**.** Sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo y sea $f\colon I \to \mathbb{R}$ una función continua en I y dos veces derivable en $\operatorname{int}(I)$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) f es convexa;

(b) $f''(x) \geq 0$ para todo $x \in \operatorname{int}(I)$.

6 Problema (Derivadas laterales de una función convexa)**.** Sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo, sea $f\colon I \to \mathbb{R}$ una función convexa y sea $c \in I$.

1. Demuestre que si c no es el extremo izquierdo de I, entonces
$$\lim_{x \to c^-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \sup_{\substack{x<c \\ c\in I}} \frac{f(x) - f(c)}{x - c},$$
y este supremo pertenece al intervalo $(-\infty, +\infty]$.

2. Demuestre que si c no es el extremo derecho de I, entonces
$$\lim_{x \to c^+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \inf_{\substack{x>c \\ c\in I}} \frac{f(x) - f(c)}{x - c},$$
y este ínfimo pertenece al intervalo $[-\infty, +\infty)$.

3. Demuestre que si $c \in \operatorname{int}(I)$, entonces
$$-\infty < f'_{izq}(c) \leq f'_{der}(c) < +\infty.$$

7 Problema (Existencia de una recta básica de la gráfica de una función convexa)**.** Sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo, sea $c \in \operatorname{int}(I)$ y sea $f\colon I \to \mathbb{R}$ una función convexa. Demuestre que existe un número $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que para todo $x \in I$ se cumple la desigualdad
$$f(x) \geq \alpha(x - c) + f(c).$$

8 Problema (Desigualdad de Jensen)**.** Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida tal que $\mu(X) = 1$, sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo, sea $f \in L^1(X, \mu, I)$ y sea $\varphi\colon I \to \mathbb{R}$ una función convexa. Demuestre que

$$\varphi\left(\int_X f\,d\mu\right) \le \int_X \varphi \circ f\,d\mu.$$

9 Problema (Desigualdad de Hardy)**.** Sea $f \in L^p(\mathbb{R}_+, \mu, \mathbb{R}_+)$, donde $p \in (1, +\infty)$ y μ es la medida de Lebesgue. Definamos $g\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ mediante la fórmula

$$g(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt.$$

Demuestre que

$$\int_0^{+\infty} g(x)^p\,dx \le \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \int_0^{+\infty} f(x)^p\,dx.$$

Desigualdades de Young, Hölder y Minkowski

10 Problema (Convexidad de la función exponencial)**.** Usando el criterio de términos de la segunda derivada demuestre que la función exponencial exp es convexa. Demuestre que para todos $x, y \ge 0$ y todos $\alpha, \beta > 0$ tales que $\alpha + \beta = 1$ se cumple la desigualdad

$$x^\alpha y^\beta \le \alpha x + \beta y.$$

11 Problema (Desigualdad de Young)**.** Sean $a, b \ge 0$ y sean $p, q > 1$ tales que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Demuestre que

$$ab \le \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

12 Problema (El caso de igualdad en la desigualdad de Young)**.** Sean $p, q > 1$ tales que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, y sean $a, b \ge 0$. Determine qué condición deben satisfacer a y b para que se cumpla la igualdad

$$ab = \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

13 Problema (Desigualdad de Hölder)**.** Enuncie y demuestre la desigualdad de Hölder.

14 Problema (El caso de igualdad en la desigualdad de Hölder)**.** Sean $p, q > 1$ tales que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, y sean $f, g \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty))$ tales que $0 < \|f\|_p < +\infty$, $0 < \|g\|_q < +\infty$ y

$$\|fg\|_1 = \|f\|_p \, \|g\|_q.$$

Demuestre que existe $\alpha > 0$ tal que en μ-casi todas partes se cumple la igualdad $f^p = \alpha g^q$.

15 Problema (El teorema inverso de Hölder.)**.** Sean $p, q > 1$ tales que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, y sea $f \in L^p(X, \mathcal{F}, \mu, \mathbb{C})$ tal que $\|f\|_p > 0$. Construya $g \in L^q(X, \mathcal{F}, \mu, \mathbb{C})$ tal que $\|g\|_q = 1$ y $\|fg\|_1 = \|f\|_p$.

16 Problema (Desigualdad de Minkowski)**.** Enuncie y demuestre la desigualdad de Minkowski.

17 Problema. Sea $p \in [1, +\infty)$. Determine cuándo la desigualdad de Minkowski se convierte en una igualdad. En otras palabras, encuentre una condición necesaria y suficiente para que $\|f + g\|_p = \|f\|_p + \|g\|_p$.

18 Problema. Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida tal que $\mu(X) = 1$, sean $f, g \colon X \to (0, +\infty)$ funciones positivas μ-medibles tales que $f(x)g(x) \geq 1$ para todo $x \in X$. Demuestre que

$$\int_X f \, d\mu \cdot \int_X g \, d\mu \geq 1.$$

Supremo esencial

19 Problema (Acerca de la definición del supremo esencial de una función)**.** Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida y sea $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$. Denotemos por c al ínfimo del conjunto

$$B = \Big\{ b \in [0, +\infty] \colon \ \mu\big(\{x \in X \colon \ f(x) > b\}\big) = 0 \Big\}.$$

Demuestre que $c \in B$, esto es, $f(x) \overset{\mu\text{-c.t.p.}}{\leq} c$.

20 Problema (Otra descripción del supremo esencial de una función)**.** Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida y sea $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$. Sea c el supremo esencial de f y sea

$$A = \Big\{ \alpha \in [0, +\infty] \colon \ \mu\big(\{x \in X \colon \ f(x) \geq \alpha\}\big) > 0 \Big\}.$$

Demuestre que $c = \sup(A)$.

21 Problema (Propiedad subaditiva del supremo esencial)**.** Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida y sean $f, g \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$. Demuestre que

$$\operatorname{ess\,sup}(f+g) \leq \operatorname{ess\,sup}(f) + \operatorname{ess\,sup}(g).$$

Rango esencial y supremo esencial (tareas adicionales)

Se supone que $(X, \mathcal{F}, \mu)$ es un espacio de medida.

22 Definición (Definición (rango esencial))**.** Sea $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C})$. El *rango esencial* de f se define de la siguiente manera:

$$\mathcal{ER}(f) = \Big\{ w \in \mathbb{C}\colon \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \mu\big(\{x \in X\colon\ |f(x) - w| < \varepsilon\}\big) > 0 \Big\}.$$

23 Problema. Sea $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C})$. Demuestre que el $\mathcal{ER}(f)$ es cerrado.

24 Problema. Sea $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C})$. Demuestre que

$$\operatorname{ess\,sup} |f| = \sup\{|w|\colon\ w \in \mathcal{ER}(f)\}.$$

Espacios L^p

25 Problema. Explique la definición de los espacios $L^p(X, \mu)$, donde $1 \leq p \leq +\infty$.

26 Problema. Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida tal que $\mu(X) = 1$, sean $p, r \in [1, +\infty)$ tales que $p < r$ y sea $f \in L^r(X, \mu, \mathbb{C})$. Demuestre que $f \in L^p(X, \mu, \mathbb{C})$ y

$$\|f\|_p \leq \|f\|_r.$$

27 Problema (La convergencia en $\boldsymbol{L^p}$ implica la convergencia en medida en el caso de una medida finita)**.** Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida finita, sea $p \in [1, +\infty)$ y sean $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset L^p(X, \mu, \mathbb{C})$, $g \in L^p(X, \mu, \mathbb{C})$ tales que $\|f_n - g\|_p \to 0$. Demuestre que

$$f_n \xrightarrow{\mu} g.$$

28 Problema **(Propiedad subaditiva de la pseudonorma en $\boldsymbol{L^\infty}$).** Escriba la definición de la pseudonorma $\|\cdot\|_\infty$ y demuestre que esta cumple con la propiedad subaditiva.

29 Problema **(La norma $\boldsymbol{\|\cdot\|_\infty}$ como el límite de las normas $\boldsymbol{\|\cdot\|_p}$).** Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida finita y sea $f \in L^\infty(X, \mu)$. Demuestre que

$$\lim_{p \to +\infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty.$$

Sugerencia: en una parte de la solución puede ser útil suponer que $v < \|f\|_\infty$ y considerar el conjunto $A := \{x \in X \colon \; |f(x)| \geq v\}$.