Fyzika je kolem nás (Pohyby těles v planetární soustavě)

Studijní text pro řešitele FO a ostatní zájemce o fyziku

Ivo Volf – Miroslava Jarešová

Obsah

Několik slov úvodem

Každý z nás se určitě zadíval alespoň jednou na oblohu plnou hvězd a věnoval se určitou dobu jejímu pozorování. Většina z hvězd koná během noci jednoduchý pohyb po nebeské sféře kolem osy rotace, kterou získáme, když své místo spojíme s místem nedaleko hvězdy *Polárka* v souhvězdí *Malý medvěd*. Při delším pozorování však můžeme zjistit, že některá „svítidla“ se pohybují složitějším způsobem. Tato tělesa byla nazvána již ve starověku „bludné hvězdy“, tedy planety.

Vnést řád do pohybu planet se pokusila řada starověkých filozofů. Nejvýznamnějším byl *Klaudios Ptolemaios* z Alexandrie (100–170 n.l.), který složitost pohybu planet, Měsíce a Slunce vyjádřil ve své *geocentrické soustavě*. Centrem planetární soustavy byla Země, kolem ní se pohybovala tělesa: Měsíc, Merkur, Venuše, Slunce, Mars, Jupiter, Saturn (víc jich známo nebylo) a hvězdy. Nepravidelnosti pohybu vyjádřil snadno: každá planeta obíhá po menší kružnici (tzv. *epicyklu*), jejíž střed se pohybuje po kružnici větší (*deferent*), jejíž střed leží ve středu Země. Skládáním dvou kruhových pohybů bylo možno vysvětlit i tzv. *kličky Marsu*, kdy se po obloze Mars pohybuje jedním směrem, pak se opožďuje a nakonec se zase vydá týmž směrem.

V 16. století se pohybem planet zabýval *Mikuláš Koperník* (1473–1543), který navrhl zjednodušení: jako centrum pohybu planet navrhl střed Slunce a pořadí uspořádání pohybu planet pohybujících se po zjednodušených trajektoriích tvaru kružnic bylo: Merkur, Venuše, Země s Měsícem, Mars, Jupiter, Saturn. Vzhledem k pozorovacím možnostem a přesnosti měření byl tento model postačující. Avšak jen po několik dalších desetiletí.

Padesát let po Koperníkovi vytvořil nový model planetární soustavy i *Tycho Brahe* (1546–1601). Ve středu Tychonova modelu se nacházela Země, kolem které kroužil Měsíc se Sluncem, kolem Slunce obíhají ostatní planety. Tento model lze říci, že byl jistým kompromisem mezi modely vytvořenými Ptolemaiem a Koperníkem. V letech 1576–1584 vybudoval Tycho Brahe na ostrově *Hven* (mezi Dánskem a Švédskem) hvězdárnu *Uranienborg* (Hrad múzy Uranie) a *Stjerneborg* (Hvězdný hrad). Zde učinil celou řadu přesných měření a pozorování planet. Od roku 1599 Tycho Brahe vstoupil do služeb císaře Rudolfa II. v Praze, ve svých pozorováních planet pak pokračoval v *Benátkách nad Jizerou*. V roce 1600 se poprvé setkal s *Johannem Keplerem* (1547–1622), což je v dnešní době považováno za jeden z mezníků ve vývoji evropské astronomie. Oba astronomové pak spolu krátce spolupracovali (do doby úmrtí Tychona Brahe v r. 1601) – Brahe byl experimentátor a uvědomoval si, že naměřená data už sám do konce svého života už všechna nestihne zpracovat a vyhodnotit. Kepler z důvodů slabého zraku by sám nebyl schopen naměřit si sám potřebné údaje a hodilo se mu, že bude mít možnost zpracovávat údaje, které Brahe naměřil.

Díky takto získaným údajům mohl Kepler dále vytvářet nový model našeho planetárního systému: již v roce 1601 formuloval zákon dnes známý jako druhý Keplerův zákon, v roce 1605 opustil Kepler dosavadní představy o pohybech po kruhových trajektoriích při vyhodnocování údajů o pohybu Marsu. Poznatky o těchto dvou zákonech formuloval v roce 1609 ve spise *Astronomia nova*. Třetí zákon zveřejnil Kepler v roce 1619 ve spise *Harmonices Mundi*.

Nejen Kepler, ale i *Galileo Galilei* (1564–1642) se pokoušel dále rozvinout Koperníkovy myšlenky. G. Galilei sestrojil pro svá pozorování oblohy v roce 1609 dalekohled (dnes známý jako *Galileův dalekohled*), na což reagoval Kepler tím, že vypracoval návrh konstrukce svého dalekohledu v roce 1610 (dnes známý jako *Keplerův dalekohled*). Kepler však svůj dalekohled nikdy nepoužil, protože nebyl manuálně zručný, aby ho uměl vyrobit a navíc měl slabý zrak. Pro své obhajování Koperníkova názoru se G. Galilei dostal do rozporu s církví.

Kromě pozorování oblohy konal Galilei také pokusy s tělesy padajícími volným pádem ze šikmé věže v Pise: experimentálně prokázal, že rychlost pohybu těles při volném pádu roste rovnoměrně s časem, dále také že dráhy těles uražené při volném pádu jsou ve stejném poměru jako druhé mocniny doby pádu.

Na Galileovu práci navázala svými pracemi celá řada dalších fyziků, my se však zmíníme pouze o jednom z nich: shodou náhod se stalo, že do roka od smrti Galilea, se narodil další slavný fyzik *Isaac Newton* (1642–1727). Newton narozdíl od svých předchůdců se zabýval nejenom pohybem planet, ale především se zamýšlel nad příčinami pohybu. Své poznatky o gravitačním poli pak publikoval v prvním dílu trojdílného svazku *Philosophiae naturalis principia mathematica* (Matematické základy přírodní filozofie). Newtonovi se podařilo dokázat, že síla, která přitahuje předměty k Zemi, je tatáž, jako síla, která udržuje planety při jejich oběhu kolem Slunce na jejich trajektoriích.

Rok 2009 byl vyhlášen světovou organizaci UNESCO jako Mezinárodní rok astronomie (IYA 2009) pod patronací OSN. Proč právě rok 2009? Jak už bylo zmíněno výše, je tomu právě 400 let, kdy Galileo Galilei jako první člověk sestrojil první (osminásobně zvětšující) astronomický dalekohled a začal s ním pozorovat hvězdnou oblohu. Před 400 lety v rudolfínské Praze publikoval své dílo *Astronomia nova* také Johannes Kepler. Položil v něm základy svých nebeských zákonů, které mají dodnes obecnou platnost, neboť se na jejich základě pohybují přirozená i umělá nebeská tělesa (planety, satelity, komety, družice atd.). Doba před 400 lety znamenala převrat v astronomii.

Poznatky o vesmíru a našem planetárním systému se s rozvíjejícími se technickými možnostmi stále zdokonalují a rozšiřují. Byly objeveny další planety, planetky, komety a další vesmírné objekty. Bez nadsázky lze však říci, že základy popisu pohybu těles v naší planetární soustavě, které byly položeny v 17. století, používáme v klasické fyzice dodnes.

1 Kinematika pohybu těles

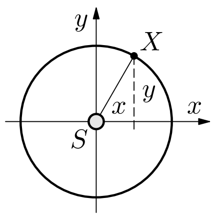
Jak jste se učili na začátku školního roku v 1. ročníku střední školy, slovo *kinematika* je název pro tu část mechaniky, která popisuje změny poloh těles v závislosti na čase. Popisuje tedy pohyb tělesa v prostoru v závislosti na čase, vyjadřuje **jak** se poloha tělesa vzhledem k jiným tělesům mění; zatím nás nezajímá, **proč** ke změnám došlo.

V této publikaci budeme sledovat pohyby planet a dalších přirozených těles, ale i pohyb těles vyslaných lidmi z povrchu Země. Bez důkazu zatím přijmeme tvrzení, že pohyby v tzv. *centrálním* gravitačním poli jsou rovinné, jejich trajektorie pohybu jsou jednoduché nebo složitější křivky. Z praktických důvodů budeme zanedbávat – většinou vzhledem k velkým vzdálenostem v planetární soustavě – vlastní rozměry pohybujících se těles a popisovat jejich pohyb pomocí pohybu jejich těžiště.

Nejjednodušší trajektorií těžiště tělesa, pohybujícího se v silovém poli, bude úsečka, která bude směřovat k centrálnímu tělesu nebo naopak od něho. Pohyby řady těles (např. planet) jsou periodické. Toto splňují např. pohyby po kružnici se středem v centrálním tělese, nebo pohyby po elipse.

Kružnice je rovinná křivka, jejíž body X mají od daného bodu S stálou vzdálenost r, tedy $XS = r$. K přesnějšímu popisu umístíme tuto kružnici do soustavy souřadnic $(S; x, y)$. Potom každý bod X kružnice má souřadnice $X[x, y]$ v daném časovém okamžiku t. Z Pythagorovy věty plyne, že

$$x^2 + y^2 = r^2.$$



Obr. 1 Kružnice

Pokud se těleso pohybuje po trajektorii tvaru kružnice stálou rychlostí o velikosti v tak, že jeden oběh vykoná za dobu T, můžeme pro velikost rychlosti psát $v = \dfrac{2\pi r}{T}$.

Příklad 1 – pohyb Měsíce kolem Země

Určete velikost rychlosti pohybu Měsíce kolem Země, budeme-li předpokládat, že Měsíc se pohybuje po trajektorii tvaru kružnice o poloměru 384 400 km s dobou oběhu 27,32 dne.

Řešení

Měsíc při jednom oběhu urazí dráhu $s = 2\pi r = 2\pi \cdot 384\,400\ \text{km} = 2\,415\,000\ \text{km}$, doba oběhu $T = 27{,}32\ \text{dne} \doteq 2\,360\,000\ \text{s}$. Potom $v = \dfrac{2\pi r}{T} = 1{,}023\ \text{km} \cdot \text{s}^{-1}$.

Příklad 2 – pohyb planety Venuše kolem Slunce

Planeta Venuše je od středu Slunce vzdálena 0,723 AU a doba oběhu je rovna 0,615 roku. Určete rychlost oběhu planety Venuše kolem Slunce.

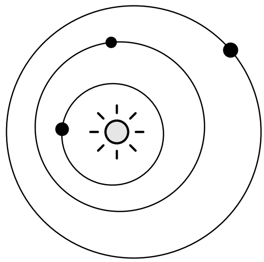
Řešení

Venuše při jednom oběhu urazí dráhu $s = 2\pi r = 2\pi \cdot 0{,}723 \cdot 149\,600\,000\ \mathrm{km} = 6{,}8 \cdot 10^8\ \mathrm{km}$, oběžná doba je rovna $T = 0{,}615$ roku $\doteq 19{,}408 \cdot 10^6$ s. Odtud oběžná rychlost planety $v = \dfrac{2\pi r}{T} = 35{,}0\ \mathrm{km \cdot s^{-1}}$.

Když se Johannes Kepler zabýval pohybem Marsu, pokusil se na základě záznamů polohy planety Mars, které při pozorování zapsal Tycho Brahe, zkonstruovat skutečnou polohu Marsu v okamžiku pozorování. Tycho Brahe určoval polohu Marsu průmětem této planety na nebeskou sféru, na niž umísťujeme všechna tělesa bez ohledu na jejich skutečnou vzdálenost od pozorovatele na povrchu Země. Při této metodě určujeme pouze tzv. *úhlové vzdálenosti* od některých významných nebeských těles nebo si zavedeme tzv. *úhlové souřadnice.* Těmi může být např. *úhlová vzdálenost* od obzoru (tzv. *výška tělesa*) nebo *polární vzdálenost* od bodu P v blízkosti Polárky (obloha se otáčí pro pozorovatele na povrchu Země kolem osy, která nebeskou sféru protíná v bodě P[1]).

Při této rekonstrukci však Kepler dospěl k závěru, že při stanovení polohy Marsu se musel dopouštět Brahe chyb, které přisuzoval zkřehlým prstům astronoma při nočních pozorováních. Druhou hypotézou byl závěr, že planety se nepohybují po ideálních kružnicích, nýbrž po eliptických trajektoriích. Tuto skutečnost formuloval jako *1. Keplerův zákon:*

Planety se pohybují kolem Slunce po mírně výstředných elipsách, v jejichž společném ohnisku se nachází střed Slunce.



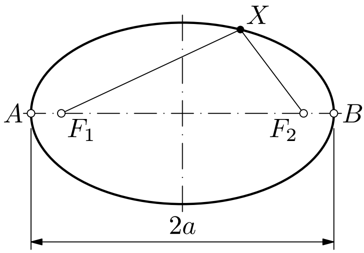
Obr. 2 Pohyb planet kolem Slunce

[1]Více informací o této problematice je možno nalézt např. v publikaci: *Volf, I., Jarešová, M.: Fyzika je kolem nás (Poloha a její změny).*

Protože jste se zatím v matematice nesetkali podrobněji s křivkou zvanou *elipsa*, pokusíme se s ní vás seznámit.
Elipsa vznikne jako množina bodů X, které mají od dvou daných bodů (ohnisek) F_1, F_2 stálý součet vzdáleností, tedy

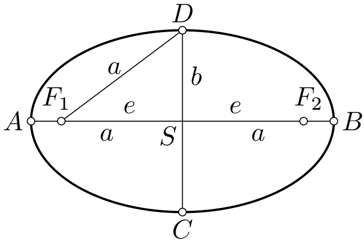
$$|F_1X| + |XF_2| = 2a,$$

kde $2a$ je délka velké osy $|AB|$ elipsy, tj. vzdálenost bodů A, B.



Obr. 3 Elipsa

Geometrii elipsy lze popsat takto: elipsa má střed S, dvě velké poloosy SA, SB, dvě malé poloosy SC, SD (obr. 4) (v matematice používáme pojmy hlavní a vedlejší poloosa, my však v našem textu budeme užívat názvosloví používané v astronomii, tj. *velká* a *malá poloosa*).



Obr. 4 Geometrie elipsy

Platí

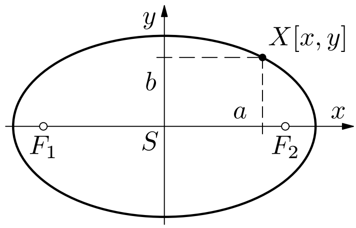
$$|AS| = |SB| = a, \quad |CS| = |SD| = b.$$

Vzdálenost $|SF_1| = |SF_2| = e$ je tzv. *výstřednost elipsy.*

Někdy uvažujeme tzv. *číselnou (numerickou) výstřednost*[2] $\varepsilon = \dfrac{e}{a}$, která je např. u planet uváděna. Číselná výstřednost trajektorie Země při jejím pohybu kolem Slunce je $\varepsilon = 0{,}016\,71$, pro trpasličí planetu Pluto $\varepsilon = 0{,}248\,52$, pro planetu Neptun $\varepsilon = 0{,}007\,25$.

Známe-li výstřednost ε a délku velké poloosy a, lze určit parametry: $e = a \cdot \varepsilon$, $b = \sqrt{a^2 - e^2} = a\sqrt{1 - \varepsilon^2}$. Pro úplnost uveďme i analytickou rovnici pro souřadnice bodů $X[x, y]$ elipsy (obr. 5), kterou ale v tomto studijním textu nevyužijeme:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$



Obr. 5 Geometrie elipsy

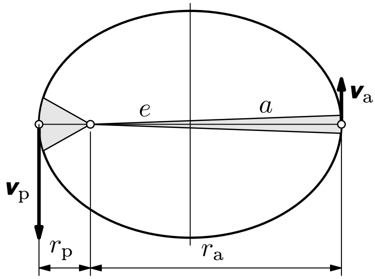
Obsah plochy ohraničené elipsou vypočteme užitím vztahu $S = \pi ab$. Vzorec $S = \pi ab$ lze odvodit jednoduchou úvahou: když jeden průměr kruhu ponecháme

[2] V [1], [2] a [3] je numerická výstřednost značena také e.

beze změny a k němu kolmý průměr zmenšíme v poměru $a : b$, potom

$$S = \pi a^2 \cdot \frac{b}{a} = \pi ab.$$

Toto byl stručný úvod do matematiky elipsy. My se však vrátíme zpět k problému pohybu planet v naší planetární soustavě, jak to provedl na začátku 17. století Johannes Kepler. Při studiu pohybu planety Mars dospěl k názoru, že dráha planety, kterou urazí za určitou dobu t, závisí nejen na tom, o jakou planetu se jedná, ale také na tom, v kterém místě své trajektorie se planeta nachází.



Obr. 6 2. Keplerův zákon

Planeta může být nejblíže Slunci v tzv. *periheliu*, pro jehož vzdálenost od středu Slunce platí $r_{\mathrm{p}} = a - e = a(1 - \varepsilon)$; nejvzdálenější místo je tzv. *afélium*, pro jehož vzdálenost od středu Slunce platí $r_{\mathrm{a}} = a + e = a(1 + \varepsilon)$.

Na základě výpočtů z poloh planety se Keplerovi podařilo najít kvantitativní závislost[3], kterou při nepříliš rozvinuté algebře vyjádřil geometricky:

Obsah plochy, kterou za určitou dobu opíše průvodič planety, je pro stejné doby u téže planety stejný.

Zvolíme si nepříliš velkou dobu τ a vyjádříme obsah plochy, kterou opíše průvodič planety v periheliu. Jde o eliptickou výseč, kterou nahradíme s dostatečnou přesností trojúhelníkem o délce základny $v_{\mathrm{p}}\tau$ a výšce r_{p}. Potom

$$S_{\mathrm{p}} = \frac{1}{2} v_{\mathrm{p}} \cdot \tau \cdot r_{\mathrm{p}} = \frac{1}{2} v_{\mathrm{p}} \cdot \tau \cdot r_{\mathrm{p}}.$$

Pro afélium dostáváme obdobně

$$S_{\mathrm{a}} = \frac{1}{2} v_{\mathrm{a}} \cdot \tau \cdot r_{\mathrm{a}} = \frac{1}{2} v_{\mathrm{a}} \cdot \tau \cdot r_{\mathrm{a}}.$$

Porovnáním získáme vztah mezi rychlostmi a vzdálenostmi planety v periheliu a aféliu

$$v_{\mathrm{p}} \cdot r_{\mathrm{p}} = v_{\mathrm{a}} \cdot r_{\mathrm{a}}.$$

Odtud plyne, že pro $r_{\mathrm{p}} < r_{\mathrm{a}}$ je $v_{\mathrm{p}} > v_{\mathrm{a}}$. Planeta má největší rychlost v periheliu a nejmenší v aféliu.

[3] Tuto závislost dnes známe jako tzv. *2. Keplerův zákon*.

Příklad 3 – planeta Neptun a trpasličí planeta Pluto

Planeta Neptun má velkou poloosu $a_{\mathrm{an}} = 30{,}27$ AU a číselnou výstřednost 0,007 25; trpasličí planeta Pluto $a_{\mathrm{ap}} = 39{,}62$ AU, $\varepsilon = 0{,}251\,86$. Určete jejich největší a nejmenší vzdálenost od Slunce.

Obr. 7 Neptun

Řešení

Vzdálenost planety v periheliu $r_{\mathrm{p}} = a - e = a(1 - \varepsilon)$, v aféliu $r_{\mathrm{a}} = a + e = a(1 + \varepsilon)$.

Pro planetu Neptun
$r_{\mathrm{pn}} = 30{,}27 \cdot (1 - 0{,}007\,25)$ AU $= 30{,}05$ AU,
$r_{\mathrm{an}} = 30{,}27 \cdot (1 + 0{,}007\,25)$ AU $= 30{,}49$ AU.
Pro planetu Pluto
$r_{\mathrm{pp}} = 39{,}62 \cdot (1 - 0{,}251\,86)$ AU $= 29{,}64$ AU,
$r_{\mathrm{ap}} = 39{,}62 \cdot (1 + 0{,}251\,86)$ AU $= 49{,}60$ AU.
Z toho plyne, že po určitou dobu může být trpasličí planeta Pluto blíže Slunci než planeta Neptun. Rovina trajektorie Plutona svírá s rovinou ekliptiky úhel $17°07{,}9'$; pro Neptun je to $1°46{,}2'$.

Obr. 8 Pluto se svými měsíci Charon, Nix a Hydra

Příklad 4 – planetka Hermes

Planetku Hermes (69230)[4] objevil německý astronom Karl Reinmuth v roce 1937 při jejím blízkém přiblížení k Zemi. Planetka Hermes má velkou poloosu $a = 1{,}29$ AU a číselnou výstřednost 0,47. Jaká je její nejmenší a největší vzdálenost od Slunce?

Řešení

Obdobně jako v příkladu 3 stanovíme $r_{\mathrm{p}} = a(1 - \varepsilon) = 1{,}29 \cdot (1 - 0{,}47)$ AU $=$ $= 0{,}684$ AU, $r_{\mathrm{a}} = a(1 + \varepsilon) = 1{,}29 \cdot (1 + 0{,}47)$ AU $= 1{,}896$ AU. Planetka se pohybuje tak, že její perihelium je blíže než obíhá Venuše, a afélium je až za trajektorií Marsu. Sklon roviny trajektorie planetky k rovině ekliptiky je asi $4{,}7°$.

[4] Donedávna to byla jediná planetka, která měla kromě základního označení i jméno, ale neměla určenou přesnou dráhu, a proto neměla ani číslo. Dnes už jsou pravidla pro pojmenovávání jiná: dokud planetka nemá přesně určenou dráhu, nedostane číslo. A dokud nemá číslo, nelze ji pojmenovat.

Příklad 5 – rychlost planety Země

Určete, jak se mění rychlost planety Země na její trajektorii kolem Slunce, víte-li, že $a = 1{,}000$ AU a číselná výstřednost $\varepsilon = 0{,}016\,71$.

Řešení

Velká poloosa trajektorie Země $a = 1{,}000\ \mathrm{AU} = 149{,}6 \cdot 10^6$ km.
Střední rychlost pohybu Země je

$$v_\mathrm{k} = \frac{2\pi a}{T} = \frac{2\pi \cdot 149{,}6 \cdot 10^6}{365{,}25 \cdot 86\,400}\ \mathrm{km \cdot s^{-1}} = 29{,}8\ \mathrm{km \cdot s^{-1}}.$$

Z 2. Keplerova zákona plyne

$$\frac{v_\mathrm{p}}{v_\mathrm{a}} = \frac{r_\mathrm{a}}{r_\mathrm{p}} = \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} = \frac{1+0{,}016\,71}{1-0{,}016\,71} = 1{,}034.$$

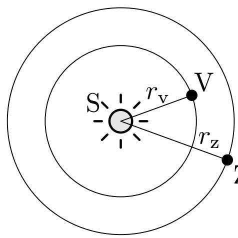
Abychom dokončili kinematiku pohybu planet, uveďme si ještě 3. Keplerův zákon, na němž Kepler pracoval několik let, jak již bylo uvedeno v úvodu. Dnes dokážeme tento zákon odvodit elementárním způsobem, ovšem z pohledu dynamiky pohybu planet, což nám teď struktura naší práce neumožňuje.

Označme v jednoduchém modelu trajektorie pohybu Venuše ($\varepsilon = 0{,}006\,8$) a Země ($\varepsilon = 0{,}016\,7$) délky velkých poloos a_v, a_z a doby oběhu T_v, T_z. Na základě svých úvah Kepler dospěl ke vztahu

$$\frac{T_\mathrm{v}^2}{T_\mathrm{z}^2} = \frac{a_\mathrm{v}^3}{a_\mathrm{z}^3}.$$

Pro případ trajektorií tvaru kružnic (obr. 9) pak platí

$$\frac{T_\mathrm{v}^2}{T_\mathrm{z}^2} = \frac{r_\mathrm{v}^3}{r_\mathrm{z}^3}.$$



Obr. 9 3. Keplerův zákon

Tyto vztahy dávají dobré výsledky, i když jsou také jen přibližné a platí pro tělesa o hmotnosti m pohybující se v gravitačním poli Slunce o hmotnosti M, kdy $m \ll M$.

Poznámka

Uvážíme-li, že planety mohou mít nezanedbatelné hmotnosti, potom platí

$$\frac{a_1^3}{a_2^3} = \frac{T_1^2}{T_2^2} \cdot \frac{M+m_1}{M+m_2}.$$

Protože na základě astronomických pozorování můžeme poměrně dobře určit tzv. *synodickou dobu*[5] oběhu planety (dobu, za niž se střed Slunce, Země

[5] V textu téměř všude uvádíme siderické doby oběhu, avšak přímým měřením se dá určit jen doba synodická.

a planety dostanou přibližně do téže přímky), lze vypočítat tzv. *siderickou dobu* dobu oběhu planety (dobu, za niž průvodič planety urazí 360° vzhledem ke vztažné soustavě spojené s hvězdami). Tento vztah je zásadní pro výpočty vzdálenosti planet od středu Slunce.

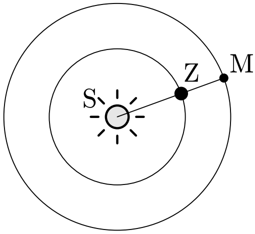
Příklad 6 – siderická a synodická doba

Synodická doba oběhu Marsu je 2,135 roku, Venuše 1,599 roku. Určete siderické doby oběhu a z nich potom vzdálenosti planet od Slunce.

Řešení

Vyjdeme z obr. 10. Země obíhá kolem Slunce s úhlovou rychlostí $\omega_Z = \dfrac{2\pi}{T_Z}$, Mars má úhlovou rychlost $\omega_M = \dfrac{2\pi}{T_M}$. Za určitou dobu T vykoná průvodič Země oproti průvodiči Marsu navíc úhel 2π, takže relativní úhlová rychlost

$$\frac{2\pi}{T} = \omega_Z - \omega_M.$$



Obr. 10 Země a Mars

Mars budeme pozorovat ze Země. Platí tedy

$$\frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{T_Z} - \frac{2\pi}{T_M} = \frac{2\pi(T_M - T_Z)}{T_Z T_M},$$

po úpravě

$$T = \frac{T_Z T_M}{T_M - T_Z}.$$

My však máme určit T_M: $\dfrac{2\pi}{T_M} = \dfrac{2\pi}{T_Z} - \dfrac{2\pi}{T}$,

z čehož

$$T_M = \frac{T \cdot T_Z}{T - T_Z} = \frac{2{,}135}{1{,}135}\ \text{roku} = 1{,}88\ \text{roku}.$$

Siderickou dobu T_V pro Venuši budeme řešit obdobným postupem, musíme však přehodit pořadí, protože Venuše má větší úhlovou rychlost, tj.

$$\frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{T_V} - \frac{2\pi}{T_Z},$$

z čehož

$$\frac{2\pi}{T_V} = \frac{2\pi}{T} + \frac{2\pi}{T_Z}.$$

Potom

$$T_V = \frac{T \cdot T_Z}{T + T_Z} = \frac{1{,}599}{2{,}599}\ \text{roku} = 0{,}615\ \text{roku}.$$

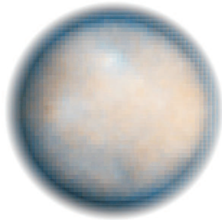
Z určených hodnot pak užitím 3. Keplerova zákona vypočítáme vzdálenosti; přitom $r_Z = a_Z = 1{,}000$ AU, $T_Z = 1{,}000$ r, $T_M = 1{,}88$ r, $T_V = 0{,}615$ r, tj.

$$a_M = \sqrt[3]{\left(\frac{T_M}{T_Z}\right)^2} a_Z = \sqrt[3]{1{,}88^2}\ \text{AU} = 1{,}523\ \text{AU},$$

$$a_V = \sqrt[3]{\left(\frac{T_V}{T_Z}\right)^2} a_Z = \sqrt[3]{0{,}615^2}\ \text{AU} = 0{,}723\ \text{AU}.$$

Příklad 7 – trpasličí planeta Ceres

Trpasličí planetu (dříve planetku) Ceres objevil v roce 1801 astronom *Piazzi*. Ceres má číselnou výstřednost 0,079 a dobu oběhu 1 681,6 dní. Určete délku velké poloosy a vzdálenost trpasličí planety od Slunce v periheliu a aféliu.



Obr. 11 Ceres

Řešení

Podle zadání je $T_Z = 365{,}25$ dne, $T_C = 1\,681{,}6$ dne, $a_Z = 1{,}000$ AU. Z 3. Keplerova zákona $\frac{T_C^2}{T_Z^2} = \frac{a_C^3}{a_Z^3}$ získáme pro Ceres

$$a_C = a_Z \cdot \sqrt[3]{\left(\frac{T_C}{T_Z}\right)^2} = 2{,}768\ \text{AU}.$$

Vzdálenost trpasličí planety v periheliu je $r_p = a_C(1 - \varepsilon) = 2{,}55$ AU, v aféliu $r_a = a_C(1 + \varepsilon) = 2{,}99$ AU.

Příklad 8 – kometa 14P/Wolf

V roce 1884 německý astronom *Max Wolf* pozoroval poprvé periodickou kometu, která dostala později označení 14P/Wolf. O této kometě dnes víme, že v periheliu své trajektorie proletí ve vzdálenosti 2,724 AU a v aféliu ve vzdálenosti 5,774 AU od středu Slunce. Určete délku velké poloosy, lineární a číselnou výstřednost a dobu oběhu kolem Slunce.

Řešení

Podle zadání $r_\mathrm{p} = 2{,}724$ AU, $r_\mathrm{a} = 5{,}774$ AU. Pro periodickou kometu platí Keplerovy zákony. Nejprve napíšeme vztahy pro výpočet vzdálenosti komety v periheliu a aféliu:

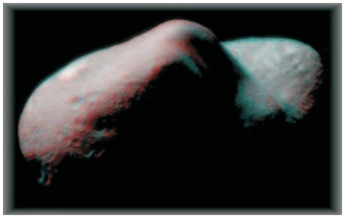
$$r_\mathrm{p} = a - e, \quad r_\mathrm{a} = a + e.$$

Tyto dva vztahy můžeme považovat za soustavu dvou rovnic o dvou neznámých a a e. Řešením této soustavy rovnic dostaneme $a = \frac{1}{2}(r_\mathrm{a} + r_\mathrm{p}) = 4{,}249$ AU, $e = \frac{1}{2}(r_\mathrm{a} - r_\mathrm{p}) = 1{,}525$ AU. Potom $\varepsilon = \frac{e}{a} = 0{,}359$. Dobu oběhu komety kolem Slunce určíme užitím 3. Keplerova zákona, tj. $T = T_\mathrm{Z}\sqrt{\left(\frac{a}{a_\mathrm{Z}}\right)^3} = 8{,}76$ let.

Cvičení 1

1. Doba oběhu Merkuru kolem Slunce je 0,241 roku, Venuše má velkou poloosu své trajektorie $a = 0{,}723$ AU. Porovnejte velikosti středních rychlostí pohybu. Trajektorie pohybu obou planet považujte za kruhové.

2. Planetka Eros byla objevena v roce 1898, při svém pohybu se dost přibližuje k Zemi, její oběžná dráha je nestabilní. Uvažuje se, že v budoucnu může dojít k její srážce se Zemí nebo Marsem. Eros se v současnosti pohybuje kolem Slunce po eliptické trajektorii, jejíž číselná výstřednost je 0,22 a doba oběhu je 1,76 roku. Určete a) délku velké a malé poloosy eliptické trajektorie, po které se Eros pohybuje, b) poměr velikostí rychlostí v periheliu a v aféliu.



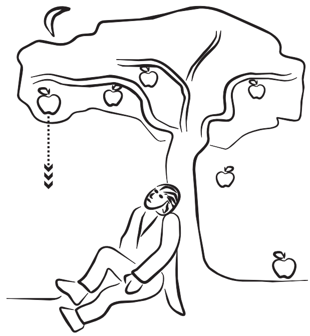
Obr. 12 Planetka Eros

3. Halleyova kometa 1P/Halley byla první pozorovaná periodická kometa; poprvé byla pozorována v Číně 240 let př. n. l.. Kometa byla naposledy pozorována i bez dalekohledu v roce 1986. Při svém průletu periheliem byla ve vzdálenosti 0,586 AU od Slunce, vzdálenost v aféliu byla 35,1 AU. Určete a) délku velké poloosy a číselnou výstřednost trajektorie komety, b) dobu oběhu komety kolem Slunce.

Obr. 13 Halleyova kometa

2 Dynamika pohybu těles – síly

Podle jedné fyzikální pohádky seděl *Isaac Newton* na zahradě a pozoroval měsíc, prosvítající na obloze. Náhle se z jabloně uvolnilo jablko a spadlo na zem. V ten okamžik si prý uvědomil, že planeta Země tak jako přitahuje jablko a určuje parametry jeho pohybu při pádu, působí stejně přitažlivou silou na Měsíc obíhající planetu. Tím Země váže pohyb Měsíce a nutí ho pohybovat se po uzavřené křivce (kružnici nebo elipse).



Obr. 14 Sedící Newton

Jako fyzikální pohádka nebo motivace k tomu, abychom se zamysleli nad tím, „proč se tělesa v naší planetární soustavě pohybují“, je toto vysvětlení možná postačující. Avšak Newton, vynikající fyzik a matematik, spoluobjevitel tzv. *vyšší matematiky* (s jeho jménem se spojuje „vynález“ derivací, Newtonova metoda řešení rovnic aj.), by se však s tímto intuitivním vysvětlením nespokojil. Také to pravděpodobně bylo poněkud jinak, i když Newtonova jabloň ve *Woolsthorpe* stále na jeho zahradě roste.

Isaac Newton žil v letech 1643–1727, tedy poté, co již zemřeli jeho myšlenkoví předchůdci, jako *Galileo Galilei* (1570–1642), *Tycho Brahe* (1546––1601) a *Johannes Kepler* (1571–1630). Newton znal tedy formulaci 3. Keplerova zákona, formulovaného i pro pohyb Měsíce kolem Země. 3. Keplerův zákon pro Měsíc – těleso o hmotnosti M_m, pohybující se ve střední vzdálenosti $r \doteq 60\ R_\mathrm{z} \approx 384\,400$ km kolem planety Země s dobou oběhu 27,32 dne, má tvar

$$\frac{r^3}{T^2} = \text{konst.}$$

Měsíc udržuje na trajektorii tvaru kružnice stálá přitažlivá dostředivá síla gravitačního původu. Její velikost lze vyjádřit ve tvaru

$$F_\mathrm{p} = \frac{4\pi^2}{T^2} \cdot r \cdot M_\mathrm{M}.$$

Výraz na pravé straně upravíme násobením $1 = \frac{r^2}{r^2}$, takže

$$F_\mathrm{p} = \frac{4\pi^2}{T^2} \cdot r \cdot M_\mathrm{M} \cdot \frac{r^2}{r^2} = 4\pi^2 \cdot M_\mathrm{M} \cdot \frac{r^3}{T^2} \cdot \frac{1}{r^2}.$$

Protože výraz $4\pi^2 \cdot \frac{r^3}{T^2} = K$ můžeme považovat za konstantní, potom dostředivá (přitažlivá) síla působící na Měsíc, se dá vyjádřit ve tvaru

$$F_{\mathrm{p}} = \frac{K}{r^2} \cdot M_{\mathrm{M}}.$$

Newton dále musel uvážit, že přitažlivé síly mezi centrální Zemí a Měsícem jsou silami vzájemného působení, tedy $F_{\mathrm{p}} = M_{\mathrm{M}} \cdot a_{\mathrm{M}} = M_{\mathrm{Z}} \cdot a_{\mathrm{Z}}$.
Proto mohl uzavřít tuto úvahu výsledkem

$$F_{\mathrm{p}} \sim \frac{1}{r^2}, \quad F_{\mathrm{p}} \sim M_{\mathrm{M}}, \quad F_{\mathrm{p}} \sim M_{\mathrm{Z}}, \text{ tedy } \quad F_{\mathrm{p}} \sim \frac{M_{\mathrm{M}} M_{\mathrm{Z}}}{r^2}.$$

Jablko o hmotnosti m bylo přibližně ve vzdálenosti $r_1 \doteq R_{\mathrm{Z}}$ od středu Země přitahováno silou $m \cdot g$, kde g bylo zrychlení volného pádu na povrchu planety. Jablko o stejné hmotnosti by bylo ve vzdálenosti $r_2 = 60\,R_{\mathrm{Z}}$ přitahováno silou asi 3 600krát menší. Newton si mohl ověřit, jak to vypadá se zrychlením g pádu jablka a zrychlením „pádu“ Měsíce (či jablka) na oběžné dráze kolem Země.
Zvolme $g = 9{,}81\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$, $r_2 = 384\,400\ \mathrm{km} \doteq 60\,R_{\mathrm{Z}}$,
$T_{\mathrm{M}} = 27{,}32\ \mathrm{dne} = 2{,}36 \cdot 10^6\ \mathrm{s}$. Potom

$$a_{\mathrm{M}} = \frac{4\pi^2 \cdot r_2}{T^2} = \frac{4\pi^2 \cdot 384\,400\,000}{(2{,}36 \cdot 10^6)^2}\ \mathrm{m \cdot s^{-2}} = 0{,}002\,725\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}.$$

Poměr

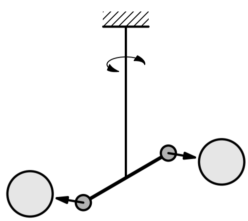
$$\frac{g}{a_{\mathrm{M}}} = \frac{9{,}81}{0{,}002\,725} = 3\,600.$$

Zrychlení vznikající v důsledku gravitace ve vzdálenosti $60\,R_{\mathrm{Z}}$ od středu Země je 3 600krát menší než na povrchu Země (tj. ve vzdálenosti R_{z} od středu Země).

Ukazuje se, že úvaha je v pořádku a uvedený vztah $F_{\mathrm{p}} \sim \dfrac{M_{\mathrm{Z}} \cdot M_{\mathrm{M}}}{r^2}$ je správným východiskem. Nyní ještě zbývá z úměrnosti udělat rovnost, tj. nalézt hodnotu konstanty $\varkappa$ ve vztahu

$$F_{\mathrm{p}} = \varkappa \cdot \frac{M_{\mathrm{Z}} \cdot M_{\mathrm{M}}}{r^2}. \tag{1}$$

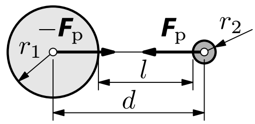
Konstantu úměrnosti se rozhodl změřit *Henry Cavendish* (1731–1810), který se zřejmě inspiroval u Coulombových torzních vážek. Na dlouhý tenký drátek byla zavěšena dřevěná tyčka o délce 180 cm (obr. 15), na jejíchž koncích byly připevněny dvě koule o téže hmotnosti. Po dosažení rovnovážného stavu byly ze strany přidány dvě koule o hmotnostech 160 kg, které způsobily, že se tyčka vychýlila z původní polohy.



Obr. 15 Torzní váhy

Z úhlu pootočení pak bylo možno určit deformaci v torzi užitého tenkého drátu, a následně i velikost síly, působící mezi dvojicemi: koule na tyčce a přidané koule.

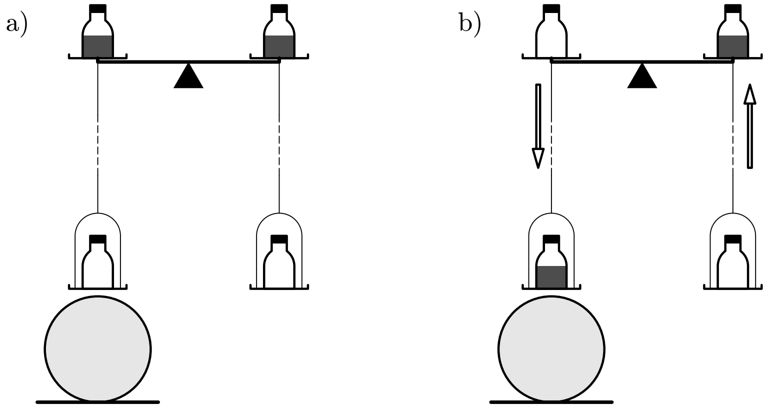
Protože hodnoty hmotnosti obou těles byly známé, vzdálenost středů koulí $d = r_1 + l + r_2$ bylo možno stanovit a moment působící přitažlivé síly určit z torzní deformace, bylo již snadné určit hodnotu tzv. *gravitační konstanty* (konstanta k ve vztahu (1))



Obr. 16 Silové působení

$$\varkappa = \frac{F_\mathrm{p} \cdot d^2}{m_1 \cdot m_2} = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}}.$$

Další, kdo se zabýval měřením gravitační konstanty, byl *Philipp von Jolly* (1809 – 1884). Svá měření uskutečnil v letech 1879 až 1880 pomocí speciálních vah umístěných uvnitř věže univerzitní budovy v Mnichově. Tyto váhy jsou schématicky znázorněny na obr. 17. Na začátku měření byly váhy v rovnováze, dolní baňky zavěšené na závěsu délky 21 m byly prázdné, zatímco v horních miskách byly položeny baňky obsahující 5 kg rtuti. Všechny baňky měly stejný objem, aby se vyloučil vliv vztlakové síly v průběhu měření. Pod levou dolní miskou byla umístěna koule z olova o hmotnosti 5 775 kg. Vliv gravitačního působení olověné koule na baňku se rtutí, vzdálenou 21 metrů od vahadla, byl v tomto uspořádání zanedbatelný. Když se baňky na levé straně vyměnily (obr. 17 b)), pak byla baňka se rtutí podstatně blíž k olověné kouli a projevilo se gravitační působení mezi baňkou se rtutí a olověnou koulí, což způsobilo výchylku vahadla. Z velikosti této výchylky pak Jolly určil hodnotu gravitační konstanty.



Obr. 17 Měření gravitační konstanty

Dnes je gravitační konstanta čím dál častěji označována G (dříve $\varkappa$) a známe její hodnotu $(6{,}674\,2 \pm 0{,}001\,0)\ \mathrm{N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}}$, relativní standardní odchylka je $150 \cdot 10^{-6} = 0{,}000\,15$. V našem textu tuto konstantu budeme stále ještě značit $\varkappa$ v souladu s tím, jak je značena ve vašich učebnicích.

Příklad 9 – statický stav beztíže

Někde na přímce spojující středy Země a Měsíce je bod, v němž se vyrovnává působení Země a Měsíce. Určete vzdálenost tohoto místa od středu Země. Hmotnost Země je $M_{\mathrm{Z}} = 5{,}974 \cdot 10^{24}$ kg $\doteq 6{,}0 \cdot 10^{24}$ kg, hmotnost Měsíce je $M_{\mathrm{M}} = 7{,}353 \cdot 10^{22}$ kg $= 0{,}0123\, M_{\mathrm{Z}} = \dfrac{1}{81} M_{\mathrm{Z}}$, vzdálenost středů obou těles je $r = 384\,400$ km $\doteq 60{,}3\, R_{\mathrm{Z}}$.

Řešení

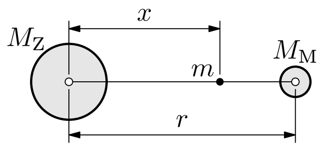
Do místa, kde je výslednice gravitačních sil rovna nule, umístíme těleso o hmotnosti m (obr. 18). Podle zadání musí platit

$$\varkappa \frac{m M_{\mathrm{Z}}}{x^2} = \varkappa \frac{m M_{\mathrm{M}}}{(r-x)^2}.$$

Po úpravě a částečném dosazení dostaneme

$$\frac{81 M_{\mathrm{M}}}{x^2} = \frac{M_{\mathrm{M}}}{(r-x)^2},$$

a tedy



Obr. 18 Gravitační působení mezi Zemí a Měsícem

$$\left| \frac{x}{60{,}3\, R_{\mathrm{Z}} - x} \right| = 9,$$

což je rovnice s absolutní hodnotou. Tato rovnice má z hlediska matematiky dvě řešení:

1. $\dfrac{x}{60{,}3\, R_{\mathrm{Z}} - x} = 9$, z čehož $x = 54{,}27\, R_{\mathrm{Z}} \doteq 345\,700$ km,
2. $\dfrac{x}{60{,}3\, R_{\mathrm{Z}} - x} = -9$, z čehož $x = 67{,}84\, R_{\mathrm{Z}} \doteq 432\,000$ km.

Druhé řešení nevyhovuje požadavkům zadání, že hledaný bod se má nacházet mezi Zemí a Měsícem a navíc obě gravitační síly mají v tomto bodě stejný směr. Požadavky zadání tedy splňuje pouze bod, který se nachází přibližně ve vzdálenosti 345 700 km od středu Země.

Příklad 10 – gravitační působení na Měsíc

Všichni víme, že v naší sluneční soustavě obíhá Země kolem Slunce a Měsíc kolem Země. Při těchto pohybech může nastat okamžik, že Měsíc se bude nacházet mezi Zemí a Sluncem, a to tak, že tato tři tělesa budou ležet v jedné přímce. Určete poměr gravitačních sil, kterými v tomto okamžiku působí na Měsíc Slunce a Země. Při řešení využijte následující údaje: vzdálenost středů Země–Slunce je $r_{\mathrm{ZS}} = 149{,}6 \cdot 10^6$ km, vzdálenost středů Země–Měsíc je $r_{\mathrm{ZM}} = 384\,400$ km, hmotnost Slunce je přibližně $M_{\mathrm{S}} = 330\,000\, M_{\mathrm{Z}}$.

Řešení

Na Měsíc působí Země gravitační silou o velikosti

$$F_1 = \varkappa \frac{M_\mathrm{M} M_\mathrm{Z}}{r_\mathrm{ZM}^2},$$

a Slunce gravitační silou o velikosti

$$F_2 = \varkappa \frac{M_\mathrm{M} M_\mathrm{S}}{r_\mathrm{MS}^2}.$$

Nyní určíme poměr velikostí těchto sil, tj.

$$\frac{F_2}{F_1} = \frac{\varkappa \dfrac{M_\mathrm{M} M_\mathrm{S}}{r_\mathrm{MS}^2}}{\varkappa \dfrac{M_\mathrm{M} M_\mathrm{Z}}{r_\mathrm{ZM}^2}} = \frac{M_\mathrm{S}}{M_\mathrm{Z}} \cdot \frac{r_\mathrm{ZM}^2}{r_\mathrm{MS}^2} = 330\,000 \cdot \frac{384\,400^2}{(149{,}6 \cdot 10^6 - 384\,400)^2} = 2{,}19 \doteq 2{,}2.$$

Poznámka

Pozor na problém tří těles (gravitační zákon mluví o dvou tělesech), sféra gravitačního působení umísťuje Měsíc do okolí Země tak, že účinek většího tělesa se tam výrazněji neprojevuje; pro Zemi v gravitačním poli Slunce je to 931 000 km.

V našich dalších úvahách budeme předpokládat, že v nepříliš velké vzdálenosti od centrálního tělesa o hmotnosti M se bude pohybovat další těleso o nepříliš velké hmotnosti m ($m \ll M$).[6] Pohyb menšího tělesa bude probíhat po trajektorii tvaru kružnice o poloměru r, jejíž střed bude totožný se středem centrálního tělesa o hmotnosti M. Dostředivou silou, která tento pohyb způsobuje, je síla gravitační, působící mezi oběma tělesy, tj. platí

$$\varkappa \cdot \frac{mM}{r^2} = m \cdot \frac{v^2}{r} = m \cdot \frac{4\pi^2}{T^2} \cdot r,$$

z čehož plyne řada vztahů uvedených níže

$$v = \sqrt{\frac{\varkappa M}{r}}, \qquad r = \sqrt[3]{\frac{\varkappa M T^2}{4\pi^2}}, \qquad T = \sqrt{\frac{4\pi^2 r^3}{\varkappa M}}, \qquad M = \frac{4\pi^2 r^3}{\varkappa T^2}.$$

Pokud bychom jako centrální těleso zvolili Slunce a jako menší těleso Zemi, můžeme užitím těchto vztahů vypočítat přibližnou hmotnost Slunce, jak si ukážeme v dalším příkladu.

[6] Tyto omezující podmínky zavádíme proto, abychom mohli jednoduchým způsobem dospět k cíli. Pokud bychom tyto podmínky neuvedli, dospěli bychom k mnohem složitějším vztahům, přesahujícím rozsah tohoto textu. V rámci těchto zjednodušujících podmínek také mlčky předpokládáme, že obě tělesa mají tvar homogenních koulí (popř. koulí se středově souměrně rozloženou hustotou) – pak platí Newtonův gravitační zákon ve stejném tvaru jako pro dva hmotné body.

Příklad 11 – hmotnost Slunce

Určete hmotnost Slunce M a rychlost oběhu Země kolem Slunce, víte-li, že vzdálenost středů Země a Slunce je 149,6 miliónů kilometrů a že oběžná doba Země kolem Slunce je 365,26 dne.

Řešení

Vyjdeme ze vztahu pro výpočet hmotnosti M centrálního tělesa, kam za dobu oběhu Země dosadíme $T = 3{,}156 \cdot 10^7$ s, tj.

$$M = \frac{4\pi^2 r^3}{\varkappa T^2} = \frac{4\pi^2 \cdot (149{,}6 \cdot 10^9)^3}{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot (3{,}156 \cdot 10^7)^2}\ \mathrm{kg} = 1{,}99 \cdot 10^{30}\ \mathrm{kg} \doteq 2 \cdot 10^{30}\ \mathrm{kg}.$$

Rychlost oběhu Země kolem Slunce určíme ze vztahu

$$v = \frac{2\pi r}{T} = \frac{2\pi \cdot 149{,}6 \cdot 10^9}{3{,}156 \cdot 10^7}\ \mathrm{m \cdot s^{-1}} = 29\,800\ \mathrm{m \cdot s^{-1}} \doteq 30\ \mathrm{km \cdot s^{-1}}.$$

Příklad 12 – transneptunická tělesa

Jeden z objektů *Kuiperova pásu*, trpasličí planeta *Varuna* 2000 WR_{106}, která byla objevena v roce 2000, má průměr asi 870 km a obíhá kolem Slunce ve střední vzdálenosti 43,1 AU. Další transneptunické těleso, planetka *Quaoar* 2002 LM_{60}, objevené v roce 2002, se pohybuje po trajektorii velmi podobné trajektorii Varuny ve střední vzdálenosti 43,5 AU od Slunce. Obě tělesa se pohybují kolem Slunce po mírně eliptických trajektoriích, které můžeme považovat téměř za kružnice. Určete doby oběhu a oběžné rychlosti obou objektů.[7]

Obr. 19 Varuna

Řešení

Varuna:

Doba oběhu je $\dfrac{T_\mathrm{V}^2}{T_\mathrm{Z}^2} = \dfrac{a_\mathrm{V}^3}{a_\mathrm{Z}^3}$, z čehož $T_\mathrm{V} = T_\mathrm{Z} \cdot \sqrt{\dfrac{a_\mathrm{V}^3}{a_\mathrm{Z}^3}} = 1 \cdot \sqrt{\dfrac{43{,}1^3}{1^3}}$ let $= 283$ let.

Oběžnou rychlost určíme užitím vztahu $v_\mathrm{V} = \sqrt{\dfrac{\varkappa M_\mathrm{S}}{r_\mathrm{V}}}$,

$$v_\mathrm{V} = \sqrt{\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 2 \cdot 10^{30}}{43{,}1 \cdot 149{,}6 \cdot 10^9}}\ \mathrm{m \cdot s^{-1}} = 4{,}55\ \mathrm{km \cdot s^{-1}}.$$

[7] Podle mezinárodní dohody mají transneptunická tělesa nést jména božstev spojovaných s mýty o stvoření. Varuna byla pojmenována po hinduistickém bohovi Varuna – bohu oblohy, deště, oceánů a řek, který také ovládal zákon a podsvětí. Quaoar byl objevený dva roky po tom, co byla objevena Varuna. Quaoar je jméno boha stvořitele pocházejícího z mytologie indiánského kmene Tongva.

Quaoar:

Doba oběhu je $\dfrac{T_{\mathrm{Q}}^2}{T_{\mathrm{Z}}^2} = \dfrac{a_{\mathrm{Q}}^3}{a_{\mathrm{Z}}^3}$, z čehož $T_{\mathrm{Q}} = T_{\mathrm{Z}} \cdot \sqrt{\dfrac{a_{\mathrm{Q}}^3}{a_{\mathrm{Z}}^3}} = 1 \cdot \sqrt{\dfrac{43{,}5^3}{1^3}}$ let $= 287$ let.

Oběžnou rychlost určíme užitím vztahu $v_{\mathrm{Q}} = \sqrt{\dfrac{\varkappa M_{\mathrm{S}}}{r_{\mathrm{Q}}}}$,

$$v_{\mathrm{Q}} = \sqrt{\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 2 \cdot 10^{30}}{43{,}5 \cdot 149{,}6 \cdot 10^9}}\ \mathrm{m \cdot s^{-1}} = 4{,}53\ \mathrm{km \cdot s^{-1}}.$$

Cvičení 2

4. Planeta Uran má 27 známých měsíců. Již v roce 1787 byl objeven měsíc *Oberon* se střední vzdáleností $r = 584\,000$ km od středu planety Uran a s dobou oběhu 13,463 dne. Určete oběžnou rychlost Oberonu a hmotnost planety Uran.

5. Téhož roku byl objeven i měsíc *Titania* se střední vzdáleností $r = 436\,000$ km od středu planety Uran a s dobou oběhu 8,706 dne. Určete i v tomto případě hmotnost planety Uran a porovnejte s výsledkem úlohy 4. Dále pak vypočtěte synodickou dobu oběhu (vztaženou k Uranu) obou měsíců.[8]

Obr. 20 Uran ze snímku sondy Voyager 2 v roce 1986

Obr. 21 Oberon ze snímku sondy Voyager 2 v roce 1986

Obr. 22 Titania ze snímku sondy Voyager 2 v roce 1986

6. Kolem trpasličí planety Pluto se pohybuje měsíc Charon (obr. 8), který byl objeven v roce 1978. Pohybuje se ve střední vzdálenosti 19 500 km od středu planety Pluto s dobou oběhu 6,39 dne. Odhadněte hmotnost trpasličí planety Pluto. Dále uvažujte, že Charon má tvar koule o poloměru přibližně polovičním než má Pluto a že obě tělesa mají přibližně stejnou hustotu. Odhadněte také hmotnost Charona.

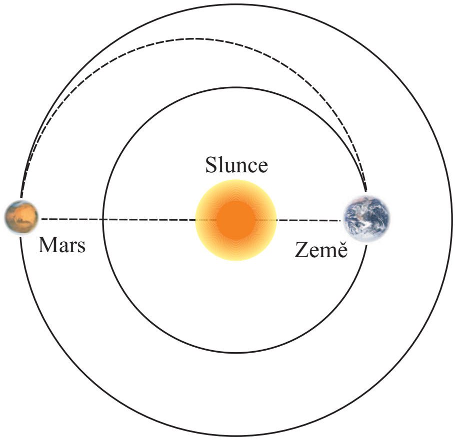
[8] Jména Uranových měsíců se volí podle postav z děl Williama Shakespeara a Alexandra Popea. Titania a Oberon jsou královna a král skřítků ze Snu noci svatojánské.

7. Saturnův měsíc Titan byl objeven v roce 1655. Doba jeho oběhu kolem Saturnu je 15,95 dne, vzdálenost středů obou těles je 1 222 000 km. Určete hmotnost planety Saturn a porovnejte ji s hmotností Země a Slunce.

V současné době se mezi vědeckou veřejností zvažují možnosti vyslat kosmické lodi s lidskou posádkou k planetě Mars.[9]

Německý fyzik *Walter Hohmann* (1880 – 1945) v roce 1925 dokázal, že energeticky nejvýhodnější pro takový přechod je eliptická trajektorie, která se dotýká trajektorie Země v místě startu a trajektorie Marsu v místě přistání, přičemž tato místa musí ležet na opačných stranách od Slunce. Tato eliptická trajektorie se nazývá *Hohmannova elipsa*.
V několika dalších úlohách se pokusíme vyřešit několik problémů spojených s takovou cestou.

Obr. 23 Mars



Obr. 24 Hohmannova trajektorie

[9]Planeta Mars je pojmenována po římském bohu války, který se jmenoval *Mars*. Má dva měsíce nepravidelného tvaru pojmenované *Phobos* („Strach“) a *Deimos* („Hrůza“). Oba měsíce objevil *Asaph Hall* v roce 1877 a pojmenoval je podle synů boha Marta.

Příklad 13 – let na Mars

Kosmická loď s lidskou posádkou je vyslána ze startovní dráhy v blízkosti povrchu Země směrem k Marsu po „výhodné trase“, která představuje elipsu, dotýkající se trajektorie Země (perihelium elipsy), kterou považujeme za kruhovou o poloměru 1,00 AU a na konci (v aféliu) se tato elipsa dotýká trajektorie Marsu (obr. 24). Pro jednodušší odhad výsledku považujme i tuto trajektorii za kruhovou o poloměru 1,52 AU. Jak dlouho bude trvat let?

Řešení

Označme $r_Z = 1{,}00$ AU poloměr trajektorie Země, $r_M = 1{,}52$ AU poloměr trajektorie Marsu, $T_Z = 1{,}00$ rok dobu oběhu Země, T_L dobu letu kosmické lodi na Mars. Pro eliptickou trajektorii kosmické lodi podle obr. 25 platí

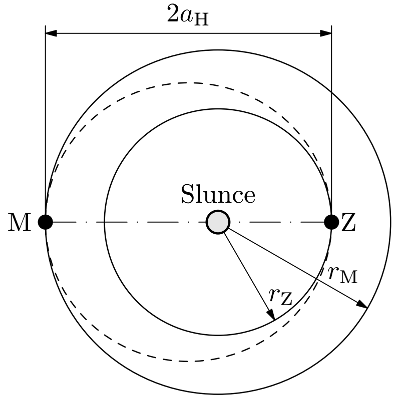
$$2a_H = r_Z + r_M,$$

neboli po úpravě

$$a_H = \frac{r_Z + r_M}{2} = 1{,}26 \text{ AU}.$$

Pro výpočet doby letu T_L kosmické lodi na Mars použijeme 3. Keplerův zákon

$$\frac{(2T_L)^2}{T_Z^2} = \frac{a_H^3}{r_Z^3}.$$



Obr. 25 Přechodová trajektorie

Po úpravě

$$T_L = \frac{1}{2} \cdot T_Z \cdot \sqrt{\frac{a_H^3}{r_Z^3}} = \frac{1}{2} \cdot 1{,}00 \cdot \sqrt{1{,}26^3} \text{ r} = 0{,}707 \text{ r} = 258 \text{ dní}.$$

Poznámka

Všimněte si, že jsme při výpočtu využili skutečnosti, že doba letu kosmické lodi je poloviční než doba letu po celé *Hohmannově elipse*, což se projevilo přidáním čísla „2“ před T_L ve 3. Keplerově zákonu.

Příklad 14 – družice Marsu

O přirozené družici Marsu s názvem Phobos víme z MFCh tabulek [3], že její doba oběhu kolem Marsu představuje 0,32 dne a poloměr téměř kruhové trajektorie je $r_P = 9\,000$ km. Pro Deimos jsou údaje 1,26 dne, $r_D = 23\,000$ km.

a) Ověřte, že pro obě družice platí 3. Keplerův zákon.
b) Stanovte poloměr oběžné trajektorie stacionární družice Marsu, je-li oběžná doba Marsu 24 hodin 37 minut.

Řešení

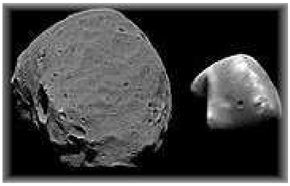
a) 3. Keplerův zákon přepíšeme do tvaru $\frac{r_\mathrm{P}^3}{T_\mathrm{P}^2} = \frac{r_\mathrm{D}^3}{T_\mathrm{D}^2}$ a ověříme, zda tato rovnost číselně platí.

Podle 3. Keplerova zákona platí číselně pro Phobos

$$\frac{r_\mathrm{P}^3}{T_\mathrm{P}^2} = \frac{(9 \cdot 10^6)^3}{(0{,}32 \cdot 86\,400)^2}\ \mathrm{m}^3 \cdot \mathrm{s}^{-2} = 9{,}54 \cdot 10^{11}\ \mathrm{m}^3 \cdot \mathrm{s}^{-2},$$

pro Deimos pak platí

$$\frac{r_\mathrm{D}^3}{T_\mathrm{D}^2} = \frac{(23 \cdot 10^6)^3}{(1{,}26 \cdot 86\,400)^2}\ \mathrm{m}^3 \cdot \mathrm{s}^{-2} = 10{,}2 \cdot 10^{11}\ \mathrm{m}^3 \cdot \mathrm{s}^{-2}.$$


Obr. 26 Phobos a Deimos

V případě platnosti 3. Keplerova zákona by oba výsledky měly vyjít číselně stejně. Vzniká podezření, že údaje o měsících Phobos a Deimos nejsou zcela přesné. Pokusíme se zjistit přesnější údaje o těchto měsících, což lze např. na stránkách *www.wikipedia.org*. Na těchto stránkách jsou uvedeny hodnoty: $r_\mathrm{P} = 9\,377$ km, $r_\mathrm{D} = 23\,460$ km, $T_\mathrm{P} = 0{,}319$ dne, $T_\mathrm{D} = 1{,}262$ dne.

Nyní předchozí výpočty zopakujeme s těmito údaji.

Pro Phobos: $\frac{r_\mathrm{P}^3}{T_\mathrm{P}^2} = \frac{(9{,}377 \cdot 10^6)^3}{(0{,}319 \cdot 86\,400)^2}\ \mathrm{m}^3 \cdot \mathrm{s}^{-2} = 1{,}08 \cdot 10^{12}\ \mathrm{m}^3 \cdot \mathrm{s}^{-2}$.

Pro Deimos: $\frac{r_\mathrm{D}^3}{T_\mathrm{D}^2} = \frac{(23{,}46 \cdot 10^6)^3}{(1{,}263 \cdot 86\,400)^2}\ \mathrm{m}^3 \cdot \mathrm{s}^{-2} = 1{,}08 \cdot 10^{12}\ \mathrm{m}^3 \cdot \mathrm{s}^{-2}$.

Zde již je větší shoda. I když jsou MFCh tabulky[10] doporučené k používání ve škole, nemůžeme v některých případech důvěřovat jenom jednomu zdroji, údaje je pak nutno ověřovat pomocí více zdrojů.

b) Doba rotace planety Marsu kolem osy trvá 24 hod 37 min $\doteq$ 24,62 hod. Stacionární družice Marsu musí být umístěna přesně nad rovníkem Marsu (obr. 27). Označme r vzdálenost stacionární družice od středu Marsu. Vzhledem k tomu, že se jedná o stacionární družici, nachází se stále nad stejným místem na Marsu (to znamená, že musí obíhat kolem Marsu stejnou úhlovou rychlostí, s jakou Mars rotuje kolem osy), a proto musí být doba oběhu této

[10]V současné době jsou k dispozici pro školy dvoje tabulky [2], [3] a i v těch byste v řadě případů našli rozdílné údaje (především tehdy, pokud je požadujete s větší přesností), což může být také způsobeno aktualizací údajů – v tabulkách se mohou vyskytovat údaje naměřené v různých letech.

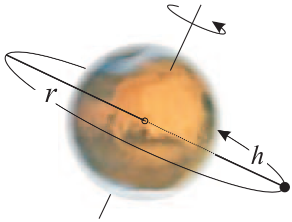
družice stejná, jako doba rotace planety Mars. Podle 3. Keplerova zákona platí $\frac{r_\mathrm{P}^3}{T_\mathrm{P}^2} = \frac{r^3}{T_\mathrm{M}^2}$, z čehož

$$r = \sqrt[3]{\left(\frac{T_\mathrm{M}}{T_\mathrm{P}}\right)^2} \cdot r_\mathrm{P}.$$

Po dosazení známých údajů dostaneme

$$r = \sqrt[3]{\left(\frac{24{,}62}{7{,}65}\right)^2} \cdot 9\,377\ \mathrm{km} = 20\,440\ \mathrm{km}.$$

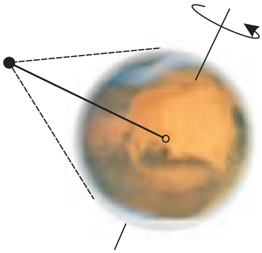
Stacionární družice Marsu se nachází mezi oběžnými trajektoriemi obou měsíců Marsu ($9\,377\ \mathrm{km} < 20\,440\ \mathrm{km} < 23\,460\ \mathrm{km}$), a to ve výšce $h = 20\,440\ \mathrm{km} - 3\,397\ \mathrm{km} = 17\,043\ \mathrm{km}$ nad povrchem Marsu.



Obr. 27 Stacionární družice

Příklad 15 – stacionární družice Marsu – 1

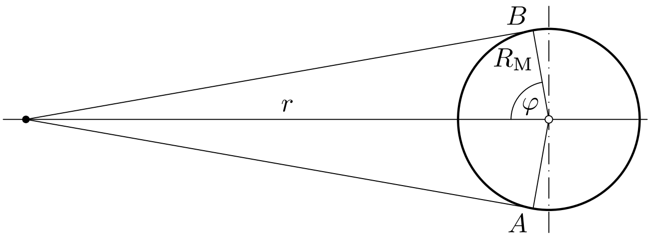
Planeta Mars má poloměr 3 397 km. Stacionární družice je umístěna přesně nad rovníkem planety. Určete úhlovou i obvodovou vzdálenost míst na povrchu planety, z níž lze vidět stacionární družici (a tedy ji užít ke spojovacím účelům). Kolik stacionárních družic je třeba k zajištění spojení pokud možno z celého (kromě polárních oblastí) povrchu Marsu?



Obr. 28 Stacionární družice

Řešení

Podle obr. 29 platí $\cos\varphi = \frac{R_\mathrm{M}}{r} = \frac{3\,397}{20\,440} = 0{,}162$, z čehož $\varphi = 80{,}43^\circ = 80^\circ 26'$.



Obr. 29 Pokrytí povrchu Marsu od stacionární družice

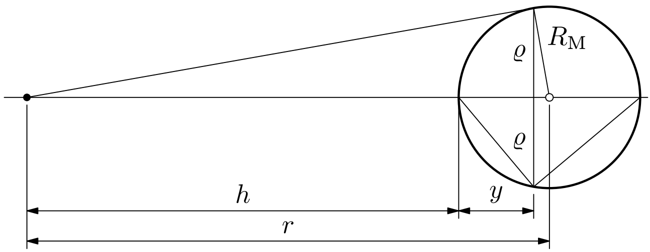
Úhlová vzdálenost dvou míst na povrchu Marsu je $161,26^\circ \doteq 2{,}81$ rad, obvodová vzdálenost pak je $l = R_\mathrm{M} \cdot 2\varphi = 3\,397 \cdot 2{,}81$ km $= 9\,540$ km. Vzhledem k tomu, že obvod rovníku je $o = 2\pi \cdot R_\mathrm{M} = 21\,344$ km, jsou k dobrému spojení větší části povrchu Marsu (kromě polárních oblastí) se stacionární družicí třeba tři stacionární družice

$$\left(n = \frac{2\pi \cdot R_\mathrm{M}}{R_\mathrm{M} \cdot 2\varphi} = \frac{\pi}{\varphi} = \frac{\pi}{80{,}43 \cdot \frac{\pi}{180}} = \frac{180}{80{,}43} = 2{,}24 \right).$$

V následujícím příkladu poněkud překročíme rozsah tohoto textu (z hlediska matematických znalostí), další část textu na tento výpočet bezprostředně nenavazuje, takže je možno tento příklad přeskočit. K pochopení řešení příkladu je nutné umět vypočítat obsah kulového vrchlíku (příslušné vztahy je možno nalézt v MFCh tabulkách).

Příklad 16 – stacionární družice Marsu – 2

Vypočtěte, jakou část povrchu Marsu pokryje při sledování povrchu Marsu jedna stacionární družice.



Obr. 30 Pokrytí povrchu Marsu signálem ze stacionární družice

Řešení

V příkladu 14 jsme vypočítali, že výška stacionární družice nad povrchem Marsu je $h = 17\,043$ km. Výšku y vrchlíku, který je vidět ze stacionární družice, určíme užitím vztahu

$$y = R_\mathrm{M} - R_\mathrm{M} \cos\varphi = R_\mathrm{M} - \frac{R_\mathrm{M}^2}{r} = \frac{r - R_\mathrm{M}}{r} R_\mathrm{M} = \frac{hR_\mathrm{M}}{r}.$$

Pro dané hodnoty:

$$y = \frac{17\,043 \cdot 3\,397}{20\,440}\ \mathrm{km} = 2\,833\ \mathrm{km}.$$

V MFCh tabulkách [2], [3] nyní můžete nalézt vzorec pro výpočet povrchu kulového vrchlíku $S_1 = 2\pi R_\mathrm{M} y$, povrch Marsu je $S = 4\pi R_\mathrm{M}^2$. Nakonec určíme podíl

$$\frac{S_1}{S} = \frac{2\pi R_\mathrm{M} y}{4\pi R_\mathrm{M}^2} = \frac{y}{2R_\mathrm{M}} = \frac{2\,833}{2 \cdot 3\,397} = 41{,}7\ \%.$$

Příklad 17 – Sedna

V listopadu 2003 byl objeven další objekt naší sluneční soustavy – planetka (90 377) Sedna[11]. Střední vzdálenost Sedny od Slunce je 488,20 AU a její číselná výstřednost je 0,844. Určete

a) dobu oběhu této planetky,

b) nejmenší a největší vzdálenost Sedny od Slunce,

c) poměr gravitační přitažlivé síly v periheliu a aféliu.

Řešení

a) Dobu oběhu určíme užitím 3. Keplerova zákona, tj. $\frac{T_\mathrm{S}^2}{T_\mathrm{Z}^2} = \frac{a_\mathrm{S}^3}{r_\mathrm{Z}^3}$, z čehož

$$T_\mathrm{S} = \sqrt{\left(\frac{a_\mathrm{S}}{r_\mathrm{Z}}\right)^3} T_\mathrm{Z} = \sqrt{\left(\frac{488{,}20}{1{,}00}\right)^3} \cdot 1{,}00\ \mathrm{r} = 10\,787\ \mathrm{r} \approx 3\,940\,000\ \text{dní}.$$

b) Nejmenší vzdálenost r_p a největší vzdálenost r_a určíme užitím vztahů

$$r_\mathrm{p} = a_\mathrm{S}(1 - \varepsilon) = 488{,}20 \cdot (1 - 0{,}844)\ \mathrm{AU} = 76{,}2\ \mathrm{AU},$$
$$r_\mathrm{a} = a_\mathrm{S}(1 + \varepsilon) = 488{,}20 \cdot (1 + 0{,}844)\ \mathrm{AU} = 900{,}2\ \mathrm{AU},$$

c) Poměr velikostí gravitačních sil v periheliu a aféliu určíme tak, že vyjádříme nejprve obecně velikosti gravitačních sil v obou polohách a pak je dáme do poměru. Dostaneme

$$F_\mathrm{gp} = \varkappa \cdot \frac{m_\mathrm{S} \cdot M_\mathrm{Sl}}{r_\mathrm{p}^2} = \varkappa \cdot \frac{m_\mathrm{S} \cdot M_\mathrm{Sl}}{a_\mathrm{S}^2 (1 - \varepsilon)^2},$$
$$F_\mathrm{ga} = \varkappa \cdot \frac{m_\mathrm{S} \cdot M_\mathrm{Sl}}{r_\mathrm{a}^2} = \varkappa \cdot \frac{m_\mathrm{S} \cdot M_\mathrm{Sl}}{a_\mathrm{S}^2 (1 + \varepsilon)^2},$$
$$\frac{F_\mathrm{p}}{F_\mathrm{a}} = \left(\frac{r_\mathrm{a}}{r_\mathrm{p}}\right)^2 = \left(\frac{1 + \varepsilon}{1 - \varepsilon}\right)^2 = \left(\frac{1 + 0{,}844}{1 - 0{,}844}\right)^2 = 140.$$

Gravitační síla Slunce působící na planetku Sedna v periheliu je 140krát větší než síla působící v aféliu.

[11]Sedna je velké transneptunické těleso, jehož průměr může dosahovat až dvou třetin průměru trpasličí planety Pluto. Sedna dostala jméno po inuitské bohyni Sedně, která vládla všem mořím, oceánům a jejich obyvatelům, a která žila v temnotách inuitského podsvětí.

Cvičení 3

8. Představte si, že by mohla nastat situace, že bychom mohli využít měsíců Phobos nebo Deimos jako pozorovacích stanic povrchu Marsu (oba měsíce se pohybují přibližně v rovině rovníku planety Mars a jejich trajektorie jsou téměř kruhové). Určete obdobně jako v příkladu 15 úhlovou i obvodovou vzdálenost dvou nejvzdálenějších míst na povrchu Marsu, z nichž je vidět měsíc Phobos nebo měsíc Deimos v daném okamžiku.

9. Odhadněte, jakou část povrchu Marsu lze v daném okamžiku pozorovat z povrchu daného měsíce (z úlohy 8).

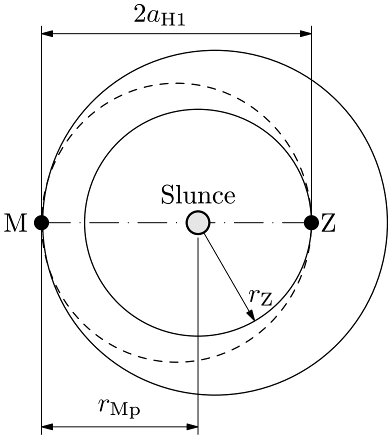
10. Planetka 90 482 *Orcus*[12] má dobu oběhu kolem Slunce 247,492 roku (90 396,4 dne), výstřednost její eliptické trajektorie je 0,226. Astronomové odhadují hmotnost této planetky na $7{,}5 \cdot 10^{20}$ kg, střední průměr planetky je přibližně 950 km. Odhadněte,
a) v jaké střední vzdálenosti od Slunce se Orcus pohybuje,
b) jaké jsou vzdálenosti této planetky od Slunce v perihelu a aféliu,
c) jaké je gravitační zrychlení na povrchu,
d) jaká je střední rychlost planetky při pohybu kolem Slunce.

11. V únoru 2007 byl objeven satelit planetky Quaoar, který byl nazvaný *Weywot*.[13] Budeme uvažovat, že průměr Quaoaru je asi 1 300 km (tvar koule), hmotnost planetky je nejvýše $2{,}6 \cdot 10^{21}$ kg. Vzhledem k tomu, že satelit Weywot vznikl pravděpodobně uvolněním hmoty z povrchu Quaoaru, můžeme uvažovat, že má stejnou hustotu jako Quaoar. Satelit Weywot budeme považovat za kouli o průměru asi 100 km. Určete a) gravitační zrychlení na povrchu planetky Quaoar, b) hmotnost měsíce Weywot.

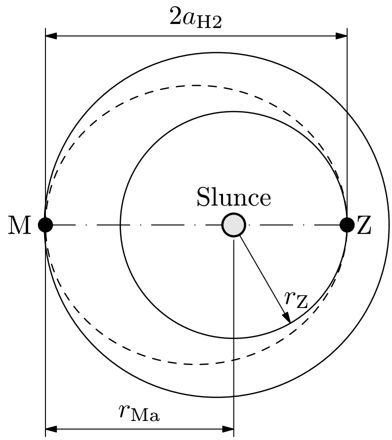
12. V příkladu 13 jsme uvažovali, že Mars se pohybuje po trajektorii tvaru kružnice. Ve skutečnosti je trajektorie pohybu Marsu mírně eliptická s výstředností 0,093. Vzdálenost Marsu od Slunce se mění od 1,38 AU do 1,66 AU. To ovlivňuje vhodnější a nevhodnější polohu Marsu vzhledem k Zemi. Určete, jak dlouho se bude pohybovat kosmická loď s posádkou v případě, že se Mars bude nacházet a) v perihelu (obr. 31), b) v aféliu (obr. 32) své trajektorie. Výstřednost trajektorie pohybu Země zanedbejte.

[12] Planetka Orcus byla pojmenována po bohu a vládci podsvětí Orcovi. Orcus je také jiné jméno pro řeckého boha Háda. Jedná se o objekt tzv. *Kuiperova pásu*. Planetka byla objevena v únoru 2004.

[13] Oficiální název tohoto satelitu (50 000) Quaoar I Weywot byl publikován v listopadu 2009 (podle mytologie kmene Tongva je Weywot, bůh oblohy, synem Quaoara).



Obr. 31 Přechodová trajektorie – Mars v periheliu



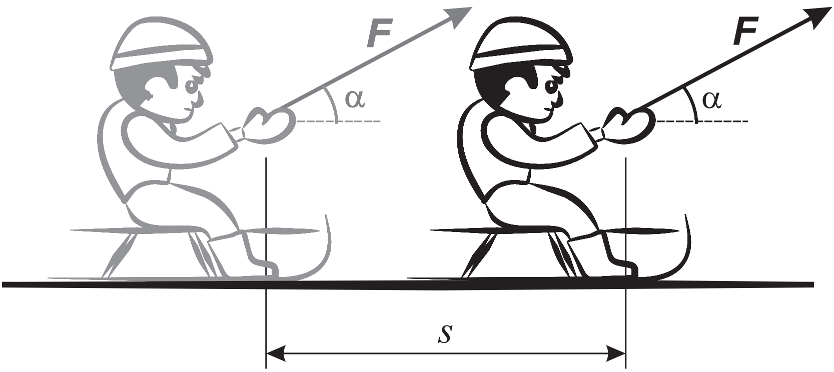
Obr. 32 Přechodová trajektorie – Mars v aféliu

3 Dynamika pohybu těles – práce, energie

Při studiu mechaniky v 1. ročníku střední školy jste se již setkali s pojmem práce a mechanická energie. Jestliže se těleso pohybuje posuvným pohybem účinkem stálé síly $\boldsymbol{F}$ po dráze s, potom dráhový účinek síly popisuje fyzikální veličina zvaná mechanická práce W, pro kterou platí

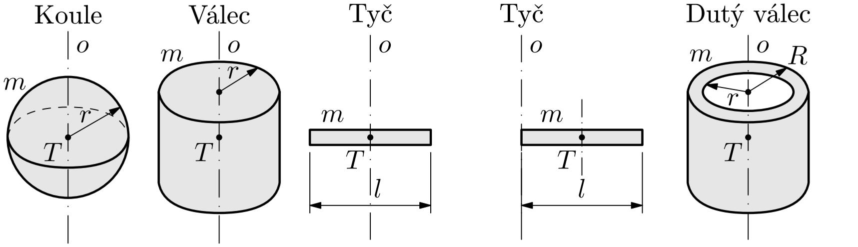
$$W = F \cdot s \cdot \cos\alpha.$$

Nejprve musíme totiž zjistit, jaká část síly bude působit ve směru posunutí, $F \cdot \cos\alpha$, a teprve potom určujeme vykonanou práci.



Obr. 33 Konání práce

Uvedený vztah platí jednak pro rovnoměrný pohyb tělesa, ale i pro pohyb rovnoměrně zrychlený nebo rovnoměrně zpomalený. Pohybový stav tělesa pohybujícího se posuvným pohybem rychlostí $\boldsymbol{v}$ popisujeme pomocí tzv. *pohybové energie* vzhledem k určité vztažné soustavě; potom $E_{\mathrm{kpos}} = \frac{1}{2}mv^2$, kde m je hmotnost tělesa. Poněkud větší problém je s pohybovou energií rotujícího tělesa, jehož body konají např. rovnoměrný pohyb po kružnicích se středy na ose rotace, jež probíhá při stálé úhlové rychlosti o velikosti ω. Těleso má kromě své hmotnosti ještě tzv. *moment setrvačnosti* J, který závisí nejen na hmotnosti tělesa, ale i na rozložení látky v tělese vzhledem k ose rotace. Potom pohybovou energii tělesa rotujícího s úhlovou rychlostí $\omega = \frac{2\pi}{T}$, určíme pomocí vztahu $E_{\mathrm{krot}} = \frac{1}{2}J\omega^2$.



$J_0 = \frac{2}{5}mr^2$ $J_0 = \frac{1}{2}mr^2$ $J_0 = \frac{1}{12}ml^2$ $J = \frac{1}{3}ml^2$ $J_0 = \frac{1}{2}m(R^2 + r^2)$

Obr. 34 Moment setrvačnosti některých těles

Kromě energie pohybové mají tělesa také *energii polohovou – potenciální*, a to vzhledem k určité poloze, v níž pokládáme $E_\mathrm{p} = 0$, což je tzv. *nulová hladina* polohové energie.

Pro posuvný pohyb v blízkosti povrchu Země uvažujeme tzv. *polohovou energii tíhovou*, $E_\mathrm{p} = mgh$, kde h je výška tělesa (pro $h > 0$) nebo hloubka tělesa (pro $h < 0$) vzhledem k hladině nulové polohové energie.

Ze zákona zachování mechanické energie pak dostáváme zajímavé vztahy, jež můžeme používat při řešení fyzikálních úloh:

$$E_\mathrm{p2} - E_\mathrm{p1} = \Delta E_\mathrm{p} = W = F \cdot s,$$
$$E_\mathrm{k2} - E_\mathrm{k1} = \Delta E_\mathrm{k} = W = F \cdot s.$$

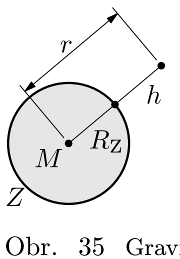
Z rovnosti $\Delta E_\mathrm{p} = -\Delta E_\mathrm{k}$ (zvětšení E_p znamená zmenšení E_k) dostaneme

$$E_\mathrm{p1} + E_\mathrm{k1} = E_\mathrm{p2} + E_\mathrm{k2}.$$

Při výpočtu práce při posunutí tělesa využíváme toho, že na těleso působí síla stálé velikosti F. Jak se však změní situace např. při zvedání tělesa v gravitačním poli Země, víme-li, že síla $F \sim \frac{1}{r^2}$, kde r je vzdálenost od středu Země.

Nejprve se pokusíme zjistit, jak se v závislosti na poloze mění velikost gravitační síly. Pro jednoduchost budeme předpokládat, že Země je kulové homogenní těleso se střední hustotou $\varrho = 5\,500\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}$.

V případě kulového tělesa se vnější gravitační pole chová stejně, jako by pocházelo od hmotného bodu téže hmotnosti, jakou má kulové těleso. Tento hmotný bod umisťujeme do středu kulového tělesa.
Nejmenší vzdálenost bodu ve vnějším poli je pro případ povrchu Země, tj. $r = R_\mathrm{z}$. Velikost gravitační síly působící na těleso na povrchu Země pak určíme jako $F_\mathrm{g0} = m \cdot a_\mathrm{g0}$, čehož $a_\mathrm{g0} = \frac{F_\mathrm{g0}}{m}$.



Obr. 35 Gravitační působení

Obdobně můžeme psát obecně pro velikost gravitační síly působící na těleso ve vzdálenosti r od středu Země vztah $F_\mathrm{g} = m \cdot a_\mathrm{g}$, čehož $a_\mathrm{g} = \dfrac{F_\mathrm{g}}{m}$. Po dosazení za $F_\mathrm{g} = \varkappa \cdot \dfrac{mM}{r^2}$ dostaneme pro a_g vztah

$$a_\mathrm{g} = \varkappa \frac{M}{r^2},$$

který můžeme dále upravit na tvar

$$a_\mathrm{g} = \varkappa \frac{M}{(R_\mathrm{Z} + h)^2} = \varkappa \frac{M}{R_\mathrm{Z}^2} \cdot \frac{1}{\left(1 + \dfrac{h}{R_\mathrm{Z}}\right)^2},$$

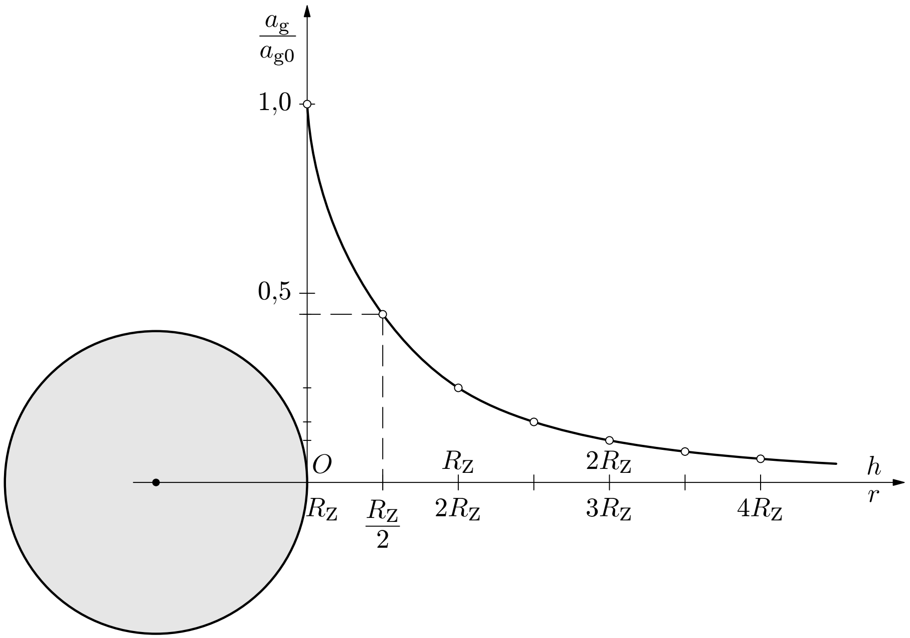
kde h je výška tělesa nad povrchem Země (obr. 35).
Dále označíme $a_{\mathrm{g}0} = \varkappa \dfrac{M}{R_\mathrm{Z}^2}$ velikost gravitačního zrychlení na povrchu Země[14].
Pak můžeme vztah pro gravitační zrychlení na povrchu Země přepsat do tvaru

$$a_\mathrm{g} = a_{\mathrm{g}0} \cdot \frac{1}{\left(1 + \dfrac{h}{R_\mathrm{Z}}\right)^2}. \qquad (2)$$

Tuto závislost nyní znázorníme graficky. K tomu si připravíme tabulku níže uvedených hodnot.

h	0	$\frac{1}{2}R_\mathrm{Z}$	R_Z	$\frac{3}{2}R_\mathrm{Z}$	$2R_\mathrm{Z}$	$\frac{5}{2}R_\mathrm{Z}$	$3R_\mathrm{Z}$
r	R_Z	$\frac{3}{2}R_\mathrm{Z}$	$2R_\mathrm{Z}$	$\frac{5}{2}R_\mathrm{Z}$	$3R_\mathrm{Z}$	$\frac{7}{2}R_\mathrm{Z}$	$4R_\mathrm{Z}$
$\frac{a_\mathrm{g}}{a_{\mathrm{g}0}}$	1	$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{4}{25}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{4}{49}$	$\frac{1}{16}$
$\frac{a_\mathrm{g}}{a_{\mathrm{g}0}}$	1	0,44	0,25	0,16	0,11	0,08	0,06

[14] Připomeňme si základní rozdíl mezi gravitačním zrychlením a_g a tíhovým zrychlením g na povrchu Země: tíhové zrychlení je výslednicí gravitačního zrychlení a odstředivého zrychlení na povrchu Země. My však v našich úvahách nebudeme rotaci Země kolem vlastní osy v našich úlohách uvažovat, a tedy budeme pracovat jen se zrychlením gravitačním.



Obr. 36 Závislost velikosti gravitačního zrychlení na vzdálenosti od středu Země

Z grafu je vidět, že pro úsek $\in \langle 0; \frac{R_Z}{2} \rangle$ je možno nahradit křivku úsečkou, což odvodíme z výše uvedeného vztahu,tj.

$$a_g = a_{g0} \frac{1}{\left(1 + \frac{h}{R_Z}\right)^2} = a_{g0} \frac{1}{1 + \frac{2h}{R_Z} + \frac{h^2}{R_Z^2}} \doteq a_{g0} \frac{1}{1 + \frac{2h}{R_Z}}.$$

Zde jsme zanedbali výraz $\frac{h^2}{R_Z^2}$ vzhledem k tomu, že h je mnohem menší než R_Z ($h \ll R_Z$). Tento výraz budeme dále upravovat následujícím způsobem

$$a_g = a_{g0} \frac{1}{1 + \frac{2h}{R_Z}} = a_{g0} \frac{1}{1 + \frac{2h}{R_Z}} \cdot \frac{1 - \frac{2h}{R_Z}}{1 - \frac{2h}{R_Z}} = a_{g0} \frac{1 - \frac{2h}{R_Z}}{1 - \frac{4h^2}{R_Z^2}} \doteq a_{g0} \left(1 - \frac{2h}{R_Z}\right).$$

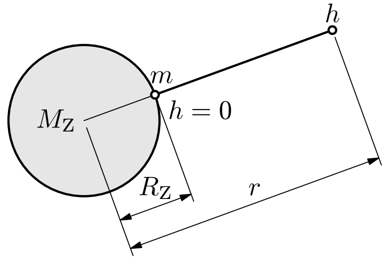
Zde jsme opět zanedbali výraz $\frac{4h^2}{R_Z^2}$ ze stejných důvodů jako v předchozím případě. Vztah

$$a_g \doteq a_{g0} \left(1 - \frac{2h}{R_Z}\right),$$

pro $h \ll R_Z$ popisuje lineární pokles velikosti gravitačního zrychlení a_g na výšce h od povrchu Země. V popsaném úseku lze tedy přibližně předpokládat lineární pokles gravitačního zrychlení s výškou nad povrchem Země.

Stanovit práci vykonanou při zvedání tělesa nad povrch Země v případě, že se velikost gravitačního zrychlení s výškou mění, však není snadné. Proto práci při zvedání tělesa určíme jinak.

Těleso budeme zvedat z povrchu Země až do výšky h nad povrchem Země, tedy vzhledem ke středu ze vzdálenosti R_Z od středu do vzdálenosti $r = R_Z + h$. Na povrchu Země působí na těleso o hmotnosti m gravitační síla o velikosti $F_{g0} = \varkappa \frac{mM_Z}{R_Z^2}$, ve vzdálenosti h nad povrchem Země síla o velikosti $F_{gh} = \varkappa \frac{mM_Z}{r^2}$.



Obr. 37 Práce při zvedání tělesa

Protože závislost síly na vzdálenosti od středu Země není lineární, použijeme k určení průměrné hodnoty síly tzv. *geometrický průměr*, tj.

$$F_{gp} = \sqrt{F_{g0} \cdot F_{gh}} = \sqrt{\varkappa \frac{mM_Z}{R_Z^2} \cdot \varkappa \frac{mM_Z}{r^2}} = \varkappa \frac{mM_Z}{R_Z r}.$$

Práce vykonaná při zvedání tělesa z povrchu Země do místa o výšce h nad povrchem Země se potom určí jako

$$W = F_{gp} \cdot h = F_{gp} \cdot (r - R_Z) = \varkappa \frac{mM_Z}{R_Z r}(r - R_Z).$$

Po úpravě

$$W = \varkappa \frac{mM_Z}{R_Z} - \varkappa \frac{mM_Z}{r} = \varkappa m M_Z \left(\frac{1}{R_Z} - \frac{1}{r} \right).$$

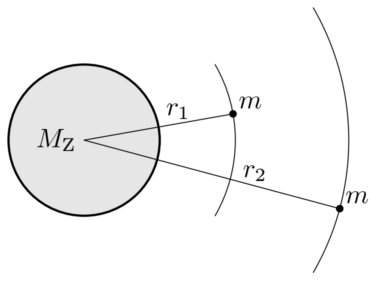
Označíme-li vzdálenosti dvou míst od středu Země r_1, r_2, potom pro střední hodnotu gravitační síly platí

$$F_{pg} = \varkappa \frac{mM_Z}{r_1 r_2},$$

práce při posunutí je

$$W = \varkappa m M_Z \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right),$$

pro $r_2 > r_1$, a to nezávisle na směru pohybu tělesa v gravitačním poli.



Obr. 38 Práce v radiálním gravitačním poli

Důvodem je skutečnost, že velikost gravitační síly je v místech vně Země ve vzdálenosti r_1 od středu Země (na povrchu koule o poloměru $r_1 > R_Z$) všude stejná. Tyto kulové plochy se nazývají *ekvipotenciální hladiny*. Pohyb po povrchu těchto kulových ploch (ekvipotenciálních hladin) je charakterizován tím, že se pohyb uskutečňuje ve směru kolmém k působící síle, tedy $\alpha = 90°$ a $\cos\alpha = 0$. Z toho vyplývá, že $W = F \cdot s \cdot \cos\alpha = 0$.

Analyzujme ještě vztah $W = \varkappa m M_Z \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$. Bude-li se jednat o pohyb z místa ve vzdálenosti r_1 od středu Země do místa o vzdálenosti r_2 od středu Země, potom můžeme uvedený vztah vyjádřit jako

$$W = \Delta E = \varkappa m M_Z \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right).$$

Tento vztah však můžeme také chápat jako rozdíl $E(r_2) - E(r_1)$. Potom

$$W = -\varkappa\frac{mM_Z}{r_2} - \left(-\varkappa\frac{mM_Z}{r_1}\right)$$

a tedy $E(r_1) = -\varkappa\frac{mM_Z}{r_1}$, $E(r_2) = -\varkappa\frac{mM_Z}{r_2}$.

Tento vztah vychází v jednotkách „joule“ a nazveme ho *potenciální gravitační energie*. Představuje práci, kterou je nutno vykonat při přenesení tělesa o hmotnosti m z daného místa ve vzdálenosti r v gravitačním poli vytvořeném Zemí o hmotnosti M_Z až do nekonečné vzdálenosti, kde $E(\infty) = 0$.

V dalších úvahách budeme index „Z“ pro Zemi v rámci zjednodušení zápisu vynechávat.[15]

Gravitační potenciální energii tedy určíme jako

$$E_{\mathrm{pg}} = -\varkappa\frac{mM}{r},$$

práci při posunutí tělesa z povrchu Země ($E_{\mathrm{pg}}(R) = -\varkappa\frac{mM}{R}$) do výšky h ($r = R + h$, tedy $E_{\mathrm{pg}}(r) = -\varkappa\frac{mM}{r}$) potom určíme jako

$$W = -\varkappa\frac{mM}{r} - \left(-\varkappa\frac{mM}{R}\right) = \varkappa m M \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r}\right).$$

Jestliže bychom chtěli vzdálit těleso z povrchu Země tak, aby se již nevrátilo zpět ($r \to \infty$), potom mu v blízkosti povrchu Země musíme udělit rychlost o velikosti v_0 tak, aby

$$\frac{1}{2}mv_0^2 - \varkappa\frac{mM}{R} = 0 \qquad (0 = E_{\mathrm{k}} + E_{\mathrm{pg}} = 0 + 0).$$

[15] Což je dále ukáže i jako praktické, protože obdobným způsobem pak můžeme zjišťovat velikost gravitační potenciální energie i práce také u dalších objektů naší sluneční soustavy.

Odtud
$$v_0 = \sqrt{\frac{2\varkappa M}{R}},$$
je tzv. *2. kosmická rychlost* (nebo také *úniková*, *parabolická rychlost*), budeme ji značit v_{II}.

Poznámka

Na těleso pochopitelně musí působit pouze gravitační síla v gravitačním poli Země; vztah nemůže platit pro pohyb v atmosféře, kde na těleso působí odporová síla prostředí.

Jestliže tělesu udělíme rychlost o velikosti v_0 takovou, že se těleso bude pohybovat po kruhové trajektorii v blízkosti povrchu Země, potom pro velikost dostředivé síly platí
$$m \cdot \frac{v_0^2}{R} = \varkappa \frac{mM}{R^2},$$
z čehož
$$v_0 = \sqrt{\frac{\varkappa M}{R}}.$$
Této rychlosti říkáme *1. kosmická rychlost*, budeme ji značit v_{I}. Potom zřejmě
$$v_{\mathrm{II}} = \sqrt{2} \cdot v_{\mathrm{I}}.$$
Pokud bychom do vztahů pro v_{I} a v_{II} dosadili údaje pro Zemi, dostaneme hodnoty
$$v_{\mathrm{I}} = 7{,}9\ \mathrm{km \cdot s^{-1}}, \qquad v_{\mathrm{II}} = 11{,}2\ \mathrm{km \cdot s^{-1}}.$$

Příklad 18 – kruhová a úniková rychlost nad povrchem Země

Stanovte tzv. *kruhovou* a *únikovou rychlost* tělesa na oběžné trajektorii ve výšce 630 km nad povrchem Země.

Řešení

Těleso ve výšce $h = 630$ km je ve vzdálenosti $r = R_{\mathrm{Z}} + h = (6\,370 + 630)$ km = = 7 000 km od středu Země.
Potom kruhová rychlost
$$v_{\mathrm{k}} = \sqrt{\frac{\varkappa M_{\mathrm{Z}}}{R_{\mathrm{Z}}}} = \sqrt{6{,}67 \cdot 10^{-11} \frac{6 \cdot 10^{24}}{7 \cdot 10^{6}}}\ \mathrm{m \cdot s^{-1}} = 7{,}6\ \mathrm{km \cdot s^{-1}}$$

a úniková (parabolická) rychlost

$$v_\mathrm{p} = \sqrt{\frac{2\varkappa M_\mathrm{Z}}{R_\mathrm{Z}}} = \sqrt{2 \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11} \frac{6 \cdot 10^{24}}{7 \cdot 10^{6}}}\ \mathrm{m \cdot s^{-1}} = 10{,}7\ \mathrm{km \cdot s^{-1}}.$$

Příklad 19 – rotační energie Země

Moment setrvačnosti homogenní koule vzhledem k ose procházející těžištěm je dán vztahem $J_0 = \frac{2}{5}mr^2$, doba rotace Země kolem osy je $T = 23$ h 56 min 4 s $=$ $= 86\,164$ s. Zemi považujte za homogenní kouli o hmotnosti $m = 6 \cdot 10^{24}$ kg a poloměru $R = 6{,}37 \cdot 10^6$ m. Určete rotační energii Země při rotaci kolem vlastní osy.

Řešení

Moment setrvačnosti vzhledem k ose procházející těžištěm je

$$J_0 = \frac{2}{5} \cdot 6 \cdot 10^{24} \cdot (6{,}37 \cdot 10^6)^2\ \mathrm{kg \cdot m^2} = 9{,}74 \cdot 10^{37}\ \mathrm{kg \cdot m^2}.$$

Úhlová rychlost otáčení Země kolem vlastní osy

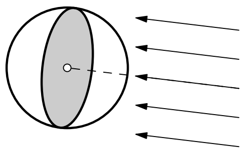
$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{86\,164}\ \mathrm{rad \cdot s^{-1}} = 7{,}3 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{rad \cdot s^{-1}}.$$

Kinetická energie rotačního pohybu pak je

$$E_\mathrm{krot} = \frac{1}{2} J_0 \omega^2 = \frac{1}{2} \cdot 9{,}74 \cdot 10^{37} \cdot (7{,}3 \cdot 10^{-5})^2\ \mathrm{J} = 2{,}595 \cdot 10^{29}\ \mathrm{J}.$$

Poznámka

Porovnáme tuto hodnotu s energií slunečního záření, které dopadá za rok na naši planetu (tedy na povrch Země dopadne jenom část). Tzv. *sluneční (solární) konstanta* $1\,370\ \mathrm{W \cdot m^{-2}}$ ukazuje výkon záření, jež ve vzdálenosti Země dopadá na 1 m² plochy, nastavené kolmo ke směru záření (průmětem kulové plochy bude kruh, a tedy $S = \pi R_\mathrm{Z}^2$).



Obr. 39 Průmět kulové plochy do roviny kolmé na směr záření

Potom

$$E = 86\,400 \cdot 365{,}26 \cdot 1370 \cdot \pi \cdot (6{,}38 \cdot 10^6)^2\ \mathrm{J} = 5{,}53 \cdot 10^{24}\ \mathrm{J},$$

což je 47 000krát méně.

Cvičení 4

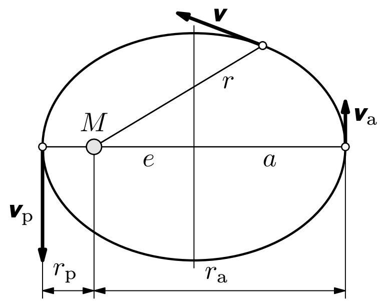
13. Stanovte tzv. *kruhovou* a *únikovou rychlost* tělesa na oběžné trajektorii v blízkosti povrchu Marsu.

14. Měsíc má hmotnost $M_\mathrm{M} = 0{,}0123\,M_\mathrm{Z} \doteq \frac{1}{81}\,M_\mathrm{Z}$, poloměr měsíčního tělesa je $R_\mathrm{M} = 1\,738$ km. Měsíční modul při expedicích Apollo se pohyboval ve výšce asi 62 km nad povrchem Měsíce. Určete rychlost pohybu modulu vzhledem ke středu Měsíce a rychlost potřebnou k návratu astronautů z této kruhové trajektorie zpátky na Zem.

15. Marsův měsíc Phobos by mohl sloužit jako přestupní stanice pro kosmonauty, směřující na povrch Marsu. Stanovte jeho kruhovou rychlost a únikovou rychlost, s níž by se mohla kosmická loď odpoutat od gravitačního pole Marsu a vrátit se zpět k Zemi.

4 Komplexní úlohy

Nejprve odvodíme obecný vztah, který platí pro výpočet rychlosti pohybu planety po eliptické trajektorii v libovolném bodě trajektorie. K tomuto odvození použijeme zákon zachování mechanické energie.
Víme, že pohybuje-li se hmotný bod po eliptické trajektorii, mění se jeho okamžitá rychlost i vzdálenost od středu centrálního tělesa o hmotnosti M.



Obr. 40 Pohyb po eliptické trajektorii

Mění se tedy i jeho kinetická a potenciální energie, ale celková mechanická energie zůstává konstantní. Při popisu pohybů v radiálním gravitačním poli volíme potenciální energii v nekonečné vzdálenosti rovnou nule. Pak ale je v konečné vzdálenosti záporná a platí

$$E_\mathrm{pg} = -\varkappa\frac{mM}{r}. \tag{3}$$

Pro velikosti rychlostí v periheliu a aféliu platí vztah

$$v_\mathrm{a} = v_\mathrm{p}\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon} \tag{4}$$

Poznámka:

Vztah (4) lze přepsat na tvar

$$v_\mathrm{a} = v_\mathrm{p}\frac{a-e}{a+e} = v_\mathrm{p}\frac{r_\mathrm{p}}{r_\mathrm{a}},$$

což je také vyjádření 2. Keplerova zákona, jak jsme se s ním již setkali na str. 8. Označíme-li $v_\mathrm{k} = \sqrt{\frac{\varkappa M}{a}}$ střední rychlost, lze obdobně také psát, že

$$v_\mathrm{p} = \sqrt{\frac{\varkappa M}{a}\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}} = \sqrt{\frac{\varkappa M}{a}\frac{a+e}{a-e}} = \sqrt{\frac{\varkappa M}{a}\frac{r_\mathrm{a}}{r_\mathrm{p}}} = v_\mathrm{k}\sqrt{\frac{r_\mathrm{a}}{r_\mathrm{p}}},$$

$$v_\mathrm{a} = \sqrt{\frac{\varkappa M}{a}\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}} = \sqrt{\frac{\varkappa M}{a}\frac{a-e}{a+e}} = \sqrt{\frac{\varkappa M}{a}\frac{r_\mathrm{p}}{r_\mathrm{a}}} = v_\mathrm{k}\sqrt{\frac{r_\mathrm{p}}{r_\mathrm{a}}}.$$

Dále použijeme vztahy (3), (4) a zákon zachování mechanické energie. Pomocí těchto vztahů odvodíme vztah pro výpočet velikosti okamžité rychlosti v libovolném bodě eliptické trajektorie, tj.

$$\frac{1}{2}mv_\mathrm{p}^2 - \varkappa\frac{mM}{a(1-\varepsilon)} = \frac{1}{2}mv_\mathrm{a}^2 - \varkappa\frac{mM}{a(1+\varepsilon)}. \tag{5}$$

Dosadíme-li z (4) do (5) a upravíme, dostaneme

$$v_\mathrm{p} = \sqrt{\frac{\varkappa M}{a}\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}}.$$

Obdobně bychom dostali vztah pro rychlost v aféliu

$$v_\mathrm{a} = \sqrt{\frac{\varkappa M}{a}\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}}.$$

Protože již známe rychlost tělesa v periheliu i jeho vzdálenost od Slunce, můžeme vypočítat celkovou energii E tělesa v periheliu:

$$E = E_\mathrm{k} + E_\mathrm{pg} = \frac{1}{2}mv_\mathrm{p}^2 - \frac{\varkappa mM}{r_\mathrm{p}} = \frac{\varkappa mM}{2a}\cdot\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} - \frac{\varkappa mM}{a}\cdot\frac{1}{1-\varepsilon} =$$
$$= \frac{\varkappa mM}{2a(1-\varepsilon)}(1+\varepsilon-2) = -\frac{\varkappa mM}{2a}.$$

Celková energie se však zachovává, v každém bodě své oběžné dráhy má těleso stejnou celkovou energii jako v periheliu. Energie tělesa o hmotnosti m na oběžné dráze kolem centrálního tělesa o hmotnosti M je $E = -\frac{\varkappa mM}{2a}$.

Nyní již můžeme odvodit vztah pro výpočet velikosti rychlosti v v libovolném bodě oběžné trajektorie, jehož vzdálenost od Slunce je r. Ze zákona zachování energie plyne

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{\varkappa mM}{r} = E = -\frac{\varkappa mM}{2a}.$$

Odtud dostaneme

$$v = \sqrt{\varkappa M\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)}, \tag{6}$$

což je vztah pro výpočet velikosti okamžité rychlosti v libovolném bodě trajektorie, který použijeme při výpočtech v dalších úlohách.

Příklad 20 – pohyb planety Mars

Určete střední, nejmenší a největší rychlost Marsu při jeho pohybu po oběžné trajektorii kolem Slunce. Hmotnost Slunce je $M_\mathrm{S} = 1{,}99 \cdot 10^{30}$ kg, $r_\mathrm{p} = 1{,}381$ AU, $r_\mathrm{a} = 1{,}666$ AU.

Řešení

Nejprve určíme délku velké poloosy

$$a = \frac{r_\mathrm{p} + r_\mathrm{a}}{2} = \frac{1{,}381 + 1{,}666}{2}\ \mathrm{AU} = 1{,}524\ \mathrm{AU}.$$

Potom

$$v_\mathrm{k} = \sqrt{\frac{\varkappa M}{a}} = \sqrt{\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 1{,}99 \cdot 10^{30}}{1{,}524 \cdot 149{,}6 \cdot 10^{9}}}\ \mathrm{m \cdot s^{-1}} = 24{,}1\ \mathrm{km \cdot s^{-1}}.$$

Dále určíme poměr $\frac{r_\mathrm{a}}{r_\mathrm{p}} = \frac{1{,}666}{1{,}381} = 1{,}206$, pak poměr $\frac{r_\mathrm{p}}{r_\mathrm{a}} = \frac{1{,}381}{1{,}666} = 0{,}829$.
Nejmenší rychlost určíme užitím vztahu

$$v_\mathrm{a} = v_\mathrm{k}\sqrt{\frac{r_\mathrm{p}}{r_\mathrm{a}}} = 24{,}1 \cdot \sqrt{0{,}829}\ \mathrm{km \cdot s^{-1}} = 21{,}95\ \mathrm{km \cdot s^{-1}}.$$

Největší rychlost určíme užitím vztahu

$$v_\mathrm{p} = v_\mathrm{k}\sqrt{\frac{r_\mathrm{a}}{r_\mathrm{p}}} = 24{,}1 \cdot \sqrt{1{,}206}\ \mathrm{km \cdot s^{-1}} = 26{,}47\ \mathrm{km \cdot s^{-1}}.$$

Poznámka

Pokud bychom v tomto případě ještě určili číselnou výstřednost, dostaneme

$$\varepsilon = \frac{r_\mathrm{a} - r_\mathrm{p}}{2a} = \frac{1{,}666 - 1{,}381}{2 \cdot 1{,}524} = 0{,}094.$$

V tomto případě je číselná výstřednost malá, oběžná trajektorie Marsu je velmi blízká kružnici, a proto se vypočtené velikosti rychlostí příliš neliší.

Podívejme se, jak je tomu v případě některých komet.

Příklad 21 – pohyb Halleyovy komety

Jak se mění vzdálenost a rychlost Halleyovy komety na její trajektorii kolem Slunce, víme-li, že její doba oběhu je 76,1 roku. Vzdálenost komety od Slunce v periheliu je 0,59 AU.

Řešení

Nejprve stanovíme užitím 3. Keplerova zákona délku velké poloosy, přičemž opět použijeme údaje o Zemi, tj. $\frac{a^3}{r_\mathrm{Z}^3} = \frac{T^2}{T_\mathrm{Z}^2}$, z čehož

$$a = r_\mathrm{Z} \cdot \sqrt[3]{\left(\frac{T}{T_\mathrm{Z}}\right)^2} = 1{,}000\,\sqrt[3]{76{,}1^2}\ \mathrm{AU} = 17{,}96\ \mathrm{AU}.$$

Dále použijeme vztah $r_\mathrm{p} + r_\mathrm{a} = 2a$, z čehož

$$r_\mathrm{a} = 2a - r_\mathrm{p} = (2 \cdot 17{,}96 - 0{,}59)\ \mathrm{AU} = 35{,}33\ \mathrm{AU}.$$

Centrálním tělesem je Slunce, jehož hmotnost je $M_\mathrm{S} = 1{,}99 \cdot 10^{30}$ kg. Potom

$$v_\mathrm{k} = \sqrt{\frac{\varkappa M}{a}} = \sqrt{\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 1{,}99 \cdot 10^{30}}{17{,}96 \cdot 149{,}6 \cdot 10^9}}\ \mathrm{m \cdot s^{-1}} = 7{,}029\ \mathrm{km \cdot s^{-1}}.$$

Obdobně jako v příkladu 20 potom

$$v_\mathrm{a} = v_\mathrm{k}\sqrt{\frac{r_\mathrm{a}}{r_\mathrm{p}}} = 7{,}029 \cdot \sqrt{1{,}67 \cdot 10^{-2}}\ \mathrm{km \cdot s^{-1}} = 0{,}9\ \mathrm{km \cdot s^{-1}},$$

$$v_\mathrm{p} = v_\mathrm{k}\sqrt{\frac{r_\mathrm{p}}{r_\mathrm{a}}} = 7{,}029 \cdot \sqrt{59{,}881}\ \mathrm{km \cdot s^{-1}} = 54{,}4\ \mathrm{km \cdot s^{-1}}.$$

Můžeme ještě určit číselnou výstřednost jako v předchozím příkladu, dostaneme

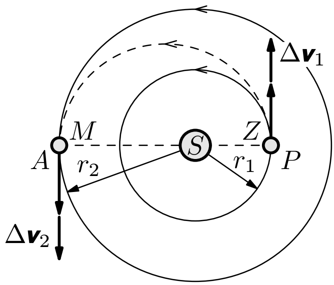
$$\varepsilon = \frac{r_\mathrm{a} - r_\mathrm{p}}{2a} = \frac{35{,}33 - 0{,}59}{2 \cdot 17{,}96} = 0{,}967.$$

V tomto případě je velká číselná výstřednost trajektorie, a proto je také velký rozdíl velikostí rychlosti v průběhu pohybu.

Příklad 22 – Hohmannova trajektorie

Oběžná sonda pohybující se po kruhové trajektorii kolem Slunce ve vzdálenosti 1 AU (oběžná dráha Země) byla vyslána na kruhovou oběžnou trajektorii Marsu, tj. na kruhovou trajektorii o poloměru 1,52 AU. V průběhu letu této sondy se omezíme na situaci, že po celou dobu letu budeme zanedbávat gravitační působení planet a přihlížet pouze ke gravitačnímu působení Slunce. Dále budeme také uvažovat, že sonda má zapnuté motory pouze v okamžicích, kdy přechází z kruhové dráhy na eliptickou a naopak, ve zbývající části pohybu budou motory vypnuty. Připomeňme, co už bylo dříve uvedeno: energeticky nejvýhodnější pro takový přechod má eliptická přechodová trajektorie, která se dotýká trajektorie Země v místě startu a trajektorie Marsu v místě přistání.

Tato místa musí ležet na opačných stranách od Slunce, jak je znázorněno na obr. 41. Aby vše mohlo dobře proběhnout, je třeba sondě na oběžné trajektorii Země zvýšit velikost rychlosti o hodnotu Δv_1 a pak na oběžné dráze Marsu zvýšit velikost rychlosti o hodnotu Δv_2. Určete velikosti přírůstků rychlostí Δv_1, Δv_2.



Obr. 41

Řešení

Rychlost pohybu sondy po Hohmannově eliptické trajektorii je dána vztahem (7). Po dosazení za $a = \frac{1}{2}(r_1 + r_2)$ dostaneme

$$v = \sqrt{2\varkappa M_\mathrm{S}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_1 + r_2}\right)}. \tag{7}$$

V přísluní (bod P na obr. 41) musí být $r = r_1$. Po dosazení do vztahu (8) dostaneme

$$v_\mathrm{p} = \sqrt{2\varkappa M_\mathrm{S}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_1 + r_2}\right)} = \sqrt{2\varkappa M_\mathrm{S}\frac{r_2}{r_1(r_1 + r_2)}}. \tag{8}$$

Na počátku před urychlením je sonda na kruhové dráze Země, a tudíž má počáteční rychlost

$$v_0 = \sqrt{\frac{\varkappa M_\mathrm{S}}{r_1}}.$$

Je tedy

$$\Delta v_1 = v_\mathrm{p} - v_0 = \sqrt{2\varkappa M_\mathrm{S}\frac{r_2}{r_1(r_1 + r_2)}} - \sqrt{\frac{\varkappa M_\mathrm{S}}{r_1}},$$

$$\Delta v_1 = \sqrt{\frac{\varkappa M_\mathrm{S}}{r_1}}\left(\sqrt{\frac{2r_2}{r_1 + r_2}} - 1\right) \doteq 2{,}9\ \mathrm{km\cdot s^{-1}}.$$

Na konci Hohmannovy trajektorie má sonda rychlost o velikosti v_a a je třeba ji zvýšit, aby přešla z eliptické trajektorie na kruhovou o poloměru r_2, tj. aby získala rychlost o velikosti

$$v_{\mathrm{k}} = \sqrt{\frac{\varkappa M_{\mathrm{S}}}{r_2}}.$$

Rychlost v_{a} získáme dosazením za $r = r_2$ do vztahu (8)

$$v_{\mathrm{a}} = \sqrt{2\varkappa M_{\mathrm{S}} \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1 + r_2}\right)} = \sqrt{2\varkappa M_{\mathrm{S}} \frac{r_1}{r_2(r_1 + r_2)}}.$$

Je tedy

$$\Delta v_2 = \sqrt{\frac{\varkappa M_{\mathrm{S}}}{r_2}} \left(1 - \sqrt{\frac{2r_1}{r_1 + r_2}}\right) \doteq 2{,}6\ \mathrm{km \cdot s^{-1}}.$$

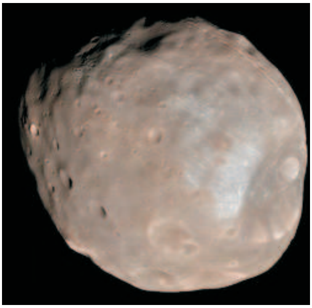
Příklad 23 – snímání povrchu měsíců planety Mars

V letech 2008–2009 snímkovala americká sonda *Mars Reconnaissance Orbiter* měsíce Marsu (obr. 42, 43). Po osnímkování povrchu měsíce Phobos sonda přeletěla k měsíci Deimos. Budeme uvažovat, že se družice pohybovala v blízkosti obou měsíců a že se oba měsíce i sonda nacházejí přibližně ve stejné rovině. Dále budeme uvažovat, že se přelet uskutečnil po energeticky nejvýhodnější Hohmannově elipse.

a) Určete dobu přeletu sondy od jednoho měsíce k druhému.

b) Vypočtěte rychlosti oběhu obou měsíců kolem Marsu.

Trajektorie pohybu obou měsíců považujte přibližně za kruhové. Údaje potřebné pro výpočet si nalezněte v tabulkách nebo na internetu na <http://en.wikipedia.org>.



Obr. 42 Phobos na snímku sondy Mars Reconnaissance Orbiter z 23. března 2008

Obr. 43 Deimos na snímku sondy Mars Reconnaissance Orbiter z 21. února 2009

Řešení

Nejprve si nalezneme údaje o obou měsících potřebné pro výpočet. Pro Phobos: délka velké poloosy je $a_\mathrm{P} = 9\,380$ km, oběžná doba $T_\mathrm{P} = 0{,}319$ dne; pro Deimos: délka velké poloosy je $a_\mathrm{D} = 23\,460$ km, oběžná doba $T_\mathrm{D} = 1{,}262$ dne.

a) Na základě řešení příkladu 13 můžeme psát pro délku velké poloosy Hohmannovy elipsy vztah: $a_\mathrm{H} = \dfrac{a_\mathrm{P} + a_\mathrm{D}}{2} = \dfrac{9\,380 + 23\,460}{2}$ km $= 16\,420$ km. Pak použijeme 3. Keplerův zákon pro sondu a Phobos. Dále pak podle řešení příkladu 13 můžeme pro dobu přeletu sondy psát

$$T_\mathrm{L} = \frac{1}{2} T_\mathrm{P} \cdot \sqrt{\left(\frac{a_\mathrm{H}}{a_\mathrm{P}}\right)^3} = \frac{1}{2} \cdot 0{,}319 \cdot \sqrt{\left(\frac{16\,420}{9\,380}\right)^3} \text{ dne} = 0{,}369 \text{ dne}.$$

b) Rychlost oběhu měsíce Phobos kolem Marsu je dána vztahem

$$v_\mathrm{P} = \frac{2\pi a_\mathrm{P}}{T_\mathrm{P}} = \frac{2\pi \cdot 9\,380}{0{,}319 \cdot 86\,400} \text{ km} \cdot \text{s}^{-1} = 2{,}14 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1},$$

a Deimosu

$$v_\mathrm{D} = \frac{2\pi a_\mathrm{D}}{T_\mathrm{D}} = \frac{2\pi \cdot 23\,460}{1{,}262 \cdot 86\,400} \text{ km} \cdot \text{s}^{-1} = 1{,}35 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Cvičení 5

16. Vraťme se k planetce Sedna, o níž víme, že její vzdálenost v aféliu je 975,56 AU a v perihéliu 76,156 AU. Určete délku velké poloosy, číselnou výstřednost, dobu oběhu a střední, největší a nejmenší rychlost pohybu.

17. Kometu 81P/Wild objevil švýcarský astronom *Paul Wild* v roce 1974. Původně se tato kometa pravděpodobně pohybovala po kružnici ve velké vzdálenosti od planety Jupiter s oběžnou dobou asi 43 let. V září roku 1974 prolétla tato kometa kolem Jupiteru ve vzdálenosti asi 1 milión kilometrů, což mělo za následek, že gravitační pole Jupiteru ovlivnilo její trajektorii natolik, že začala obíhat kolem Slunce po elipse s dobou oběhu 6,408 roku. Při svém letu se kometa dostane do největší vzdálenosti 5,308 AU od Slunce. 22. února 2010 bude tato kometa prolétat periheliem. Určete, jaká bude vzdálenost komety od Slunce při průletu periheliem a jakou rychlostí kometa periheliem proletí.

18. Trpasličí planeta *Makemake*[16] patří mezi transneptunická tělesa. Je to třetí nejjasnější transneptunické těleso po Eris a Plutu. Tato trpasličí planeta byla

[16] Makemake je v polynéské mytologii, především na ostrově Rapa Nui (Velikonoční ostrov), jméno po stvořiteli lidstva a bohu plodnosti. Je vedoucím bohem Tangata manu kultu a je uctíván v podobě mořských ptáků, kteří byli jeho inkarnací.

objevena v roce 2005 a pohybuje se kolem Slunce po eliptické trajektorii, jejíž velké poloosa má délku 45,64 AU, číselná výstřednost je 0,14. Určete dobu oběhu a nejmenší a největší rychlost, kterou se tato trpasličí planeta pohybuje.

19. Dalším transneptunickým tělesem je trpasličí planeta *Haumea*[17], která byla objevena v roce 2004. Toto těleso se pohybuje kolem Slunce po eliptické trajektorii. Při svém pohybu je jeho největší vzdálenost od Slunce 51,526 AU a nejmenší vzdálenost 34,537 AU. Určete délku velké poloosy, číselnou výstřednost trajektorie pohybu a oběžnou dobu této trpasličí planety.

Řešení cvičení

Cvičení 1

1. Merkur: podle 3. Keplerova zákona platí $a_{\mathrm{M}} = \sqrt[3]{\left(\frac{T_{\mathrm{M}}}{T_{\mathrm{Z}}}\right)^2} a_{\mathrm{Z}} = 0{,}387$ AU.

Střední rychlost pohybu pak je $v_{\mathrm{M}} = \dfrac{2\pi a_{\mathrm{M}}}{T_{\mathrm{M}}} = 47{,}8\ \mathrm{km \cdot s^{-1}}$.

Venuše: podle 3. Keplerova zákona platí $T_{\mathrm{V}} = \sqrt{\left(\frac{a_{\mathrm{V}}}{a_{\mathrm{Z}}}\right)^3} T_{\mathrm{Z}} = 0{,}615$ roků.

Střední rychlost pohybu pak je $v_{\mathrm{V}} = \dfrac{2\pi a_{\mathrm{V}}}{T_{\mathrm{V}}} = 35{,}0\ \mathrm{km \cdot s^{-1}}$.

2. a) Podle 3. Keplerova zákona je délka velké poloosy $a_{\mathrm{E}} = \sqrt[3]{\left(\frac{T_{\mathrm{E}}}{T_{\mathrm{Z}}}\right)^2} a_{\mathrm{Z}} =$ $= 1{,}46$ AU, délka malé poloosy je $b_{\mathrm{E}} = a_{\mathrm{E}}\sqrt{1-\varepsilon^2} = 1{,}42$ AU. b) Z 2. Keplerova zákona $\dfrac{v_{\mathrm{p}}}{v_{\mathrm{a}}} = \dfrac{r_{\mathrm{a}}}{r_{\mathrm{p}}} = \dfrac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} = 1{,}56$.

3. a) $a = \frac{1}{2}(r_{\mathrm{a}} + r_{\mathrm{p}}) = 17{,}8$ AU, dále platí $r_{\mathrm{a}} = a(1+\varepsilon)$, z čehož $\varepsilon = \dfrac{r_{\mathrm{a}}}{a} - 1 =$ $= \dfrac{r_{\mathrm{a}} - r_{\mathrm{p}}}{r_{\mathrm{a}} + r_{\mathrm{p}}} = 0{,}967$; b) $T = \sqrt{\left(\frac{a}{a_{\mathrm{Z}}}\right)^3} T_{\mathrm{Z}} = \sqrt{\frac{(r_{\mathrm{a}} + r_{\mathrm{p}})^3}{8a_{\mathrm{Z}}^3}} T_{\mathrm{Z}} = 75{,}4$ roku.

4. Oběžná rychlost Oberonu: $v = \dfrac{2\pi r}{T} = \dfrac{2\pi \cdot 584\,000}{13{,}46 \cdot 86\,400}\ \mathrm{km \cdot s^{-1}} = 3{,}2\ \mathrm{km \cdot s^{-1}}$.
Uran: $M = \dfrac{4\pi^2 r^3}{\varkappa T^2} = \dfrac{4\pi^2 \cdot (584 \cdot 10^6)^3}{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot (13{,}46 \cdot 86\,400)^2}\ \mathrm{kg} = 8{,}71 \cdot 10^{25}\ \mathrm{kg}$.

[17] Bohyně Haumea je patronkou Havajských ostrovů. Haumea je bohyně plodnosti a zrození, která má mnoho dětí. Ty „vyrašily“ z různých částí jejího těla, což odpovídá shluku ledových těles, která se pravděpodobně od mateřského tělesa odtáhla.

Cvičení 2

5. Uran: $M = \dfrac{4\pi^2 r^3}{\varkappa T^2} = \dfrac{4\pi^2 \cdot (436 \cdot 10^6)^3}{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot (8{,}71 \cdot 86\,400)^2}$ kg $= 8{,}66 \cdot 10^{25}$ kg. Oba výsledky se přibližně shodují. Synodická doba Oberonu: $\dfrac{2\pi}{T_{\mathrm{so}}} = \dfrac{2\pi}{T_{\mathrm{o}}} - \dfrac{2\pi}{T_{\mathrm{U}}}$, z čehož $T_{\mathrm{so}} = \dfrac{T_{\mathrm{o}} \cdot T_{\mathrm{U}}}{T_{\mathrm{o}} + T_{\mathrm{U}}} = \dfrac{13{,}463 \cdot 84{,}013 \cdot 365{,}26}{13{,}463 + 84{,}013 \cdot 365{,}26}$ dne $= 13{,}457$ dne. Synodická doba pro měsíc Titania: $\dfrac{2\pi}{T_{\mathrm{sT}}} = \dfrac{2\pi}{T_{\mathrm{U}}} - \dfrac{2\pi}{T_{\mathrm{T}}}$, z čehož

$T_{\mathrm{so}} = \dfrac{T_{\mathrm{T}} \cdot T_{\mathrm{U}}}{T_{\mathrm{U}} - T_{\mathrm{T}}} = \dfrac{8{,}706 \cdot 84{,}013 \cdot 365{,}26}{84{,}013 \cdot 365{,}26 - 8{,}706}$ dne $= 8{,}708$ dne.

6. Pluto: $M_{\mathrm{P}} = \dfrac{4\pi^2 r_{\mathrm{ch}}^3}{\varkappa T_{\mathrm{ch}}^2} = \dfrac{4\pi^2 \cdot (19{,}5 \cdot 10^6)^3}{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot (6{,}39 \cdot 86\,400)^2}$ kg $= 1{,}4 \cdot 10^{22}$ kg.
Charon: $\dfrac{M_{\mathrm{P}}}{\frac{4}{3}\pi \cdot (2 \cdot R_{\mathrm{Ch}})^3} = \dfrac{M_{\mathrm{Ch}}}{\frac{4}{3}\pi \cdot R_{\mathrm{Ch}}^3}$, z čehož $M_{\mathrm{Ch}} = \dfrac{1}{8} M_{\mathrm{P}} = 1{,}8 \cdot 10^{21}$ kg.

7. $M_{\mathrm{Sat}} = \dfrac{4\pi^2 \cdot r_{\mathrm{T}}^3}{\varkappa T_{\mathrm{T}}^2} = \dfrac{4\pi^2 \cdot (1{,}222 \cdot 10^9)^3}{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot (15{,}95 \cdot 86\,400)^2}$ kg $= 5{,}7 \cdot 10^{26}$ kg.
$M_{\mathrm{Sat}} = 95\, M_{\mathrm{Z}}$, $M_{\mathrm{Sat}} = 3 \cdot 10^{-4}\, M_{\mathrm{S}}$.

Cvičení 3

8. Phobos: $\cos\varphi_{\mathrm{P}} = \dfrac{R_{\mathrm{M}}}{r_{\mathrm{P}}} = \dfrac{3\,397}{9\,377} = 0{,}362$, z čehož $\varphi_{\mathrm{P}} = 68{,}76° = 68°46'$.
Úhlová vzdálenost je $2\varphi_{\mathrm{P}} = 137{,}52° = 137°31'$.
Obvodová vzdálenost: $l_{\mathrm{P}} = r_{\mathrm{P}} \cdot 2\varphi_{\mathrm{P}} = 3\,397 \cdot \dfrac{\pi}{180} \cdot 2 \cdot 68{,}76$ km $= 8\,153$ km.

Deimos: $\cos\varphi_{\mathrm{D}} = \dfrac{R_{\mathrm{M}}}{r_{\mathrm{D}}} = \dfrac{3\,397}{23\,460} = 0{,}145$, z čehož $\varphi_{\mathrm{D}} = 81{,}67° = 81°40'$.
Úhlová vzdálenost je $2\varphi_{\mathrm{D}} = 163{,}35° = 163°21'$.
Obvodová vzdálenost: $l_{\mathrm{D}} = r_{\mathrm{D}} \cdot 2\varphi_{\mathrm{D}} = 3\,397 \cdot \dfrac{\pi}{180} \cdot 2 \cdot 81{,}67$ km $= 9\,685$ km.

9. Podle příkladu 16 platí

$$\frac{y}{2R_{\mathrm{M}}} = \frac{\frac{hR_{\mathrm{M}}}{r}}{2R_{\mathrm{M}}} = \frac{h}{2r} = \frac{r - R_{\mathrm{M}}}{2r} = \frac{1}{2} - \frac{R_{\mathrm{M}}}{2r},$$

pro Phobos: $\dfrac{1}{2} - \dfrac{R_{\mathrm{M}}}{2r_{\mathrm{P}}} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{3\,397}{2 \cdot 9\,377} = 0{,}138 = 13{,}8\ \%$,
pro Deimos: $\dfrac{1}{2} - \dfrac{R_{\mathrm{M}}}{2r_{\mathrm{D}}} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{3\,397}{2 \cdot 23\,460} = 0{,}428 = 42{,}8\ \%$.

10. a) $a_{\mathrm{O}} = \sqrt[3]{\left(\frac{T_{\mathrm{O}}}{T_{\mathrm{Z}}}\right)^2} \cdot r_{\mathrm{Z}} = \sqrt[3]{\left(\frac{247{,}492}{1{,}000}\right)^2} \cdot 1\ \mathrm{AU} = 39{,}42\ \mathrm{AU}.$

b) $r_{\mathrm{p}} = a_{\mathrm{O}}(1-\varepsilon) = 39{,}42 \cdot (1-0{,}226)\ \mathrm{AU} = 30{,}51\ \mathrm{AU},$
$r_{\mathrm{a}} = a_{\mathrm{O}}(1+\varepsilon) = 39{,}42 \cdot (1+0{,}226)\ \mathrm{AU} = 48{,}33\ \mathrm{AU}.$

c) $a_{\mathrm{g}} = \varkappa \frac{M_{\mathrm{O}}}{R_{\mathrm{O}}^2} = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{7{,}5 \cdot 10^{20}}{(475 \cdot 10^3)^2}\ \mathrm{m \cdot s^{-2}} = 0{,}2\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}.$

d) $v = \frac{2\pi a}{T} = \frac{2\pi \cdot 39{,}42 \cdot 149{,}6 \cdot 10^9}{90\,396{,}4 \cdot 86\,400}\ \mathrm{m \cdot s^{-1}} = 4\,774\ \mathrm{m \cdot s^{-1}} = 4{,}7\ \mathrm{km \cdot s^{-1}}.$

11. a) $a_{\mathrm{g}} = \varkappa \cdot \frac{M_{\mathrm{Q}}}{R_{\mathrm{Q}}^2} = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{2{,}6 \cdot 10^{21}}{(650 \cdot 10^3)^2}\ \mathrm{m \cdot s^{-2}} = 0{,}4\ \mathrm{m \cdot s^{-2}},$

b) $\varrho = \frac{M_{\mathrm{Q}}}{\frac{4}{3}\pi \cdot R_{\mathrm{Q}}^3} = \frac{M_{\mathrm{W}}}{\frac{4}{3}\pi \cdot R_{\mathrm{W}}^3}$, z čehož

$$M_{\mathrm{W}} = \left(\frac{R_{\mathrm{W}}}{R_{\mathrm{Q}}}\right)^3 \cdot M_{\mathrm{Q}} = \left(\frac{50}{650}\right)^3 \cdot 2{,}6 \cdot 10^{21}\ \mathrm{kg} = 1{,}2 \cdot 10^{18}\ \mathrm{kg}.$$

12. Postup bude obdobný jako v příkladu 13.
a) Je-li Mars v periheliu, pak $2a_{\mathrm{H1}} = r_{\mathrm{Z}} + r_{\mathrm{Mp}}$, z čehož

$$a_{\mathrm{H1}} = \frac{r_{\mathrm{Z}} + r_{\mathrm{Mp}}}{2} = \frac{1+1{,}38}{2}\ \mathrm{AU} = 1{,}19\ \mathrm{AU}.$$

Potom doba letu je

$$T_{\mathrm{L1}} = \frac{1}{2} T_{\mathrm{Z}} \cdot \sqrt{\left(\frac{a_{\mathrm{H1}}}{r_{\mathrm{Z}}}\right)^3} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \sqrt{\left(\frac{1{,}19}{1{,}00}\right)^3}\ \mathrm{roku} = 0{,}649\ \mathrm{roku} = 237\ \mathrm{dní}.$$

b) Je-li Mars v aféliu, pak $2a_{\mathrm{H2}} = r_{\mathrm{Z}} + r_{\mathrm{Ma}}$, z čehož

$$a_{\mathrm{H2}} = \frac{r_{\mathrm{Z}} + r_{\mathrm{Ma}}}{2} = \frac{1+1{,}66}{2}\ \mathrm{AU} = 1{,}33\ \mathrm{AU}.$$

Potom doba letu je

$$T_{\mathrm{L2}} = \frac{1}{2} T_{\mathrm{Z}} \cdot \sqrt{\left(\frac{a_{\mathrm{H2}}}{r_{\mathrm{Z}}}\right)^3} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \sqrt{\left(\frac{1{,}33}{1{,}00}\right)^3}\ \mathrm{roku} = 0{,}767\ \mathrm{roku} = 280\ \mathrm{dní}.$$

Cvičení 4

13. $v_{\mathrm{I}} = \sqrt{\varkappa \frac{M_{\mathrm{Mar}}}{R_{\mathrm{Mar}}}} = \sqrt{\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 0{,}1074 \cdot 6 \cdot 10^{24}}{3\,397 \cdot 10^3}}\ \mathrm{m \cdot s^{-1}} = 3{,}56\ \mathrm{km \cdot s^{-1}},$
$v_{\mathrm{II}} = \sqrt{2} \cdot v_{\mathrm{II}} = 5{,}03\ \mathrm{km \cdot s^{-1}}.$

14. $r = (1\,738 + 62)\ \mathrm{km} = 1\,800\ \mathrm{km}$; $v_{\mathrm{k}} = \sqrt{\frac{\varkappa M_{\mathrm{měs}}}{r}} = 1{,}65\ \mathrm{km \cdot s^{-1}},$
$v_{\mathrm{p}} = 2{,}34\ \mathrm{km \cdot s^{-1}}.$

15. Phobos: $r = 0{,}000\,063\ \mathrm{AU} = 9{,}425 \cdot 10^6\ \mathrm{m}$,
$v_\mathrm{k} = \sqrt{\dfrac{\varkappa M_\mathrm{Mar}}{r}} = \sqrt{\dfrac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 0{,}1074 \cdot 6 \cdot 10^{24}}{9{,}425 \cdot 10^6}}\ \mathrm{m \cdot s^{-1}} = 2{,}14\ \mathrm{km \cdot s^{-1}}$,
$v_\mathrm{p} = 3{,}02\ \mathrm{km \cdot s^{-1}}$.

Cvičení 5

16. $a = \dfrac{r_\mathrm{p} + r_\mathrm{a}}{2} = 525{,}858\ \mathrm{AU}$; $\varepsilon = \dfrac{r_\mathrm{a} - r_\mathrm{p}}{2a} = 0{,}855$; $T = T_\mathrm{Z}\sqrt{\left(\dfrac{a}{a_\mathrm{Z}}\right)^3} =$ $= 12\,059$ let; $v_\mathrm{k} = \dfrac{2\pi a}{T} = 1{,}3\ \mathrm{km \cdot s^{-1}}$; $v_\mathrm{p} = v_\mathrm{k}\sqrt{\dfrac{r_\mathrm{a}}{r_\mathrm{p}}} = 4{,}65\ \mathrm{km \cdot s^{-1}}$; $v_\mathrm{a} =$ $= v_\mathrm{k}\sqrt{\dfrac{r_\mathrm{p}}{r_\mathrm{a}}} = 0{,}37\ \mathrm{km \cdot s^{-1}}$.

17. Podle 3. Keplerova zákona je délka velké poloosy $a = a_\mathrm{Z}\sqrt[3]{\left(\dfrac{T}{T_\mathrm{Z}}\right)^2} =$ $= \sqrt[3]{6{,}408^2} \cdot 1{,}000\ \mathrm{AU} = 3{,}450\ \mathrm{AU}$; $r_\mathrm{p} = 2a - r_\mathrm{a} = (2 \cdot 3{,}450 - 5{,}308)\ \mathrm{AU} =$ $= 1{,}592\ \mathrm{AU}$. Rychlost průletu periheliem je

$$v_\mathrm{p} = \sqrt{\frac{\varkappa M}{a}\frac{r_\mathrm{a}}{r_\mathrm{p}}} = \sqrt{\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 1{,}99 \cdot 10^{30}}{149{,}6 \cdot 10^9} \cdot \frac{5{,}308}{1{,}592}}\ \mathrm{m \cdot s^{-1}} = 54{,}4\ \mathrm{km \cdot s^{-1}}.$$

18. Z 3. Keplerova zákona $T = T_\mathrm{Z}\sqrt{\left(\dfrac{a}{a_\mathrm{Z}}\right)^3} = 1 \cdot \sqrt{45{,}64^3}$ let $= 308$ let.
$v_\mathrm{p} = \sqrt{\dfrac{\varkappa M}{a}\dfrac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}} = 5{,}1\ \mathrm{km \cdot s^{-1}}$, $v_\mathrm{a} = \sqrt{\dfrac{\varkappa M}{a}\dfrac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}} = 3{,}8\ \mathrm{km \cdot s^{-1}}$.

19. $a = \dfrac{r_\mathrm{p} + r_\mathrm{a}}{2} = 43{,}032\ \mathrm{AU}$; $\varepsilon = \dfrac{r_\mathrm{a} - r_\mathrm{p}}{2a} = 0{,}197$; $T = T_\mathrm{Z}\sqrt{\left(\dfrac{a}{a_\mathrm{Z}}\right)^3} =$ $= 289{,}29$ roku.

Literatura

[1] BEDNAŘÍK, M., ŠIROKÁ, M.: *Fyzika pro gymnázia - Mechanika.* 3. vydání. Praha: Prometheus, 2000.

[2] MIKULČÁK, J. a kol.: *MFCh tabulky pro střední školy* 4. vydání. Praha: Prometheus, 2009.

[3] MIKULČÁK, J. a kol.: *MFCh tabulky a vzorce pro střední školy* 1. vydání. Praha: Prometheus, 2003.

[4] *Rozhledy matematicko-fyzikální.* str. 8 – 20. Ročník 81(2006)/3.

[5] ŠEDIVÝ, P., VOLF, I.: *Pohyb tělesa po eliptické trajektorii v radiálním gravitačním poli.* Knihovnička FO č. 43, Hradec Králové: MAFY, 2000.

[6] VOLF, I.: *Pohyb umělých družic.* Praha: SPN, 1974.

[7] UNGERMANN, Z., VOLF, I.: *Pohyb tělesa v radiálním gravitačním poli.* Praha: SPN, 1985.

[8] KRAUS, I.: *Fyzika v kulturních dějinách Evropy I, II.* Praha: ČVUT, 2006, 2007.

[9] COUPEROVÁ, H., HENBEST, N.: *Dějiny astronomie.* Praha: Euromedia Group k.s., 2009.

[10] REES, M.: *Vesmír.* Praha: Euromedia Group k.s., 2006.

[11] <http://en.wikipedia.org>

[12] <http://cs.wikipedia.org>

[13] <http://www.aldebaran.cz/bulletin/2004 _ s2.html>

[14] <http://www.planetky.cz>

[15] <http://www.komety.cz>

Obr. 7, obr. 8, obr. 11 – 13, obr. 19 – 23, obr. 26 a obr. 42, 43 jsou převzaty ze stránek <http://en.wikipedia.org>, obr. 17 je převzat a upraven z [13], ostatní obrázky nakreslila Miroslava Jarešová.