Algunas aplicaciones del cálculo funcional continuo para elementos normales

Sea $\mathcal{A}$ un álgebra C* con identidad e.

1 Proposición (la raíz cuadrada positiva de un elemento positivo)**.** *Sea x un elemento positivo en $\mathcal{A}$. Entonces existe un único elemento positivo y en $\mathcal{A}$ tal que $x = y^2$.*

Demostración. Existencia. Ya sabemos que $\mathrm{Sp}(x) \subseteq [0, \|x\|]$. Definimos $f\colon \mathrm{Sp}(x) \to \mathbb{C}$, $f(t) \coloneqq \sqrt{t}$. Definimos $g\colon \mathrm{Sp}(x) \to \mathbb{C}$, $g(t) \coloneqq t^{1/4}$. Entonces

$$f^2 = \mathrm{inj}_{\mathrm{Sp}(x),\mathbb{C}}, \qquad \overline{g}\, g = g^2 = f. \tag{1}$$

Pongamos $y \coloneqq f(x)$. Entonces de (1) y de las propiedades del cálculo funcional continuo se sigue que

$$y^2 = x, \qquad g(x)^* g(x) = y.$$

La última igualdad implica que $y \geq 0$.

Unicidad. Sea $a \in \mathcal{A}$, $a \geq 0$, tal que $a^2 = x$. Elegimos alguna sucesión $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polinomios que converge uniformemente a f en el compacto $\mathrm{Sp}(x)$. Sea $q_n(t) = p_n(t^2)$. Como $\mathrm{Sp}(a) \subseteq [0, +\infty)$ y

$$\mathrm{Sp}(x) = \mathrm{Sp}(a^2) = \{t^2\colon\ t \in \mathrm{Sp}(a)\},$$

obtenemos

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{t\in\mathrm{Sp}(a)} |q_n(t) - t| = \lim_{n\to\infty} \sup_{t\in\mathrm{Sp}(a)} |p_n(t^2) - f(t^2)| = \lim_{n\to\infty} \sup_{z\in\mathrm{Sp}(x)} |p_n(z) - f| = 0.$$

Por el cálculo funcional continuo para a, $q_n(a) \to a$. Luego

$$a = \lim_{n\to\infty} q_n(a) = \lim_{n\to\infty} p_n(a^2) = \lim_{n\to\infty} p_n(x) = f(x) = y. \qquad \square$$

Si $x \geq 0$, entonces la raíz cuadrada positiva de x, definida en la Proposición 1, se denota por $\sqrt{x}$ o por $x^{1/2}$. Para un x general, se denota por $\mathrm{abs}(x)$ o por $|x|$ el elemento $\sqrt{x^* x}$.

2 Lema. *Sea $x \in \mathcal{A}$ tal que $x^* = x$ y $\|x\| \leq 1$. Entonces existe u en $\mathcal{A}$ tal que $u^* u = u u^* = e$ y $x = \frac{1}{2}(u + u^*)$.*

Demostración. Notamos que $\operatorname{Sp}(x) \subseteq [-1, 1]$. La función $f\colon \operatorname{Sp}(x) \to \mathbb{C}$,

$$f(z) \coloneqq z + \mathrm{i}\sqrt{1 - z^2},$$

es continua en $\operatorname{Sp}(x)$. Más aún,

$$f\,\overline{f} = \overline{f}\,f = 1_{\operatorname{Sp}(x)}, \qquad \frac{f + \overline{f}}{2} = \operatorname{inj}_{\operatorname{Sp}(x),\mathbb{C}}\,.$$

Pongamos $u \coloneqq f(x)$. Las propiedades del cálculo funcional continuo implican que

$$uu^* = u^*u = e, \qquad \frac{u + u^*}{2} = x.$$

□

3 Proposición. *Cada elemento de $\mathcal{A}$ es una combinación lineal finita de elementos unitarios.*

Demostración. 1. Sea $y \in \mathcal{A}$ tal que $y^* = y$. Si $y = 0$, entonces $y = 0\,e$. Si $y \neq 0$, pongamos $x \coloneqq (1/\|y\|)y$. Entonces $x^* = x$, $\|x\| \leq 1$, y por el Lema 2 existe un elemento unitario u en $\mathcal{A}$ tal que

$$x = \frac{u + u^*}{2}.$$

Luego

$$y = \frac{\|y\|}{2}\,u + \frac{\|y\|}{2}\,u^*.$$

2. En el caso general, si $a \in \mathcal{A}$, representamos a como una combinación lineal de dos elementos autoadjuntos y aplicamos el resultado del inciso 1 a cada uno de estos elementos autoadjuntos. □

4 Teorema (sobre monomorfismos C*)**.** *Sean $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ álgebras C^* con identidades y sea $\Phi\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ un C^*-homomorfismo inyectivo. Entonces Φ es isométrico y preserva los espectros.*

Demostración. 1. Sea $x \in \mathcal{A}$, $x^* = x$. Sabemos que $\operatorname{Sp}(\Phi(x)) \subseteq \operatorname{Sp}(x)$. Si $\operatorname{Sp}(\Phi(x)) \neq \operatorname{Sp}(x)$, entonces se puede construir una función f, continua en $\operatorname{Sp}(x)$, tal que f se anula en $\operatorname{Sp}(\Phi(x))$, pero no se anula en algún punto de $\operatorname{Sp}(x)$. Luego $f(x) \neq 0$, pero $\Phi(f(x)) = f(\Phi(x)) = 0$. Esto contradice a la suposición que la función Φ es inyectiva. Hemos demostrado que $\operatorname{Sp}(\Phi(x)) = \operatorname{Sp}(x)$. Luego

$$\|\Phi(x)\| = r(\Phi(x)) = r(x) = \|x\|.$$

2. Para un elemento arbitario y de $\mathcal{A}$, notamos que y^*y es autoadjunto. Usamos la propiedad C* y el resultado del inciso 1:

$$\|\Phi(y)\|^2 = \|\Phi(y)^*\Phi(y)\| = \|\Phi(y^*y)\| = \|y^*y\| = \|y\|^2.$$

3. Como Φ es una función isométrica y su dominio $\mathcal{A}$ es un espacio métrico completo, la imagen $\Phi[\mathcal{A}]$ es un conjunto cerrado en $\mathcal{B}$. Más aún, $\Phi[\mathcal{A}]$ es una subálgebra C* del álgebra $\mathcal{B}$, con la misma identidad. Luego para cada y en $\mathcal{A}$

$$\mathrm{Sp}_{\mathcal{B}}(\Phi(y)) = \mathrm{Sp}_{\Phi[\mathcal{A}]}(\Phi(y)) = \mathrm{Sp}_{\mathcal{A}}(y). \qquad \square$$