Week1. Lecture 1

Plan: 1. 课程信息、
2. 数集
3. 实数连续性
4. 有界集、确界

数学分析 { 微积分 { 极限 ✓
导数(微分) ✓
积分 { 不定积分 ✓
定积分
级数

对象：实函数（自变量，取值为实数）

第一章 { 实数
函数

Def. 集合 将具有某种特性的对象放在一起作为一个整体，通常记为 $A,B,C\ldots$

这些对象称为集合的元素，常记为 $a,b,c\ldots$

$a\in A$，a 是 A 中的元素。

$a\notin A$，a 不是 A 中的元素。

表示法 { 列举 $A=\{1,2,3\}$
描述 $A=\{x: x^2-1=0$ 的根$\}$

① A 中的元素都属于 B，则 B 包含 A，$A\subseteq B$
此时 A 是 B 的子集

② 若 $A\subseteq B$，$B\subseteq A$，则 A,B 相同，$A=B$

③ 若 $A\subseteq B$ 且 $A\neq B$，A 是 B 的真子集 $A\subset B$.

④ 空集 ϕ，不含任何元素，是任何集合的子集

集合的运算

$A\cup B=\{x: x\in A$ 或 $x\in B\}$ A 与 B 的并

$A\cap B=\{x: x\in A$ 且 $x\in B\}$ A 与 B 的交

$A\setminus B=\{x: x\in A$ 且 $x\notin B\}$ A 与 B 的差

$\forall$："任意一个"。$\exists$"存在"。s.t."使得"。

§ 实数的连续性

例 $\mathbb{N}$ 自然数 $\{0,1,2,3,\ldots\}$

$\Downarrow$ 加减

$\mathbb{Z}$ 整数

$\Downarrow$ 乘除

$\mathbb{Q}$ 有理数（稠密，但是...）

~ $\sqrt{2}$，π 不是有理数

~ 有理数关于极限运算不封闭

戴德金(Dedekind)构造

Def. S 大小有序 非空数集

$A\subseteq S$，$B\subseteq S$ 满足

① $A\neq\phi$，$B\neq\phi$

② $A\cup B=S$

③ $\forall a\in A$，$\forall b\in B$，有 $a<b$

④ A 中无最大数

则 A,B 称为 S 的一个分划，$(A|B)$.

考虑有理数系 $\mathbb{Q}$ 的分划 $(A|B)$

则二择一

(a) B 中有最小数 $(A|B)$ 有理分划

(b) B 中无最小数 $(A|B)$ 无理分划

有理分划 $\xleftrightarrow{一一对应}$ 有理数 ⎫
⎬ 实数
无理分划 $\xleftrightarrow{一一对应}$ 无理数 ⎭

实数系 $\mathbb{R}$

① 稠密性：两个实数之间必有实数

② 连通性：$a,b\in\mathbb{R}$，则 a,b 之间的所有数都属于 $\mathbb{R}$。

③ Dedekind分割定理。对 $\mathbb{R}$ 的任一分划 $(A|B)$ B中必有最小数

☆ $\mathbb{R}$ 中的数和数轴上的点一一对应。

☆ 有界集

Def. 设集合 $E\subseteq\mathbb{R}$，并且 $E\neq\phi$

① 若 $M\in\mathbb{R}$. s.t. $\forall x\in E$，有 $x\le M$.
则 E有上界，M是E的一个上界

② 若 $m\in\mathbb{R}$, s.t. $\forall x\in E$ 有 $x\ge m$
则 E有下界，m是E的一个下界

③ E有上界又有下界，则E有界

$\iff \exists M>0$, s.t. $\forall x\in E$，有 $|x|\le M$.

例 1.1.2. 集合

$E=\{0,\frac{3}{2},\frac{2}{3},\cdots,1+\frac{(-1)^n}{n},\cdots\}$

有界，一个上界是 $\frac{3}{2}$，一个下界是0。

例 1.1.3 集合

$E=\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots,\frac{1}{n},\cdots\}$

有界 1是一个上界，0是一个下界

问：最小(大)上(下)界？

Def. 设 $E\subset\mathbb{R}$，非空。若有 $M\in\mathbb{R}$ s.t.

① M是E的一个上界

② $\forall\varepsilon>0$, $\exists x'\in E$ s.t. $x'>M-\varepsilon$

则称M为E的上确界

记为 $M=\sup E=\sup\limits_{x\in E}\{x\}$.

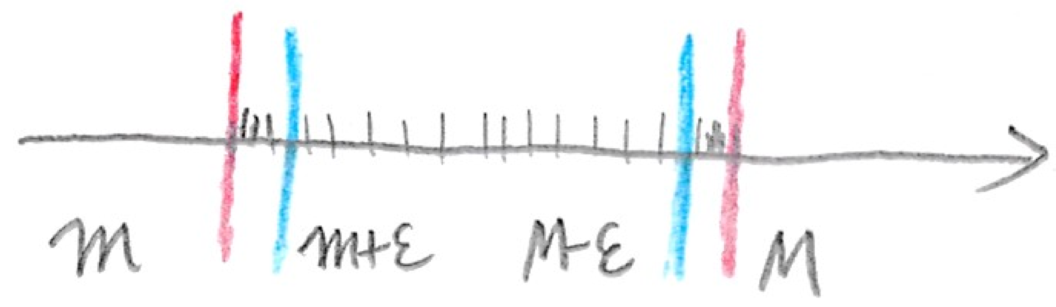
若有 $m\in\mathbb{R}$, s.t.

① m是E的一个下界

② $\forall\varepsilon>0$, $\exists x\in E$ s.t. $x<m+\varepsilon$

则称m为E的下确界

记为 $m=\inf E=\inf\limits_{x\in E}\{x\}$



若 $\sup E\in E$，记 $\sup E=\max E$

则上确界即最大数

若 $\inf E\in E$，记 $\inf E=\min E$

则下确界即最小数

☆ 记号：$+\infty$ 正无穷大，$-\infty$ 负无穷大

~ E无上界，$\sup E=+\infty$

$\forall M>0$, $\exists x\in E$, s.t. $x>M$

~ E无下界，$\inf E=-\infty$

$\forall M>0$ $\exists x\in E$, s.t. $x<-M$.

例 1.1.4，$E=\{\frac{p}{q}: 0<p\le q,\ q,p\in\mathbb{Z}\}$

$\inf E=0\notin E$

$\sup E=1\in E$，$\max E=1$

定理 1.1.2（确界存在定理）

非空有上界的实数集必有上确界.

非空有下界的实数集必有下确界。

证明：只证明上确界的情形。

设 E 非空，有上界，实数集

(A) 若 E 中有最大数 M，

则 $\sup E = \max E = M$。

(B) 若 E 中没有最大数，

我们对 $\mathbb{R}$ 作分划：

B 是由 E 的所有上界组成的集合

而 $A = \mathbb{R} \setminus B$.

由 E 有上界，则 $B \neq \phi$。

由 E 非空，则 $A \neq \phi$。

由 A 的定义，$A \cup B = \mathbb{R}$.

显然，$\forall a \in A, \forall b \in B$，有 $a < b$

E 中无最大数，则 A 中无最大数

因此 $(A|B)$ 是 $\mathbb{R}$ 的一个分划

由 Dedekind 分割定理，B 中有

最小数 M，则 $M = \sup E$。