Lebesgueova míra na $\mathbb{R}$ je definována pomocí Carathéodoryho rozšíření Jordanovy míry na omezených otevřených množinách. Platí následující tvrzení.

TVRZENÍ 8 (Lebesgueova míra)**.** *1. Lebesgueova míra je invariantní vůči posunutí a míra intervalu je jeho délka.*

2. *Lebesgueova míra λ je σ-konečná.*
3. *Pro každou lebesgueovsky měřitelnou množinu P a pro každé $\varepsilon > 0$ existuje otevřená množina $G \supset P$ tak, že $\lambda(G \setminus P) < \varepsilon$. Je-li navíc P omezená, existuje kompaktní množina $C \subset P$ tak, že $\lambda(P \setminus C) < \varepsilon$. Dále existují borelovské množiny $A \subset P \subset B$ s vlastností $\mu(A) = \mu(P) = \mu(B)$.*
4. *Každá borelovská množina je lebesgueovsky měřitelná, ale existuje lebesgueovsky měřitelná množina, která není borelovská.*
5. *Existuje podmnožina $\mathbb{R}$, která není lebesgueovsky měřitelná.*

2 Měřitelná zobrazení

DEFINICE 8 (Měřitelná zobrazení)**.** Zobrazení $f : (X, \mathcal{S}) \to (Y, \mathcal{M})$ se nazývá měřitelné zobrazení, jestliže $f^{-1}(M) \in \mathcal{S}$ pro každé $M \in \mathcal{M}$.

Reálná funkce na $(X, \mathcal{S})$ je měřitelná vzhledem k borelovským množinám v $\mathbb{R}$ právě když vzory otevřených intervalů typu $(a, +\infty)$ náleží do $\mathcal{S}$.

TVRZENÍ 9 (Vlastnosti měřitelných reálných funkcí)**.** • *Součet, součin, podíl, maximum a minimum měřitelných funkcí jsou opět měřitelné funkce.*

- *Je-li $\{f_n\}$ posloupnost měřitelných funkcí, jsou i $\sup f_n, \inf f_n, \limsup f_n, \liminf f_n$ (a tedy i $\lim f_n$, existuje-li) měřitelné funkce.*

Charakteristická funkce (též indikátor) ξ na X je funkce, která má nejvýše dvě hodnoty, a to 0 a 1. Je-li $A = \xi^{-1}(1)$, říkáme, že ξ je charakteristická fuunkce množiny A a budeme ji značit ξ_A.

DEFINICE 9 (Jednoduchá funkce)**.** Jednoduchá funkce je funkce, jejíž obor hodnot je konečná množina.

Jednoduchá funkce je tedy lineární kombinace konečně mnoha charakteristických funkcí a může se značit jako konečný součet $\sum \alpha_i \chi_{A_i}$, kde množiny A_i lze předpokládat za disjunktní.

TVRZENÍ 10 (Vlastnosti jednoduchých funkcí)**.** *Následující funkce jsou definovány na nějakém měřitelném prostoru.*

1. *Jednoduchá funkce $\sum \alpha_i \chi_{A_i}$ je měřitelná právě když jsou množiny A_i měřitelné.*
2. *Každá nezáporná měřitelná funkce je limitou rostoucí posloupnosti jednoduchých jednoduchých funkcí.*
3. *Každá měřitelná funkce je limitou posloupnosti jednoduchých jednoduchých funkcí.*

3 Integrál

Následující funkce budou definovány na σ-konečném prostoru s mírou $(X, \mathcal{S}, \mu)$.

DEFINICE 10 (Integrál jednoduché funkce)**.** Pro jednoduchou funkci $f = \sum \alpha_i \chi_{A_i}$ se definuje její integrál vztahem

$$\int f \, \mathrm{d}\mu = \sum \alpha_i \mu(A_i)\,.$$

Definice nezávisí na volbě vyjádření jednoduché funkce.
Integrál jednoduchých funkcích je lineární a zachovává nerovnosti.

DEFINICE 11 (Integrál měřitelné funkce)**.**

1. Nechť f je měřitelná nezáporná funkce. Pak se definuje její integrál rovností

$$\int f \, \mathrm{d}\mu = \sup \left\{ \int g \, \mathrm{d}\mu; g \leq f \text{ je jednoduchá funkce} \right\}.$$

2. Nechť f je měřitelná funkce. Pak se definuje její integrál rovností

$$\int f \, \mathrm{d}\mu = \int f_+ \, \mathrm{d}\mu - \int f_- \, \mathrm{d}\mu\,.$$

3. Je-li $a \in \S$ a f je měřitelná funkce. Pak se definuje její integrál na množině A rovností

$$\int_A f \, \mathrm{d}\mu = \int f \chi_A \, \mathrm{d}\mu\,.$$

Pokud je $\int f \, \mathrm{d}\mu$ konečný, nazývá se f integrovatelná a říká se, že integrál z f konverguje.

TVRZENÍ 11 (Vlastnosti integrálu)**.**

1. *Integrál je lineární.*
2. *Integrál zachovává nerovnosti mezi funkcemi.*
3. $\int_A f \, \mathrm{d}\mu$ *konverguje pokud je* $\mu(A)$ *konečná a* f *omezená měřitelná.*
4. $\left| \int_A f \, \mathrm{d}\mu \right| \leq \int_A |f| \, \mathrm{d}\mu$.
5. $\int_A f \, \mathrm{d}\mu$ *konverguje právě když* $\int_A |f| \, \mathrm{d}\mu$ *konverguje.*
6. $\int_A f \, \mathrm{d}\mu = 0$ *pokud je* $\mu(A) = 0$.
7. *Je-li* $\{f_n\}$ *monotónní posloupnost měřitelných funkcí, nebo mají-li* f_n *integrovatelnou majorantu, je* $\int \lim f_n \, \mathrm{d}\mu = \lim \int f_n \, \mathrm{d}\mu$.

DEFINICE 12. Je-li $(X, \mathcal{S}, \mu)$ rovno $(\mathbb{R}, \mathcal{M}, \mu)$, kde $\mathcal{M}$ je soustava lebesgueovsky měřitelných množin a μ je Lebesgueova míra, nazývá se popsaný integrál Lebesgueův integrál.

Zřejmě je pro $A \in \mathcal{S}$ je $\mu(A) = \int \chi_A \, \mathrm{d}\mu = \int_A 1 \, \mathrm{d}\mu$. Co když místo funkce rovné 1 vezmeme nezápornou měřitelnou funkci?

TVRZENÍ 12 (Radon-Nikodýmova věta)**.** *Nechť* $(X, \mathcal{S}, \mu)$ *je* σ*-konečném prostoru s mírou.*

1. *Nechť* f *je nezáporná měřitelná funkce a pro* $A \in \mathcal{S}$ *se definuje* $\nu_f(A) = \int_A f \, \mathrm{d}\mu$. *Pak* ν_f *je míra na* $\mathcal{S}$.
2. *Míra* ν *na* $\mathcal{S}$ *lze vyjádřit jako* $\nu_f(A) = \int_A f \, \mathrm{d}\mu$ *pro nějakou nezápornou* μ*-měřitelnou funkci* f *právě když platí*

$$A \in \mathcal{S}, \mu(A) = 0 \Rightarrow \nu(A) = 0\,.$$