Espacios métricos, propiedades especiales

Problemas para examen

En muchos ejercicios de este tema suponemos que X es un espacio métrico. Denotamos por d la métrica en X y por τ_d a la colección de todos los conjuntos abiertos en X. Si x es un punto de X, entonces denotamos por $\tau_d(x)$ a la colección de las vecindades abiertas del punto X.

Índice

1. Subespacios de espacios métricos

1 Ejercicio. Sea X un espacio métrico y sea $Y \subseteq X$. ¿Qué significa la frase "consideramos Y como subespacio de X"? A saber, ¿con qué métrica se considera Y?

En los siguientes ejercicios suponemos que X un espacio métrico, $Y \subseteq X$. Consideremos Y como subespacio del espacio métrico X.

2 Ejercicio (descripción de subconjuntos abiertos en un subespacio métrico)**.** Sea $A \subseteq Y$. ¿Cuándo A es abierto en Y?

3 Ejercicio. Sean $X = \mathbb{R}$, $Y = \mathbb{Z}$, $A = \{1\}$. Muestre que A no es abierto en X, pero es abierto en Y.

4 Ejercicio (descripción de subconjuntos cerrados en un subespacio métrico)**.** Sea $A \subseteq Y$. ¿Cuándo A es cerrado en Y?

5 Ejercicio. Sean $X = \mathbb{R}$, $Y = (0, +\infty)$, $A = (0, 5]$. Muestre que A no es cerrado en X, pero es cerrado en Y.

6 Ejercicio (fórmula para la cerradura de un conjunto en un subespacio métrico)**.** Sea $A \subseteq Y$. Demuestre que

$$\mathrm{cl}_Y(A) = \mathrm{cl}_X(A) \cap Y.$$

7 Ejercicio (fórmula para el interior de un conjunto en un subespacio métrico)**.** Sea $A \subseteq Y$. Demuestre que

$$\mathrm{int}_Y(A) = \mathrm{int}_X(A \cup (X \setminus Y)) \cap Y.$$

8 Ejercicio. Mostrar un ejemplo cuando $\mathrm{int}_Y(A) \neq \mathrm{int}_X(A)$.

2. Sucesiones convergentes en espacios métricos

9 Ejercicio (la definición del límite de una sucesión)**.** Sean $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}$, $b \in X$. ¿Cuándo se dice que la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge* al punto b? Muestre que las siguientes condiciones son equivalentes.

- $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists m \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq m \quad d(a_n, b) < \varepsilon;$
- $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists m \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq m \quad a \in B(b, \varepsilon);$
- $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists m \in \mathbb{N} \quad \{x_n\}_{n\geq m} \subseteq B(b, \varepsilon);$
- $\forall V \in \tau_d(b) \quad \exists m \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq m \quad a \in V;$
- $\forall V \in \tau_d(b) \quad \exists m \in \mathbb{N} \quad \{x_n\}_{n\geq m} \subseteq V.$

10 Ejercicio (convergencia de sucesiones constantes)**.** Sean $b \in X$, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}$ tales que $a_n = b$ para cada n en $\mathbb{N}$. Demuestre que

$$\lim_{n\to\infty} a_n = b.$$

11 Ejercicio (convergencia de sucesiones estacionarias)**.** Sean $b \in X$, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}$, $m \in \mathbb{N}$ tales que para cada $n \geq m$ se cumple $a_n = b$. Demuestre que

$$\lim_{n\to\infty} a_n = b.$$

12 Ejercicio (unicidad del límite de una sucesión, en caso de existencia)**.** Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en X y sean b y c puntos de X. Supongamos que

$$\lim_{n\to\infty} a_n = b, \qquad \lim_{n\to\infty} a_n = c.$$

Demuestre que $b = c$.

13 Ejercicio (una condición suficiente para no convergencia)**.** Sean $b \in X$, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}$. Supongamos que $\varepsilon_0 > 0$ y $d(a_n, b) \geq \varepsilon_0$ para cada n en $\mathbb{N}$. Demuestre que la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ no converge al punto b.

14 Definición (el medidor de convergencia de una sucesión a un punto)**.** Sean $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}$, $b \in X$. Definimos $\lambda_a \colon \mathbb{N} \to [0, +\infty)$ como el supremo de las distancias del punto b hasta los elementos de la m-ésima cola de la sucesión:

$$\lambda_a(m) \coloneqq \sup_{n\geq m} d(a_n, b).$$

15 Ejercicio. Sean $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}$, $b \in X$. Demuestre que las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) $\lim_{n\to\infty} a_n = b$;

(b) $\lim_{n\to\infty} d(a_n, b) = 0$;

(c) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists m \in \mathbb{N} \quad \lambda_a(m) < \varepsilon$;

(d) $\lim_{m\to\infty} \lambda_a(m) = 0$.

16 Ejercicio (subsucesión de una sucesión convergente)**.** Sean $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en X, $b \in X$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = b$, $\nu\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una función escrictamente creciente. Demuestre que $\lim\limits_{k\to\infty} a_{\nu(k)} = b$.

17 Ejercicio (criterio de no convergencia de una sucesión)**.** Sean $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en X, $b \in X$. Demuestre que las siguientes condiciones son equivalentes:

- la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ no converge al punto b;
- existe $\varepsilon_0 > 0$ y existe una función $\nu\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ estrictamente creciente, tales que $d(a_{\nu(k)}, b) \ge \varepsilon_0$ para cada k en $\mathbb{N}$.

3. Descripción de conceptos topológicos en espacios métricos en términos de sucesiones convergentes

Sea X un espacio métrico. Denotemos la métrica por d. Sean τ_d la colección de todos los conjuntos abiertos en X.

18 Ejercicio (descripción del interior de un conjunto en un espacio métrico, en términos de sucesiones convergentes)**.** Sean X un espacio métrico, $A \subseteq X$, $b \in X$. Demuestre que $b \in \operatorname{int}(A)$ si, y solo si, para cada sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en X, si $\lim_{n\to\infty} x_n = b$, entonces existe m en $\mathbb{N}$ tal que $\{x_n\colon\ n \ge m\} \subseteq A$.

19 Ejercicio (descripción de la cerradura de un conjunto en un espacio métrico, en términos de sucesiones convergentes)**.** Sean X un espacio métrico, $A \subseteq X$, $b \in X$. Demuestre que $b \in \operatorname{clos}(A)$ si, y solo si, existe una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en A tal que $\lim_{n\to\infty} x_n = b$.

20 Ejercicio. Sea X un espacio métrico y sea $A \subseteq X$. ¿Cuándo A es abierto? Dar un criterio en términos de sucesiones convergentes.

21 Ejercicio. Sea X un espacio métrico y sea $A \subseteq X$. ¿Cuándo A es cerrado? Dar un criterio en términos de sucesiones convergentes.

22 Ejercicio (criterio de continuidad en términos de sucesiones, conocido como criterio de Heine)**.** Sean X, Y espacios métricos, $f\colon X \to Y$, $a \in X$. Demuestre que f es continua en a si, y solo si, para cualquier sucesion $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en X que converge al punto a, la sucesión $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge al punto $f(a)$.

4. Subconjuntos acotados en espacios métricos

23 Ejercicio (el diámetro de un subconjunto de un espacio métrico)**.** Sean X un espacio métrico, $Y \subseteq X$. Escriba la definición de $\operatorname{diam}(Y)$. Decimos que Y es *acotado* si $\operatorname{diam}(Y) < +\infty$.

24 Ejercicio (monotonía del diámetro)**.** Sea X un espacio métrico y sean $Y, Z \subseteq X$ tales que $Z \subseteq Y$. Demuestre que $\operatorname{diam}(Z) \le \operatorname{diam}(Y)$.

25 Ejercicio (criterio del subconjunto acotado)**.** Sean X un espacio métrico, $Y \subseteq X$. Demuestre que las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) Y es acotado, esto es, $\operatorname{diam}(Y) < +\infty$;

(b) existen a en Y y $r > 0$ tales que $Y \subseteq B(a, r)$;

(c) existen a en X y $r > 0$ tales que $Y \subseteq B(a, r)$.

26 Ejercicio (uniones finitas de subconjuntos acotados son acotadas)**.** Sea X un espacio métrico y sean $Y_1, \ldots, Y_m$ subconjuntos acotados de X. Demuestre que $Y_1 \cup \cdots \cup Y_m$ es acotado.

27 Ejercicio (subconjuntos de subconjuntos acotados son acotados)**.** Sea X un espacio métrico y sean $Y, Z \subseteq X$ tales que Y es acotado y $Z \subseteq Y$. Demuestre que Z es acotado.

5. Construcción de un espacio métrico a partir de un espacio pseudométrico

28 Ejercicio (desigualdad del cuadrilátero)**.** Sea (X, d) un espacio pseudométrico y sean $x_1, x_2, x_3, x_4 \in X$. Demuestre que

$$|d(x_1, x_2) - d(x_3, x_4)| \leq d(x_1, x_3) + d(x_2, x_4).$$

29 Ejercicio (construcción de un espacio métrico a partir de un espacio pseudométrico)**.** Sea (X, d) un espacio pseudométrico.

1. Definimos una relación binaria en X mediante la siguiente regla:

   $$x \sim y \qquad \Longleftrightarrow \qquad d(x, y) = 0.$$

   Demuestre que esta relación binaria es una relación de equivalencia. Para cada x en X denotemos su clase de equivalencia por $[x]$. Denotemos por Y al conjunto de las clases de equivalencia:

   $$Y \coloneqq \{[x] \colon \ x \in X\}.$$

2. Usando la desigualdad del cuadrilátero demuestre que si $x_1 \sim x_2$, $y_1 \sim y_2$, entonces $d(x_1, y_1) = d(x_2, y_2)$.

3. Definimos $\rho \colon Y \times Y \to [0, +\infty)$ mediante la regla

   $$\rho([x], [y]) \coloneqq d(x, y).$$

   Explique por qué esta definición es consistente. Demuestre que ρ es una métrica.

6. Sucesiones de Cauchy

30 Ejercicio. Escriba la definición de la sucesión de Cauchy.

31 Definición (medidor de Cauchy de una sucesión)**.** Sea X un espacio métrico y sea $x = (x_n)_{n=\in\mathbb{N}}$ una sucesión en X. Definimos $\gamma_x \colon \mathbb{N} \to [0, +\infty]$,

$$\gamma_x(n) \coloneqq \operatorname{diam}\left(\{x_k\}_{k \geq n}\right) = \sup_{j,k \geq n} d(x_j, x_k).$$

32 Ejercicio. Calcule el medidor de Cauchy para cada una de las siguientes sucesiones en $\mathbb{R}$:

$$x_k \coloneqq (-1)^k, \qquad x_k \coloneqq \frac{1}{k}, \qquad x_k \coloneqq \frac{(-1)^k}{k}.$$

33 Ejercicio. Sea X un espacio métrico y sea $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en X. Demuestre que la sucesión $(\gamma_x(n))_{n\in\mathbb{N}}$ es decreciente, esto es, para cada n en $\mathbb{N}$

$$\gamma_x(n+1) \le \gamma_x(n).$$

34 Ejercicio. Sea X un espacio métrico y sea $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en X. Demuestre que la sucesión x es de Cauchy si, y solo si, su medidor de Cauchy converge al 0:

$$\lim_{n\to\infty} \gamma_x(n) = 0.$$

35 Ejercicio. Demuestre que cada sucesión convergente es de Cauchy.

36 Ejercicio. Sean X un espacio métrico, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en X, $a \in X$, $\nu\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una función escrictamente creciente, $\lim_{k\to\infty} x_{\nu(k)} = a$. Demuestre que $\lim_{n\to\infty} x_n = a$.

37 Ejercicio. Escriba la definición de la sucesión regular de Cauchy.

38 Ejercicio. Demuestre que cada sucesión regular de Cauchy es de Cauchy.

39 Ejercicio. Demuestre que en cualquier sucesión de Cauchy hay una subsucesión regular de Cauchy.

7. Espacios métricos completos

40 Ejercicio. Escriba la definición del espacio métrico completo.

41 Ejercicio. Demuestre que el espacio métrico es completo si, y solo si, cualquier sucesión regular de Cauchy converge.

42 Ejercicio (criterio de completitud de espacios métricos en términos de sucesiones anidadas de conjuntos cerrados cuyos diámetros tienden a cero)**.** Sea X un espacio métrico. Demuestre que las siguientes condiciones son equivalentes.

(a) X es completo;

(b) para cada sucesión $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de subconjuntos cerrados y no vacíos de X, tal que $\lim_{n\to\infty} \operatorname{diam}(A_n) = 0$, la intersección $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ no es vacía.

En este curso aceptamos como un hecho que el espacio $\mathbb{R}$ es completo.

43 Ejercicio. Demuestre que el espacio $\mathbb{R}^n$ con la métrica euclideana es completo.

44 Ejercicio (espacio de funciones acotadas es completo)**.** Dado un conjunto X, denotemos por $B(X)$ al espacio de las funciones acotadas $X \to \mathbb{C}$. Demuestre que el espacio $B(X)$ es completo.

45 Ejercicio. Demuestre que el espacio $\ell^\infty(\mathbb{N})$ es completo.

46 Ejercicio. Sea X un espacio métrico completo y sea Y un subespacio métrico de X, es decir, un subconjunto de X considerado con la distancia inducida. Demuestre que Y es completo si, y solo si, Y es cerrado en X.

47 Ejercicio (el espacio de funciones continuas es completo)**.** Sea X un espacio métrico (o topológico). Denotemos por $C(X)$ al espacio de las funciones continuas $X \to \mathbb{C}$. Demuestre que $C(X)$ es completo.

48 Ejercicio (el espacio de sucusiones convergentes a cero es completo)**.** Denotemos por $c_0(\mathbb{N})$ al espacio de sucesiones convergentes a cero:

$$c_0(\mathbb{N}) = \{a = (a_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}\colon \ \lim_{k\to\infty} a_k = 0\}.$$

Demuestre que $c_0(\mathbb{N})$ es un subconjunto cerrado de $\ell^\infty(\mathbb{N})$. De aquí se puede concluir que $c_0(\mathbb{N})$ es completo.

49 Ejercicio (el espacio de sucusiones convergentes es completo)**.** Denotemos por $c(\mathbb{N})$ al espacio de sucesiones convergentes:

$$c(\mathbb{N}) = \{a = (a_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}\colon \ \exists L \in \mathbb{C} \ \lim_{k\to\infty} a_k = L\}.$$

Demuestre que $c(\mathbb{N})$ es un subconjunto cerrado de $\ell^\infty(\mathbb{N})$. De aquí se puede concluir que $c(\mathbb{N})$ es completo.

8. Funciones uniformemente continuas

En este tema suponemos que X, Y son espacios métricos.

50 Ejercicio. Sea $f\colon X \to Y$. ¿Cuándo se dice que f es *uniformemente continua*? Explique por qué cada función uniformemente continua es continua. Denotamos por $C_u(X, Y)$ al conjunto de las funciones uniformemente continuas $X \to Y$.

51 Ejercicio (el módulo de continuidad de una función)**.** Sea $f\colon X \to Y$. Definimos $\omega_f\colon (0,+\infty) \to [0,+\infty]$ mediante la regla

$$\omega_f(\eta) \coloneqq \sup\{d(f(a), f(b))\colon\ a, b \in X,\ d(a,b) \le \eta\}.$$

Demuestre que ω_f es una funcion creciente: si $\eta_1 < \eta_2$, entonces $\omega_f(\eta_1) \le \omega_f(\eta_2)$.

52 Ejercicio. Sea $f\colon X \to Y$ y sean $u, v \in X$. Demuestre que

$$d_Y(f(u), f(v)) \le \omega_f(d_X(u,v)).$$

53 Ejercicio. Sea $f\colon X \to Y$. Demuestre que f es uniformemente continua si, y solo si, $\lim_{\eta\to 0} \omega_f(\eta) = 0$.

54 Ejercicio. Sea $f\colon X \to Y$. Demuestre que f es uniformemente continua si, y solo si, para cada $\varepsilon > 0$ existe $\eta > 0$ tal que $\omega_f(\eta) \le \varepsilon$.

55 Ejercicio. Sea $f\colon [0,+\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) \coloneqq \sqrt{x}$. Calcule ω_f y determine si f es uniformemente continua.

56 Ejercicio. Sea $f\colon [0,+\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) \coloneqq x^2$. Calcule ω_f y determine si f es uniformemente continua.

57 Ejercicio. Sea $f\colon (0,+\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) \coloneqq \dfrac{1}{x}$. Calcule ω_f y determine si f es uniformemente continua.

58 Ejercicio. Sea $f\colon [0,+\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) \coloneqq \mathrm{e}^{-x}$. Calcule ω_f y determine si f es uniformemente continua.

59 Ejercicio. Sea $f\colon [0,+\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) \coloneqq \tanh(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}$. Calcule ω_f y determine si f es uniformemente continua.

60 Ejercicio. Sea X un espacio métrico. Denotemos por $C_{b,u}(X)$ al espacio de todas las funciones $X \to \mathbb{C}$ que son acotadas y uniformemente continuas. Demuestre que el conjunto $C_{b,u}(X)$ es un subconjunto cerrado de $B(X)$. Por consecuencia, el espacio $C_{b,u}(X)$ con la norma-supremo es un espacio completo.

61 Ejercicio (funciones uniformemente continuas y sucesiones de Cauchy)**.** Sea $f \in C_u(X,Y)$ y sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en X. Demuestre que $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en Y.

62 Ejercicio (extensión continua de una función uniformemente continua definida en un subconjunto denso)**.** Sean X, Y espacios métricos, Y completo, $D \subseteq X$, $\operatorname{clos}(D) = X$, $f \in C_u(D,Y)$. Demuestre que existe una función g en $C_u(X,Y)$ tal que $g|_D = f$. Demuestre que si $u, v \in C(X,Y)$ tales que $u|_D = f$ y $v|_D = f$, entonces $u = v$.

9. Funciones Lipschitz continuas

63 Ejercicio (funciones Lipschitz continuas)**.** Sean X, Y espacios métricos, $f\colon X \to Y$, $L \geq 0$. ¿Cuándo se dice que f es *Lipschitz continua con coeficiente de Lipschitz* L? Después enunciar la definición, enuncie y demuestre un criterio en términos de ω_f.

64 Ejercicio. Sea $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b). Sea

$$L \coloneqq \sup_{x\in(a,b)} |f'(x)|.$$

Supongamos que $L < +\infty$. Demuestre que f es Lipschitz continua con coeficiente L.

65 Ejercicio. Muestre que las funciones $\cos\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $\operatorname{sen}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ son Lipschitz continuas.

66 Ejercicio (la distancia de un punto variable a un punto elegido es una función Lipschitz continua)**.** Sea X un espacio métrico y sea $a \in X$. Definimos $f\colon X \to [0,+\infty)$ mediante la regla

$$f(x) \coloneqq d(x,a).$$

Demuestre que $f \in \operatorname{Lip}(X,[0,+\infty))$.

67 Ejercicio (la distancia de un punto variable a un conjunto elegido es una función Lipschitz continua)**.** Sea X un espacio métrico y sea $A \subseteq X$ tal que $A \neq \varnothing$. Definimos $f\colon X \to [0,+\infty)$ mediante la regla

$$f(x) \coloneqq d(x,A) = \inf_{a\in A} d(x,a).$$

Demuestre que $f \in \operatorname{Lip}(X,[0,+\infty))$.

68 Ejercicio (construcción de una función que separa dos conjuntos cerrados)**.** Sean G y H dos subconjuntos cerrados de X, tales que $G \neq \varnothing$, $H \neq \varnothing$, $G \cap H = \varnothing$. Definimos $f\colon X \to [0,+\infty)$ como

$$f(x) \coloneqq \frac{d(x,G)}{d(x,G) + d(x,H)}.$$

Muestre que f es continua, $f(x) = 0$ para cada x en G y $f(x) = 1$ para cada x en H.

10. Completación de un espacio métrico

69 Ejercicio. Sean X, Y espacios métricos. ¿Cuándo se dice que Y es una completación de X?

70 Ejercicio (completación del espacio métrico y extensiones de funciones uniformemente continuas). Sean X, Y, Z espacios métricos, Y completo, $j\colon X \to Y$ una isometría, $\operatorname{clos}(j(X)) = Y$, $f \in C_u(X, Z)$. Demuestre que existe una única función g de clase $C_u(Y, Z)$ tal que $f = g \circ j$.

71 Ejercicio (unicidad de la completación del espacio métrico, salvo biyecciones isométricas). Sean X, Y, Z espacios métricos tales que Y es una completación de X y Z es una completación de X. Construya una isometría biyectiva $Y \to Z$.

72 Ejercicio (existencia de una completación del espacio métrico). Sea X un espacio métrico. Explique cómo construir su completación.

11. Teorema del punto fijo de Banach

73 Ejercicio. Sea X un espacio métrico y sea $f\colon X \to X$. ¿Cuándo se dice que f es *contractiva*?

74 Ejercicio. Sean $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, y sea $f\colon [a, b] \to [a, b]$ una función continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b). Definimos

$$L \coloneqq \sup_{x \in (a,b)} |f'(x)|$$

y supongamos que $L < 1$. Demuestre que f es contractiva.

75 Ejercicio. Definimos $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ como

$$f(x) \coloneqq \operatorname{arc\,tg}(x) \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Demuestre que para cada x, y en $\mathbb{R}$ con $x \neq y$ se cumple la desigualdad

$$|f(x) - f(y)| < |x - y|,$$

pero la función f no es contractiva.

76 Ejercicio (desigualdad fundamental para funciones contractivas). Sea X un espacio métrico y sea $f\colon X \to X$ una función contractiva con coeficiente L. Demuestre que para cualesquiera a, b en X

$$d(a, b) \leq \frac{1}{1 - L}(d(a, f(a)) + d(b, f(b))).$$

77 Ejercicio (iteraciones de una función). Sea $f\colon X \to X$. Explique cómo definir $f^{[p]}$ para cada p en $\mathbb{N}_0$. Demuestre que $f^{[p]} \circ f^{[q]} = f^{[p+q]}$ para cualesquiera p, q en $\mathbb{N}_0$.

78 Ejercicio (iteraciones de iteraciones de una función)**.** Sea $f\colon X \to X$. Demuestre que $(f^{[p]})^{[q]} = f^{[pq]}$ para cualesquiera p, q en $\mathbb{N}_0$.

79 Ejercicio (sobre el límite de una sucesión con índices desplazados)**.** Sea $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión en un espacio métrico X que converge a un punto y en X. Definimos $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mediante la regla $u_k \coloneqq x_{k+1}$. Demuestre que $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ también converge al punto y.

80 Ejercicio (teorema del punto fijo de Banach)**.** Sean X un espacio métrico completo, $f\colon X \to X$ una contracción con coeficiente L. Demuestre que existe un único punto a en X tal que $f(a) = a$. Demuestre que si $b \in X$, entonces para cada n en $\mathbb{N}$

$$d(f^{[n]}(b), a) \le \frac{L^n}{1-L}.$$

81 Ejercicio (ejemplos de funciones contractivas)**.** En cada uno de los siguientes ejemplos demuestre que f es contractiva en X. Se recomienda verificar que $f(X) \subseteq X$ y usar el resultado del Ejercicio 74. En cada uno de los ejemplos es fácil encontrar el punto fijo.

- $X = [0{,}64, 1{,}44]$, $f(x) = \sqrt{x}$.
- $X = [1{,}5, 3]$, $f(x) = \dfrac{1}{2}\left(x + \dfrac{4}{x}\right)$.
- $X = [1, 3]$, $f(x) = 2 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{4}$.
- $X = [1, 2]$, $f(x) = \cos(x)$.
- $X = [0{,}4, 1]$, $f(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{2x}}$.

82 Tarea (el método babilónico para calcular raíces cuadráticas)**.** Sea $a > 1$. Encontrar un intervalo cerrado en $\mathbb{R}$ tal que la función

$$f(x) \coloneqq \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right),$$

considerada como función $X \to X$, sea contractiva.

83 Ejercicio (teorema del punto fijo para funciones cuyas iteraciones son contractivas)**.** Sean X un espacio métrico completo, $f\colon X \to X$, $m \in \mathbb{N}$ tales que $f^{[m]}$ es una contracción. Demuestre que f tiene un único punto fijo.

84 Ejercicio (teorema de Picard en una franja)**.** Sean A un intervalo finito abierto en $\mathbb{R}$, $F \in C_b(A \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$, $t_0 \in A$, $v_0 \in \mathbb{R}$. Demuestre que existe una única función x en $C^1(A, \mathbb{R})$ que resuelve el problema de Cauchy

$$x'(t) = F(t, x(t)) \quad (t \in A), \qquad x(t_0) = v_0.$$

12. Espacios métricos conexos

85 Ejercicio. Escriba varias definiciones equivalentes de espacios conexos y demuestre su equivalencia.

86 Ejercicio (la imagen de un espacio conexo bajo una función continua suprayectiva)**.** Sean X un espacio métrico conexo, Y un espacio métrico, $f \in C(X, Y)$, $f[X] = Y$. Demuestre que Y es conexo.

87 Ejercicio (la imagen de un espacio conexo bajo una función continua)**.** Sean X un espacio métrico conexo, Y un espacio métrico, $f \in C(X, Y)$. Demuestre que Y es conexo.

88 Ejercicio (intervalos en $\mathbb{R}$)**.** Sea $A \subseteq \mathbb{R}$. Demuestre que las siguientes condiciones son equivalentes:

- A es un intervalo,
- $(\text{ínf}(A), \sup(A)) \subseteq A$,
- para cada x, y en A, si $x < y$, entonces $[x, y] \subseteq A$.

89 Ejercicio (criterio de subconjuntos conexos de $\mathbb{R}$)**.** Sea $A \subseteq \mathbb{R}$. Demuestre que A es conexo si, y solo si, A es un intervalo.

90 Ejercicio. Demuestre el teorema del valor intermedio usando los resultados de los Ejercicios 87 y 89.

13. Espacios métricos conexos por arcos

También se dice *espacio arco-conexos* y *espacios conexos por caminos.*

91 Ejercicio. Sea X un espacio métrico y sean $a, b \in X$. Escriba la definición de *camino* en X que *conecta* (*une*) a con b.

92 Ejercicio. Sean X un espacio métrico, $a, b \in X$, γ un camino que une a y b. Construya un camino que une b y a.

93 Ejercicio. Sean X un espacio métrico, $a, b, c \in X$, γ_1 un camino que une a y b, γ_2 un camino que une b y c. Construya un camino que une a y c.

94 Ejercicio. Sean X un espacio métrico, $a \in X$. Construya un camino que une a y a.

95 Ejercicio. Sea X un espacio métrico. Definimos en X una relación binaria: ponemos $a \sim b$ si existe un camino que une a y b. Demuestre que esta relación binaria es una relación de equivalencia.

96 Ejercicio. Escriba la definición de espacio métrico *conexo por arcos*.

97 Ejercicio. Sea X un espacio métrico conexo por arcos. Demuestre que X es conexo.

98 Ejercicio. Sean X un espacio métrico conexo por arcos, Y un espacio métrico, $f\colon X \to Y$ una función continua. Demuestre que el espacio $f[X]$ es conexo por arcos.

14. Espacios métricos separables

99 Ejercicio. ¿Cuándo un espacio métrico se llama *separable*? Escriba la definición.

100 Ejercicio (el espacio de sucesiones finitas es separable)**.** Escriba la definición del *soporte* de una sucesión. Dado un campo $\mathbb{F}$, denotemos por $\mathcal{F}(\mathcal{F})$ al conjunto de todas las sucesiones $\mathbb{N} \to \mathbb{F}$ de soporte finito (sucesiones de soporte finito también se conocen como sucesiones finitas). Muestre que $\mathcal{F}(\mathbb{Q} + \mathrm{i}\,\mathbb{Q})$ es numerable. Denotemos $\mathcal{F}(\mathbb{C})$ por $\mathcal{F}$. Muestre que $\mathcal{F}(\mathbb{Q} + \mathrm{i}\,\mathbb{Q})$ es denso en $\mathcal{F}$. De aquí se sigue que el espacio $\mathcal{F}$ es separable.

101 Ejercicio. Demuestre que el espacio $c_0(\mathbb{N})$ es separable.

102 Ejercicio. Sea X un espacio métrico separable y sea Y un subconjunto de X. Consideremos Y como subespacio métrico de X. Demuestre que Y es separable.

103 Ejercicio. Sean X un espacio métrico, M un subconjunto infinito no numerable de X, $\delta > 0$. Supongamos que para cualesquiera x, y en M con $x \neq y$, se cumple $d(x, y) \geq \delta$. Demuestre que el espacio X no es separable.

104 Ejercicio. Demuestre que el espacio $\ell^\infty(\mathbb{N})$ no es separable.

15. Teorema de Baire

105 Ejercicio. Escriba la definición del espacio de Baire.

106 Ejercicio (teorema de Baire)**.** Sea X un espacio métrico completo. Demuestre que X es de Baire.

107 Ejercicio. Enuncie y demuestre el criterio de espacio de Baire en términos de subconjuntos magros (conjuntos de la primera categoría).

108 Ejercicio. Sea X un espacio métrico completo no vacío. Demuestre que X no es magro.

16. Espacios métricos totalmente acotados

109 Ejercicio (criterio de ε-red para un subconjunto de un espacio métrico)**.** Sean X un espacio métrico, $Y \subseteq X$, $A \subseteq X$, $\varepsilon > 0$. Demuestre que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(a) A es una ε-red para Y, esto es, para cada x en Y existe a en A tal que $d(x, a) < \varepsilon$;

(b) para cada x en Y, $d(x, A) < \varepsilon$;

(c) $Y \subseteq \bigcup_{a \in A} B(a, \varepsilon)$.

110 Ejercicio. Escriba la definición del espacio métrico *totalmente acotado*.

111 Ejercicio. Demuestre que cada espacio métrico totalmente acotado es acotado.

112 Ejercicio. Sea X un espacio métrico. Demuestre que X es totalmente acotado si, y solo si, para cada $\varepsilon > 0$ existe una cubierta finita $(A_1, \ldots, A_m)$ de X tal que $\operatorname{diam}(A_k) < \varepsilon$ para cada k en $\{1, \ldots, m\}$.

113 Ejercicio (criterio del espacio métrico totalmente acotado en términos de sucesiones de Cauchy)**.** Sea X un espacio métrico. Demuestre que X es totalmente acotado si, y solo si, cualquier sucesion en X tiene una subsucesión de Cauchy.

17. Espacios topológicos compactos

114 Ejercicio. Sea X un espacio topológico. ¿Cuándo se dice que X es *compacto*?

115 Ejercicio (criterio de compacidad en términos de colecciones cerradas)**.** ¿Cuándo una colección de conjuntos se llama *centrada*? Enuncie y demuestre el criterio de compacidad del espacio topológico en términos de colecciones de conjuntos cerrados.

116 Ejercicio. Sea X un espacio topológico compacto y sea Y un subconjunto cerrado de Y. Demuestre que Y es compacto.

117 Ejercicio. Sea X un espacio topológico de Hausdorff y sea Y subespacio compacto de X. Demuestre que Y es cerrado en X.

118 Ejercicio. Sea X un espacio topológico de Hausdorff y sean $Y_1, \ldots, Y_m$ sus subespacios compactos. Demuestre que $Y_1 \cup \cdots \cup Y_m$ es compacto.

119 Ejercicio. Sean X un espacio topológico de Hausdorff, Y un subespacio compacto de X, Z un subespacio cerrado de Y. Demuestre que Z es compacto.

120 Ejercicio. Sean X un espacio topológico compacto, Y un espacio topológico, $f \in C(X, Y)$. Demuestre que $f[X]$ es compacto.

18. Espacios métricos compactos

121 Ejercicio. Escriba la definición del espacio métrico *secuencialmente compacto.*

122 Ejercicio (criterio de compacidad del espacio métrico)**.** Sea X un espacio métrico. Demuestre que las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) X es compacto;

(b) X es secuencialmente compacto;

(c) X es completo y totalmente acotado.

123 Ejercicio. Sea A un subconjunto compacto no vacío de $\mathbb{R}$. Demuestre que

$$\sup(A), \inf(A) \in A.$$

124 Ejercicio. Sean X un espacio métrico compacto, Y un espacio métrico. Demuestre que $C_u(X, Y) = C(X, Y)$.