



ZÁPADOČESKÁ  
UNIVERZITA  
V PLZNI

**www.KMA.zcu.cz**  
**SINCE 1954**

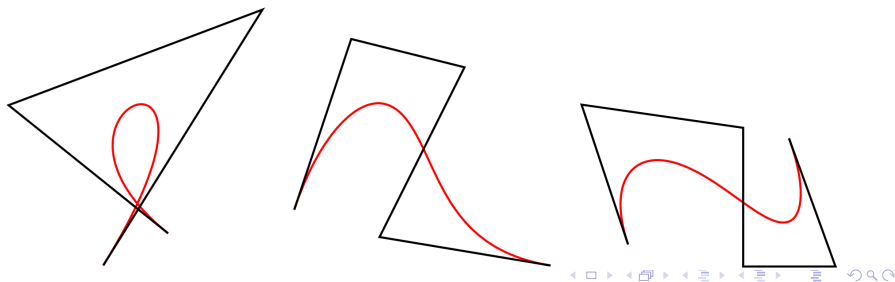
## B-spline, NURBS křivky

KMA/ITG – Informační technologie ve vyučování geometrie +  
KMA/GM1 – Geometrické modelování 1

# Bézierovy křivky – opakování

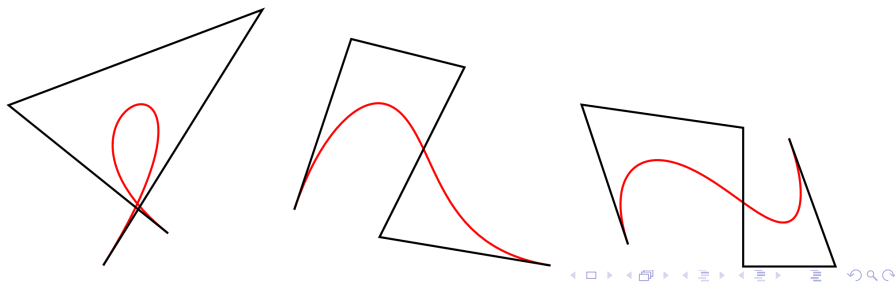
# Bézierovy křivky

- ▶ Bézierovy křivky poprvé zavedli Paul de Casteljau (Citroen) v roce 1959 a nezávisle na něm Pierre Bézier (Renault) v roce 1962
- ▶ dodnes se používá název Bézierovy křivky, jelikož právě P. Bézier mohl výsledky své práce jako první publikovat
- ▶ nicméně dodnes se pro generování bodů Bézierovy křivky používá **de Casteljau algoritmus**, který je založený na opakovaném použití lineární interpolace a zobecňuje speciální případ konstrukce paraboly pro křivky vyšších stupňů
- ▶ Bézierovy křivky jsou určeny **řídícím polygonem** – lomenou čarou určenou polohovými vektory bodů  $P_0, \dots, P_n$



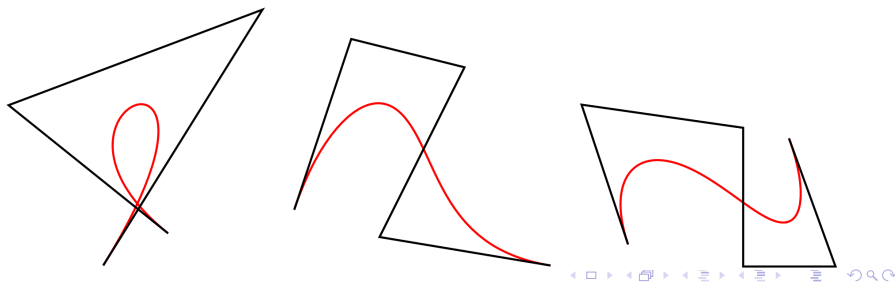
# Bézierovy křivky

- ▶ Bézierovy křivky poprvé zavedli Paul de Casteljau (Citroen) v roce 1959 a nezávisle na něm Pierre Bézier (Renault) v roce 1962
- ▶ dodnes se používá název Bézierovy křivky, jelikož právě P. Bézier mohl výsledky své práce jako první publikovat
- ▶ nicméně dodnes se pro generování bodů Bézierovy křivky používá **de Casteljau algoritmus**, který je založený na opakovaném použití lineární interpolace a zobecňuje speciální případ konstrukce paraboly pro křivky vyšších stupňů
- ▶ Bézierovy křivky jsou určeny **řídícím polygonem** – lomenou čarou určenou polohovými vektory bodů  $P_0, \dots, P_n$



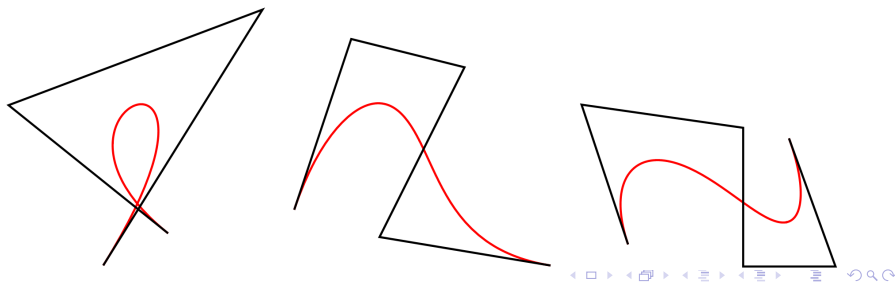
# Bézierovy křivky

- ▶ Bézierovy křivky poprvé zavedli Paul de Casteljau (Citroen) v roce 1959 a nezávisle na něm Pierre Bézier (Renault) v roce 1962
- ▶ dodnes se používá název Bézierovy křivky, jelikož právě P. Bézier mohl výsledky své práce jako první publikovat
- ▶ nicméně dodnes se pro generování bodů Bézierovy křivky používá **de Casteljau algoritmus**, který je založený na opakovaném použití lineární interpolace a zobecňuje speciální případ konstrukce paraboly pro křivky vyšších stupňů
- ▶ Bézierovy křivky jsou určeny **řídícím polygonem** – lomenou čarou určenou polohovými vektory bodů  $P_0, \dots, P_n$



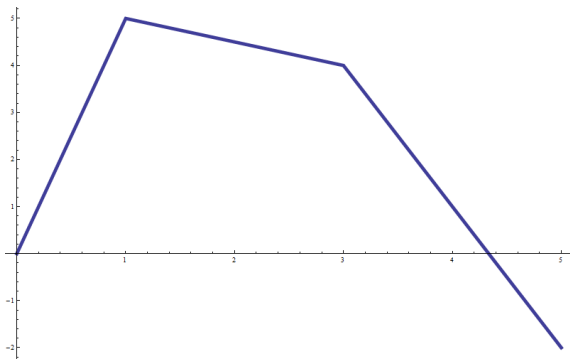
# Bézierovy křivky

- ▶ Bézierovy křivky poprvé zavedli Paul de Casteljau (Citroen) v roce 1959 a nezávisle na něm Pierre Bézier (Renault) v roce 1962
- ▶ dodnes se používá název Bézierovy křivky, jelikož právě P. Bézier mohl výsledky své práce jako první publikovat
- ▶ nicméně dodnes se pro generování bodů Bézierovy křivky používá **de Casteljau algoritmus**, který je založený na opakovaném použití lineární interpolace a zobecňuje speciální případ konstrukce paraboly pro křivky vyšších stupňů
- ▶ Bézierovy křivky jsou určeny **řídícím polygonem** – lomenou čarou určenou polohovými vektory bodů  $\mathbf{P}_0, \dots, \mathbf{P}_n$



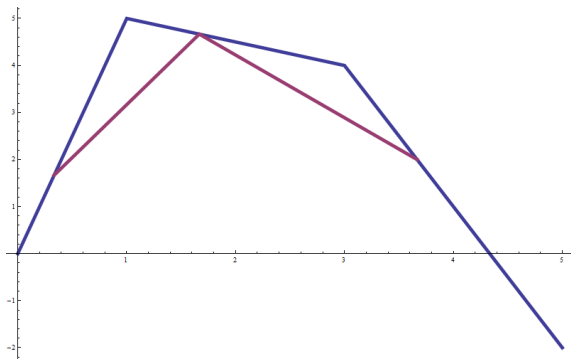
# Algoritmus de Casteljau

- ▶  $P_0^1(t) = (1-t)P_0 + tP_1, P_1^1(t) = (1-t)P_1 + tP_2, P_2^1(t) = (1-t)P_2 + tP_3$
- ▶  $P_0^2(t) = (1-t)P_0^1 + tP_1^1, P_1^2(t) = (1-t)P_1^1 + tP_2^1$
- ▶  $P(t) = P_0^3(t) = (1-t)P_0^2 + tP_1^2$



# Algoritmus de Casteljau

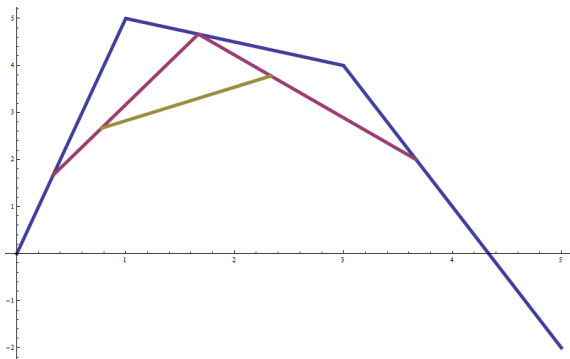
- ▶  $\mathbf{P}_0^1(t) = (1-t)\mathbf{P}_0 + t\mathbf{P}_1$ ,  $\mathbf{P}_1^1(t) = (1-t)\mathbf{P}_1 + t\mathbf{P}_2$ ,  $\mathbf{P}_2^1(t) = (1-t)\mathbf{P}_2 + t\mathbf{P}_3$
- ▶  $\mathbf{P}_0^2(t) = (1-t)\mathbf{P}_0^1 + t\mathbf{P}_1^1$ ,  $\mathbf{P}_1^2(t) = (1-t)\mathbf{P}_1^1 + t\mathbf{P}_2^1$
- ▶  $\mathbf{P}(t) = \mathbf{P}_0^3(t) = (1-t)\mathbf{P}_0^2 + t\mathbf{P}_1^2$





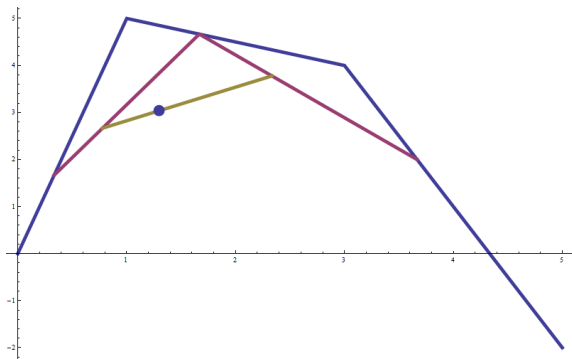
# Algoritmus de Casteljau

- ▶  $\mathbf{P}_0^1(t) = (1-t)\mathbf{P}_0 + t\mathbf{P}_1$ ,  $\mathbf{P}_1^1(t) = (1-t)\mathbf{P}_1 + t\mathbf{P}_2$ ,  $\mathbf{P}_2^1(t) = (1-t)\mathbf{P}_2 + t\mathbf{P}_3$
- ▶  $\mathbf{P}_0^2(t) = (1-t)\mathbf{P}_0^1 + t\mathbf{P}_1^1$ ,  $\mathbf{P}_1^2(t) = (1-t)\mathbf{P}_1^1 + t\mathbf{P}_2^1$
- ▶  $\mathbf{P}(t) = \mathbf{P}_0^3(t) = (1-t)\mathbf{P}_0^2 + t\mathbf{P}_1^2$



# Algoritmus de Casteljau

- ▶  $\mathbf{P}_0^1(t) = (1-t)\mathbf{P}_0 + t\mathbf{P}_1$ ,  $\mathbf{P}_1^1(t) = (1-t)\mathbf{P}_1 + t\mathbf{P}_2$ ,  $\mathbf{P}_2^1(t) = (1-t)\mathbf{P}_2 + t\mathbf{P}_3$
- ▶  $\mathbf{P}_0^2(t) = (1-t)\mathbf{P}_0^1 + t\mathbf{P}_1^1$ ,  $\mathbf{P}_1^2(t) = (1-t)\mathbf{P}_1^1 + t\mathbf{P}_2^1$
- ▶  $\mathbf{P}(t) = \mathbf{P}_0^3(t) = (1-t)\mathbf{P}_0^2 + t\mathbf{P}_1^2$



# Algoritmus de Casteljau

- ▶ proces je možné zobecnit pro **libovolný** počet bodů řídicího polygonu
- ▶ pokud má **řídicí polygon**  $n + 1$  bodů, potom
  - ▶ je nutné provést  $n$  kroků algoritmu, abychom získali bod na křivce
  - ▶ **Bézierova křivka je stupně  $n$**  a její parametrizaci je možné získat ze vztahu

$$P(t) = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (1-t)^{n-i} t^i P_i$$

- ▶ algoritmus de Casteljau také umožňuje najít **tečnu Bézierovy křivky** v daném bodě – tečna v bodě  $P(t)$  je přímo určena body  $P_0^{n-1}(t)$  a  $P_1^{n-1}(t)$
- ▶ podobně, tečna v bodě  $P_0$ , resp.  $P_n$  je přímo určena první, resp. poslední hranou řídicího polygonu
- ▶ samozřejmě je **tečný vektor Bézierovy křivky** možné získat i početně derivací vztahu uvedeného výše – pro kubickou B. křivku a její tečný vektor potom ihned dostáváme

$$\begin{aligned} P'(t) &= 3(P_1^2(t) - P_0^2(t)) \\ P'(0) &= 3(P_1 - P_0) \\ P'(1) &= 3(P_3 - P_2) \end{aligned}$$

# Algoritmus de Casteljau

- ▶ proces je možné zobecnit pro **libovolný** počet bodů řídicího polygonu
- ▶ pokud má **řídicí polygon  $n + 1$  bodů**, potom
  - ▶ je nutné provést  $n$  kroků algoritmu, abychom získali bod na křivce
  - ▶ **Bézierova křivka je stupně  $n$**  a její parametrizaci je možné získat ze vztahu

$$\mathbf{P}(t) = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (1-t)^{n-i} t^i \mathbf{P}_i$$

- ▶ algoritmus de Casteljau také umožňuje najít **tečnu Bézierovy křivky** v daném bodě – tečna v bodě  $\mathbf{P}(t)$  je přímo určena body  $\mathbf{P}_0^{n-1}(t)$  a  $\mathbf{P}_1^{n-1}(t)$
- ▶ podobně, tečna v bodě  $\mathbf{P}_0$ , resp.  $\mathbf{P}_n$  je přímo určena první, resp. poslední hranou řídicího polygonu
- ▶ samozřejmě je **tečný vektor Bézierovy křivky** možné získat i početně derivací vztahu uvedeného výše – pro kubickou B. křivku a její tečný vektor potom ihned dostáváme

$$\begin{aligned} \mathbf{P}'(t) &= 3(\mathbf{P}_1^2(t) - \mathbf{P}_0^2(t)) \\ \mathbf{P}'(0) &= 3(\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_0) \\ \mathbf{P}'(1) &= 3(\mathbf{P}_3 - \mathbf{P}_2) \end{aligned}$$

# Algoritmus de Casteljau

- ▶ proces je možné zobecnit pro **libovolný** počet bodů řídicího polygonu
- ▶ pokud má **řídicí polygon  $n + 1$  bodů**, potom
  - ▶ je nutné provést  $n$  kroků algoritmu, abychom získali bod na křivce
  - ▶ **Bézierova křivka je stupně  $n$**  a její parametrizaci je možné získat ze vztahu

$$\mathbf{P}(t) = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (1-t)^{n-i} t^i \mathbf{P}_i$$

- ▶ algoritmus de Casteljau také umožňuje najít **tečnu Bézierovy křivky** v daném bodě – tečna v bodě  $\mathbf{P}(t)$  je přímo určena body  $\mathbf{P}_0^{n-1}(t)$  a  $\mathbf{P}_1^{n-1}(t)$
- ▶ podobně, tečna v bodě  $\mathbf{P}_0$ , resp.  $\mathbf{P}_n$  je přímo určena první, resp. poslední hranou řídicího polygonu
- ▶ samozřejmě je **tečný vektor Bézierovy křivky** možné získat i početně derivací vztahu uvedeného výše – pro kubickou B. křivku a její tečný vektor potom ihned dostáváme

$$\begin{aligned} \mathbf{P}'(t) &= 3(\mathbf{P}_1^2(t) - \mathbf{P}_0^2(t)) \\ \mathbf{P}'(0) &= 3(\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_0) \\ \mathbf{P}'(1) &= 3(\mathbf{P}_3 - \mathbf{P}_2) \end{aligned}$$

# Algoritmus de Casteljau

- ▶ proces je možné zobecnit pro **libovolný** počet bodů řídicího polygonu
- ▶ pokud má **řídicí polygon**  $n + 1$  bodů, potom
  - ▶ je nutné provést  $n$  kroků algoritmu, abychom získali bod na křivce
  - ▶ **Bézierova křivka je stupně**  $n$  a její parametrizaci je možné získat ze vztahu

$$\mathbf{P}(t) = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (1-t)^{n-i} t^i \mathbf{P}_i$$

- ▶ algoritmus de Casteljau také umožňuje najít **tečnu Bézierovy křivky** v daném bodě – tečna v bodě  $\mathbf{P}(t)$  je přímo určena body  $\mathbf{P}_0^{n-1}(t)$  a  $\mathbf{P}_1^{n-1}(t)$
- ▶ podobně, tečna v bodě  $\mathbf{P}_0$ , resp.  $\mathbf{P}_n$  je přímo určena první, resp. poslední hranou řídicího polygonu
- ▶ samozřejmě je **tečný vektor Bézierovy křivky** možné získat i početně derivací vztahu uvedeného výše – pro kubickou B. křivku a její tečný vektor potom ihned dostáváme

$$\begin{aligned} \mathbf{P}'(t) &= 3(\mathbf{P}_1^2(t) - \mathbf{P}_0^2(t)) \\ \mathbf{P}'(0) &= 3(\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_0) \\ \mathbf{P}'(1) &= 3(\mathbf{P}_3 - \mathbf{P}_2) \end{aligned}$$

# Algoritmus de Casteljau

- ▶ proces je možné zobecnit pro **libovolný** počet bodů řídicího polygonu
- ▶ pokud má **řídicí polygon  $n + 1$  bodů**, potom
  - ▶ je nutné provést  $n$  kroků algoritmu, abychom získali bod na křivce
  - ▶ **Bézierova křivka je stupně  $n$**  a její parametrizaci je možné získat ze vztahu

$$\mathbf{P}(t) = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (1-t)^{n-i} t^i \mathbf{P}_i$$

- ▶ algoritmus de Casteljau také umožňuje najít **tečnu Bézierovy křivky** v daném bodě – tečna v bodě  $\mathbf{P}(t)$  je přímo určena body  $\mathbf{P}_0^{n-1}(t)$  a  $\mathbf{P}_1^{n-1}(t)$
- ▶ podobně, tečna v bodě  $\mathbf{P}_0$ , resp.  $\mathbf{P}_n$  je přímo určena první, resp. poslední hranou řídicího polygonu
- ▶ samozřejmě je **tečný vektor Bézierovy křivky** možné získat i početně derivací vztahu uvedeného výše – pro kubickou B. křivku a její tečný vektor potom ihned dostáváme

$$\begin{aligned} \mathbf{P}'(t) &= 3(\mathbf{P}_1^2(t) - \mathbf{P}_0^2(t)) \\ \mathbf{P}'(0) &= 3(\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_0) \\ \mathbf{P}'(1) &= 3(\mathbf{P}_3 - \mathbf{P}_2) \end{aligned}$$

# Algoritmus de Casteljau

- ▶ proces je možné zobecnit pro **libovolný** počet bodů řídicího polygonu
- ▶ pokud má **řídicí polygon  $n + 1$  bodů**, potom
  - ▶ je nutné provést  $n$  kroků algoritmu, abychom získali bod na křivce
  - ▶ **Bézierova křivka je stupně  $n$**  a její parametrizaci je možné získat ze vztahu

$$\mathbf{P}(t) = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (1-t)^{n-i} t^i \mathbf{P}_i$$

- ▶ algoritmus de Casteljau také umožňuje najít **tečnu Bézierovy křivky** v daném bodě – tečna v bodě  $\mathbf{P}(t)$  je přímo určena body  $\mathbf{P}_0^{n-1}(t)$  a  $\mathbf{P}_1^{n-1}(t)$
- ▶ podobně, tečna v bodě  $\mathbf{P}_0$ , resp.  $\mathbf{P}_n$  je přímo určena první, resp. poslední hranou řídicího polygonu
- ▶ samozřejmě je **tečný vektor Bézierovy křivky** možné získat i početně derivací vztahu uvedeného výše – pro kubickou B. křivku a její tečný vektor potom ihned dostáváme

$$\begin{aligned} \mathbf{P}'(t) &= 3(\mathbf{P}_1^2(t) - \mathbf{P}_0^2(t)) \\ \mathbf{P}'(0) &= 3(\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_0) \\ \mathbf{P}'(1) &= 3(\mathbf{P}_3 - \mathbf{P}_2) \end{aligned}$$



# Bézierovy křivky a Bernsteinovy polynomy

- ▶ **Bézierova křivka** **stupně**  $n$  určená řídicím polygonem  $\mathbf{P}_0, \dots, \mathbf{P}_n$  je dána vztahem

$$\mathbf{P}(t) = \sum_{i=0}^n \underbrace{\binom{n}{i} (1-t)^{n-i} t^i}_{B_i^n(t)} \mathbf{P}_i, \quad t \in \langle 0, 1 \rangle$$

kde  $B_i^n(t)$  jsou tzv. **Bernsteinovy polynomy** **stupně**  $n$

- ▶ Bernsteinovy polynomy **stupně**  $n$  tvoří bázi prostoru polynomů **stupně**  $n$
- ▶ **vlastnosti Bernsteinových polynomů**:
  - ▶  $B_i^n(t) \geq 0$  pro  $t \in \langle 0, 1 \rangle, i = 0, \dots, n$
  - ▶ Bernsteinovy polynomy je možné generovat rekurzivně pomocí vztahu

$$B_i^n(t) = (1-t)B_i^{n-1}(t) + tB_{i-1}^{n-1}(t)$$

- ▶ platí:

$$\sum_{i=0}^n B_i^n(t) = 1, \quad \forall t$$

- ▶ **symetrie**:  $B_i^n(t) = B_{n-i}^n(1-t)$

# Bézierovy křivky a Bernsteinovy polynomy

- ▶ **Bézierova křivka stupně  $n$**  určená řídicím polygonem  $\mathbf{P}_0, \dots, \mathbf{P}_n$  je dána vztahem

$$\mathbf{P}(t) = \sum_{i=0}^n \underbrace{\binom{n}{i} (1-t)^{n-i} t^i}_{B_i^n(t)} \mathbf{P}_i, \quad t \in \langle 0, 1 \rangle$$

kde  $B_i^n(t)$  jsou tzv. **Bernsteinovy polynomy** stupně  $n$

- ▶ Bernsteinovy polynomy stupně  $n$  tvoří bázi prostoru polynomů stupně  $n$
- ▶ **vlastnosti Bernsteinových polynomů:**

- ▶  $B_i^n(t) \geq 0$  pro  $t \in \langle 0, 1 \rangle, i = 0, \dots, n$
- ▶ Bernsteinovy polynomy je možné generovat rekurzivně pomocí vztahu

$$B_i^n(t) = (1-t)B_i^{n-1}(t) + tB_{i-1}^{n-1}(t)$$

- ▶ platí:

$$\sum_{i=0}^n B_i^n(t) = 1, \quad \forall t$$

- ▶ symetrie:  $B_i^n(t) = B_{n-i}^n(1-t)$

# Bézierovy křivky a Bernsteinovy polynomy

- ▶ **Bézierova křivka stupně  $n$**  určená řídicím polygonem  $\mathbf{P}_0, \dots, \mathbf{P}_n$  je dána vztahem

$$\mathbf{P}(t) = \sum_{i=0}^n \underbrace{\binom{n}{i} (1-t)^{n-i} t^i}_{B_i^n(t)} \mathbf{P}_i, \quad t \in \langle 0, 1 \rangle$$

kde  $B_i^n(t)$  jsou tzv. **Bernsteinovy polynomy** stupně  $n$

- ▶ Bernsteinovy polynomy stupně  $n$  tvoří bázi prostoru polynomů stupně  $n$
- ▶ **vlastnosti Bernsteinových polynomů:**
  - ▶  $B_i^n(t) \geq 0$  pro  $t \in \langle 0, 1 \rangle, i = 0, \dots, n$
  - ▶ Bernsteinovy polynomy je možné generovat rekurzivně pomocí vztahu

$$B_i^n(t) = (1-t)B_i^{n-1}(t) + tB_{i-1}^{n-1}(t)$$

- ▶ platí:

$$\sum_{i=0}^n B_i^n(t) = 1, \quad \forall t$$

- ▶ symetrie:  $B_i^n(t) = B_{n-i}^n(1-t)$

# Bézierovy křivky a Bernsteinovy polynomy

- ▶ **Bézierova křivka stupně  $n$**  určená řídicím polygonem  $\mathbf{P}_0, \dots, \mathbf{P}_n$  je dána vztahem

$$\mathbf{P}(t) = \sum_{i=0}^n \underbrace{\binom{n}{i} (1-t)^{n-i} t^i}_{B_i^n(t)} \mathbf{P}_i, \quad t \in \langle 0, 1 \rangle$$

kde  $B_i^n(t)$  jsou tzv. **Bernsteinovy polynomy** stupně  $n$

- ▶ Bernsteinovy polynomy stupně  $n$  tvoří bázi prostoru polynomů stupně  $n$
- ▶ **vlastnosti Bernsteinových polynomů:**
  - ▶  $B_i^n(t) \geq 0$  pro  $t \in \langle 0, 1 \rangle, i = 0, \dots, n$
  - ▶ Bernsteinovy polynomy je možné generovat rekurzivně pomocí vztahu

$$B_i^n(t) = (1-t)B_i^{n-1}(t) + tB_{i-1}^{n-1}(t)$$

- ▶ platí:

$$\sum_{i=0}^n B_i^n(t) = 1, \quad \forall t$$

- ▶ symetrie:  $B_i^n(t) = B_{n-i}^n(1-t)$

# Bézierovy křivky a Bernsteinovy polynomy

- ▶ **Bézierova křivka stupně  $n$**  určená řídicím polygonem  $\mathbf{P}_0, \dots, \mathbf{P}_n$  je dána vztahem

$$\mathbf{P}(t) = \sum_{i=0}^n \underbrace{\binom{n}{i} (1-t)^{n-i} t^i}_{B_i^n(t)} \mathbf{P}_i, \quad t \in \langle 0, 1 \rangle$$

kde  $B_i^n(t)$  jsou tzv. **Bernsteinovy polynomy** stupně  $n$

- ▶ Bernsteinovy polynomy stupně  $n$  tvoří bázi prostoru polynomů stupně  $n$
- ▶ **vlastnosti Bernsteinových polynomů:**
  - ▶  $B_i^n(t) \geq 0$  pro  $t \in \langle 0, 1 \rangle, i = 0, \dots, n$
  - ▶ Bernsteinovy polynomy je možné generovat rekurzivně pomocí vztahu

$$B_i^n(t) = (1-t)B_i^{n-1}(t) + tB_{i-1}^{n-1}(t)$$

- ▶ platí:

$$\sum_{i=0}^n B_i^n(t) = 1, \quad \forall t$$

- ▶ symetrie:  $B_i^n(t) = B_{n-i}^n(1-t)$

# Bézierovy křivky a Bernsteinovy polynomy

- ▶ **Bézierova křivka stupně  $n$**  určená řídicím polygonem  $\mathbf{P}_0, \dots, \mathbf{P}_n$  je dána vztahem

$$\mathbf{P}(t) = \sum_{i=0}^n \underbrace{\binom{n}{i} (1-t)^{n-i} t^i}_{B_i^n(t)} \mathbf{P}_i, \quad t \in \langle 0, 1 \rangle$$

kde  $B_i^n(t)$  jsou tzv. **Bernsteinovy polynomy** stupně  $n$

- ▶ Bernsteinovy polynomy stupně  $n$  tvoří bázi prostoru polynomů stupně  $n$
- ▶ **vlastnosti Bernsteinových polynomů:**
  - ▶  $B_i^n(t) \geq 0$  pro  $t \in \langle 0, 1 \rangle, i = 0, \dots, n$
  - ▶ Bernsteinovy polynomy je možné generovat rekurzivně pomocí vztahu

$$B_i^n(t) = (1-t)B_i^{n-1}(t) + tB_{i-1}^{n-1}(t)$$

- ▶ platí:

$$\sum_{i=0}^n B_i^n(t) = 1, \quad \forall t$$

- ▶ **symetrie:**  $B_i^n(t) = B_{n-i}^n(1-t)$

# Vlastnosti Bézierových křivek

- ▶ počátečním bodem Bézierovy křivky je bod  $\mathbf{P}_0$  řídicího polygonu, koncovým bodem je bod  $\mathbf{P}_n$  řídicího polygonu
- ▶ Bézierova křivka se v počátečním bodě **dotýká první strany řídicího polygonu**, v koncovém bodě se **dotýká poslední strany řídicího polygonu**
- ▶ navíc platí:  $\mathbf{P}'(0) = n(\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_0)$  a  $\mathbf{P}'(1) = n(\mathbf{P}_n - \mathbf{P}_{n-1})$
- ▶ **napojení Bézierových křivek:**
  - ▶ mějme dvě Bézierovy křivky  $\mathbf{P}(t)$ , určenou řídicím polygonem  $\mathbf{P}_0, \dots, \mathbf{P}_n$ , a  $\mathbf{Q}(t)$ , určenou řídicím polygonem  $\mathbf{Q}_0, \dots, \mathbf{Q}_m$
  - ▶ jestliže  $\mathbf{P}_n = \mathbf{Q}_0$ , potom jsou Bézierovy křivky **napojeny ve třídě  $C_0$**
  - ▶ pokud leží body  $\mathbf{P}_{n-1}, \mathbf{P}_n = \mathbf{Q}_0, \mathbf{Q}_1$  na jedné přímce, potom jsou Bézierovy křivky **napojeny ve třídě  $C_1$**
  - ▶ pokud navíc platí, že  $n(\mathbf{P}_n - \mathbf{P}_{n-1}) = m(\mathbf{Q}_1 - \mathbf{Q}_0)$ , potom jsou Bézierovy křivky **napojeny ve třídě  $C_2$**
- ▶ jelikož libovolný polynom stupně  $n$  je možné vyjádřit jako lineární kombinaci Bernsteinových polynomů, je možné **libovolnou polynomiální parametrickou křivku vyjádřit jako Bézierovu křivku**
- ▶ vzhledem k symetrii Bernsteinových polynomů je tvar Bézierovy křivky **nezávislý na orientaci řídicího polygonu**

# Vlastnosti Bézierových křivek

- ▶ počátečním bodem Bézierovy křivky je bod  $\mathbf{P}_0$  řídicího polygonu, koncovým bodem je bod  $\mathbf{P}_n$  řídicího polygonu
- ▶ Bézierova křivka se v počátečním bodě **dotýká první strany řídicího polygonu**, v koncovém bodě se **dotýká poslední strany řídicího polygonu**
- ▶ navíc platí:  $\mathbf{P}'(0) = n(\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_0)$  a  $\mathbf{P}'(1) = n(\mathbf{P}_n - \mathbf{P}_{n-1})$
- ▶ **napojení Bézierových křivek:**
  - ▶ máme dvě Bézierovy křivky  $P(t)$ , určenou řídicím polygonem  $P_0, \dots, P_n$ , a  $Q(t)$ , určenou řídicím polygonem  $Q_0, \dots, Q_m$
  - ▶ jestliže  $P_n = Q_0$ , potom jsou Bézierovy křivky napojeny ve třídě  $C_0$
  - ▶ pokud leží body  $P_{n-1}, P_n = Q_0, Q_1$  na jedné přímce, potom jsou Bézierovy křivky napojeny ve třídě  $C_1$
  - ▶ pokud navíc platí, že  $n(\mathbf{P}_n - \mathbf{P}_{n-1}) = m(\mathbf{Q}_1 - \mathbf{Q}_0)$ , potom jsou Bézierovy křivky napojeny ve třídě  $C_2$
- ▶ jelikož libovolný polynom stupně  $n$  je možné vyjádřit jako lineární kombinaci Bernsteinových polynomů, je možné **libovolnou polynomiální parametrickou křivku vyjádřit jako Bézierovu křivku**
- ▶ vzhledem k symetrii Bernsteinových polynomů je tvar Bézierovy křivky **nezávislý na orientaci řídicího polygonu**



# Vlastnosti Bézierových křivek

- ▶ počátečním bodem Bézierovy křivky je bod  $\mathbf{P}_0$  řídicího polygonu, koncovým bodem je bod  $\mathbf{P}_n$  řídicího polygonu
- ▶ Bézierova křivka se v počátečním bodě **dotýká první strany řídicího polygonu**, v koncovém bodě se **dotýká poslední strany řídicího polygonu**
- ▶ navíc platí:  $\mathbf{P}'(0) = n(\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_0)$  a  $\mathbf{P}'(1) = n(\mathbf{P}_n - \mathbf{P}_{n-1})$
- ▶ **napojení Bézierových křivek:**
  - ▶ mějme dvě Bézierovy křivky  $\mathbf{P}(t)$ , určenou řídicím polygonem  $\mathbf{P}_0, \dots, \mathbf{P}_n$ , a  $\mathbf{Q}(t)$ , určenou řídicím polygonem  $\mathbf{Q}_0, \dots, \mathbf{Q}_m$
  - ▶ jestliže  $\mathbf{P}_n = \mathbf{Q}_0$ , potom jsou Bézierovy křivky **napojeny ve třídě  $C_0$**
  - ▶ pokud leží body  $\mathbf{P}_{n-1}, \mathbf{P}_n = \mathbf{Q}_0, \mathbf{Q}_1$  na jedné přímce, potom jsou Bézierovy křivky **napojeny ve třídě  $G_1$**
  - ▶ pokud navíc platí, že  $n(\mathbf{P}_n - \mathbf{P}_{n-1}) = m(\mathbf{Q}_1 - \mathbf{Q}_0)$ , potom jsou Bézierovy křivky **napojeny ve třídě  $C_1$**
- ▶ jelikož libovolný polynom stupně  $n$  je možné vyjádřit jako lineární kombinaci Bernsteinových polynomů, je možné **libovolnou polynomiální parametrickou křivku vyjádřit jako Bézierovu křivku**
- ▶ vzhledem k symetrii Bernsteinových polynomů je tvar Bézierovy křivky **nezávislý na orientaci řídicího polygonu**

# Vlastnosti Bézierových křivek

- ▶ počátečním bodem Bézierovy křivky je bod  $\mathbf{P}_0$  řídicího polygonu, koncovým bodem je bod  $\mathbf{P}_n$  řídicího polygonu
- ▶ Bézierova křivka se v počátečním bodě **dotýká první strany řídicího polygonu**, v koncovém bodě se **dotýká poslední strany řídicího polygonu**
- ▶ navíc platí:  $\mathbf{P}'(0) = n(\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_0)$  a  $\mathbf{P}'(1) = n(\mathbf{P}_n - \mathbf{P}_{n-1})$
- ▶ **napojení Bézierových křivek:**
  - ▶ mějme dvě Bézierovy křivky  $\mathbf{P}(t)$ , určenou řídicím polygonem  $\mathbf{P}_0, \dots, \mathbf{P}_n$ , a  $\mathbf{Q}(t)$ , určenou řídicím polygonem  $\mathbf{Q}_0, \dots, \mathbf{Q}_m$
  - ▶ jestliže  $\mathbf{P}_n = \mathbf{Q}_0$ , potom jsou Bézierovy křivky **napojeny ve třídě  $C_0$**
  - ▶ pokud leží body  $\mathbf{P}_{n-1}, \mathbf{P}_n = \mathbf{Q}_0, \mathbf{Q}_1$  na jedné přímce, potom jsou Bézierovy křivky **napojeny ve třídě  $G_1$**
  - ▶ pokud navíc platí, že  $n(\mathbf{P}_n - \mathbf{P}_{n-1}) = m(\mathbf{Q}_1 - \mathbf{Q}_0)$ , potom jsou Bézierovy křivky **napojeny ve třídě  $C_1$**
- ▶ jelikož libovolný polynom stupně  $n$  je možné vyjádřit jako lineární kombinaci Bernsteinových polynomů, je možné **libovolnou polynomiální parametrickou křivku vyjádřit jako Bézierovu křivku**
- ▶ vzhledem k symetrii Bernsteinových polynomů je tvar Bézierovy křivky **nezávislý na orientaci řídicího polygonu**

# Vlastnosti Bézierových křivek

- ▶ počátečním bodem Bézierovy křivky je bod  $\mathbf{P}_0$  řídicího polygonu, koncovým bodem je bod  $\mathbf{P}_n$  řídicího polygonu
- ▶ Bézierova křivka se v počátečním bodě **dotýká první strany řídicího polygonu**, v koncovém bodě se **dotýká poslední strany řídicího polygonu**
- ▶ navíc platí:  $\mathbf{P}'(0) = n(\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_0)$  a  $\mathbf{P}'(1) = n(\mathbf{P}_n - \mathbf{P}_{n-1})$
- ▶ **napojení Bézierových křivek:**
  - ▶ mějme dvě Bézierovy křivky  $\mathbf{P}(t)$ , určenou řídicím polygonem  $\mathbf{P}_0, \dots, \mathbf{P}_n$ , a  $\mathbf{Q}(t)$ , určenou řídicím polygonem  $\mathbf{Q}_0, \dots, \mathbf{Q}_m$
  - ▶ jestliže  $\mathbf{P}_n = \mathbf{Q}_0$ , potom jsou Bézierovy křivky **napojeny ve třídě  $C_0$**
  - ▶ pokud leží body  $\mathbf{P}_{n-1}, \mathbf{P}_n = \mathbf{Q}_0, \mathbf{Q}_1$  na jedné přímce, potom jsou Bézierovy křivky **napojeny ve třídě  $G_1$**
  - ▶ pokud navíc platí, že  $n(\mathbf{P}_n - \mathbf{P}_{n-1}) = m(\mathbf{Q}_1 - \mathbf{Q}_0)$ , potom jsou Bézierovy křivky **napojeny ve třídě  $C_1$**
- ▶ jelikož libovolný polynom stupně  $n$  je možné vyjádřit jako lineární kombinaci Bernsteinových polynomů, je možné **libovolnou polynomiální parametrickou křivku vyjádřit jako Bézierovu křivku**
- ▶ vzhledem k symetrii Bernsteinových polynomů je tvar Bézierovy křivky **nezávislý na orientaci řídicího polygonu**

# Vlastnosti Bézierových křivek

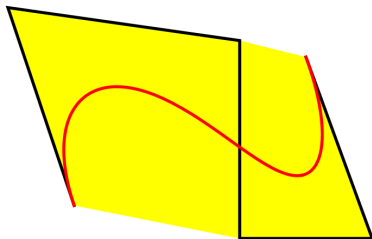
- ▶ počátečním bodem Bézierovy křivky je bod  $\mathbf{P}_0$  řídicího polygonu, koncovým bodem je bod  $\mathbf{P}_n$  řídicího polygonu
- ▶ Bézierova křivka se v počátečním bodě **dotýká první strany řídicího polygonu**, v koncovém bodě se **dotýká poslední strany řídicího polygonu**
- ▶ navíc platí:  $\mathbf{P}'(0) = n(\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_0)$  a  $\mathbf{P}'(1) = n(\mathbf{P}_n - \mathbf{P}_{n-1})$
- ▶ **napojení Bézierových křivek:**
  - ▶ mějme dvě Bézierovy křivky  $\mathbf{P}(t)$ , určenou řídicím polygonem  $\mathbf{P}_0, \dots, \mathbf{P}_n$ , a  $\mathbf{Q}(t)$ , určenou řídicím polygonem  $\mathbf{Q}_0, \dots, \mathbf{Q}_m$
  - ▶ jestliže  $\mathbf{P}_n = \mathbf{Q}_0$ , potom jsou Bézierovy křivky **napojeny ve třídě  $C_0$**
  - ▶ pokud leží body  $\mathbf{P}_{n-1}, \mathbf{P}_n = \mathbf{Q}_0, \mathbf{Q}_1$  na jedné přímce, potom jsou Bézierovy křivky **napojeny ve třídě  $G_1$**
  - ▶ pokud navíc platí, že  $n(\mathbf{P}_n - \mathbf{P}_{n-1}) = m(\mathbf{Q}_1 - \mathbf{Q}_0)$ , potom jsou Bézierovy křivky **napojeny ve třídě  $C_1$**
- ▶ jelikož libovolný polynom stupně  $n$  je možné vyjádřit jako lineární kombinaci Bernsteinových polynomů, je možné **libovolnou polynomiální parametrickou křivku vyjádřit jako Bézierovu křivku**
- ▶ vzhledem k symetrii Bernsteinových polynomů je tvar Bézierovy křivky **nezávislý na orientaci řídicího polygonu**

# Vlastnosti Bézierových křivek

- ▶ počátečním bodem Bézierovy křivky je bod  $\mathbf{P}_0$  řídicího polygonu, koncovým bodem je bod  $\mathbf{P}_n$  řídicího polygonu
- ▶ Bézierova křivka se v počátečním bodě **dotýká první strany řídicího polygonu**, v koncovém bodě se **dotýká poslední strany řídicího polygonu**
- ▶ navíc platí:  $\mathbf{P}'(0) = n(\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_0)$  a  $\mathbf{P}'(1) = n(\mathbf{P}_n - \mathbf{P}_{n-1})$
- ▶ **napojení Bézierových křivek:**
  - ▶ mějme dvě Bézierovy křivky  $\mathbf{P}(t)$ , určenou řídicím polygonem  $\mathbf{P}_0, \dots, \mathbf{P}_n$ , a  $\mathbf{Q}(t)$ , určenou řídicím polygonem  $\mathbf{Q}_0, \dots, \mathbf{Q}_m$
  - ▶ jestliže  $\mathbf{P}_n = \mathbf{Q}_0$ , potom jsou Bézierovy křivky **napojeny ve třídě  $C_0$**
  - ▶ pokud leží body  $\mathbf{P}_{n-1}, \mathbf{P}_n = \mathbf{Q}_0, \mathbf{Q}_1$  na jedné přímce, potom jsou Bézierovy křivky **napojeny ve třídě  $G_1$**
  - ▶ pokud navíc platí, že  $n(\mathbf{P}_n - \mathbf{P}_{n-1}) = m(\mathbf{Q}_1 - \mathbf{Q}_0)$ , potom jsou Bézierovy křivky **napojeny ve třídě  $C_1$**
- ▶ jelikož libovolný polynom stupně  $n$  je možné vyjádřit jako lineární kombinaci Bernsteinových polynomů, je možné **libovolnou polynomiální parametrickou křivku vyjádřit jako Bézierovu křivku**
- ▶ vzhledem k symetrii Bernsteinových polynomů je tvar Bézierovy křivky **nezávislý na orientaci řídicího polygonu**

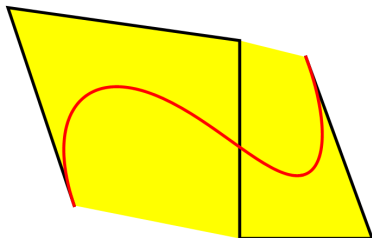
# Vlastnosti Bézierových křivek

- ▶ Bézierova křivka je vždy obsažena v **konvexním obalu svého řídicího polygonu**
- ▶ speciálním případem je tzv. **linear precision** – pokud jsou řídicí body na přímce a tvoří tak úsečku, pak je Bézierovou křivkou také tato úsečka
- ▶ **afinní invariantnost** – je jedno, jestli afinně transformujeme Bézierovu křivku nebo její řídicí polygon a vypočteme Bézierovu křivku pro tento transformovaný řídicí polygon, v obou případech dostaneme to samé
- ▶ **variation diminishing property** – počet průsečíků libovolné přímky/roviny s Bézierovou křivkou je nejvýše roven počtu průsečíků této přímky/roviny s řídicím polygonem



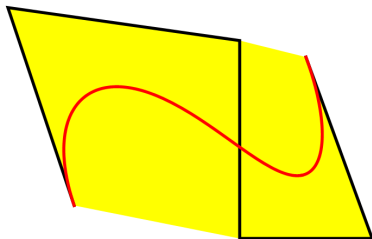
# Vlastnosti Bézierových křivek

- ▶ Bézierova křivka je vždy obsažena v **konvexním obalu svého řídicího polygonu**
- ▶ speciálním případem je tzv. **linear precision** – pokud jsou řídicí body na přímce a tvoří tak úsečku, pak je Bézierovou křivkou také tato úsečka
- ▶ **afinní invariantnost** – je jedno, jestli afinně transformujeme Bézierovu křivku nebo její řídicí polygon a vypočteme Bézierovu křivku pro tento transformovaný řídicí polygon, v obou případech dostaneme to samé
- ▶ **variation diminishing property** – počet průsečíků libovolné přímky/roviny s Bézierovou křivkou je nejvýše roven počtu průsečíků této přímky/roviny s řídicím polygonem



# Vlastnosti Bézierových křivek

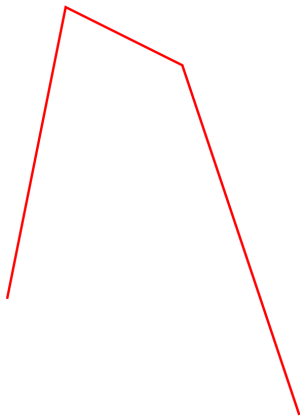
- ▶ Bézierova křivka je vždy obsažena v **konvexním obalu svého řídicího polygonu**
- ▶ speciálním případem je tzv. **linear precision** – pokud jsou řídicí body na přímce a tvoří tak úsečku, pak je Bézierovou křivkou také tato úsečka
- ▶ **afinní invariantnost** – je jedno, jestli afinně transformujeme Bézierovu křivku nebo její řídicí polygon a vypočteme Bézierovu křivku pro tento transformovaný řídicí polygon, v obou případech dostaneme to samé
- ▶ **variation diminishing property** – počet průsečíků libovolné přímky/roviny s Bézierovou křivkou je nejvýše roven počtu průsečíků této přímky/roviny s řídicím polygonem





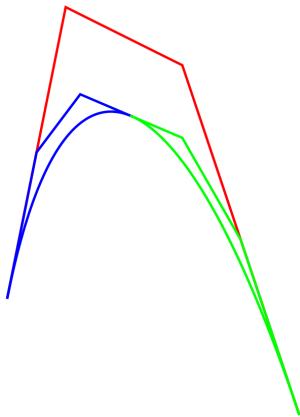
# Vlastnosti Bézierových křivek

- ▶ algoritmus de Casteljau je možné také využít k **rozdělení na dvě a více částí**
- ▶ pokud proces rozdělení dostatečně dlouho opakujeme, dostaneme dobrou aproximaci odpovídající Bézierovy křivky po částech lineární křivkou (polygonem) – tento proces se nazývá **ořezávání rohů**



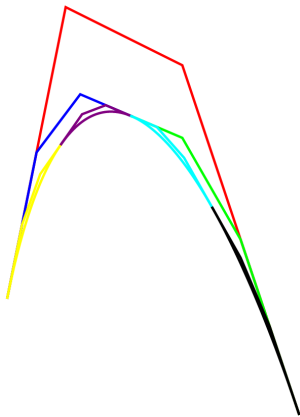
# Vlastnosti Bézierových křivek

- ▶ algoritmus de Casteljau je možné také využít k **rozdělení na dvě a více částí**
- ▶ pokud proces rozdělení dostatečně dlouho opakujeme, dostaneme dobrou aproximaci odpovídající Bézierovy křivky po částech lineární křivkou (polygonem) – tento proces se nazývá **ořezávání rohů**



# Vlastnosti Bézierových křivek

- ▶ algoritmus de Casteljau je možné také využít k **rozdělení na dvě a více částí**
- ▶ pokud proces rozdělení dostatečně dlouho opakujeme, dostaneme dobrou aproximaci odpovídající Bézierovy křivky po částech lineární křivkou (polygonem) – tento proces se nazývá **ořezávání rohů**



# Vlastnosti Bézierových křivek

- ▶ kvadratické a kubické Bézierovy křivky se používají pro popis **TrueType** a **PostScript fontů**
- ▶ jelikož pro řídicí polygon o  $n + 1$  bodech, je Bézierova křivka stupně  $n$ , jsou tyto křivky s rostoucím stupněm **nepříliš praktické** – křivka je s rostoucím stupněm stále více vzdálená od řídicího polygonu
- ▶ pokud přidáme nový řídicí bod nebo změníme polohu některé řídicího bodu, **změní se tvar celé křivky**, což je z designérské hlediska **nepříliš praktické**



# Coonsův B-spline

# Coonsova kubika

- ▶ **Coonsova kubika** je určena čtyřmi body  $\mathbf{V}_0, \mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2, \mathbf{V}_3$ , které tvoří charakteristický polygon, a je dána vztahem

$$\mathbf{P}(t) = \frac{1}{6} \sum_{i=0}^3 \mathbf{V}_i C_i(t), \quad t \in \langle 0, 1 \rangle,$$

kde

$$\begin{aligned} C_0(t) &= -t^3 + 3t^2 - 3t + 1, \\ C_1(t) &= 3t^3 - 6t^2 + 4, \\ C_2(t) &= -3t^3 + 3t^2 + 3t + 1, \\ C_3(t) &= t^3. \end{aligned}$$

- ▶ jelikož  $C_0(0) = 1, C_1(0) = 4, C_2(0) = 1, C_3(0) = 0$ , platí

$$\mathbf{P}(0) = \frac{1}{6}(\mathbf{V}_0 + 4\mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2)$$

- ▶ počáteční bod  $\mathbf{P}(0)$  je „antitěžištěm“ trojúhelníka  $\mathbf{V}_0\mathbf{V}_1\mathbf{V}_2$  pro vrchol  $\mathbf{V}_1$ , tj. leží na těžnici trojúhelníka procházející vrcholem  $\mathbf{V}_1$  a vzdálenost bodů  $\mathbf{V}_1\mathbf{P}(0)$  se rovná jedné třetině délky těžnice
- ▶ koncový bod  $\mathbf{P}(1)$  je „antitěžištěm“ trojúhelníka  $\mathbf{V}_1\mathbf{V}_2\mathbf{V}_3$  pro vrchol  $\mathbf{V}_2$

# Coonsova kubika

- ▶ **Coonsova kubika** je určena čtyřmi body  $\mathbf{V}_0, \mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2, \mathbf{V}_3$ , které tvoří charakteristický polygon, a je dána vztahem

$$\mathbf{P}(t) = \frac{1}{6} \sum_{i=0}^3 \mathbf{V}_i C_i(t), \quad t \in \langle 0, 1 \rangle,$$

kde

$$\begin{aligned} C_0(t) &= -t^3 + 3t^2 - 3t + 1, \\ C_1(t) &= 3t^3 - 6t^2 + 4, \\ C_2(t) &= -3t^3 + 3t^2 + 3t + 1, \\ C_3(t) &= t^3. \end{aligned}$$

- ▶ jelikož  $C_0(0) = 1, C_1(0) = 4, C_2(0) = 1, C_3(0) = 0$ , platí

$$\mathbf{P}(0) = \frac{1}{6} (\mathbf{V}_0 + 4\mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2)$$

- ▶ počáteční bod  $\mathbf{P}(0)$  je „antitěžištěm“ trojúhelníka  $\mathbf{V}_0\mathbf{V}_1\mathbf{V}_2$  pro vrchol  $\mathbf{V}_1$ , tj. leží na těžnici trojúhelníka procházející vrcholem  $\mathbf{V}_1$  a vzdálenost bodů  $\mathbf{V}_1\mathbf{P}(0)$  se rovná jedné třetině délky těžnice
- ▶ koncový bod  $\mathbf{P}(1)$  je „antitěžištěm“ trojúhelníka  $\mathbf{V}_1\mathbf{V}_2\mathbf{V}_3$  pro vrchol  $\mathbf{V}_2$

# Coonsova kubika

- ▶ **Coonsova kubika** je určena čtyřmi body  $\mathbf{V}_0, \mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2, \mathbf{V}_3$ , které tvoří charakteristický polygon, a je dána vztahem

$$\mathbf{P}(t) = \frac{1}{6} \sum_{i=0}^3 \mathbf{V}_i C_i(t), \quad t \in \langle 0, 1 \rangle,$$

kde

$$\begin{aligned} C_0(t) &= -t^3 + 3t^2 - 3t + 1, \\ C_1(t) &= 3t^3 - 6t^2 + 4, \\ C_2(t) &= -3t^3 + 3t^2 + 3t + 1, \\ C_3(t) &= t^3. \end{aligned}$$

- ▶ jelikož  $C_0(0) = 1, C_1(0) = 4, C_2(0) = 1, C_3(0) = 0$ , platí

$$\mathbf{P}(0) = \frac{1}{6} (\mathbf{V}_0 + 4\mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2)$$

- ▶ počáteční bod  $\mathbf{P}(0)$  je „antitěžištěm“ trojúhelníka  $\mathbf{V}_0 \mathbf{V}_1 \mathbf{V}_2$  pro vrchol  $\mathbf{V}_1$ , tj. leží na těžnici trojúhelníka procházející vrcholem  $\mathbf{V}_1$  a vzdálenost bodů  $\mathbf{V}_1 \mathbf{P}(0)$  se rovná jedné třetině délky těžnice
- ▶ koncový bod  $\mathbf{P}(1)$  je „antitěžištěm“ trojúhelníka  $\mathbf{V}_1 \mathbf{V}_2 \mathbf{V}_3$  pro vrchol  $\mathbf{V}_2$



# Coonsova kubika

- ▶ **Coonsova kubika** je určena čtyřmi body  $\mathbf{V}_0, \mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2, \mathbf{V}_3$ , které tvoří charakteristický polygon, a je dána vztahem

$$\mathbf{P}(t) = \frac{1}{6} \sum_{i=0}^3 \mathbf{V}_i C_i(t), \quad t \in \langle 0, 1 \rangle,$$

kde

$$\begin{aligned} C_0(t) &= -t^3 + 3t^2 - 3t + 1, \\ C_1(t) &= 3t^3 - 6t^2 + 4, \\ C_2(t) &= -3t^3 + 3t^2 + 3t + 1, \\ C_3(t) &= t^3. \end{aligned}$$

- ▶ jelikož  $C_0(0) = 1, C_1(0) = 4, C_2(0) = 1, C_3(0) = 0$ , platí

$$\mathbf{P}(0) = \frac{1}{6} (\mathbf{V}_0 + 4\mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2)$$

- ▶ počáteční bod  $\mathbf{P}(0)$  je „antitěžištěm“ trojúhelníka  $\mathbf{V}_0 \mathbf{V}_1 \mathbf{V}_2$  pro vrchol  $\mathbf{V}_1$ , tj. leží na těžnici trojúhelníka procházející vrcholem  $\mathbf{V}_1$  a vzdálenost bodů  $\mathbf{V}_1 \mathbf{P}(0)$  se rovná jedné třetině délky těžnice
- ▶ koncový bod  $\mathbf{P}(1)$  je „antitěžištěm“ trojúhelníka  $\mathbf{V}_1 \mathbf{V}_2 \mathbf{V}_3$  pro vrchol  $\mathbf{V}_2$

# Vlastnosti Coonsovy kubiky

- ▶ **tečné vektory  $\mathbf{P}'(0)$  a  $\mathbf{P}'(1)$**  – protože

$$\begin{aligned} C_0'(t) &= -3(1-t)^2, & C_1'(t) &= 9t^2 - 12t, \\ C_2'(t) &= -9t^2 + 6t + 3, & C_3'(t) &= 3t^2, \end{aligned}$$

platí

$$\begin{aligned} \mathbf{P}'(0) &= \frac{1}{6}(-3\mathbf{V}_0 + 3\mathbf{V}_2) = \frac{1}{2}(\mathbf{V}_2 - \mathbf{V}_0), \\ \mathbf{P}'(1) &= \frac{1}{6}(-3\mathbf{V}_1 + 3\mathbf{V}_3) = \frac{1}{2}(\mathbf{V}_3 - \mathbf{V}_1), \end{aligned}$$

tj. **tečna v bodě  $\mathbf{P}(0)$  je rovnoběžná s přímkou  $\mathbf{V}_0\mathbf{V}_2$**  a **tečna v bodě  $\mathbf{P}(1)$  je rovnoběžná s přímkou  $\mathbf{V}_1\mathbf{V}_3$**

- ▶ **Coonsova kubika je Fergusonovou kubikou** pro body  $\frac{1}{6}(\mathbf{V}_0 + 4\mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2)$  a  $\frac{1}{6}(\mathbf{V}_1 + 4\mathbf{V}_2 + \mathbf{V}_3)$  a tečné vektory  $\frac{1}{2}(\mathbf{V}_2 - \mathbf{V}_0)$  a  $\frac{1}{2}(\mathbf{V}_3 - \mathbf{V}_1)$
- ▶ body Coonsovy kubiky leží v **konvexním oblou bodů  $\mathbf{V}_0, \mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2, \mathbf{V}_3$**  – důkaz vyplývá z toho, že platí

$$\frac{1}{6} \sum_{i=0}^3 C_i(t) = 1 \text{ pro každé } t$$

# Vlastnosti Coonsovy kubiky

- ▶ **tečné vektory  $\mathbf{P}'(0)$  a  $\mathbf{P}'(1)$**  – protože

$$\begin{aligned} C_0'(t) &= -3(1-t)^2, & C_1'(t) &= 9t^2 - 12t, \\ C_2'(t) &= -9t^2 + 6t + 3, & C_3'(t) &= 3t^2, \end{aligned}$$

platí

$$\begin{aligned} \mathbf{P}'(0) &= \frac{1}{6}(-3\mathbf{V}_0 + 3\mathbf{V}_2) = \frac{1}{2}(\mathbf{V}_2 - \mathbf{V}_0), \\ \mathbf{P}'(1) &= \frac{1}{6}(-3\mathbf{V}_1 + 3\mathbf{V}_3) = \frac{1}{2}(\mathbf{V}_3 - \mathbf{V}_1), \end{aligned}$$

tj. **tečna v bodě  $\mathbf{P}(0)$  je rovnoběžná s přímkou  $\mathbf{V}_0\mathbf{V}_2$**  a **tečna v bodě  $\mathbf{P}(1)$  je rovnoběžná s přímkou  $\mathbf{V}_1\mathbf{V}_3$**

- ▶ **Coonsova kubika je Fergusonovou kubikou** pro body  $\frac{1}{6}(\mathbf{V}_0 + 4\mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2)$  a  $\frac{1}{6}(\mathbf{V}_1 + 4\mathbf{V}_2 + \mathbf{V}_3)$  a **tečné vektory  $\frac{1}{2}(\mathbf{V}_2 - \mathbf{V}_0)$  a  $\frac{1}{2}(\mathbf{V}_3 - \mathbf{V}_1)$**
- ▶ body Coonsovy kubiky leží v **konvexním oblou bodů  $\mathbf{V}_0, \mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2, \mathbf{V}_3$**  – důkaz vyplývá z toho, že platí

$$\frac{1}{6} \sum_{i=0}^3 C_i(t) = 1 \text{ pro každé } t$$

# Vlastnosti Coonsovy kubiky

- ▶ **tečné vektory  $\mathbf{P}'(0)$  a  $\mathbf{P}'(1)$**  – protože

$$\begin{aligned} C'_0(t) &= -3(1-t)^2, & C'_1(t) &= 9t^2 - 12t, \\ C'_2(t) &= -9t^2 + 6t + 3, & C'_3(t) &= 3t^2, \end{aligned}$$

platí

$$\begin{aligned} \mathbf{P}'(0) &= \frac{1}{6}(-3\mathbf{V}_0 + 3\mathbf{V}_2) = \frac{1}{2}(\mathbf{V}_2 - \mathbf{V}_0), \\ \mathbf{P}'(1) &= \frac{1}{6}(-3\mathbf{V}_1 + 3\mathbf{V}_3) = \frac{1}{2}(\mathbf{V}_3 - \mathbf{V}_1), \end{aligned}$$

tj. **tečna v bodě  $\mathbf{P}(0)$  je rovnoběžná s přímkou  $\mathbf{V}_0\mathbf{V}_2$**  a **tečna v bodě  $\mathbf{P}(1)$  je rovnoběžná s přímkou  $\mathbf{V}_1\mathbf{V}_3$**

- ▶ **Coonsova kubika je Fergusonovou kubikou** pro body  $\frac{1}{6}(\mathbf{V}_0 + 4\mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2)$  a  $\frac{1}{6}(\mathbf{V}_1 + 4\mathbf{V}_2 + \mathbf{V}_3)$  a tečné vektory  $\frac{1}{2}(\mathbf{V}_2 - \mathbf{V}_0)$  a  $\frac{1}{2}(\mathbf{V}_3 - \mathbf{V}_1)$
- ▶ body Coonsovy kubiky leží v **konvexním oblou bodů  $\mathbf{V}_0, \mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2, \mathbf{V}_3$**  – důkaz vyplývá z toho, že platí

$$\frac{1}{6} \sum_{i=0}^3 C_i(t) = 1 \text{ pro každé } t$$

# Napojování Coonsových kubik

- ▶ mějme dvě Coonsovy kubiky

$$\mathbf{P}(t) = \frac{1}{6} \sum_{i=0}^3 \mathbf{V}_i C_i(t), \quad \mathbf{R}(s) = \frac{1}{6} \sum_{i=0}^3 \mathbf{W}_i C_i(s), \quad t, s \in \langle 0, 1 \rangle$$

- ▶ chceme odvodit podmínky na charakteristické polygony **pro zajištění spojitého napojení do druhé derivace**, tj.  $\mathbf{P}^{(i)}(1) = \mathbf{R}^{(i)}(0)$ ,  $i = 0, 1, 2$
- ▶ **spojitost**: pro  $i = 0$  se jedná o podmínku  $\mathbf{P}(1) = \mathbf{R}(0)$ , tj.

$$\mathbf{V}_1 + 4\mathbf{V}_2 + \mathbf{V}_3 = \mathbf{W}_0 + 4\mathbf{W}_1 + \mathbf{W}_2$$

- ▶ **spojitost 1. derivace**: z podmínky  $\mathbf{P}'(1) = \mathbf{R}'(0)$  vyplývá

$$\mathbf{V}_3 - \mathbf{V}_1 = \mathbf{W}_2 - \mathbf{W}_0$$

- ▶ **spojitost 2. derivace**: z podmínky  $\mathbf{P}''(1) = \mathbf{R}''(0)$  vyplývá

$$\mathbf{V}_1 - 2\mathbf{V}_2 + \mathbf{V}_3 = \mathbf{W}_0 - 2\mathbf{W}_1 + \mathbf{W}_2$$

- ▶ řešením těchto rovnic okamžitě dostáváme, že musí platit

$$\mathbf{W}_0 = \mathbf{V}_1, \quad \mathbf{W}_1 = \mathbf{V}_2, \quad \mathbf{W}_2 = \mathbf{V}_3$$

# Napojování Coonsových kubik

- ▶ mějme dvě Coonsovy kubiky

$$\mathbf{P}(t) = \frac{1}{6} \sum_{i=0}^3 \mathbf{V}_i C_i(t), \quad \mathbf{R}(s) = \frac{1}{6} \sum_{i=0}^3 \mathbf{W}_i C_i(s), \quad t, s \in \langle 0, 1 \rangle$$

- ▶ chceme odvodit podmínky na charakteristické polygony pro zajištění spojitého napojení do druhé derivace, tj.  $\mathbf{P}^{(i)}(1) = \mathbf{R}^{(i)}(0)$ ,  $i = 0, 1, 2$
- ▶ spojitost: pro  $i = 0$  se jedná o podmínku  $\mathbf{P}(1) = \mathbf{R}(0)$ , tj.

$$\mathbf{V}_1 + 4\mathbf{V}_2 + \mathbf{V}_3 = \mathbf{W}_0 + 4\mathbf{W}_1 + \mathbf{W}_2$$

- ▶ spojitost 1. derivace: z podmínky  $\mathbf{P}'(1) = \mathbf{R}'(0)$  vyplývá

$$\mathbf{V}_3 - \mathbf{V}_1 = \mathbf{W}_2 - \mathbf{W}_0$$

- ▶ spojitost 2. derivace: z podmínky  $\mathbf{P}''(1) = \mathbf{R}''(0)$  vyplývá

$$\mathbf{V}_1 - 2\mathbf{V}_2 + \mathbf{V}_3 = \mathbf{W}_0 - 2\mathbf{W}_1 + \mathbf{W}_2$$

- ▶ řešením těchto rovnic okamžitě dostáváme, že musí platit

$$\mathbf{W}_0 = \mathbf{V}_1, \quad \mathbf{W}_1 = \mathbf{V}_2, \quad \mathbf{W}_2 = \mathbf{V}_3$$

# Napojování Coonsových kubik

- ▶ mějme dvě Coonsovy kubiky

$$\mathbf{P}(t) = \frac{1}{6} \sum_{i=0}^3 \mathbf{V}_i C_i(t), \quad \mathbf{R}(s) = \frac{1}{6} \sum_{i=0}^3 \mathbf{W}_i C_i(s), \quad t, s \in \langle 0, 1 \rangle$$

- ▶ chceme odvodit podmínky na charakteristické polygony pro zajištění spojitého napojení do druhé derivace, tj.  $\mathbf{P}^{(i)}(1) = \mathbf{R}^{(i)}(0)$ ,  $i = 0, 1, 2$
- ▶ spojitost: pro  $i = 0$  se jedná o podmínku  $\mathbf{P}(1) = \mathbf{R}(0)$ , tj.

$$\mathbf{V}_1 + 4\mathbf{V}_2 + \mathbf{V}_3 = \mathbf{W}_0 + 4\mathbf{W}_1 + \mathbf{W}_2$$

- ▶ spojitost 1. derivace: z podmínky  $\mathbf{P}'(1) = \mathbf{R}'(0)$  vyplývá

$$\mathbf{V}_3 - \mathbf{V}_1 = \mathbf{W}_2 - \mathbf{W}_0$$

- ▶ spojitost 2. derivace: z podmínky  $\mathbf{P}''(1) = \mathbf{R}''(0)$  vyplývá

$$\mathbf{V}_1 - 2\mathbf{V}_2 + \mathbf{V}_3 = \mathbf{W}_0 - 2\mathbf{W}_1 + \mathbf{W}_2$$

- ▶ řešením těchto rovnic okamžitě dostáváme, že musí platit

$$\mathbf{W}_0 = \mathbf{V}_1, \quad \mathbf{W}_1 = \mathbf{V}_2, \quad \mathbf{W}_2 = \mathbf{V}_3$$

# Napojování Coonsových kubik

- ▶ mějme dvě Coonsovy kubiky

$$\mathbf{P}(t) = \frac{1}{6} \sum_{i=0}^3 \mathbf{V}_i C_i(t), \quad \mathbf{R}(s) = \frac{1}{6} \sum_{i=0}^3 \mathbf{W}_i C_i(s), \quad t, s \in \langle 0, 1 \rangle$$

- ▶ chceme odvodit podmínky na charakteristické polygony **pro zajištění spojitého napojení do druhé derivace**, tj.  $\mathbf{P}^{(i)}(1) = \mathbf{R}^{(i)}(0)$ ,  $i = 0, 1, 2$
- ▶ **spojitost**: pro  $i = 0$  se jedná o podmínku  $\mathbf{P}(1) = \mathbf{R}(0)$ , tj.

$$\mathbf{V}_1 + 4\mathbf{V}_2 + \mathbf{V}_3 = \mathbf{W}_0 + 4\mathbf{W}_1 + \mathbf{W}_2$$

- ▶ **spojitost 1. derivace**: z podmínky  $\mathbf{P}'(1) = \mathbf{R}'(0)$  vyplývá

$$\mathbf{V}_3 - \mathbf{V}_1 = \mathbf{W}_2 - \mathbf{W}_0$$

- ▶ **spojitost 2. derivace**: z podmínky  $\mathbf{P}''(1) = \mathbf{R}''(0)$  vyplývá

$$\mathbf{V}_1 - 2\mathbf{V}_2 + \mathbf{V}_3 = \mathbf{W}_0 - 2\mathbf{W}_1 + \mathbf{W}_2$$

- ▶ řešením těchto rovnic okamžitě dostáváme, že musí platit

$$\mathbf{W}_0 = \mathbf{V}_1, \quad \mathbf{W}_1 = \mathbf{V}_2, \quad \mathbf{W}_2 = \mathbf{V}_3$$



# Napojování Coonsových kubik

- ▶ mějme dvě Coonsovy kubiky

$$\mathbf{P}(t) = \frac{1}{6} \sum_{i=0}^3 \mathbf{V}_i C_i(t), \quad \mathbf{R}(s) = \frac{1}{6} \sum_{i=0}^3 \mathbf{W}_i C_i(s), \quad t, s \in \langle 0, 1 \rangle$$

- ▶ chceme odvodit podmínky na charakteristické polygony pro zajištění spojitého napojení do druhé derivace, tj.  $\mathbf{P}^{(i)}(1) = \mathbf{R}^{(i)}(0)$ ,  $i = 0, 1, 2$
- ▶ **spojitost**: pro  $i = 0$  se jedná o podmínku  $\mathbf{P}(1) = \mathbf{R}(0)$ , tj.

$$\mathbf{V}_1 + 4\mathbf{V}_2 + \mathbf{V}_3 = \mathbf{W}_0 + 4\mathbf{W}_1 + \mathbf{W}_2$$

- ▶ **spojitost 1. derivace**: z podmínky  $\mathbf{P}'(1) = \mathbf{R}'(0)$  vyplývá

$$\mathbf{V}_3 - \mathbf{V}_1 = \mathbf{W}_2 - \mathbf{W}_0$$

- ▶ **spojitost 2. derivace**: z podmínky  $\mathbf{P}''(1) = \mathbf{R}''(0)$  vyplývá

$$\mathbf{V}_1 - 2\mathbf{V}_2 + \mathbf{V}_3 = \mathbf{W}_0 - 2\mathbf{W}_1 + \mathbf{W}_2$$

- ▶ řešením těchto rovnic okamžitě dostáváme, že musí platit

$$\mathbf{W}_0 = \mathbf{V}_1, \quad \mathbf{W}_1 = \mathbf{V}_2, \quad \mathbf{W}_2 = \mathbf{V}_3$$

# Napojování Coonsových kubik

- ▶ je tedy možné uvažovat charakteristický polygon  $\mathbf{V}_0, \dots, \mathbf{V}_n, n \geq 3$  a vytvořit křivku  $C$  z  $n - 2$  Coonsových kubik  $C_0, \dots, C_{n-3}$ , kde kubika  $C_i$  je určena charakteristickým polygonem  $\mathbf{V}_i, \mathbf{V}_{i+1}, \mathbf{V}_{i+2}, \mathbf{V}_{i+3}$
- ▶ posloupnost Coonsových kubik vytvořená otevřeným charakteristickým polygonem  $\mathbf{V}_0, \dots, \mathbf{V}_n, n \geq 3$  vytváří **uniformní kubický spline** s předepsaným vektorem první derivace v počátečním a koncovém bodě složené křivky
- ▶ **uzavřená křivka  $C$**  pro charakteristický polygon  $\mathbf{V}_0, \dots, \mathbf{V}_n, n \geq 2$  je tvořena  $n + 1$  Coonsovými kubikami  $C_0, \dots, C_n$ , kde kubika  $C_i$  je opět určena charakteristickým polygonem  $\mathbf{V}_i, \mathbf{V}_{i+1}, \mathbf{V}_{i+2}, \mathbf{V}_{i+3}$ , ale indexy vrcholů je nutné brát cyklicky (pro  $j > n$  je  $\mathbf{V}_j = \mathbf{V}_{j-n-1}$ )
- ▶ uzavřenou lomenou čarou je určen Coonsův B-spline, který je zároveň uniformním kubickým splinem určeným antitěžišti trojúhelníků daného polygonu

# Napojování Coonsových kubik

- ▶ je tedy možné uvažovat charakteristický polygon  $\mathbf{V}_0, \dots, \mathbf{V}_n, n \geq 3$  a vytvořit křivku  $C$  z  $n - 2$  Coonsových kubik  $C_0, \dots, C_{n-3}$ , kde kubika  $C_i$  je určena charakteristickým polygonem  $\mathbf{V}_i, \mathbf{V}_{i+1}, \mathbf{V}_{i+2}, \mathbf{V}_{i+3}$
- ▶ posloupnost Coonsových kubik vytvořená otevřeným charakteristickým polygonem  $\mathbf{V}_0, \dots, \mathbf{V}_n, n \geq 3$  vytváří **uniformní kubický spline** s předepsaným vektorem první derivace v počátečním a koncovém bodě složené křivky
- ▶ **uzavřená křivka  $C$**  pro charakteristický polygon  $\mathbf{V}_0, \dots, \mathbf{V}_n, n \geq 2$  je tvořena  $n + 1$  Coonsovými kubikami  $C_0, \dots, C_n$ , kde kubika  $C_i$  je opět určena charakteristickým polygonem  $\mathbf{V}_i, \mathbf{V}_{i+1}, \mathbf{V}_{i+2}, \mathbf{V}_{i+3}$ , ale indexy vrcholů je nutné brát cyklicky (pro  $j > n$  je  $\mathbf{V}_j = \mathbf{V}_{j-n-1}$ )
- ▶ uzavřenou lomenou čarou je určen Coonsův B-spline, který je zároveň uniformním kubickým splinem určeným antitěžišti trojúhelníků daného polygonu

# Napojování Coonsových kubik

- ▶ je tedy možné uvažovat charakteristický polygon  $\mathbf{V}_0, \dots, \mathbf{V}_n, n \geq 3$  a vytvořit křivku  $C$  z  $n - 2$  Coonsových kubik  $C_0, \dots, C_{n-3}$ , kde kubika  $C_i$  je určena charakteristickým polygonem  $\mathbf{V}_i, \mathbf{V}_{i+1}, \mathbf{V}_{i+2}, \mathbf{V}_{i+3}$
- ▶ posloupnost Coonsových kubik vytvořená otevřeným charakteristickým polygonem  $\mathbf{V}_0, \dots, \mathbf{V}_n, n \geq 3$  vytváří **uniformní kubický spline** s předepsaným vektorem první derivace v počátečním a koncovém bodě složené křivky
- ▶ **uzavřená křivka  $C$**  pro charakteristický polygon  $\mathbf{V}_0, \dots, \mathbf{V}_n, n \geq 2$  je tvořena  $n + 1$  Coonsovými kubikami  $C_0, \dots, C_n$ , kde kubika  $C_i$  je opět určena charakteristickým polygonem  $\mathbf{V}_i, \mathbf{V}_{i+1}, \mathbf{V}_{i+2}, \mathbf{V}_{i+3}$ , ale indexy vrcholů je nutné brát cyklicky (pro  $j > n$  je  $\mathbf{V}_j = \mathbf{V}_{j-n-1}$ )
- ▶ uzavřenou lomenou čarou je určen Coonsův B-spline, který je zároveň uniformním kubickým splinem určeným antitěžišti trojúhelníků daného polygonu

# Napojování Coonsových kubik

- ▶ je tedy možné uvažovat charakteristický polygon  $\mathbf{V}_0, \dots, \mathbf{V}_n, n \geq 3$  a vytvořit křivku  $C$  z  $n - 2$  Coonsových kubik  $C_0, \dots, C_{n-3}$ , kde kubika  $C_i$  je určena charakteristickým polygonem  $\mathbf{V}_i, \mathbf{V}_{i+1}, \mathbf{V}_{i+2}, \mathbf{V}_{i+3}$
- ▶ posloupnost Coonsových kubik vytvořená otevřeným charakteristickým polygonem  $\mathbf{V}_0, \dots, \mathbf{V}_n, n \geq 3$  vytváří **uniformní kubický spline** s předepsaným vektorem první derivace v počátečním a koncovém bodě složené křivky
- ▶ **uzavřená křivka  $C$**  pro charakteristický polygon  $\mathbf{V}_0, \dots, \mathbf{V}_n, n \geq 2$  je tvořena  $n + 1$  Coonsovými kubikami  $C_0, \dots, C_n$ , kde kubika  $C_i$  je opět určena charakteristickým polygonem  $\mathbf{V}_i, \mathbf{V}_{i+1}, \mathbf{V}_{i+2}, \mathbf{V}_{i+3}$ , ale indexy vrcholů je nutné brát cyklicky (pro  $j > n$  je  $\mathbf{V}_j = \mathbf{V}_{j-n-1}$ )
- ▶ uzavřenou lomenou čarou je určen Coonsův B-spline, který je zároveň uniformním kubickým splinem určeným antitěžišti trojúhelníků daného polygonu

# B-spline křivky

# B-spline křivky

- ▶ B-spline křivky jsou křivky volného tvaru, které se skládají ze **segmentů Bézierových křivek** stejného stupně, které jsou na sebe napojeny s co nejvyšší třídou spojitosti
- ▶ zajímavostí je, že u B-spline křivek probíhá toto spojitě napojení Bézierových křivek automaticky
- ▶ výhodou je, že v závislosti na volbě stupně B-spline křivky a délce řídicího polygonu mohou B-spline křivky mnohem lépe kopírovat řídicí polygon
- ▶ B-spline křivky jsou zobecněním Bézierových křivek
- ▶ odstraňují největší nevýhody Bézierových křivek:
  - ▶ změnou polohy řídicího bodu je možné křivku měnit pouze lokálně a
  - ▶ s rostoucím počtem bodů řídicího polygonu neroste nutně stupeň křivky a tedy se křivka nevzdaluje od svého řídicího polygonu

# B-spline křivky

- ▶ B-spline křivky jsou křivky volného tvaru, které se skládají ze **segmentů Bézierových křivek** stejného stupně, které jsou na sebe napojeny s co nejvyšší třídou spojitosti
- ▶ zajímavostí je, že u B-spline křivek probíhá toto spojitě napojení Bézierových křivek automaticky
- ▶ výhodou je, že v závislosti na volbě stupně B-spline křivky a délce řídicího polygonu mohou B-spline křivky mnohem lépe kopírovat řídicí polygon
- ▶ B-spline křivky jsou zobecněním Bézierových křivek
- ▶ odstraňují největší nevýhody Bézierových křivek:
  - ▶ změnou polohy řídicího bodu je možné křivku měnit pouze lokálně a
  - ▶ s rostoucím počtem bodů řídicího polygonu neroste nutně stupeň křivky a tedy se křivka nevzdaluje od svého řídicího polygonu



# B-spline křivky

- ▶ B-spline křivky jsou křivky volného tvaru, které se skládají ze **segmentů Bézierových křivek** stejného stupně, které jsou na sebe napojeny s co nejvyšší třídou spojitosti
- ▶ zajímavostí je, že u B-spline křivek probíhá toto spojitě napojení Bézierových křivek automaticky
- ▶ výhodou je, že v závislosti na volbě stupně B-spline křivky a délce řídicího polygonu mohou B-spline křivky mnohem lépe kopírovat řídicí polygon
- ▶ B-spline křivky jsou zobecněním Bézierových křivek
- ▶ odstraňují největší nevýhody Bézierových křivek:
  - ▶ změnou polohy řídicího bodu je možné křivku měnit pouze lokálně a
  - ▶ s rostoucím počtem bodů řídicího polygonu neroste nutně stupeň křivky a tedy se křivka nevzdaluje od svého řídicího polygonu

# B-spline křivky

- ▶ B-spline křivky jsou křivky volného tvaru, které se skládají ze **segmentů Bézierových křivek** stejného stupně, které jsou na sebe napojeny s co nejvyšší třídou spojitosti
- ▶ zajímavostí je, že u B-spline křivek probíhá toto spojitě napojení Bézierových křivek automaticky
- ▶ výhodou je, že v závislosti na volbě stupně B-spline křivky a délce řídicího polygonu mohou B-spline křivky mnohem lépe kopírovat řídicí polygon
- ▶ B-spline křivky jsou zobecněním Bézierových křivek
- ▶ odstraňují největší nevýhody Bézierových křivek:
  - ▶ **změnou polohy řídicího bodu je možné křivku měnit pouze lokálně a**
  - ▶ **s rostoucím počtem bodů řídicího polygonu neroste nutně stupeň křivky a tedy se křivka nevzdaluje od svého řídicího polygonu**

# B-spline křivky

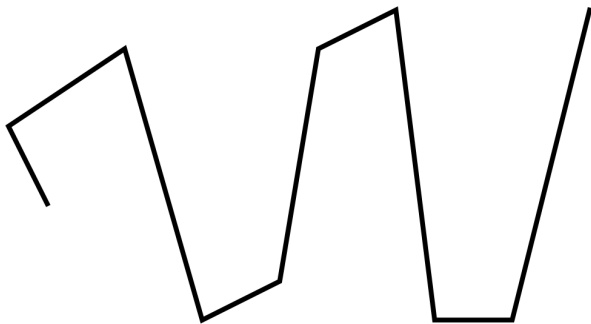
- ▶ **B-spline křivka** je určena
  - ▶  $n + 1$  **řídícími body** (určují celkový tvar křivky)
  - ▶ **stupněm  $p$**  (určuje stupeň jednotlivých oblouků B-spline křivky, stupeň polynomů v parametrizaci)
  
- ▶ **uzlovým vektor** (vektorem parametrizace), který určuje parametrizaci křivky, napojení jednotlivých oblouků B-spline křivky

# B-spline křivky

- ▶ **B-spline křivka** je určena
  - ▶  $n + 1$  **řídícími body** (určují celkový tvar křivky)
  - ▶ **stupněm**  $p$  (určuje stupeň jednotlivých oblouků B-spline křivky, stupeň polynomů v parametrizaci)
  
- ▶ **uzlovým vektor** (vektorem parametrizace), který určuje parametrizaci křivky, napojení jednotlivých oblouků B-spline křivky

# B-spline křivky

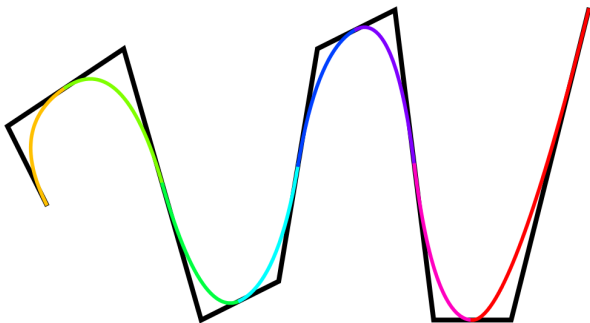
- ▶ **B-spline křivka** je určena
  - ▶  $n + 1$  **řídícími body** (určují celkový tvar křivky)
  - ▶ **stupněm**  $p$  (určuje stupeň jednotlivých oblouků B-spline křivky, stupeň polynomů v parametrizaci)



- ▶ **uzlovým vektor** (vektorem parametrizace), který určuje parametrizaci křivky, napojení jednotlivých oblouků B-spline křivky

# B-spline křivky

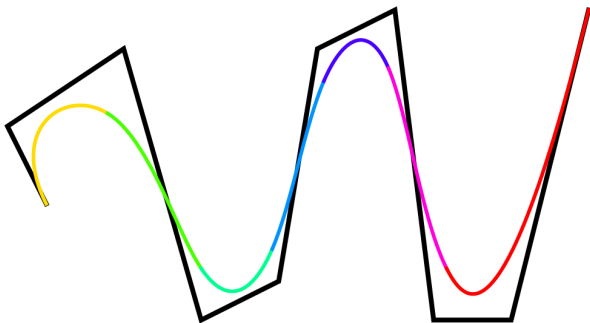
- ▶ **B-spline křivka** je určena
  - ▶  $n + 1$  **řídícími body** (určují celkový tvar křivky)
  - ▶ **stupněm  $p$**  (určuje stupeň jednotlivých oblouků B-spline křivky, stupeň polynomů v parametrizaci)



- ▶ **uzlovým vektor** (vektorem parametrizace), který určuje parametrizaci křivky, napojení jednotlivých oblouků B-spline křivky

# B-spline křivky

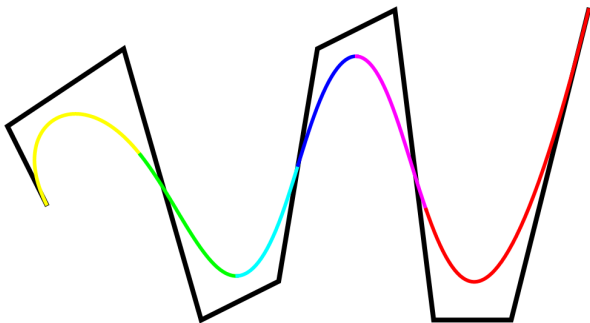
- ▶ **B-spline křivka** je určena
  - ▶  $n + 1$  **řídícími body** (určují celkový tvar křivky)
  - ▶ **stupněm  $p$**  (určuje stupeň jednotlivých oblouků B-spline křivky, stupeň polynomů v parametrizaci)



- ▶ **uzlovým vektor** (vektorem parametrizace), který určuje parametrizaci křivky, napojení jednotlivých oblouků B-spline křivky

# B-spline křivky

- ▶ **B-spline křivka** je určena
  - ▶  $n + 1$  **řídícími body** (určují celkový tvar křivky)
  - ▶ **stupněm  $p$**  (určuje stupeň jednotlivých oblouků B-spline křivky, stupeň polynomů v parametrizaci)

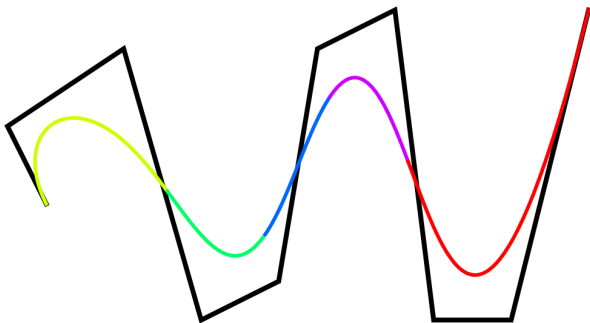


- ▶ **uzlovým vektor** (vektorem parametrizace), který určuje parametrizaci křivky, napojení jednotlivých oblouků B-spline křivky



# B-spline křivky

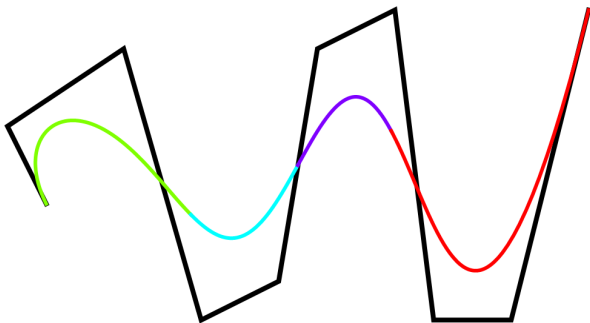
- ▶ **B-spline křivka** je určena
  - ▶  $n + 1$  řídicími body (určují celkový tvar křivky)
  - ▶ stupněm  $p$  (určuje stupeň jednotlivých oblouků B-spline křivky, stupeň polynomů v parametrizaci)



- ▶ **uzlovým vektor** (vektorem parametrizace), který určuje parametrizaci křivky, napojení jednotlivých oblouků B-spline křivky

# B-spline křivky

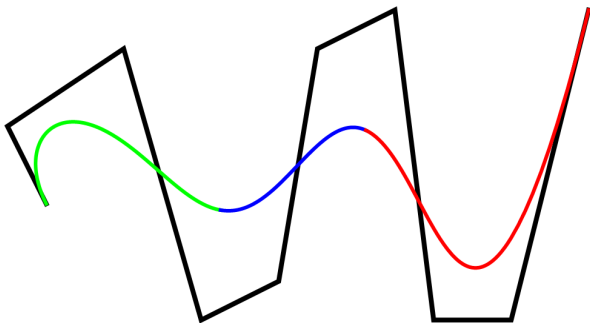
- ▶ **B-spline křivka** je určena
  - ▶  $n + 1$  **řídícími body** (určují celkový tvar křivky)
  - ▶ **stupněm  $p$**  (určuje stupeň jednotlivých oblouků B-spline křivky, stupeň polynomů v parametrizaci)



- ▶ **uzlovým vektor** (vektorem parametrizace), který určuje parametrizaci křivky, napojení jednotlivých oblouků B-spline křivky

# B-spline křivky

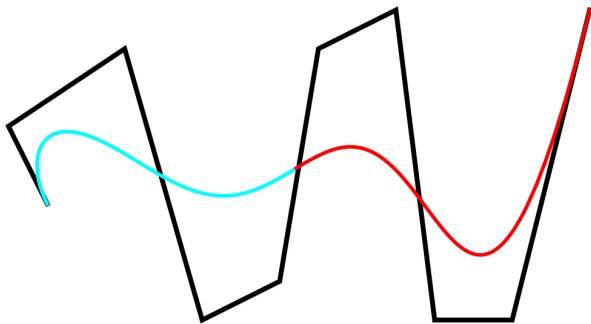
- ▶ **B-spline křivka** je určena
  - ▶  $n + 1$  **řídícími body** (určují celkový tvar křivky)
  - ▶ **stupněm**  $p$  (určuje stupeň jednotlivých oblouků B-spline křivky, stupeň polynomů v parametrizaci)



- ▶ **uzlovým vektor** (vektorem parametrizace), který určuje parametrizaci křivky, napojení jednotlivých oblouků B-spline křivky

# B-spline křivky

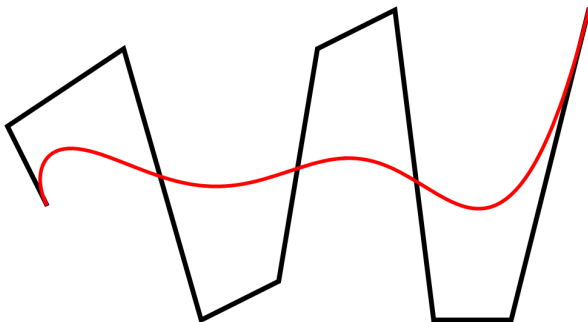
- ▶ **B-spline křivka** je určena
  - ▶  $n + 1$  **řídícími body** (určují celkový tvar křivky)
  - ▶ **stupněm  $p$**  (určuje stupeň jednotlivých oblouků B-spline křivky, stupeň polynomů v parametrizaci)



- ▶ **uzlovým vektor** (vektorem parametrizace), který určuje parametrizaci křivky, napojení jednotlivých oblouků B-spline křivky

# B-spline křivky

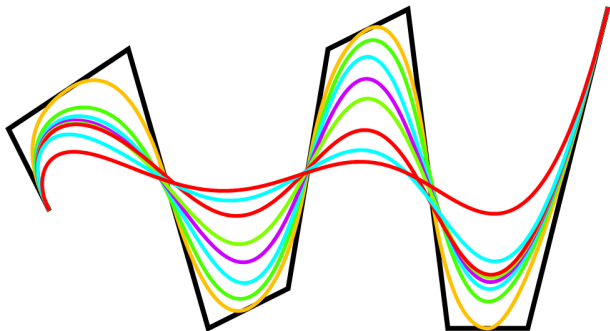
- ▶ **B-spline křivka** je určena
  - ▶  $n + 1$  **řídícími body** (určují celkový tvar křivky)
  - ▶ **stupněm  $p$**  (určuje stupeň jednotlivých oblouků B-spline křivky, stupeň polynomů v parametrizaci)



- ▶ **uzlovým vektor** (vektorem parametrizace), který určuje parametrizaci křivky, napojení jednotlivých oblouků B-spline křivky

# B-spline křivky

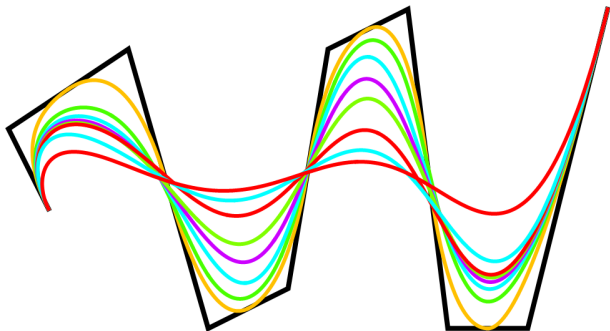
- ▶ **B-spline křivka** je určena
  - ▶  $n + 1$  **řídícími body** (určí celkový tvar křivky)
  - ▶ **stupněm  $p$**  (určuje stupeň jednotlivých oblouků B-spline křivky, stupeň polynomů v parametrizaci)



- ▶ **uzlovým vektor** (vektorem parametrizace), který určuje parametrizaci křivky, napojení jednotlivých oblouků B-spline křivky

# B-spline křivky

- ▶ **B-spline křivka** je určena
  - ▶  $n + 1$  **řídícími body** (určí celkový tvar křivky)
  - ▶ **stupněm  $p$**  (určuje stupeň jednotlivých oblouků B-spline křivky, stupeň polynomů v parametrizaci)



- ▶ **uzlovým vektor** (vektorem parametrizace), který určuje parametrizaci křivky, napojení jednotlivých oblouků B-spline křivky

# B-spline křivky

- ▶ **uzlový vektor** má obecně tvar  $T = (t_0, t_1, \dots, t_m)$ , kde  $t_i \leq t_{i+1}$ ,  $t_i$  nazýváme uzly
- ▶ pokud jsou uzly rovnoměrně rozloženy v parametrickém prostoru, nazýváme vektor parametrizace **uniformní**, jinak **neuniformní**
- ▶ obecně mohou být uzly ve vektoru parametrizace násobné
- ▶ vektor parametrizace se nazývá **otevřený** (někdy také **neperiodický**), jestliže **prvních  $p + 1$  uzlů** a **posledních  $p + 1$  uzlů je stejných** – tento typ vektoru parametrizace se obvykle využívá v CAD literatuře
- ▶ uzlový vektor společně se stupněm B-spline křivky určují **bázové funkce** odpovídající B-spline křivky, tzv. **B-spline bázi**

$$N_{i,0}(t) = \begin{cases} 1 & t_i \leq t < t_{i+1} \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$$

$$N_{i,p}(t) = \frac{t - t_i}{t_{i+p} - t_i} N_{i,p-1}(t) + \frac{t_{i+p+1} - t}{t_{i+p+1} - t_{i+1}} N_{i+1,p-1}(t)$$

- ▶ je-li  $p$  stupeň bázových funkcí a  $n + 1$  počet bázových funkcí stupně  $p$  pro uzlový vektor  $T$ , potom platí  $m = n + p + 1$



# B-spline křivky

- ▶ **uzlový vektor** má obecně tvar  $T = (t_0, t_1, \dots, t_m)$ , kde  $t_i \leq t_{i+1}$ ,  $t_i$  nazýváme uzly
- ▶ pokud jsou uzly rovnoměrně rozloženy v parametrickém prostoru, nazýváme vektor parametrizace **uniformní**, jinak **neuniformní**
- ▶ obecně mohou být uzly ve vektoru parametrizace násobné
- ▶ vektor parametrizace se nazývá **otevřený** (někdy také **neperiodický**), jestliže **prvních  $p + 1$  uzlů** a **posledních  $p + 1$  uzlů je stejných** – tento typ vektoru parametrizace se obvykle využívá v CAD literatuře
- ▶ uzlový vektor společně se stupněm B-spline křivky určují **bázové funkce** odpovídající B-spline křivky, tzv. **B-spline bázi**

$$N_{i,0}(t) = \begin{cases} 1 & t_i \leq t < t_{i+1} \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$$

$$N_{i,p}(t) = \frac{t - t_i}{t_{i+p} - t_i} N_{i,p-1}(t) + \frac{t_{i+p+1} - t}{t_{i+p+1} - t_{i+1}} N_{i+1,p-1}(t)$$

- ▶ je-li  $p$  stupeň bázových funkcí a  $n + 1$  počet bázových funkcí stupně  $p$  pro uzlový vektor  $T$ , potom platí  $m = n + p + 1$

# B-spline křivky

- ▶ **uzlový vektor** má obecně tvar  $T = (t_0, t_1, \dots, t_m)$ , kde  $t_i \leq t_{i+1}$ ,  $t_i$  nazýváme uzly
- ▶ pokud jsou uzly rovnoměrně rozloženy v parametrickém prostoru, nazýváme vektor parametrizace **uniformní**, jinak **neuniformní**
- ▶ obecně mohou být uzly ve vektoru parametrizace násobné
- ▶ vektor parametrizace se nazývá **otevřený** (někdy také **neperiodický**), jestliže **prvních  $p + 1$  uzlů** a **posledních  $p + 1$  uzlů je stejných** – tento typ vektoru parametrizace se obvykle využívá v CAD literatuře
- ▶ uzlový vektor společně se stupněm B-spline křivky určují **bázové funkce** odpovídající B-spline křivky, tzv. **B-spline bázi**

$$N_{i,0}(t) = \begin{cases} 1 & t_i \leq t < t_{i+1} \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$$

$$N_{i,p}(t) = \frac{t - t_i}{t_{i+p} - t_i} N_{i,p-1}(t) + \frac{t_{i+p+1} - t}{t_{i+p+1} - t_{i+1}} N_{i+1,p-1}(t)$$

- ▶ je-li  $p$  stupeň bázových funkcí a  $n + 1$  počet bázových funkcí stupně  $p$  pro uzlový vektor  $T$ , potom platí  $m = n + p + 1$

# B-spline křivky

- ▶ **uzlový vektor** má obecně tvar  $T = (t_0, t_1, \dots, t_m)$ , kde  $t_i \leq t_{i+1}$ ,  $t_i$  nazýváme uzly
- ▶ pokud jsou uzly rovnoměrně rozloženy v parametrickém prostoru, nazýváme vektor parametrizace **uniformní**, jinak **neuniformní**
- ▶ obecně mohou být uzly ve vektoru parametrizace násobné
- ▶ vektor parametrizace se nazývá **otevřený** (někdy také **neperiodický**), jestliže **prvních  $p + 1$  uzlů** a **posledních  $p + 1$  uzlů je stejných** – tento typ vektoru parametrizace se obvykle využívá v CAD literatuře
- ▶ uzlový vektor společně se stupněm B-spline křivky určují **bázové funkce** odpovídající B-spline křivky, tzv. **B-spline bázi**

$$N_{i,0}(t) = \begin{cases} 1 & t_i \leq t < t_{i+1} \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$$

$$N_{i,p}(t) = \frac{t - t_i}{t_{i+p} - t_i} N_{i,p-1}(t) + \frac{t_{i+p+1} - t}{t_{i+p+1} - t_{i+1}} N_{i+1,p-1}(t)$$

- ▶ je-li  $p$  stupeň bázových funkcí a  $n + 1$  počet bázových funkcí stupně  $p$  pro uzlový vektor  $T$ , potom platí  **$m = n + p + 1$**

# B-spline křivky

- ▶ **uzlový vektor** má obecně tvar  $T = (t_0, t_1, \dots, t_m)$ , kde  $t_i \leq t_{i+1}$ ,  $t_i$  nazýváme uzly
- ▶ pokud jsou uzly rovnoměrně rozloženy v parametrickém prostoru, nazýváme vektor parametrizace **uniformní**, jinak **neuniformní**
- ▶ obecně mohou být uzly ve vektoru parametrizace násobné
- ▶ vektor parametrizace se nazývá **otevřený** (někdy také **neperiodický**), jestliže **prvních  $p + 1$  uzlů** a **posledních  $p + 1$  uzlů je stejných** – tento typ vektoru parametrizace se obvykle využívá v CAD literatuře
- ▶ uzlový vektor společně se stupněm B-spline křivky určují báze funkce odpovídající B-spline křivky, tzv. **B-spline bázi**

$$N_{i,0}(t) = \begin{cases} 1 & t_i \leq t < t_{i+1} \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$$

$$N_{i,p}(t) = \frac{t - t_i}{t_{i+p} - t_i} N_{i,p-1}(t) + \frac{t_{i+p+1} - t}{t_{i+p+1} - t_{i+1}} N_{i+1,p-1}(t)$$

- ▶ je-li  $p$  stupeň báze funkcí a  $n + 1$  počet báze funkcí stupně  $p$  pro uzlový vektor  $T$ , potom platí  $m = n + p + 1$

# B-spline křivky

- ▶ **uzlový vektor** má obecně tvar  $T = (t_0, t_1, \dots, t_m)$ , kde  $t_i \leq t_{i+1}$ ,  $t_i$  nazýváme uzly
- ▶ pokud jsou uzly rovnoměrně rozloženy v parametrickém prostoru, nazýváme vektor parametrizace **uniformní**, jinak **neuniformní**
- ▶ obecně mohou být uzly ve vektoru parametrizace násobné
- ▶ vektor parametrizace se nazývá **otevřený** (někdy také **neperiodický**), jestliže **prvních  $p + 1$  uzlů** a **posledních  $p + 1$  uzlů je stejných** – tento typ vektoru parametrizace se obvykle využívá v CAD literatuře
- ▶ uzlový vektor společně se stupněm B-spline křivky určují báze funkce odpovídající B-spline křivky, tzv. **B-spline bázi**

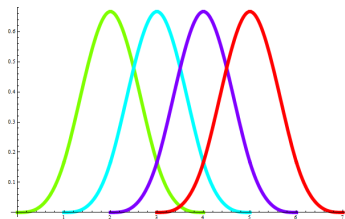
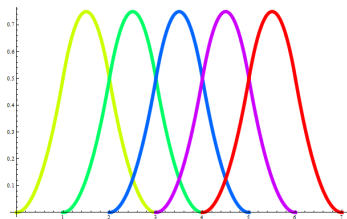
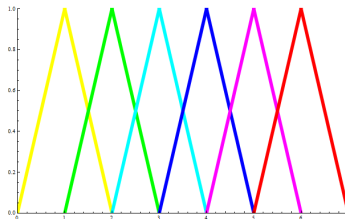
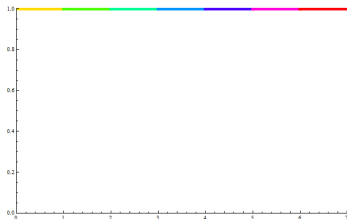
$$N_{i,0}(t) = \begin{cases} 1 & t_i \leq t < t_{i+1} \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$$

$$N_{i,p}(t) = \frac{t - t_i}{t_{i+p} - t_i} N_{i,p-1}(t) + \frac{t_{i+p+1} - t}{t_{i+p+1} - t_{i+1}} N_{i+1,p-1}(t)$$

- ▶ je-li  $p$  stupeň báze funkcí a  $n + 1$  počet báze funkcí stupně  $p$  pro uzlový vektor  $T$ , potom platí  $m = n + p + 1$

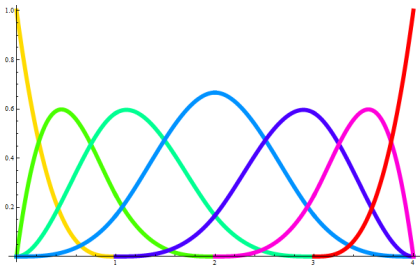
# B-spline báze – periodický vektor parametrizace

- ▶ bázové funkce pro uniformní periodický vektor  $T = (0, 1, 2, \dots, 7)$  různého stupně – je vidět, že se vždy jedná o stejné, pouze posunuté bázové funkce

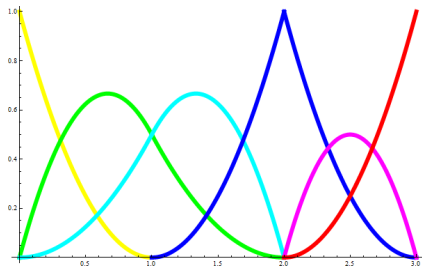


# B-spline báze – otevřený (neperiodický) vektor parametrizace

- ▶ vektor parametrizace  $T = (0, 0, 0, 0, 1, 2, 3, 4, 4, 4, 4)$ , tj. uniformní vektor parametrizace,  $p = 3$ ,  $n = 6$ , výsledný spline je třídy  $C^2$



- ▶ vektor parametrizace  $T = (0, 0, 0, 1, 2, 2, 3, 3, 3)$ , tj. neuniformní vektor parametrizace,  $p = 2$ ,  $n = 5$ , výsledný spline je obecně třídy  $C^0$



# B-spline báze

- ▶ **Bernsteinovy polynomy** stupně  $n$  jsou **speciální B-spline bázi** pro uzlový vektor

$$T = (\underbrace{0, \dots, 0}_{n+1}, \underbrace{1, \dots, 1}_{n+1})$$

- ▶ B-spline bazové funkce stupně  $p$  mají **obecně  $p - 1$  spojitých derivací**, tzn. kvadratické bazové funkce obecně spadají do třídy  $C^1$  apod.
- ▶ **násobné uzly** ve vektoru parametrizace **snižují spojitost** bazových funkcí (a následně i odpovídající B-spline/NURBS křivky) – **jestliže vektor parametrizace obsahuje  $k$ -násobný uzel** ( $k > 1 \wedge k \leq p$ ), **potom bazové funkce jsou třídy  $C^{p-k}$**
- ▶ pro neperiodický vektor parametrizace bazové funkce **interpolují kraje** intervalu parametru, příp. další řídicí body, pokud některý uzel je násobnosti  $p$

## Důležité vlastnosti B-spline bazových funkcí:

- ▶ bazové funkce jsou nezáporné ( $N_{i,p}(t) \geq 0, \forall t$ )
- ▶  $\forall t : \sum_{i=0}^n N_{i,p}(t) = 1$
- ▶ support  $N_{i,p}(t)$  je **kompaktní** (lokální) – jde o interval  $\langle t_i, t_{i+p+1} \rangle$
- ▶ na intervalu  $\langle t_i, t_{i+1} \rangle$  jsou **nenulové pouze** bazové funkce  $N_{i-p,p}(t), \dots, N_{i,p}(t)$



# B-spline báze

- ▶ **Bernsteinovy polynomy** stupně  $n$  jsou **speciální B-spline bázi** pro uzlový vektor

$$T = (\underbrace{0, \dots, 0}_{n+1}, \underbrace{1, \dots, 1}_{n+1})$$

- ▶ B-spline bazové funkce stupně  $p$  mají **obecně  $p - 1$  spojitých derivací**, tzn. kvadratické bazové funkce obecně spadají do třídy  $C^1$  apod.
- ▶ **násobné uzly** ve vektoru parametrizace **snižují spojitost** bazových funkcí (a následně i odpovídající B-spline/NURBS křivky) – **jestliže vektor parametrizace obsahuje  $k$ -násobný uzel** ( $k > 1 \wedge k \leq p$ ), **potom bazové funkce jsou třídy  $C^{p-k}$**
- ▶ pro neperiodický vektor parametrizace bazové funkce **interpolují kraje** intervalu parametru, příp. další řídicí body, pokud některý uzel je násobnosti  $p$

## Důležité vlastnosti B-spline bazových funkcí:

- ▶ bazové funkce jsou nezáporné ( $N_{i,p}(t) \geq 0, \forall t$ )
- ▶  $\forall t : \sum_{i=0}^n N_{i,p}(t) = 1$
- ▶ support  $N_{i,p}(t)$  je **kompaktní** (lokální) – jde o interval  $\langle t_i, t_{i+p+1} \rangle$
- ▶ na intervalu  $\langle t_i, t_{i+1} \rangle$  jsou **nenulové pouze** bazové funkce  $N_{i-p,p}(t), \dots, N_{i,p}(t)$

# B-spline báze

- ▶ **Bernsteinovy polynomy** stupně  $n$  jsou **speciální B-spline bázi** pro uzlový vektor

$$T = (\underbrace{0, \dots, 0}_{n+1}, \underbrace{1, \dots, 1}_{n+1})$$

- ▶ B-spline bazové funkce stupně  $p$  mají **obecně  $p - 1$  spojitých derivací**, tzn. kvadratické bazové funkce obecně spadají do třídy  $C^1$  apod.
- ▶ **násobné uzly** ve vektoru parametrizace **snižují spojitost** bazových funkcí (a následně i odpovídající B-spline/NURBS křivky) – **jestliže vektor parametrizace obsahuje  $k$ -násobný uzel** ( $k > 1 \wedge k \leq p$ ), **potom bazové funkce jsou třídy  $C^{p-k}$**
- ▶ pro neperiodický vektor parametrizace bazové funkce **interpolují kraje** intervalu parametru, příp. další řídicí body, pokud některý uzel je násobnosti  $p$

## Důležité vlastnosti B-spline bazových funkcí:

- ▶ bazové funkce jsou nezáporné ( $N_{i,p}(t) \geq 0, \forall t$ )
- ▶  $\forall t : \sum_{i=0}^n N_{i,p}(t) = 1$
- ▶ support  $N_{i,p}(t)$  je **kompaktní** (lokální) – jde o interval  $\langle t_i, t_{i+p+1} \rangle$
- ▶ na intervalu  $\langle t_i, t_{i+1} \rangle$  jsou **nenulové pouze** bazové funkce  $N_{i-p,p}(t), \dots, N_{i,p}(t)$

# B-spline báze

- ▶ **Bernsteinovy polynomy** stupně  $n$  jsou **speciální B-spline bázi** pro uzlový vektor

$$T = (\underbrace{0, \dots, 0}_{n+1}, \underbrace{1, \dots, 1}_{n+1})$$

- ▶ B-spline bazové funkce stupně  $p$  mají **obecně  $p - 1$  spojitých derivací**, tzn. kvadratické bazové funkce obecně spadají do třídy  $C^1$  apod.
- ▶ **násobné uzly** ve vektoru parametrizace **snižují spojitost** bazových funkcí (a následně i odpovídající B-spline/NURBS křivky) – **jestliže vektor parametrizace obsahuje  $k$ -násobný uzel** ( $k > 1 \wedge k \leq p$ ), **potom bazové funkce jsou třídy  $C^{p-k}$**
- ▶ pro neperiodický vektor parametrizace bazové funkce **interpolují kraje** intervalu parametru, příp. další řídicí body, pokud některý uzel je násobnosti  $p$

## Důležité vlastnosti B-spline bazových funkcí:

- ▶ bazové funkce jsou nezáporné ( $N_{i,p}(t) \geq 0, \forall t$ )
- ▶  $\forall t : \sum_{i=0}^n N_{i,p}(t) = 1$
- ▶ support  $N_{i,p}(t)$  je **kompaktní** (lokální) – jde o interval  $\langle t_i, t_{i+p+1} \rangle$
- ▶ na intervalu  $\langle t_i, t_{i+1} \rangle$  jsou **nenulové pouze** bazové funkce  $N_{i-p,p}(t), \dots, N_{i,p}(t)$

# B-spline báze

- ▶ **Bernsteinovy polynomy** stupně  $n$  jsou **speciální B-spline bázi** pro uzlový vektor

$$T = (\underbrace{0, \dots, 0}_{n+1}, \underbrace{1, \dots, 1}_{n+1})$$

- ▶ B-spline bazové funkce stupně  $p$  mají **obecně  $p - 1$  spojitých derivací**, tzn. kvadratické bazové funkce obecně spadají do třídy  $C^1$  apod.
- ▶ **násobné uzly** ve vektoru parametrizace **snižují spojitost** bazových funkcí (a následně i odpovídající B-spline/NURBS křivky) – **jestliže vektor parametrizace obsahuje  $k$ -násobný uzel** ( $k > 1 \wedge k \leq p$ ), **potom bazové funkce jsou třídy  $C^{p-k}$**
- ▶ pro neperiodický vektor parametrizace bazové funkce **interpolují kraje** intervalu parametru, příp. další řídicí body, pokud některý uzel je násobnosti  $p$

## Důležité vlastnosti B-spline bazových funkcí:

- ▶ bazové funkce jsou nezáporné ( $N_{i,p}(t) \geq 0, \forall t$ )
- ▶  $\forall t : \sum_{i=0}^n N_{i,p}(t) = 1$
- ▶ support  $N_{i,p}(t)$  je **kompaktní** (lokální) – jde o interval  $\langle t_i, t_{i+p+1} \rangle$
- ▶ na intervalu  $\langle t_i, t_{i+1} \rangle$  jsou **nenulové pouze** bazové funkce  $N_{i-p,p}(t), \dots, N_{i,p}(t)$

# Příklady uzlových vektorů

- ▶ určete:
  - ▶ jestli je daný uzlový vektor **uniformní** nebo **neuniformní**,
  - ▶ jakého **stupně** jsou odpovídající B-spline báze funkce (a také B-spline křivka),
  - ▶ z **kolika částí** se odpovídající B-spline křivka skládá,
  - ▶ kolik musí mít **bodů řídící polygon**,
  - ▶ jaké **třídy spojitosti** jsou B-spline báze funkce

pro uzlové vektory

$$1 \quad T = (0, 0, 0, 0, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 6, 6, 6, 6)$$

$$2 \quad T = (0, 0, 0, 0, 1, 3, 4, 7, 7, 7, 7)$$

$$3 \quad T = (0, 0, 0, 1, 2, 3, 4, 4, 5, 5, 5)$$

$$4 \quad T = (0, 0, 0, 0, 1, 2, 2, 2, 3, 4, 4, 5, 5, 5, 5)$$

- ▶ pokud uzlový vektor indikuje snížení spojitosti, je možné to nějak „napravit“?

# Příklady uzlových vektorů

- ▶ určete:
  - ▶ jestli je daný uzlový vektor **uniformní** nebo **neuniformní**,
  - ▶ jakého **stupně** jsou odpovídající B-spline báze funkce (a také B-spline křivka),
  - ▶ z **kolika částí** se odpovídající B-spline křivka skládá,
  - ▶ kolik musí mít **bodů řídící polygon**,
  - ▶ jaké **třídy spojitosti** jsou B-spline báze funkce

pro uzlové vektory

$$1 \quad T = (0, 0, 0, 0, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 6, 6, 6, 6)$$

$$2 \quad T = (0, 0, 0, 0, 1, 3, 4, 7, 7, 7, 7)$$

$$3 \quad T = (0, 0, 0, 1, 2, 3, 4, 4, 5, 5, 5)$$

$$4 \quad T = (0, 0, 0, 0, 1, 2, 2, 2, 3, 4, 4, 5, 5, 5, 5)$$

- ▶ pokud uzlový vektor indikuje snížení spojitosti, je možné to nějak „napravit“?

# Příklady uzlových vektorů

- ▶ určete:
  - ▶ jestli je daný uzlový vektor **uniformní** nebo **neuniformní**,
  - ▶ jakého **stupně** jsou odpovídající B-spline báze funkce (a také B-spline křivka),
  - ▶ z **kolika částí** se odpovídající B-spline křivka skládá,
  - ▶ kolik musí mít **bodů řídící polygon**,
  - ▶ jaké **třídy spojitosti** jsou B-spline báze funkce

pro uzlové vektory

1  $T = (0, 0, 0, 0, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 6, 6, 6, 6)$

2  $T = (0, 0, 0, 0, 1, 3, 4, 7, 7, 7, 7)$

3  $T = (0, 0, 0, 1, 2, 3, 4, 4, 5, 5, 5)$

4  $T = (0, 0, 0, 0, 1, 2, 2, 2, 3, 4, 4, 5, 5, 5, 5)$

- ▶ pokud uzlový vektor indikuje snížení spojitosti, je možné to nějak „napravit“?

# Příklady uzlových vektorů

- ▶ určete:
  - ▶ jestli je daný uzlový vektor **uniformní** nebo **neuniformní**,
  - ▶ jakého **stupně** jsou odpovídající B-spline báze funkce (a také B-spline křivka),
  - ▶ z **kolika částí** se odpovídající B-spline křivka skládá,
  - ▶ kolik musí mít **bodů řídící polygon**,
  - ▶ jaké **třídy spojitosti** jsou B-spline báze funkce

pro uzlové vektory

1  $T = (0, 0, 0, 0, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 6, 6, 6, 6)$

2  $T = (0, 0, 0, 0, 1, 3, 4, 7, 7, 7, 7)$

3  $T = (0, 0, 0, 1, 2, 3, 4, 4, 5, 5, 5)$

4  $T = (0, 0, 0, 0, 1, 2, 2, 2, 3, 4, 4, 5, 5, 5, 5)$

- ▶ pokud uzlový vektor indikuje snížení spojitosti, je možné to nějak „napravit“?



# Příklady uzlových vektorů

- ▶ určete:
  - ▶ jestli je daný uzlový vektor **uniformní** nebo **neuniformní**,
  - ▶ jakého **stupně** jsou odpovídající B-spline báze funkce (a také B-spline křivka),
  - ▶ z **kolika částí** se odpovídající B-spline křivka skládá,
  - ▶ kolik musí mít **bodů řídící polygon**,
  - ▶ jaké **třídy spojitosti** jsou B-spline báze funkce

pro uzlové vektory

$$1 \quad T = (0, 0, 0, 0, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 6, 6, 6, 6, 6)$$

$$2 \quad T = (0, 0, 0, 0, 1, 3, 4, 7, 7, 7, 7)$$

$$3 \quad T = (0, 0, 0, 1, 2, 3, 4, 4, 5, 5, 5)$$

$$4 \quad T = (0, 0, 0, 0, 1, 2, 2, 2, 3, 4, 4, 5, 5, 5, 5)$$

- ▶ pokud uzlový vektor indikuje snížení spojitosti, je možné to nějak „napravit“?

# Příklady uzlových vektorů

- ▶ určete:
  - ▶ jestli je daný uzlový vektor **uniformní** nebo **neuniformní**,
  - ▶ jakého **stupně** jsou odpovídající B-spline báze funkce (a také B-spline křivka),
  - ▶ z **kolika částí** se odpovídající B-spline křivka skládá,
  - ▶ kolik musí mít **bodů řídící polygon**,
  - ▶ jaké **třídy spojitosti** jsou B-spline báze funkce

pro uzlové vektory

- 1  $T = (0, 0, 0, 0, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 6, 6, 6, 6)$

- 2  $T = (0, 0, 0, 0, 1, 3, 4, 7, 7, 7, 7)$

- 3  $T = (0, 0, 0, 1, 2, 3, 4, 4, 5, 5, 5)$

- 4  $T = (0, 0, 0, 0, 1, 2, 2, 2, 3, 4, 4, 5, 5, 5, 5)$

- ▶ pokud uzlový vektor indikuje snížení spojitosti, je možné to nějak „napravit“?

# B-spline křivky

- ▶ B-spline křivku získáme jako lineární kombinaci B-spline bázových funkcí, koeficienty bázových funkcí nazýváme **řídící body** (tvorí **řídící polygon**)
- ▶ pro řídící body  $\mathbf{P}_i, i = 0, \dots, n$ , a bázové funkce  $N_{i,p}, i = 0, \dots, n$ , je **B-spline křivka stupně  $p$**  dána vztahem

$$C(t) = \sum_{i=0}^n \mathbf{P}_i N_{i,p}(t)$$

Důležité vlastnosti B-spline křivek:

- ▶ B-spline křivka stupně  $p$  je obecně  $(p - 1)$ -krát spojitě diferencovatelná, pokud vektor parametrizace neobsahuje násobné uzly nebo nesplyvají některé řídící body
- ▶ **lokalizace změn** – poloha řídícího bodu  $\mathbf{P}_i$  ovlivňuje tvar křivky pro parametr  $t$  v intervalu  $(t_i, t_{i+p+1})$
- ▶ **podmínka konvexního obalu** – každý oblouk křivky stupně  $p$  leží v konvexním obalu  $p + 1$  bodů řídícího polygonu
- ▶ **afinní invariančnost** – je jedno, jestli transformuje afinní transformací křivku nebo její řídící polygon, výsledek je stejný

# B-spline křivky

- ▶ B-spline křivku získáme jako lineární kombinaci B-spline bázových funkcí, koeficienty bázových funkcí nazýváme **řídící body** (tvoří **řídící polygon**)
- ▶ pro řídící body  $\mathbf{P}_i, i = 0, \dots, n$ , a bázové funkce  $N_{i,p}, i = 0, \dots, n$ , je **B-spline křivka stupně  $p$**  dána vztahem

$$C(t) = \sum_{i=0}^n \mathbf{P}_i N_{i,p}(t)$$

## Důležité vlastnosti B-spline křivek:

- ▶ B-spline křivka stupně  $p$  je obecně  $(p - 1)$ -krát spojitě diferencovatelná, pokud vektor parametrizace neobsahuje násobné uzly nebo nesplývají některé řídící body
- ▶ **lokalizace změn** – poloha řídícího bodu  $\mathbf{P}_i$  ovlivňuje tvar křivky pro parametr  $t$  v intervalu  $\langle t_i, t_{i+p+1} \rangle$
- ▶ **podmínka konvexního obalu** – každý oblouk křivky stupně  $p$  leží v konvexním obalu  $p + 1$  bodů řídícího polygonu
- ▶ **afinní invariantnost** – je jedno, jestli transformuje afinní transformací křivku nebo její řídící polygon, výsledek je stejný

# B-spline křivky

- ▶ B-spline křivku získáme jako lineární kombinaci B-spline bázových funkcí, koeficienty bázových funkcí nazýváme **řídící body** (tvoří **řídící polygon**)
- ▶ pro řídící body  $\mathbf{P}_i, i = 0, \dots, n$ , a bázové funkce  $N_{i,p}, i = 0, \dots, n$ , je **B-spline křivka stupně  $p$**  dána vztahem

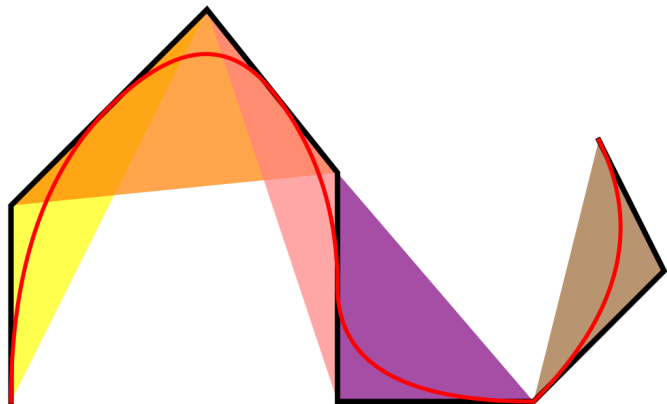
$$C(t) = \sum_{i=0}^n \mathbf{P}_i N_{i,p}(t)$$

## Důležité vlastnosti B-spline křivek:

- ▶ B-spline křivka stupně  $p$  je obecně  $(p - 1)$ -krát spojitě diferencovatelná, pokud vektor parametrizace neobsahuje násobné uzly nebo nesplývají některé řídící body
- ▶ **lokalizace změn** – poloha řídícího bodu  $\mathbf{P}_i$  ovlivňuje tvar křivky pro parametr  $t$  v intervalu  $\langle t_i, t_{i+p+1} \rangle$
- ▶ **podmínka konvexního obalu** – každý oblouk křivky stupně  $p$  leží v konvexním obalu  $p + 1$  bodů řídícího polygonu
- ▶ **afinní invariantnost** – je jedno, jestli transformuje afinní transformací křivku nebo její řídící polygon, výsledek je stejný

# B-spline křivky

- ▶ B-spline křivku z koeficienty báze
- ▶ pro řídicí body  $F$  křivka stupně  $p$



## Důležité vlastnosti B-spline křivek

- ▶ B-spline křivka s vektor parametrizace řídicí body
- ▶ lokalizace změny intervalu  $\langle t_i, t_{i+1} \rangle$
- ▶ **podmínka konvexního obalu** – každý oblouk křivky stupně  $p$  leží v konvexním obalu  $p + 1$  bodů řídicího polygonu
- ▶ **afinní invariantnost** – je jedno, jestli transformuje afinní transformací křivku nebo její řídicí polygon, výsledek je stejný

# B-spline křivky

- ▶ B-spline křivku získáme jako lineární kombinaci B-spline bázových funkcí, koeficienty bázových funkcí nazýváme **řídící body** (tvoří **řídící polygon**)
- ▶ pro řídící body  $\mathbf{P}_i, i = 0, \dots, n$ , a bázové funkce  $N_{i,p}, i = 0, \dots, n$ , je **B-spline křivka stupně  $p$**  dána vztahem

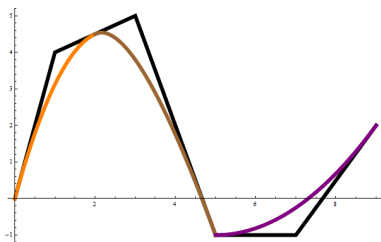
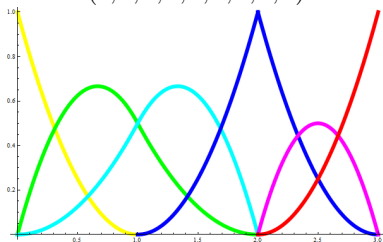
$$C(t) = \sum_{i=0}^n \mathbf{P}_i N_{i,p}(t)$$

## Důležité vlastnosti B-spline křivek:

- ▶ B-spline křivka stupně  $p$  je obecně  $(p - 1)$ -krát spojitě diferencovatelná, pokud vektor parametrizace neobsahuje násobné uzly nebo nesplývají některé řídící body
- ▶ **lokalizace změn** – poloha řídícího bodu  $\mathbf{P}_i$  ovlivňuje tvar křivky pro parametr  $t$  v intervalu  $\langle t_i, t_{i+p+1} \rangle$
- ▶ **podmínka konvexního obalu** – každý oblouk křivky stupně  $p$  leží v konvexním obalu  $p + 1$  bodů řídícího polygonu
- ▶ **afinní invariantnost** – je jedno, jestli transformuje afinní transformací křivku nebo její řídící polygon, výsledek je stejný

# B-spline křivka – příklad

- ▶ najděme B-spline křivku určenou řídícím polygonem  $\mathbf{P}_1 = [0, 0]$ ,  $\mathbf{P}_2 = [1, 4]$ ,  $\mathbf{P}_3 = [3, 5]$ ,  $\mathbf{P}_4 = [5, -1]$ ,  $\mathbf{P}_5 = [7, -1]$ ,  $\mathbf{P}_6 = [9, 2]$  a vektorem parametrizace  $T = (0, 0, 0, 1, 2, 2, 3, 3, 3)$ .

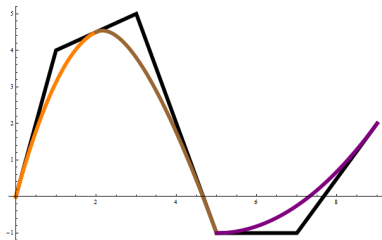
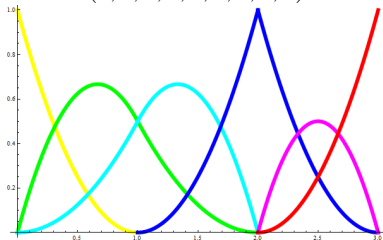


- ▶ křivka je složena ze 3 oblouků (částí) a je třídy  $C^0$ , jak naznačoval vektor parametrizace
- ▶ první část křivky je ovlivněna pouze prvními třemi bázovými funkcemi (žlutá, zelená, tyrkysová), ostatní jsou na  $[0, 1]$  nulové, a tedy pouze první tři řídící body ovlivňují tuto část křivky, podobně pro ostatní části
- ▶ první a poslední hrana řídícího polygonu určují tečny ke křivce na začátku a na konci, vlivem snížení spojitosti také hrany  $\mathbf{P}_3\mathbf{P}_4$ ,  $\mathbf{P}_4\mathbf{P}_5$  určují tečny křivky v okolí napojení druhého a třetího oblouku



# B-spline křivka – příklad

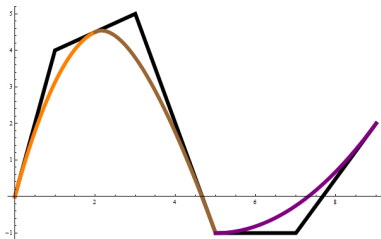
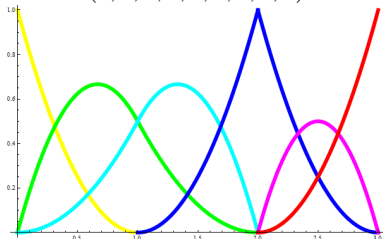
- ▶ najděme B-spline křivku určenou řídicím polygonem  $\mathbf{P}_1 = [0, 0]$ ,  $\mathbf{P}_2 = [1, 4]$ ,  $\mathbf{P}_3 = [3, 5]$ ,  $\mathbf{P}_4 = [5, -1]$ ,  $\mathbf{P}_5 = [7, -1]$ ,  $\mathbf{P}_6 = [9, 2]$  a vektorem parametrizace  $T = (0, 0, 0, 1, 2, 2, 3, 3, 3)$ .



- ▶ křivka je složena ze 3 oblouků (částí) a je třídy  $C^0$ , jak naznačoval vektor parametrizace
- ▶ první část křivky je ovlivněna pouze prvními třemi bazovými funkcemi (žlutá, zelená, tyrkysová), ostatní jsou na  $[0, 1]$  nulové, a tedy pouze první tři řídicí body ovlivňují tuto část křivky, podobně pro ostatní části
- ▶ první a poslední hrana řídicího polygonu určují tečny ke křivce na začátku a na konci, vlivem snížení spojitosti také hrany  $\mathbf{P}_3\mathbf{P}_4$ ,  $\mathbf{P}_4\mathbf{P}_5$  určují tečny křivky v okolí napojení druhého a třetího oblouku

# B-spline křivka – příklad

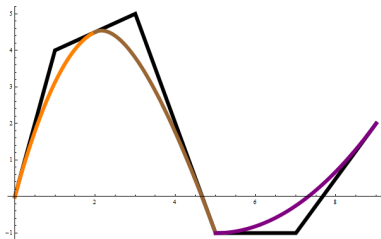
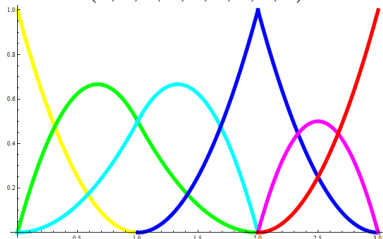
- ▶ najděme B-spline křivku určenou řídicím polygonem  $\mathbf{P}_1 = [0, 0]$ ,  $\mathbf{P}_2 = [1, 4]$ ,  $\mathbf{P}_3 = [3, 5]$ ,  $\mathbf{P}_4 = [5, -1]$ ,  $\mathbf{P}_5 = [7, -1]$ ,  $\mathbf{P}_6 = [9, 2]$  a vektorem parametrizace  $T = (0, 0, 0, 1, 2, 2, 3, 3, 3)$ .



- ▶ křivka je složena ze 3 oblouků (částí) a je třídy  $C^0$ , jak naznačoval vektor parametrizace
- ▶ první část křivky je ovlivněna pouze prvními třemi báзовými funkcemi (žlutá, zelená, tyrkysová), ostatní jsou na  $[0, 1]$  nulové, a tedy pouze první tři řídicí body ovlivňují tuto část křivky, podobně pro ostatní části
- ▶ první a poslední hrana řídicího polygonu určují tečny ke křivce na začátku a na konci, vlivem snížení spojitosti také hrany  $\mathbf{P}_3\mathbf{P}_4$ ,  $\mathbf{P}_4\mathbf{P}_5$  určují tečny křivky v okolí napojení druhého a třetího oblouku

# B-spline křivka – příklad

- ▶ najděme B-spline křivku určenou řídicím polygonem  $\mathbf{P}_1 = [0, 0]$ ,  $\mathbf{P}_2 = [1, 4]$ ,  $\mathbf{P}_3 = [3, 5]$ ,  $\mathbf{P}_4 = [5, -1]$ ,  $\mathbf{P}_5 = [7, -1]$ ,  $\mathbf{P}_6 = [9, 2]$  a vektorem parametrizace  $T = (0, 0, 0, 1, 2, 2, 3, 3, 3)$ .



- ▶ křivka je složena ze 3 oblouků (částí) a je třídy  $C^0$ , jak naznačoval vektor parametrizace
- ▶ první část křivky je ovlivněna pouze prvními třemi báзовými funkcemi (žlutá, zelená, tyrkysová), ostatní jsou na  $[0, 1]$  nulové, a tedy pouze první tři řídicí body ovlivňují tuto část křivky, podobně pro ostatní části
- ▶ první a poslední hrana řídicího polygonu určují tečny ke křivce na začátku a na konci, vlivem snížení spojitosti také hrany  $\mathbf{P}_3\mathbf{P}_4$ ,  $\mathbf{P}_4\mathbf{P}_5$  určují tečny křivky v okolí napojení druhého a třetího oblouku

# Vložení uzlu do uzlového vektoru

- ▶ chceme vložit uzel do existujícího uzlového vektoru, **aniž bychom změnili tvar B-spline křivky**
- ▶ jelikož platí  $m = n + p + 1$ , vložení uzlu je spojeno s **přidáním jednoho řídicího bodu** do řídicího polygonu
- ▶ mějme dány řídicí body  $\mathbf{P}_0, \dots, \mathbf{P}_n$ , uzlový vektor  $T = (t_0, \dots, t_m)$ , stupeň křivky  $p$  a chtějme vložit nový uzel  $t^*$
- ▶ necht'  $t^* \in (t_k, t_{k+1})$ , potom dále stačí pracovat s body  $\mathbf{P}_{k-p}, \dots, \mathbf{P}_k$
- ▶ hledáme **nové řídicí body**  $\mathbf{Q}_j, j = k - p + 1, \dots, k$ , takové, že původní řídicí body  $\mathbf{P}_{k-p+1}, \dots, \mathbf{P}_{k-1}$  nahradíme body  $\mathbf{Q}_j, j = k - p + 1, \dots, k$  „**odřezáváním vrcholů**“
- ▶ **nový bod na hraně**  $\mathbf{P}_{i-1}\mathbf{P}_i$  najdeme ze vztahu

$$\mathbf{Q}_i = (1 - a_i)\mathbf{P}_{i-1} + a_i\mathbf{P}_i, \quad a_i = \frac{t - t_i}{t_{i+p} - t_i}, \quad \text{pro } k - p + 1 \leq i \leq k$$

- ▶ **geometricky**: nový uzel  $t^*$  definuje poměry  $a_{k-p+1}, \dots, a_k$ , ve kterých  $t^*$  **rozděluje intervaly**  $(t_{k-p+1}, t_{k+1}), \dots, (t_k, t_{k+p})$

# Vložení uzlu do uzlového vektoru

- ▶ chceme vložit uzel do existujícího uzlového vektoru, **aniž bychom změnili tvar B-spline křivky**
- ▶ jelikož platí  $m = n + p + 1$ , vložení uzlu je spojeno s **přidáním jednoho řídicího bodu** do řídicího polygonu
- ▶ mějme dány řídicí body  $\mathbf{P}_0, \dots, \mathbf{P}_n$ , uzlový vektor  $T = (t_0, \dots, t_m)$ , stupeň křivky  $p$  a chtějme vložit nový uzel  $t^*$
- ▶ necht'  $t^* \in (t_k, t_{k+1})$ , potom dále stačí pracovat s body  $\mathbf{P}_{k-p}, \dots, \mathbf{P}_k$
- ▶ hledáme **nové řídicí body**  $\mathbf{Q}_j, j = k - p + 1, \dots, k$ , takové, že původní řídicí body  $\mathbf{P}_{k-p+1}, \dots, \mathbf{P}_{k-1}$  nahradíme body  $\mathbf{Q}_j, j = k - p + 1, \dots, k$  „**odřezáváním vrcholů**“
- ▶ **nový bod na hraně**  $\mathbf{P}_{i-1}\mathbf{P}_i$  najdeme ze vztahu

$$\mathbf{Q}_i = (1 - a_i)\mathbf{P}_{i-1} + a_i\mathbf{P}_i, \quad a_i = \frac{t - t_i}{t_{i+p} - t_i}, \quad \text{pro } k - p + 1 \leq i \leq k$$

- ▶ **geometricky**: nový uzel  $t^*$  definuje poměry  $a_{k-p+1}, \dots, a_k$ , ve kterých  $t^*$  **rozděluje intervaly**  $(t_{k-p+1}, t_{k+1}), \dots, (t_k, t_{k+p})$

# Vložení uzlu do uzlového vektoru

- ▶ chceme vložit uzel do existujícího uzlového vektoru, **aniž bychom změnili tvar B-spline křivky**
- ▶ jelikož platí  $m = n + p + 1$ , vložení uzlu je spojeno s **přidáním jednoho řídicího bodu** do řídicího polygonu
- ▶ mějme dány řídicí body  $\mathbf{P}_0, \dots, \mathbf{P}_n$ , uzlový vektor  $T = (t_0, \dots, t_m)$ , stupeň křivky  $p$  a chtějme vložit nový uzel  $t^*$
- ▶ necht'  $t^* \in (t_k, t_{k+1})$ , potom dále stačí pracovat s body  $\mathbf{P}_{k-p}, \dots, \mathbf{P}_k$
- ▶ hledáme **nové řídicí body**  $\mathbf{Q}_j, j = k - p + 1, \dots, k$ , takové, že původní řídicí body  $\mathbf{P}_{k-p+1}, \dots, \mathbf{P}_{k-1}$  nahradíme body  $\mathbf{Q}_j, j = k - p + 1, \dots, k$  „**odřezáváním vrcholů**“
- ▶ **nový bod na hraně**  $\mathbf{P}_{i-1}\mathbf{P}_i$  najdeme ze vztahu

$$\mathbf{Q}_i = (1 - a_i)\mathbf{P}_{i-1} + a_i\mathbf{P}_i, \quad a_i = \frac{t - t_i}{t_{i+p} - t_i}, \quad \text{pro } k - p + 1 \leq i \leq k$$

- ▶ **geometricky**: nový uzel  $t^*$  definuje poměry  $a_{k-p+1}, \dots, a_k$ , ve kterých  $t^*$  **rozděluje intervaly**  $(t_{k-p+1}, t_{k+1}), \dots, (t_k, t_{k+p})$

# Vložení uzlu do uzlového vektoru

- ▶ chceme vložit uzel do existujícího uzlového vektoru, **aniž bychom změnili tvar B-spline křivky**
- ▶ jelikož platí  $m = n + p + 1$ , vložení uzlu je spojeno s **přidáním jednoho řídicího bodu** do řídicího polygonu
- ▶ mějme dány řídicí body  $\mathbf{P}_0, \dots, \mathbf{P}_n$ , uzlový vektor  $T = (t_0, \dots, t_m)$ , stupeň křivky  $p$  a chtějme vložit nový uzel  $t^*$
- ▶ necht'  $t^* \in (t_k, t_{k+1})$ , potom dále stačí pracovat s body  $\mathbf{P}_{k-p}, \dots, \mathbf{P}_k$
- ▶ hledáme **nové řídicí body**  $\mathbf{Q}_j$ ,  $j = k - p + 1, \dots, k$ , takové, že původní řídicí body  $\mathbf{P}_{k-p+1}, \dots, \mathbf{P}_{k-1}$  nahradíme body  $\mathbf{Q}_j$ ,  $j = k - p + 1, \dots, k$  „**odřezáváním vrcholů**“
- ▶ **nový bod na hraně**  $\mathbf{P}_{i-1}\mathbf{P}_i$  najdeme ze vztahu

$$\mathbf{Q}_i = (1 - a_i)\mathbf{P}_{i-1} + a_i\mathbf{P}_i, \quad a_i = \frac{t - t_i}{t_{i+p} - t_i}, \quad \text{pro } k - p + 1 \leq i \leq k$$

- ▶ **geometricky**: nový uzel  $t^*$  definuje poměry  $a_{k-p+1}, \dots, a_k$ , ve kterých  $t^*$  **rozděluje intervaly**  $(t_{k-p+1}, t_{k+1}), \dots, (t_k, t_{k+p})$

# Vložení uzlu do uzlového vektoru

- ▶ chceme vložit uzel do existujícího uzlového vektoru, **aniž bychom změnili tvar B-spline křivky**
- ▶ jelikož platí  $m = n + p + 1$ , vložení uzlu je spojeno s **přidáním jednoho řídicího bodu** do řídicího polygonu
- ▶ mějme dány řídicí body  $\mathbf{P}_0, \dots, \mathbf{P}_n$ , uzlový vektor  $T = (t_0, \dots, t_m)$ , stupeň křivky  $p$  a chtějme vložit nový uzel  $t^*$
- ▶ necht'  $t^* \in (t_k, t_{k+1})$ , potom dále stačí pracovat s body  $\mathbf{P}_{k-p}, \dots, \mathbf{P}_k$
- ▶ hledáme **nové řídicí body**  $\mathbf{Q}_j$ ,  $j = k - p + 1, \dots, k$ , takové, že původní řídicí body  $\mathbf{P}_{k-p+1}, \dots, \mathbf{P}_{k-1}$  nahradíme body  $\mathbf{Q}_j$ ,  $j = k - p + 1, \dots, k$  „**odřezáváním vrcholů**“
- ▶ **nový bod na hraně**  $\mathbf{P}_{i-1}\mathbf{P}_i$  najdeme ze vztahu

$$\mathbf{Q}_i = (1 - a_i)\mathbf{P}_{i-1} + a_i\mathbf{P}_i, \quad a_i = \frac{t - t_i}{t_{i+p} - t_i}, \quad \text{pro } k - p + 1 \leq i \leq k$$

- ▶ **geometricky**: nový uzel  $t^*$  definuje poměry  $a_{k-p+1}, \dots, a_k$ , ve kterých  $t^*$  rozděluje intervaly  $(t_{k-p+1}, t_{k+1}), \dots, (t_k, t_{k+p})$



# Vložení uzlu do uzlového vektoru

- ▶ chceme vložit uzel do existujícího uzlového vektoru, **aniž bychom změnili tvar B-spline křivky**
- ▶ jelikož platí  $m = n + p + 1$ , vložení uzlu je spojeno s **přidáním jednoho řídicího bodu** do řídicího polygonu
- ▶ mějme dány řídicí body  $\mathbf{P}_0, \dots, \mathbf{P}_n$ , uzlový vektor  $T = (t_0, \dots, t_m)$ , stupeň křivky  $p$  a chtějme vložit nový uzel  $t^*$
- ▶ necht'  $t^* \in (t_k, t_{k+1})$ , potom dále stačí pracovat s body  $\mathbf{P}_{k-p}, \dots, \mathbf{P}_k$
- ▶ hledáme **nové řídicí body**  $\mathbf{Q}_j, j = k - p + 1, \dots, k$ , takové, že původní řídicí body  $\mathbf{P}_{k-p+1}, \dots, \mathbf{P}_{k-1}$  nahradíme body  $\mathbf{Q}_j, j = k - p + 1, \dots, k$  „**odřezáváním vrcholů**“
- ▶ **nový bod na hraně**  $\mathbf{P}_{i-1}\mathbf{P}_i$  najdeme ze vztahu

$$\mathbf{Q}_i = (1 - a_i)\mathbf{P}_{i-1} + a_i\mathbf{P}_i, \quad a_i = \frac{t - t_i}{t_{i+p} - t_i}, \quad \text{pro } k - p + 1 \leq i \leq k$$

- ▶ **geometricky**: nový uzel  $t^*$  definuje poměry  $a_{k-p+1}, \dots, a_k$ , ve kterých  $t^*$  **rozděluje intervaly**  $(t_{k-p+1}, t_{k+1}), \dots, (t_k, t_{k+p})$

# Vložení uzlu do uzlového vektoru – příklad

- ▶ mějme B-spline křivku stupně 3 s uzlovým vektorem

$$T = (t_0, t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6, t_7, t_8, t_9, t_{10}, t_{11}) = (0, 0, 0, 0, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 1, 1, 1, 1)$$

a chceme vložit uzel  $t^* = 1/2$

- ▶  $t^* \in (t_5, t_6) \Rightarrow k = 5$  a tedy pracujeme pouze s body  $P_2, \dots, P_5$ , ostatní body zůstávají neměnné
- ▶ body  $P_3, P_4$  chceme odříznout a nahradit novými body  $Q_3, Q_4, Q_5$
- ▶ tedy dosazením

$$a_3 = \frac{t^* - t_3}{t_6 - t_3} = \frac{5}{6}, \quad a_4 = \frac{t^* - t_4}{t_7 - t_4} = \frac{1}{2}, \quad a_5 = \frac{t^* - t_5}{t_8 - t_5} = \frac{1}{6}$$

a

$$Q_3 = (1 - \frac{5}{6})P_2 + \frac{5}{6}P_3, \quad Q_4 = (1 - \frac{1}{2})P_3 + \frac{1}{2}P_4, \quad Q_5 = (1 - \frac{1}{6})P_4 + \frac{1}{6}P_5$$

- ▶ dostáváme tak nový řídicí polygon  $P_0, P_1, P_2, Q_3, Q_4, Q_5, P_5, P_6, P_7$  a nový uzlový vektor  $T^* = (t_0, \dots, t_5, t^*, t_6, \dots, t_{11})$

# Vložení uzlu do uzlového vektoru – příklad

- ▶ mějme B-spline křivku stupně 3 s uzlovým vektorem

$$T = (t_0, t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6, t_7, t_8, t_9, t_{10}, t_{11}) = (0, 0, 0, 0, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 1, 1, 1, 1)$$

a chceme vložit uzel  $t^* = 1/2$

- ▶  $t^* \in (t_5, t_6) \Rightarrow k = 5$  a tedy pracujeme **pouze s body  $P_2, \dots, P_5$** , ostatní body zůstávají neměnné
- ▶ body  $P_3, P_4$  chceme odříznout a **nahradit novými body  $Q_3, Q_4, Q_5$**
- ▶ tedy dosazením

$$a_3 = \frac{t^* - t_3}{t_6 - t_3} = \frac{5}{6}, \quad a_4 = \frac{t^* - t_4}{t_7 - t_4} = \frac{1}{2}, \quad a_5 = \frac{t^* - t_5}{t_8 - t_5} = \frac{1}{6}$$

a

$$Q_3 = (1 - \frac{5}{6})P_2 + \frac{5}{6}P_3, \quad Q_4 = (1 - \frac{1}{2})P_3 + \frac{1}{2}P_4, \quad Q_5 = (1 - \frac{1}{6})P_4 + \frac{1}{6}P_5$$

- ▶ dostáváme tak **nový řídicí polygon**  $P_0, P_1, P_2, Q_3, Q_4, Q_5, P_5, P_6, P_7$  a **nový uzlový vektor**  $T^* = (t_0, \dots, t_5, t^*, t_6, \dots, t_{11})$

# Vložení uzlu do uzlového vektoru – příklad

- ▶ mějme B-spline křivku stupně 3 s uzlovým vektorem

$$T = (t_0, t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6, t_7, t_8, t_9, t_{10}, t_{11}) = (0, 0, 0, 0, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 1, 1, 1, 1)$$

a chceme vložit uzel  $t^* = 1/2$

- ▶  $t^* \in (t_5, t_6) \Rightarrow k = 5$  a tedy pracujeme **pouze s body  $P_2, \dots, P_5$** , ostatní body zůstávají neměnné
- ▶ body  $P_3, P_4$  chceme odříznout a **nahradit novými body  $Q_3, Q_4, Q_5$**
- ▶ tedy dosazením

$$a_3 = \frac{t^* - t_3}{t_6 - t_3} = \frac{5}{6}, \quad a_4 = \frac{t^* - t_4}{t_7 - t_4} = \frac{1}{2}, \quad a_5 = \frac{t^* - t_5}{t_8 - t_5} = \frac{1}{6}$$

a

$$Q_3 = (1 - \frac{5}{6})P_2 + \frac{5}{6}P_3, \quad Q_4 = (1 - \frac{1}{2})P_3 + \frac{1}{2}P_4, \quad Q_5 = (1 - \frac{1}{6})P_4 + \frac{1}{6}P_5$$

- ▶ dostáváme tak **nový řídicí polygon**  $P_0, P_1, P_2, Q_3, Q_4, Q_5, P_5, P_6, P_7$  a **nový uzlový vektor**  $T^* = (t_0, \dots, t_5, t^*, t_6, \dots, t_{11})$

# Vložení uzlu do uzlového vektoru – příklad

- ▶ mějme B-spline křivku stupně 3 s uzlovým vektorem

$$T = (t_0, t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6, t_7, t_8, t_9, t_{10}, t_{11}) = (0, 0, 0, 0, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 1, 1, 1, 1)$$

a chceme vložit uzel  $t^* = 1/2$

- ▶  $t^* \in (t_5, t_6) \Rightarrow k = 5$  a tedy pracujeme **pouze s body  $P_2, \dots, P_5$** , ostatní body zůstávají neměnné
- ▶ body  $P_3, P_4$  chceme odříznout a **nahradit novými body  $Q_3, Q_4, Q_5$**
- ▶ tedy dosazením

$$a_3 = \frac{t^* - t_3}{t_6 - t_3} = \frac{5}{6}, \quad a_4 = \frac{t^* - t_4}{t_7 - t_4} = \frac{1}{2}, \quad a_5 = \frac{t^* - t_5}{t_8 - t_5} = \frac{1}{6}$$

a

$$Q_3 = (1 - \frac{5}{6})P_2 + \frac{5}{6}P_3, \quad Q_4 = (1 - \frac{1}{2})P_3 + \frac{1}{2}P_4, \quad Q_5 = (1 - \frac{1}{6})P_4 + \frac{1}{6}P_5$$

- ▶ dostáváme tak **nový řídicí polygon**  $P_0, P_1, P_2, Q_3, Q_4, Q_5, P_5, P_6, P_7$  a **nový uzlový vektor**  $T^* = (t_0, \dots, t_5, t^*, t_6, \dots, t_{11})$

# Vložení uzlu do uzlového vektoru – příklad

- ▶ mějme B-spline křivku stupně 3 s uzlovým vektorem

$$T = (t_0, t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6, t_7, t_8, t_9, t_{10}, t_{11}) = (0, 0, 0, 0, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 1, 1, 1, 1)$$

a chceme vložit uzel  $t^* = 1/2$

- ▶  $t^* \in (t_5, t_6) \Rightarrow k = 5$  a tedy pracujeme **pouze s body  $P_2, \dots, P_5$** , ostatní body zůstávají neměnné
- ▶ body  $P_3, P_4$  chceme odříznout a **nahradit novými body  $Q_3, Q_4, Q_5$**
- ▶ tedy dosazením

$$a_3 = \frac{t^* - t_3}{t_6 - t_3} = \frac{5}{6}, \quad a_4 = \frac{t^* - t_4}{t_7 - t_4} = \frac{1}{2}, \quad a_5 = \frac{t^* - t_5}{t_8 - t_5} = \frac{1}{6}$$

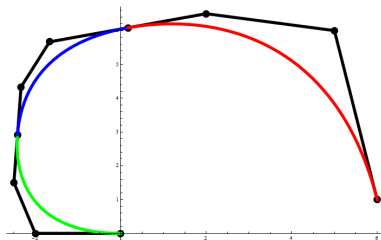
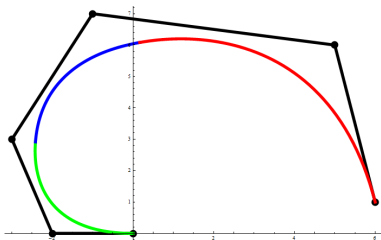
a

$$Q_3 = (1 - \frac{5}{6})P_2 + \frac{5}{6}P_3, \quad Q_4 = (1 - \frac{1}{2})P_3 + \frac{1}{2}P_4, \quad Q_5 = (1 - \frac{1}{6})P_4 + \frac{1}{6}P_5$$

- ▶ dostáváme tak **nový řídicí polygon  $P_0, P_1, P_2, Q_3, Q_4, Q_5, P_5, P_6, P_7$**  a **nový uzlový vektor  $T^* = (t_0, \dots, t_5, t^*, t_6, \dots, t_{11})$**

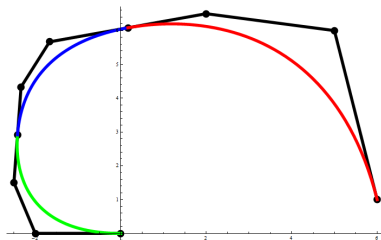
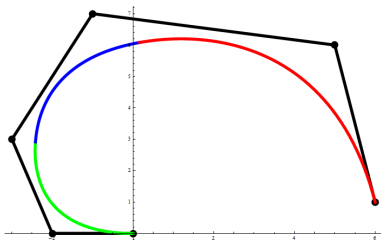
# Rozdělení B-spline křivky na Bézierovské segmenty

- ▶ B-spline křivku stupně  $p$  je možné **rozdělit na sekvenci Bézierovských segmentů** pouze s využitím algoritmu vložené uzlu do uzlového vektoru
- ▶ stačí vložit každý vnitřní uzel tolikrát, aby jeho **výsledná násobnost byla  $p$**
- ▶ vedlejším efektem je samozřejmě výrazné **zvýšení počtu řídicích bodů**
- ▶ mohou nastat také **problémy se spojitostí při manipulaci s řídicími body** – zatímco u B-spline křivky se manipulací s řídicími body nemění spojitost výsledné křivky, pokud je křivka rozdělena na jednotlivé Bézierovské segmenty, je značně obtížné zajistit spojitost stejné třídy i po manipulaci s řídicími body



# Rozdělení B-spline křivky na Bézierovské segmenty

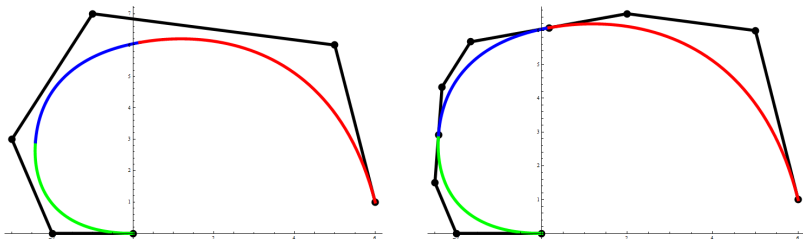
- ▶ B-spline křivku stupně  $p$  je možné **rozdělit na sekvenci Bézierovských segmentů** pouze s využitím algoritmu vložené uzlu do uzlového vektoru
- ▶ stačí vložit každý vnitřní uzel tolikrát, aby jeho **výsledná násobnost byla  $p$**
- ▶ vedlejším efektem je samozřejmě výrazné **zvýšení počtu řídicích bodů**
- ▶ mohou nastat také **problémy se spojitostí při manipulaci s řídicími body** – zatímco u B-spline křivky se manipulací s řídicími body nemění spojitost výsledné křivky, pokud je křivka rozdělena na jednotlivé Bézierovské segmenty, je značně obtížné zajistit spojitost stejné třídy i po manipulaci s řídicími body





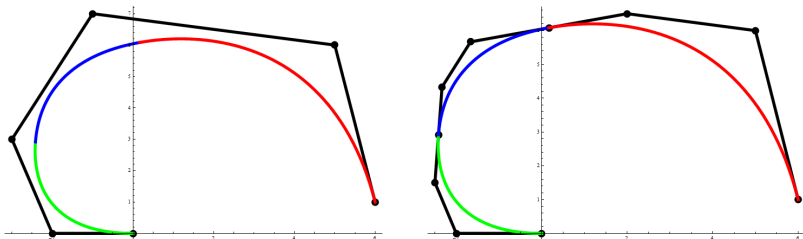
# Rozdělení B-spline křivky na Bézierovské segmenty

- ▶ B-spline křivku stupně  $p$  je možné **rozdělit na sekvenci Bézierovských segmentů** pouze s využitím algoritmu vložené uzlu do uzlového vektoru
- ▶ stačí vložit každý vnitřní uzel tolikrát, aby jeho **výsledná násobnost byla  $p$**
- ▶ vedlejším efektem je samozřejmě výrazné **zvýšení počtu řídicích bodů**
- ▶ mohou nastat také **problémy se spojitostí při manipulaci s řídicími body** – zatímco u B-spline křivky se manipulací s řídicími body nemění spojitost výsledné křivky, pokud je křivka rozdělena na jednotlivé Bézierovské segmenty, je značně obtížné zajistit spojitost stejné třídy i po manipulaci s řídicími body



# Rozdělení B-spline křivky na Bézierovské segmenty

- ▶ B-spline křivku stupně  $p$  je možné **rozdělit na sekvenci Bézierovských segmentů** pouze s využitím algoritmu vložené uzlu do uzlového vektoru
- ▶ stačí vložit každý vnitřní uzel tolikrát, aby jeho **výsledná násobnost byla  $p$**
- ▶ vedlejším efektem je samozřejmě výrazné **zvýšení počtu řídicích bodů**
- ▶ mohou nastat také **problémy se spojitostí při manipulaci s řídicími body** – zatímco u B-spline křivky se manipulací s řídicími body nemění spojitost výsledné křivky, pokud je křivka rozdělena na jednotlivé Bézierovské segmenty, je značně obtížné zajistit spojitost stejné třídy i po manipulaci s řídicími body



# de Boorův algoritmus

- ▶ je **zobecněním algoritmu de Casteljaou**, tj. slouží pro **nalezení bodu na B-spline křivce odpovídající hodnotě parametru  $t^*$**  – navíc je nutné zohlednit uzlový vektor
- ▶ algoritmus je založen na faktu, že **zvyšování násobnosti vnitřních uzlů snižuje počet nenulových bázových funkcí v tomto uzlu**, tj. v uzlu násobnosti  $k$  je nejvýše  $p - k + 1$  nenulových bázových funkcí
- ▶ je-li  $t^*$  uzel násobnosti  $p$ , je v něm pouze **jedna** bázová funkce nenulová a nabývá v něm nutně hodnoty 1, tedy  $C(t^*) = N_{i,p}(t^*)\mathbf{P}_i = \mathbf{P}_i$
- ▶ pokud tedy hledáme bod  $C(t^*)$  na křivce, stačí **vložit uzel  $t^*$  do uzlového vektoru tolikrát, aby jeho násobnost byla  $p$**  – poslední vygenerovaný bod je přímo bodem  $C(t^*)$  na křivce
- ▶ de Boorův algoritmus se tedy od algoritmu de Casteljaou liší ve dvou základních věcech:
  - ▶ na rozdíl od pevně daných koeficientů  $1 - t^*$  a  $t^*$ , které se používají v průběhu celého algoritmu de Casteljaou, se **koeficienty v de Boorově algoritmu mění a závisí na uzlovém vektoru**
  - ▶ v de Boorově algoritmu pracujeme pouze s  $p + 1$  řídicími body, které určují oblouk B-spline křivky pro  $t^* \in (t_k, t_{k+1})$ ; algoritmus de Casteljaou vždy pracuje s celým řídicím polygonem

# de Boorův algoritmus

- ▶ je zobecněním algoritmu de Casteljaou, tj. slouží pro nalezení bodu na B-spline křivce odpovídající hodnotě parametru  $t^*$  – navíc je nutné zohlednit uzlový vektor
- ▶ algoritmus je založen na faktu, že zvyšování násobnosti vnitřních uzlů snižuje počet nenulových bázových funkcí v tomto uzlu, tj. v uzlu násobnosti  $k$  je nejvýše  $p - k + 1$  nenulových bázových funkcí
- ▶ je-li  $t^*$  uzel násobnosti  $p$ , je v něm pouze jedna bázová funkce nenulová a nabývá v něm nutně hodnoty 1, tedy  $C(t^*) = N_{i,p}(t^*)\mathbf{P}_i = \mathbf{P}_i$
- ▶ pokud tedy hledáme bod  $C(t^*)$  na křivce, stačí vložit uzel  $t^*$  do uzlového vektoru tolikrát, aby jeho násobnost byla  $p$  – poslední vygenerovaný bod je přímo bodem  $C(t^*)$  na křivce
- ▶ de Boorův algoritmus se tedy od algoritmu de Casteljaou liší ve dvou základních věcech:
  - ▶ na rozdíl od pevně daných koeficientů  $1 - t^*$  a  $t^*$ , které se používají v průběhu celého algoritmu de Casteljaou, se koeficienty v de Boorově algoritmu mění a závisí na uzlovém vektoru
  - ▶ v de Boorově algoritmu pracujeme pouze s  $p + 1$  řídicími body, které určují oblouk B-spline křivky pro  $t^* \in (t_k, t_{k+1})$ ; algoritmus de Casteljaou vždy pracuje s celým řídicím polygonem

# de Boorův algoritmus

- ▶ je zobecněním algoritmu de Casteljaou, tj. slouží pro nalezení bodu na B-spline křivce odpovídající hodnotě parametru  $t^*$  – navíc je nutné zohlednit uzlový vektor
- ▶ algoritmus je založen na faktu, že zvyšování násobnosti vnitřních uzlů snižuje počet nenulových bázových funkcí v tomto uzlu, tj. v uzlu násobnosti  $k$  je nejvýše  $p - k + 1$  nenulových bázových funkcí
- ▶ je-li  $t^*$  uzel násobnosti  $p$ , je v něm pouze jedna bázová funkce nenulová a nabývá v něm nutně hodnoty 1, tedy  $C(t^*) = N_{i,p}(t^*)\mathbf{P}_i = \mathbf{P}_i$
- ▶ pokud tedy hledáme bod  $C(t^*)$  na křivce, stačí vložit uzel  $t^*$  do uzlového vektoru tolikrát, aby jeho násobnost byla  $p$  – poslední vygenerovaný bod je přímo bodem  $C(t^*)$  na křivce
- ▶ de Boorův algoritmus se tedy od algoritmu de Casteljaou liší ve dvou základních věcech:
  - ▶ na rozdíl od pevně daných koeficientů  $1 - t^*$  a  $t^*$ , které se používají v průběhu celého algoritmu de Casteljaou, se koeficienty v de Boorově algoritmu mění a závisí na uzlovém vektoru
  - ▶ v de Boorově algoritmu pracujeme pouze s  $p + 1$  řídicími body, které určují oblouk B-spline křivky pro  $t^* \in (t_k, t_{k+1})$ ; algoritmus de Casteljaou vždy pracuje s celým řídicím polygonem

# de Boorův algoritmus

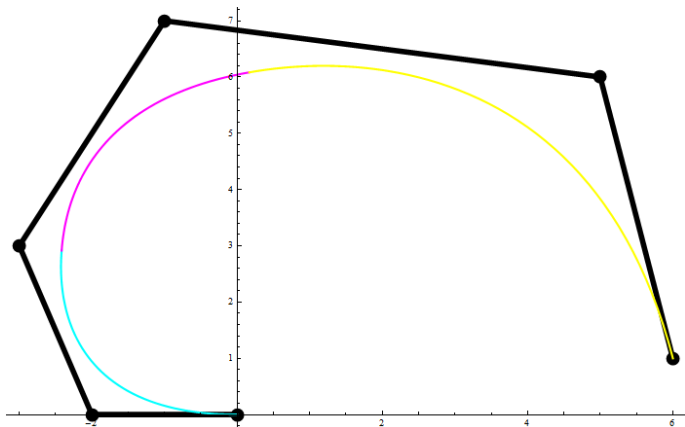
- ▶ je **zobecněním algoritmu de Casteljaou**, tj. slouží pro **nalezení bodu na B-spline křivce odpovídající hodnotě parametru  $t^*$**  – navíc je nutné zohlednit uzlový vektor
- ▶ algoritmus je založen na faktu, že **zvyšování násobnosti vnitřních uzlů snižuje počet nenulových bázových funkcí v tomto uzlu**, tj. v uzlu násobnosti  $k$  je nejvýše  $p - k + 1$  nenulových bázových funkcí
- ▶ je-li  $t^*$  uzel násobnosti  $p$ , je v něm pouze **jedna** bázová funkce nenulová a nabývá v něm nutně hodnoty 1, tedy  $C(t^*) = N_{i,p}(t^*)\mathbf{P}_i = \mathbf{P}_i$
- ▶ pokud tedy hledáme bod  $C(t^*)$  na křivce, stačí **vložit uzel  $t^*$  do uzlového vektoru tolikrát, aby jeho násobnost byla  $p$**  – poslední vygenerovaný bod je přímo bodem  $C(t^*)$  na křivce
- ▶ de Boorův algoritmus se tedy od algoritmu de Casteljaou liší ve dvou základních věcech:
  - ▶ na rozdíl od pevně daných koeficientů  $1 - t^*$  a  $t^*$ , které se používají v průběhu celého algoritmu de Casteljaou, se **koeficienty v de Boorově algoritmu mění a závisí na uzlovém vektoru**
  - ▶ v de Boorově algoritmu pracujeme pouze s  $p + 1$  řídicími body, které určují oblouk B-spline křivky pro  $t^* \in (t_k, t_{k+1})$ ; algoritmus de Casteljaou vždy pracuje s celým řídicím polygonem

# de Boorův algoritmus

- ▶ je zobecněním algoritmu de Casteljaou, tj. slouží pro nalezení bodu na B-spline křivce odpovídající hodnotě parametru  $t^*$  – navíc je nutné zohlednit uzlový vektor
- ▶ algoritmus je založen na faktu, že zvyšování násobnosti vnitřních uzlů snižuje počet nenulových bázových funkcí v tomto uzlu, tj. v uzlu násobnosti  $k$  je nejvýše  $p - k + 1$  nenulových bázových funkcí
- ▶ je-li  $t^*$  uzel násobnosti  $p$ , je v něm pouze jedna bázová funkce nenulová a nabývá v něm nutně hodnoty 1, tedy  $C(t^*) = N_{i,p}(t^*)\mathbf{P}_i = \mathbf{P}_i$
- ▶ pokud tedy hledáme bod  $C(t^*)$  na křivce, stačí vložit uzel  $t^*$  do uzlového vektoru tolikrát, aby jeho násobnost byla  $p$  – poslední vygenerovaný bod je přímo bodem  $C(t^*)$  na křivce
- ▶ de Boorův algoritmus se tedy od algoritmu de Casteljaou liší ve dvou základních věcech:
  - ▶ na rozdíl od pevně daných koeficientů  $1 - t^*$  a  $t^*$ , které se používají v průběhu celého algoritmu de Casteljaou, se koeficienty v de Boorově algoritmu mění a závisí na uzlovém vektoru
  - ▶ v de Boorově algoritmu pracujeme pouze s  $p + 1$  řídicími body, které určují oblouk B-spline křivky pro  $t^* \in (t_k, t_{k+1})$ ; algoritmus de Casteljaou vždy pracuje s celým řídicím polygonem

# de Boorův algoritmus – příklad

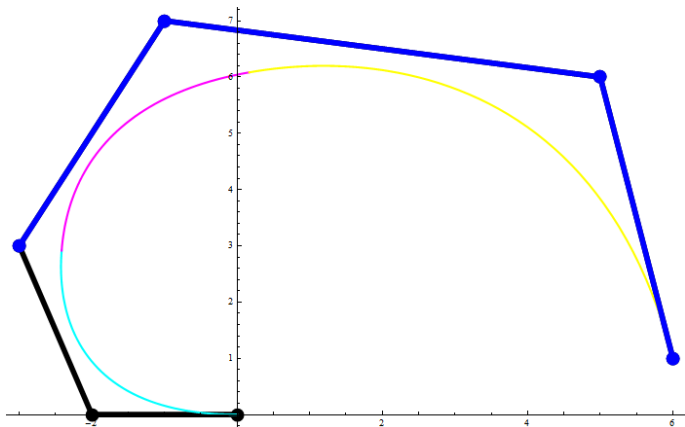
- ▶ mějme dán řídicí polygon  $\mathbf{P} = ([0, 0], [-2, 0], [-3, 3], [-1, 7], [5, 6], [6, 1])$  a uzlový vektor  $T = (0, 0, 0, 0, 1/3, 2/3, 1, 1, 1, 1)$ , chceme najít bod na B-spline křivce pro parametr  $t^* = 4/5$





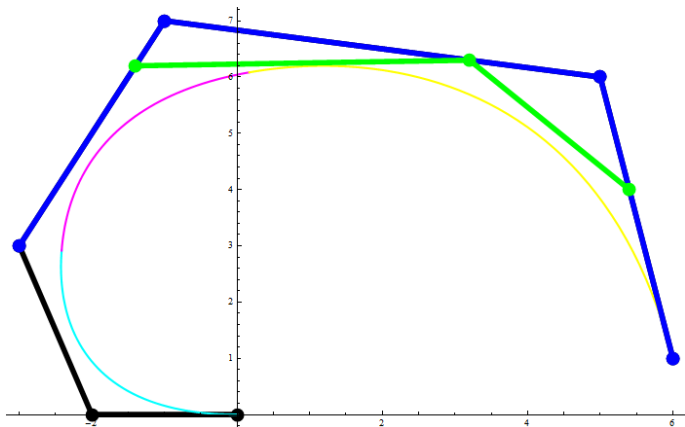
# de Boorův algoritmus – příklad

- mějme dán řídicí polygon  $\mathbf{P} = ([0, 0], [-2, 0], [-3, 3], [-1, 7], [5, 6], [6, 1])$  a uzlový vektor  $T = (0, 0, 0, 0, 1/3, 2/3, 1, 1, 1, 1)$ , chceme najít bod na B-spline křivce pro parametr  $t^* = 4/5$



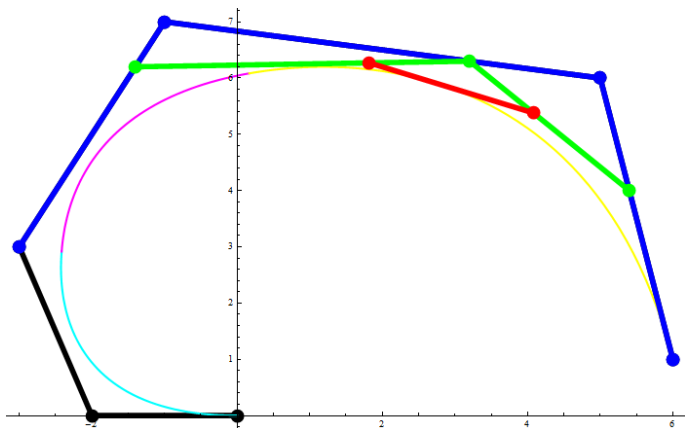
# de Boorův algoritmus – příklad

- mějme dán řídicí polygon  $\mathbf{P} = ([0, 0], [-2, 0], [-3, 3], [-1, 7], [5, 6], [6, 1])$  a uzlový vektor  $T = (0, 0, 0, 0, 1/3, 2/3, 1, 1, 1, 1)$ , chceme najít bod na B-spline křivce pro parametr  $t^* = 4/5$



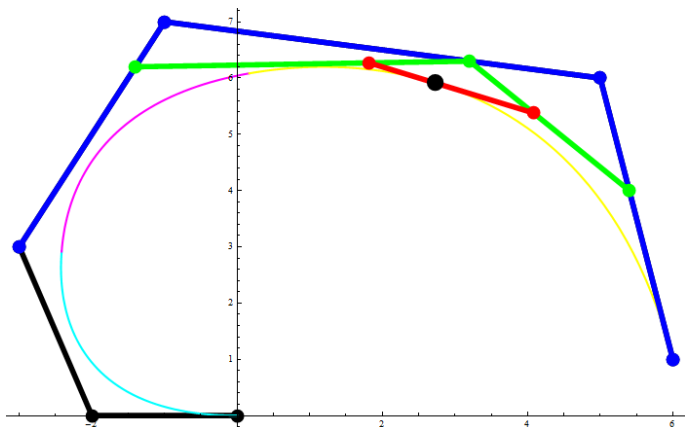
# de Boorův algoritmus – příklad

- mějme dán řídicí polygon  $\mathbf{P} = ([0, 0], [-2, 0], [-3, 3], [-1, 7], [5, 6], [6, 1])$  a uzlový vektor  $T = (0, 0, 0, 0, 1/3, 2/3, 1, 1, 1, 1)$ , chceme najít bod na B-spline křivce pro parametr  $t^* = 4/5$



# de Boorův algoritmus – příklad

- mějme dán řídicí polygon  $\mathbf{P} = ([0, 0], [-2, 0], [-3, 3], [-1, 7], [5, 6], [6, 1])$  a uzlový vektor  $T = (0, 0, 0, 0, 1/3, 2/3, 1, 1, 1, 1)$ , chceme najít bod na B-spline křivce pro parametr  $t^* = 4/5$



# Racionální Bézierovy křivky

# Racionální Bézierovy křivky

- ▶ některé standardní objekty, jako např. kružnice, resp. její části, **nelze popsat pomocí Bézierových křivek**
- ▶ důvodem může být, že tyto objekty není možné popsat polynomiální parametrizací a je potřeba použít **racionální lomené funkce**
- ▶ proto se zavádí **racionální specializace Bézierových křivek** (a později také B-spline křivek)
- ▶ **racionální Bézierova křivka** již není určena pouze řídicím polygonem, ale také **váhami řídicích bodů**
- ▶ pokud  $\mathbf{B}_i = [\mathbf{B}_{i,x}, \mathbf{B}_{i,y}]$ ,  $i = 0, \dots, n$  jsou řídicí body a  $w_i$  jsou váhy těchto bodů, potom tzv. **projektivní řídicí body** racionální Bézierovy křivky jsou

$$\mathbf{B}_i^w = [w_i \mathbf{B}_{i,x}, w_i \mathbf{B}_{i,y}, w_i], \quad i = 0, \dots, n$$

- ▶ parametrizaci racionální Bézierovy křivky je potom možné získat ze vztahu

$$\mathbf{RB}^w(t) = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (1-t)^{n-i} t^i \mathbf{B}_i^w, \quad \text{resp. } \mathbf{RB}(t) = \frac{\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (1-t)^{n-i} t^i w_i \mathbf{B}_i}{\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (1-t)^{n-i} t^i w_i}$$

# Racionální Bézierovy křivky

- ▶ některé standardní objekty, jako např. kružnice, resp. její části, **nelze popsat pomocí Bézierových křivek**
- ▶ důvodem může být, že tyto objekty není možné popsat polynomiální parametrizací a je potřeba použít **racionální lomené funkce**
- ▶ proto se zavádí **racionální specializace Bézierových křivek** (a později také B-spline křivek)
- ▶ **racionální Bézierova křivka** již není určena pouze řídicím polygonem, ale také **váhami řídicích bodů**
- ▶ pokud  $\mathbf{B}_i = [\mathbf{B}_{i,x}, \mathbf{B}_{i,y}]$ ,  $i = 0, \dots, n$  jsou řídicí body a  $w_i$  jsou váhy těchto bodů, potom tzv. **projektivní řídicí body** racionální Bézierovy křivky jsou

$$\mathbf{B}_i^w = [w_i \mathbf{B}_{i,x}, w_i \mathbf{B}_{i,y}, w_i], \quad i = 0, \dots, n$$

- ▶ parametrizaci racionální Bézierovy křivky je potom možné získat ze vztahu

$$\mathbf{RB}^w(t) = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (1-t)^{n-i} t^i \mathbf{B}_i^w, \quad \text{resp. } \mathbf{RB}(t) = \frac{\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (1-t)^{n-i} t^i w_i \mathbf{B}_i}{\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (1-t)^{n-i} t^i w_i}$$

# Racionální Bézierovy křivky

- ▶ některé standardní objekty, jako např. kružnice, resp. její části, **nelze popsat pomocí Bézierových křivek**
- ▶ důvodem může být, že tyto objekty není možné popsat polynomiální parametrizací a je potřeba použít **racionální lomené funkce**
- ▶ proto se zavádí **racionální specializace Bézierových křivek** (a později také B-spline křivek)
- ▶ **racionální Bézierova křivka** již není určena pouze řídicím polygonem, ale také **váhami řídicích bodů**
- ▶ pokud  $\mathbf{B}_i = [\mathbf{B}_{i,x}, \mathbf{B}_{i,y}]$ ,  $i = 0, \dots, n$  jsou řídicí body a  $w_i$  jsou váhy těchto bodů, potom tzv. **projektivní řídicí body** racionální Bézierovy křivky jsou

$$\mathbf{B}_i^w = [w_i \mathbf{B}_{i,x}, w_i \mathbf{B}_{i,y}, w_i], \quad i = 0, \dots, n$$

- ▶ parametrizaci racionální Bézierovy křivky je potom možné získat ze vztahu

$$\mathbf{RB}^w(t) = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (1-t)^{n-i} t^i \mathbf{B}_i^w, \quad \text{resp. } \mathbf{RB}(t) = \frac{\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (1-t)^{n-i} t^i w_i \mathbf{B}_i}{\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (1-t)^{n-i} t^i w_i}$$



# Racionální Bézierovy křivky

- ▶ některé standardní objekty, jako např. kružnice, resp. její části, **nelze popsat pomocí Bézierových křivek**
- ▶ důvodem může být, že tyto objekty není možné popsat polynomiální parametrizací a je potřeba použít **racionální lomené funkce**
- ▶ proto se zavádí **racionální specializace Bézierových křivek** (a později také B-spline křivek)
- ▶ **racionální Bézierova křivka** již není určena pouze řídicím polygonem, ale také **váhami řídicích bodů**
- ▶ pokud  $\mathbf{B}_i = [\mathbf{B}_{i,x}, \mathbf{B}_{i,y}]$ ,  $i = 0, \dots, n$  jsou řídicí body a  $w_i$  jsou váhy těchto bodů, potom tzv. **projektivní řídicí body** racionální Bézierovy křivky jsou

$$\mathbf{B}_i^w = [w_i \mathbf{B}_{i,x}, w_i \mathbf{B}_{i,y}, w_i], \quad i = 0, \dots, n$$

- ▶ parametrizaci racionální Bézierovy křivky je potom možné získat ze vztahu

$$\mathbf{RB}^w(t) = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (1-t)^{n-i} t^i \mathbf{B}_i^w, \quad \text{resp. } \mathbf{RB}(t) = \frac{\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (1-t)^{n-i} t^i w_i \mathbf{B}_i}{\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (1-t)^{n-i} t^i w_i}$$

# Racionální Bézierovy křivky

- ▶ některé standardní objekty, jako např. kružnice, resp. její části, **nelze popsat pomocí Bézierových křivek**
- ▶ důvodem může být, že tyto objekty není možné popsat polynomiální parametrizací a je potřeba použít **racionální lomené funkce**
- ▶ proto se zavádí **racionální specializace Bézierových křivek** (a později také B-spline křivek)
- ▶ **racionální Bézierova křivka** již není určena pouze řídicím polygonem, ale také **váhami řídicích bodů**
- ▶ pokud  $\mathbf{B}_i = [\mathbf{B}_{i,x}, \mathbf{B}_{i,y}]$ ,  $i = 0, \dots, n$  jsou řídicí body a  $w_i$  jsou váhy těchto bodů, potom tzv. **projektivní řídicí body** racionální Bézierovy křivky jsou

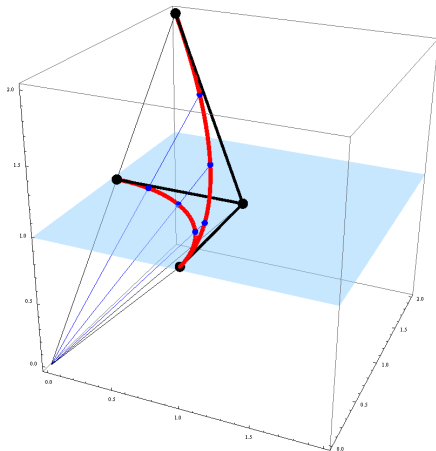
$$\mathbf{B}_i^w = [w_i \mathbf{B}_{i,x}, w_i \mathbf{B}_{i,y}, w_i], \quad i = 0, \dots, n$$

- ▶ parametrizaci racionální Bézierovy křivky je potom možné získat ze vztahu

$$\mathbf{RB}^w(t) = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (1-t)^{n-i} t^i \mathbf{B}_i^w, \quad \text{resp. } \mathbf{RB}(t) = \frac{\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (1-t)^{n-i} t^i w_i \mathbf{B}_i}{\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (1-t)^{n-i} t^i w_i}$$

# Racionální Bézierovy křivky

- ▶ projektivní řídicí body potom polynomiální (prostorovou) Bézierovu křivku v projektivním rozšíření  $\mathbb{R}^2$  a **odhomogenizováním** vzhledem k poslední souřadnici (vydělením poslední souřadnicí) dostáváme racionální parametrizaci rovinné racionální Bézierovy křivky



# Racionální algoritmus de Casteljaou

- ▶ algoritmus de Casteljaou pro racionální Bézierovy křivky je standardní algoritmus pro polynomiální Bézierovy křivky **použitý na projektivní řídicí body  $B_i^w$** ,  $i = 0, \dots, n$ , řídicího polygonu
- ▶ např. pro kubickou racionální Bézierovy křivku určenou řídicími body  $B_0, \dots, B_3$  a jejich váhami  $w_0, \dots, w_3$  platí

$$B_{i,1}^w = (1-t)B_{i,0}^w + tB_{i+1,0}^w, \quad j = 0, 1, 2$$

- ▶ je zřejmé, že **váha nového bodu  $B_{i,1}$**  je určena třetí souřadnicí bodu  $B_{i,1}^w$  a je rovna  $w_{i,1} = (1-t)w_{i,0} + tw_{i+1,0}$
- ▶ kartézské souřadnice **nového bodu** potom tedy jsou

$$B_{i,1} = (1-t) \frac{w_{i,0}}{w_{i,1}} B_{i,0} + t \frac{w_{i+1,0}}{w_{i,1}} B_{i+1,0}$$

- ▶ celý proces je možné obecně zapsat ve tvaru

$$B_i^0 = B_i,$$

$$B_i^j = (1-t) \frac{w_i^{j-1}}{w_i^j} B_i^{j-1} + t \frac{w_{i+1}^{j-1}}{w_i^j} B_{i+1}^{j-1},$$

$$w_i^j = (1-t) w_i^{j-1} + t w_{i+1}^{j-1}, \quad j = 1, \dots, n, \quad i = 0, \dots, n-j$$

# Racionální algoritmus de Casteljau

- ▶ algoritmus de Casteljau pro racionální Bézierovy křivky je standardní algoritmus pro polynomiální Bézierovy křivky **použitý na projektivní řídicí body  $\mathbf{B}_i^w$ ,  $i = 0, \dots, n$ , řídicího polygonu**
- ▶ např. pro kubickou racionální Bézierovy křivku určenou řídicími body  $\mathbf{B}_0, \dots, \mathbf{B}_3$  a jejich váhami  $w_0, \dots, w_3$  platí

$$\mathbf{B}_{i,1}^w = (1-t)\mathbf{B}_{i,0}^w + t\mathbf{B}_{i+1,0}^w, \quad j = 0, 1, 2$$

- ▶ je zřejmé, že **váha nového bodu  $\mathbf{B}_{i,1}$**  je určena třetí souřadnicí bodu  $\mathbf{B}_{i,1}^w$  a je rovna  $w_{i,1} = (1-t)w_{i,0} + tw_{i+1,0}$
- ▶ kartézské souřadnice **nového bodu** potom tedy jsou

$$\mathbf{B}_{i,1} = (1-t) \frac{w_{i,0}}{w_{i,1}} \mathbf{B}_{i,0} + t \frac{w_{i+1,0}}{w_{i,1}} \mathbf{B}_{i+1,0}$$

- ▶ celý proces je možné obecně zapsat ve tvaru

$$\mathbf{B}_i^0 = \mathbf{B}_i,$$

$$\mathbf{B}_i^j = (1-t) \frac{w_i^{j-1}}{w_i^j} \mathbf{B}_i^{j-1} + t \frac{w_{i+1}^{j-1}}{w_i^j} \mathbf{B}_{i+1}^{j-1},$$

$$w_i^j = (1-t) w_i^{j-1} + t w_{i+1}^{j-1}, \quad j = 1, \dots, n, \quad i = 0, \dots, n-j$$

# Racionální algoritmus de Casteljau

- ▶ algoritmus de Casteljau pro racionální Bézierovy křivky je standardní algoritmus pro polynomiální Bézierovy křivky **použitý na projektivní řídicí body  $\mathbf{B}_i^w$** ,  $i = 0, \dots, n$ , řídicího polygonu
- ▶ např. pro kubickou racionální Bézierovy křivku určenou řídicími body  $\mathbf{B}_0, \dots, \mathbf{B}_3$  a jejich váhami  $w_0, \dots, w_3$  platí

$$\mathbf{B}_{i,1}^w = (1-t)\mathbf{B}_{i,0}^w + t\mathbf{B}_{i+1,0}^w, \quad j = 0, 1, 2$$

- ▶ je zřejmé, že **váha nového bodu  $\mathbf{B}_{i,1}$**  je určena třetí souřadnicí bodu  $\mathbf{B}_{i,1}^w$  a je rovna  $w_{i,1} = (1-t)w_{i,0} + tw_{i+1,0}$
- ▶ kartézské souřadnice **nového bodu** potom tedy jsou

$$\mathbf{B}_{i,1} = (1-t) \frac{w_{i,0}}{w_{i,1}} \mathbf{B}_{i,0} + t \frac{w_{i+1,0}}{w_{i,1}} \mathbf{B}_{i+1,0}$$

- ▶ celý proces je možné obecně zapsat ve tvaru

$$\mathbf{B}_i^0 = \mathbf{B}_i,$$

$$\mathbf{B}_i^j = (1-t) \frac{w_i^{j-1}}{w_i^j} \mathbf{B}_i^{j-1} + t \frac{w_{i+1}^{j-1}}{w_i^j} \mathbf{B}_{i+1}^{j-1},$$

$$w_i^j = (1-t) w_i^{j-1} + t w_{i+1}^{j-1}, \quad j = 1, \dots, n, \quad i = 0, \dots, n-j$$

# Racionální algoritmus de Casteljaou

- ▶ algoritmus de Casteljaou pro racionální Bézierovy křivky je standardní algoritmus pro polynomiální Bézierovy křivky **použitý na projektivní řídicí body  $\mathbf{B}_i^w$** ,  $i = 0, \dots, n$ , řídicího polygonu
- ▶ např. pro kubickou racionální Bézierovy křivku určenou řídicími body  $\mathbf{B}_0, \dots, \mathbf{B}_3$  a jejich váhami  $w_0, \dots, w_3$  platí

$$\mathbf{B}_{i,1}^w = (1-t)\mathbf{B}_{i,0}^w + t\mathbf{B}_{i+1,0}^w, \quad j = 0, 1, 2$$

- ▶ je zřejmé, že **váha nového bodu  $\mathbf{B}_{i,1}$**  je určena třetí souřadnicí bodu  $\mathbf{B}_{i,1}^w$  a je rovna  $w_{i,1} = (1-t)w_{i,0} + tw_{i+1,0}$
- ▶ kartézské souřadnice **nového bodu** potom tedy jsou

$$\mathbf{B}_{i,1} = (1-t) \frac{w_{i,0}}{w_{i,1}} \mathbf{B}_{i,0} + t \frac{w_{i+1,0}}{w_{i,1}} \mathbf{B}_{i+1,0}$$

- ▶ celý proces je možné obecně zapsat ve tvaru

$$\mathbf{B}_i^0 = \mathbf{B}_i,$$

$$\mathbf{B}_i^j = (1-t) \frac{w_i^{j-1}}{w_i^j} \mathbf{B}_i^{j-1} + t \frac{w_{i+1}^{j-1}}{w_i^j} \mathbf{B}_{i+1}^{j-1},$$

$$w_i^j = (1-t) w_i^{j-1} + t w_{i+1}^{j-1}, \quad j = 1, \dots, n, \quad i = 0, \dots, n-j$$

# Racionální algoritmus de Casteljau

- ▶ algoritmus de Casteljau pro racionální Bézierovy křivky je standardní algoritmus pro polynomiální Bézierovy křivky **použitý na projektivní řídicí body  $\mathbf{B}_i^w$** ,  $i = 0, \dots, n$ , řídicího polygonu
- ▶ např. pro kubickou racionální Bézierovy křivku určenou řídicími body  $\mathbf{B}_0, \dots, \mathbf{B}_3$  a jejich váhami  $w_0, \dots, w_3$  platí

$$\mathbf{B}_{i,1}^w = (1-t)\mathbf{B}_{i,0}^w + t\mathbf{B}_{i+1,0}^w, \quad j = 0, 1, 2$$

- ▶ je zřejmé, že **váha nového bodu  $\mathbf{B}_{i,1}$**  je určena třetí souřadnicí bodu  $\mathbf{B}_{i,1}^w$  a je rovna  $w_{i,1} = (1-t)w_{i,0} + tw_{i+1,0}$
- ▶ kartézské souřadnice **nového bodu** potom tedy jsou

$$\mathbf{B}_{i,1} = (1-t) \frac{w_{i,0}}{w_{i,1}} \mathbf{B}_{i,0} + t \frac{w_{i+1,0}}{w_{i,1}} \mathbf{B}_{i+1,0}$$

- ▶ celý proces je možné obecně zapsat ve tvaru

$$\mathbf{B}_i^0 = \mathbf{B}_i,$$

$$\mathbf{B}_i^j = (1-t) \frac{w_i^{j-1}}{w_i^j} \mathbf{B}_i^{j-1} + t \frac{w_{i+1}^{j-1}}{w_i^j} \mathbf{B}_{i+1}^{j-1},$$

$$w_i^j = (1-t) w_i^{j-1} + t w_{i+1}^{j-1}, \quad j = 1, \dots, n, \quad i = 0, \dots, n-j$$



# Kuželosečky jako racionální Bézierovy křivky

- ▶ uvažujme řídicí polygon daný body  $\mathbf{P}_0 = (-x, 0)$ ,  $\mathbf{P}_1 = (y, z)$ ,  $\mathbf{P}_2 = (x, 0)$  a váhami  $w_0 = 1$ ,  $w_1 = w$ ,  $w_2 = 1$
- ▶ pro parametr  $t = 1/2$  dostáváme bod na křivce

$$\mathbf{C}(1/2) = \frac{w}{1+w} \mathbf{P}_1,$$

přičemž číslo  $w/(1+w)$  udává poměr  $|\mathbf{MX}|/|\mathbf{MP}_1|$

- ▶ pro  $w = 1$  dostáváme **parabolu** a  $|\mathbf{MX}|/|\mathbf{MP}_1| = 1/2$

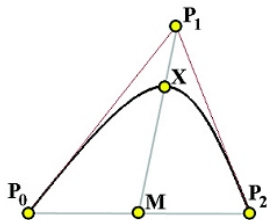
# Kuželosečky jako racionální Bézierovy křivky

- ▶ uvažujme řídicí polygon daný body  $\mathbf{P}_0 = (-x, 0)$ ,  $\mathbf{P}_1 = (y, z)$ ,  $\mathbf{P}_2 = (x, 0)$  a váhami  $w_0 = 1$ ,  $w_1 = w$ ,  $w_2 = 1$
- ▶ pro parametr  $t = 1/2$  dostáváme bod na křivce

$$\mathbf{C}(1/2) = \frac{w}{1+w} \mathbf{P}_1,$$

přičemž číslo  $w/(1+w)$  udává poměr  $|\mathbf{MX}|/|\mathbf{MP}_1|$

- ▶ pro  $w = 1$  dostáváme **parabolu** a  $|\mathbf{MX}|/|\mathbf{MP}_1| = 1/2$



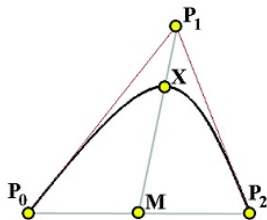
# Kuželosečky jako racionální Bézierovy křivky

- ▶ uvažujme řídicí polygon daný body  $\mathbf{P}_0 = (-x, 0)$ ,  $\mathbf{P}_1 = (y, z)$ ,  $\mathbf{P}_2 = (x, 0)$  a váhami  $w_0 = 1$ ,  $w_1 = w$ ,  $w_2 = 1$
- ▶ pro parametr  $t = 1/2$  dostáváme bod na křivce

$$\mathbf{C}(1/2) = \frac{w}{1+w} \mathbf{P}_1,$$

přičemž číslo  $w/(1+w)$  udává poměr  $|\mathbf{MX}|/|\mathbf{MP}_1|$

- ▶ pro  $w = 1$  dostáváme **parabolu** a  $|\mathbf{MX}|/|\mathbf{MP}_1| = 1/2$



# Kuželosečky jako racionální Bézierovy křivky

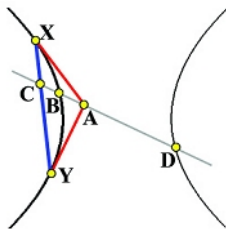
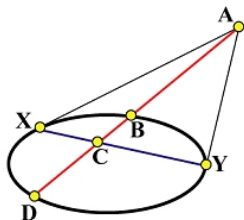
- ▶ pro jaká  $w$  dostaneme **elipsu**, resp. **hyperbolu**?
  - ▶ z projektivní geometrie víme, že platí

$$\frac{|AB|}{|CB|} = \frac{|DA|}{|DC|}$$

- ▶ jelikož  $|CA| = |CB| + |AB|$ , platí

$$\frac{w}{1+w} = \frac{|MX|}{|MP_1|} = \frac{|CB|}{|CA|} = \frac{|CB|}{|CB| + |CA|} = \frac{1}{1 + \frac{|AB|}{|CB|}} = \frac{1}{1 + \frac{|DA|}{|DC|}}$$

- ▶ pro elipsu (resp. hyperbolu) je  $|DA| > |DC|$  (resp.  $|DA| < |DC|$ ) a tedy  $w < 1$  (resp.  $w > 1$ )



# Kuželosečky jako racionální Bézierovy křivky

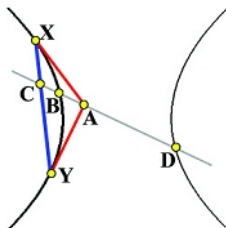
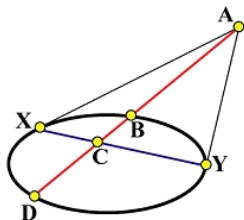
- ▶ pro jaká  $w$  dostaneme **elipsu**, resp. **hyperbolu**?
- ▶ z projektivní geometrie víme, že platí

$$\frac{|AB|}{|CB|} = \frac{|DA|}{|DC|}$$

- ▶ jelikož  $|CA| = |CB| + |AB|$ , platí

$$\frac{w}{1+w} = \frac{|MX|}{|MP_1|} = \frac{|CB|}{|CA|} = \frac{|CB|}{|CB| + |CA|} = \frac{1}{1 + \frac{|AB|}{|CB|}} = \frac{1}{1 + \frac{|DA|}{|DC|}}$$

- ▶ pro elipsu (resp. hyperbolu) je  $|DA| > |DC|$  (resp.  $|DA| < |DC|$ ) a tedy  $w < 1$  (resp.  $w > 1$ )



# Kuželosečky jako racionální Bézierovy křivky

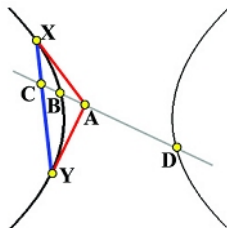
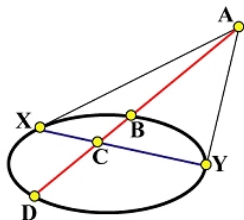
- ▶ pro jaká  $w$  dostaneme **elipsu**, resp. **hyperbolu**?
  - ▶ z projektivní geometrie víme, že platí

$$\frac{|AB|}{|CB|} = \frac{|DA|}{|DC|}$$

- ▶ jelikož  $|CA| = |CB| + |AB|$ , platí

$$\frac{w}{1+w} = \frac{|MX|}{|MP_1|} = \frac{|CB|}{|CA|} = \frac{|CB|}{|CB| + |CA|} = \frac{1}{1 + \frac{|AB|}{|CB|}} = \frac{1}{1 + \frac{|DA|}{|DC|}}$$

- ▶ pro elipsu (resp. hyperbolu) je  $|DA| > |DC|$  (resp.  $|DA| < |DC|$ ) a tedy  $w < 1$  (resp.  $w > 1$ )



# Kuželosečky jako racionální Bézierovy křivky

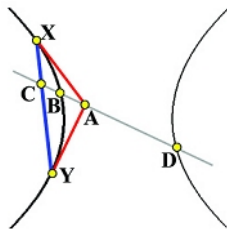
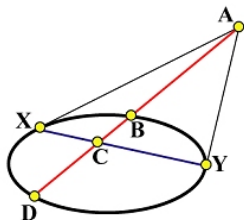
- ▶ pro jaká  $w$  dostaneme **elipsu**, resp. **hyperbolu**?
  - ▶ z projektivní geometrie víme, že platí

$$\frac{|AB|}{|CB|} = \frac{|DA|}{|DC|}$$

- ▶ jelikož  $|CA| = |CB| + |AB|$ , platí

$$\frac{w}{1+w} = \frac{|MX|}{|MP_1|} = \frac{|CB|}{|CA|} = \frac{|CB|}{|CB| + |CA|} = \frac{1}{1 + \frac{|AB|}{|CB|}} = \frac{1}{1 + \frac{|DA|}{|DC|}}$$

- ▶ pro elipsu (resp. hyperbolu) je  $|DA| > |DC|$  (resp.  $|DA| < |DC|$ ) a tedy  $w < 1$  (resp.  $w > 1$ )



# Oblouk kružnice jako racionální Bézierova křivka

- ▶  $P_0P_1$ , resp.  $P_1P_2$  určují tečnu ke kružnici v  $P_0$ , resp.  $P_2$ ,  $|P_0P_1| = |P_1P_2|$
- ▶  $w_0 = 1$ ,  $w_2 = 1$ , hledáme **váhu  $w$  bodu  $P_1$**
- ▶ z pravoúhlého trojúhelníka  $OMP_0$  dostáváme

$$|MX| = |OX| - |OM| = r - r \sin a$$

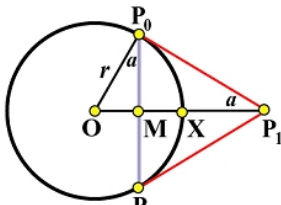
- ▶ z pravoúhlého trojúhelníka  $OP_0P_1$  dostáváme

$$|MP_1| = |OP_1| - |OM| = \frac{r}{\sin a} - r \sin a$$

- ▶ potom

$$\frac{w}{1+w} = \frac{|MX|}{|MP_1|} = \frac{\sin a}{1+\sin a}$$

a tedy **váha  $P_1$  musí být  $w = \sin a$** , kde  $a$  je polovina úhlu  $P_0P_1P_2$





# Oblouk kružnice jako racionální Bézierova křivka

- ▶  $P_0P_1$ , resp.  $P_1P_2$  určují tečnu ke kružnici v  $P_0$ , resp.  $P_2$ ,  $|P_0P_1| = |P_1P_2|$
- ▶  $w_0 = 1$ ,  $w_2 = 1$ , hledáme **váhu  $w$  bodu  $P_1$**
- ▶ z pravoúhlého trojúhelníka  **$OMP_0$**  dostáváme

$$|MX| = |OX| - |OM| = r - r \sin a$$

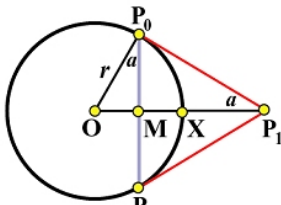
- ▶ z pravoúhlého trojúhelníka  **$OP_0P_1$**  dostáváme

$$|MP_1| = |OP_1| - |OM| = \frac{r}{\sin a} - r \sin a$$

- ▶ potom

$$\frac{w}{1+w} = \frac{|MX|}{|MP_1|} = \frac{\sin a}{1+\sin a}$$

a tedy **váha  $P_1$  musí být  $w = \sin a$** , kde  $a$  je polovina úhlu  $P_0P_1P_2$



# Oblouk kružnice jako racionální Bézierova křivka

- ▶  $P_0P_1$ , resp.  $P_1P_2$  určují tečnu ke kružnici v  $P_0$ , resp.  $P_2$ ,  $|P_0P_1| = |P_1P_2|$
- ▶  $w_0 = 1$ ,  $w_2 = 1$ , hledáme **váhu  $w$  bodu  $P_1$**
- ▶ z pravoúhlého trojúhelníka  **$OMP_0$**  dostáváme

$$|MX| = |OX| - |OM| = r - r \sin a$$

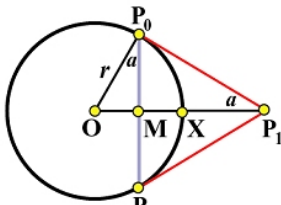
- ▶ z pravoúhlého trojúhelníka  **$OP_0P_1$**  dostáváme

$$|MP_1| = |OP_1| - |OM| = \frac{r}{\sin a} - r \sin a$$

- ▶ potom

$$\frac{w}{1+w} = \frac{|MX|}{|MP_1|} = \frac{\sin a}{1+\sin a}$$

a tedy **váha  $P_1$  musí být  $w = \sin a$** , kde  $a$  je polovina úhlu  $P_0P_1P_2$



# Oblouk kružnice jako racionální Bézierova křivka

- ▶  $P_0P_1$ , resp.  $P_1P_2$  určují tečnu ke kružnici v  $P_0$ , resp.  $P_2$ ,  $|P_0P_1| = |P_1P_2|$
- ▶  $w_0 = 1, w_2 = 1$ , hledáme **váhu  $w$  bodu  $P_1$**
- ▶ z pravoúhlého trojúhelníka  **$OMP_0$**  dostáváme

$$|MX| = |OX| - |OM| = r - r \sin a$$

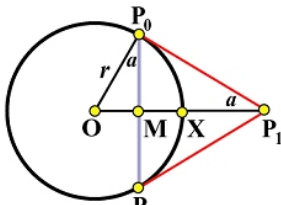
- ▶ z pravoúhlého trojúhelníka  **$OP_0P_1$**  dostáváme

$$|MP_1| = |OP_1| - |OM| = \frac{r}{\sin a} - r \sin a$$

- ▶ potom

$$\frac{w}{1+w} = \frac{|MX|}{|MP_1|} = \frac{\sin a}{1+\sin a}$$

a tedy **váha  $P_1$  musí být  $w = \sin a$** , kde  $a$  je polovina úhlu  $P_0P_1P_2$



# NURBS křivky

# NURBS křivky

- ▶ **NURBS = Non-Uniform Rational B-Splines**
- ▶ pomocí racionálních Bézierových křivek stále nedokážeme popsat celou kružnici, pomocí NURBS křivky ano
- ▶ NURBS křivka je určena **řídícími body**, **váhami** těchto řídících bodů, **stupněm** a **vektorem parametrizace**
- ▶ i pro NURBS křivky může být uzlový vektor **uniformní** nebo **neuniformní**
- ▶ křivky jsou **racionální**, protože parametrizace oblouků křivky jsou tvořeny racionálně lomenými funkcemi
- ▶ váhy fungují obdobně jako u racionálních Bézierových křivek
- ▶ o vektoru parametrizace platí totéž, co bylo řečeno pro polynomiální B-spline křivky
- ▶ analogicky k racionálním Bézierovým křivkám, pro řídící body  $P_i$  a jejich váhy  $w_i$ ,  $i = 0, \dots, n$ , jsou

$$\mathbf{P}_i^w = [w_i(P_i)_1, w_i(P_i)_2, w_i], \quad i = 0, \dots, n$$

tzv. **projektivní řídící body NURBS křivky**

# NURBS křivky

- ▶ **NURBS = Non-Uniform Rational B-Splines**
- ▶ pomocí racionálních Bézierových křivek stále nedokážeme popsat celou kružnici, pomocí NURBS křivky ano
- ▶ NURBS křivka je určena **řídícími body**, **váhami** těchto řídících bodů, **stupněm** a **vektorem parametrizace**
- ▶ i pro NURBS křivky může být uzlový vektor **uniformní** nebo **neuniformní**
- ▶ křivky jsou **racionální**, protože parametrizace oblouků křivky jsou tvořeny racionálně lomenými funkcemi
- ▶ váhy fungují obdobně jako u racionálních Bézierových křivek
- ▶ o vektoru parametrizace platí totéž, co bylo řečeno pro polynomiální B-spline křivky
- ▶ analogicky k racionálním Bézierovým křivkám, pro řídící body  $P_i$  a jejich váhy  $w_i$ ,  $i = 0, \dots, n$ , jsou

$$\mathbf{P}_i^w = [w_i(P_i)_1, w_i(P_i)_2, w_i], \quad i = 0, \dots, n$$

tzv. **projektivní řídící body NURBS křivky**

# NURBS křivky

- ▶ **NURBS = Non-Uniform Rational B-Splines**
- ▶ pomocí racionálních Bézierových křivek stále nedokážeme popsat celou kružnici, pomocí NURBS křivky ano
- ▶ NURBS křivka je určena **řídícími body**, **váhami** těchto řídících bodů, **stupněm** a **vektorem parametrizace**
- ▶ i pro NURBS křivky může být uzlový vektor **uniformní** nebo **neuniformní**
- ▶ křivky jsou **racionální**, protože parametrizace oblouků křivky jsou tvořeny racionálně lomenými funkcemi
- ▶ váhy fungují obdobně jako u racionálních Bézierových křivek
- ▶ o vektoru parametrizace platí totéž, co bylo řečeno pro polynomiální B-spline křivky
- ▶ analogicky k racionálním Bézierovým křivkám, pro řídící body  $P_i$  a jejich váhy  $w_i$ ,  $i = 0, \dots, n$ , jsou

$$\mathbf{P}_i^w = [w_i(P_i)_1, w_i(P_i)_2, w_i], \quad i = 0, \dots, n$$

tzv. **projektivní řídící body NURBS křivky**

# NURBS křivky

- ▶ **NURBS = Non-Uniform Rational B-Splines**
- ▶ pomocí racionálních Bézierových křivek stále nedokážeme popsat celou kružnici, pomocí NURBS křivky ano
- ▶ NURBS křivka je určena **řídícími body**, **váhami** těchto řídících bodů, **stupněm** a **vektorem parametrizace**
- ▶ i pro NURBS křivky může být uzlový vektor **uniformní** nebo **neuniformní**
- ▶ křivky jsou **racionální**, protože parametrizace oblouků křivky jsou tvořeny racionálně lomenými funkcemi
- ▶ váhy fungují obdobně jako u racionálních Bézierových křivek
- ▶ o vektoru parametrizace platí totéž, co bylo řečeno pro polynomiální B-spline křivky
- ▶ analogicky k racionálním Bézierovým křivkám, pro řídící body  $P_i$  a jejich váhy  $w_i$ ,  $i = 0, \dots, n$ , jsou

$$\mathbf{P}_i^w = [w_i(P_i)_1, w_i(P_i)_2, w_i], \quad i = 0, \dots, n$$

tzv. **projektivní řídící body NURBS křivky**



# NURBS křivky

- ▶ **NURBS** = **N**on-**U**niform **R**ational **B**-**S**plines
- ▶ pomocí racionálních Bézierových křivek stále nedokážeme popsat celou kružnici, pomocí NURBS křivky ano
- ▶ NURBS křivka je určena **řídícími body**, **váhami** těchto řídících bodů, **stupněm** a **vektorem parametrizace**
- ▶ i pro NURBS křivky může být uzlový vektor **uniformní** nebo **neuniformní**
- ▶ křivky jsou **racionální**, protože parametrizace oblouků křivky jsou tvořeny racionálně lomenými funkcemi
- ▶ váhy fungují obdobně jako u racionálních Bézierových křivek
- ▶ o vektoru parametrizace platí totéž, co bylo řečeno pro polynomiální B-spline křivky
- ▶ analogicky k racionálním Bézierovým křivkám, pro řídící body  $P_i$  a jejich váhy  $w_i$ ,  $i = 0, \dots, n$ , jsou

$$P_i^w = [w_i(P_i)_1, w_i(P_i)_2, w_i], \quad i = 0, \dots, n$$

tzv. **projektivní řídící body NURBS křivky**

# NURBS křivky

- ▶ **NURBS** = **N**on-**U**niform **R**ational **B**-**S**plines
- ▶ pomocí racionálních Bézierových křivek stále nedokážeme popsat celou kružnici, pomocí NURBS křivky ano
- ▶ NURBS křivka je určena **řídícími body**, **váhami** těchto řídících bodů, **stupněm** a **vektorem parametrizace**
- ▶ i pro NURBS křivky může být uzlový vektor **uniformní** nebo **neuniformní**
- ▶ křivky jsou **racionální**, protože parametrizace oblouků křivky jsou tvořeny racionálně lomenými funkcemi
- ▶ váhy fungují obdobně jako u racionálních Bézierových křivek
- ▶ o vektoru parametrizace platí totéž, co bylo řečeno pro polynomiální B-spline křivky
- ▶ analogicky k racionálním Bézierovým křivkám, pro řídící body  $P_i$  a jejich váhy  $w_i$ ,  $i = 0, \dots, n$ , jsou

$$\mathbf{P}_i^w = [w_i(P_i)_1, w_i(P_i)_2, w_i], \quad i = 0, \dots, n$$

tzv. **projektivní řídící body NURBS křivky**

# NURBS křivky

- ▶ **NURBS = Non-Uniform Rational B-Splines**
- ▶ pomocí racionálních Bézierových křivek stále nedokážeme popsat celou kružnici, pomocí NURBS křivky ano
- ▶ NURBS křivka je určena **řídícími body**, **váhami** těchto řídících bodů, **stupněm** a **vektorem parametrizace**
- ▶ i pro NURBS křivky může být uzlový vektor **uniformní** nebo **neuniformní**
- ▶ křivky jsou **racionální**, protože parametrizace oblouků křivky jsou tvořeny racionálně lomenými funkcemi
- ▶ váhy fungují obdobně jako u racionálních Bézierových křivek
- ▶ o vektoru parametrizace platí totéž, co bylo řečeno pro polynomiální B-spline křivky
- ▶ analogicky k racionálním Bézierovým křivkám, pro řídící body  $P_i$  a jejich váhy  $w_i$ ,  $i = 0, \dots, n$ , jsou

$$P_i^w = [w_i(P_i)_1, w_i(P_i)_2, w_i], \quad i = 0, \dots, n$$

tzv. **projektivní řídící body NURBS křivky**

# NURBS křivky

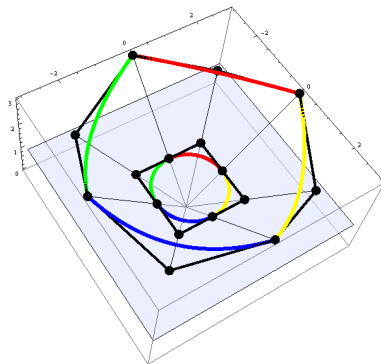
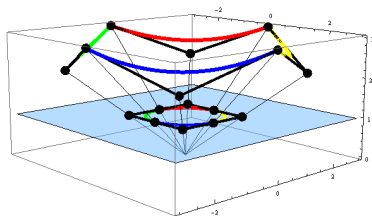
- ▶ **NURBS = Non-Uniform Rational B-Splines**
- ▶ pomocí racionálních Bézierových křivek stále nedokážeme popsat celou kružnici, pomocí NURBS křivky ano
- ▶ NURBS křivka je určena **řídícími body**, **váhami** těchto řídících bodů, **stupněm** a **vektorem parametrizace**
- ▶ i pro NURBS křivky může být uzlový vektor **uniformní** nebo **neuniformní**
- ▶ křivky jsou **racionální**, protože parametrizace oblouků křivky jsou tvořeny racionálně lomenými funkcemi
- ▶ váhy fungují obdobně jako u racionálních Bézierových křivek
- ▶ o vektoru parametrizace platí totéž, co bylo řečeno pro polynomiální B-spline křivky
- ▶ analogicky k racionálním Bézierovým křivkám, pro řídící body  $P_i$  a jejich váhy  $w_i$ ,  $i = 0, \dots, n$ , jsou

$$\mathbf{P}_i^w = [w_i(P_i)_1, w_i(P_i)_2, w_i], \quad i = 0, \dots, n$$

tzv. **projektivní řídící body NURBS křivky**

# NURBS křivky

- ▶ projektivní řídicí body  $P_i^w$  a vektor parametrizace  $T$  určují polynomiální B-spline křivku v projektivním rozšíření  $\mathbb{R}^2$  a odhomogenizováním vzhledem k poslední souřadnici dostáváme racionální parametrizaci rovinné NURBS křivky
- ▶ kružnice na obrázku dole je získána projektivní transformací po částech kvadratické B-spline křivky v  $\mathbb{R}^3$



# NURBS křivky

- ▶ pokud  $\mathbf{P}_i$  a  $w_i$ ,  $i = 0, \dots, n$  jsou řídicí body a váhy NURBS křivky,  $T$  je vektor parametrizace, potom parametrizace **NURBS křivky stupně  $p$**  je

$$C(u) = \frac{\sum_{i=0}^n N_{i,p}(u) w_i \mathbf{P}_i}{\sum_{i=0}^n N_{i,p}(u) w_i} \quad (2)$$

- ▶ pokud  $\mathbf{P}_i^w$  jsou příslušné projektivní řídicí body, potom platí

$$C^w(u) = \sum_{i=0}^n N_{i,p}(u) \mathbf{P}_i^w = \sum_{i=0}^n N_{i,p}(u) (w_i(\mathbf{P}_i)_1, w_i(\mathbf{P}_i)_2, w_i)$$

a odhomogenizováním vzhledem k poslední souřadnici (vydělením poslední souřadnicí) dostáváme vztah (2)

- ▶ vlastnosti obdobné B-spline křivkám – **lokalizace změn**, platí **podmínka konvexního obalu**, **projektivní invariantnost**
- ▶ pokud jsou **váhy všech řídicích bodů stejné**, dostáváme polynomiální B-spline křivku
- ▶ (racionální) Bézierovy křivky a B-spline křivky jsou tedy speciálními případy NURBS křivek

# NURBS křivky

- ▶ pokud  $\mathbf{P}_i$  a  $w_i$ ,  $i = 0, \dots, n$  jsou řídicí body a váhy NURBS křivky,  $T$  je vektor parametrizace, potom parametrizace **NURBS křivky stupně  $p$**  je

$$C(u) = \frac{\sum_{i=0}^n N_{i,p}(u) w_i \mathbf{P}_i}{\sum_{i=0}^n N_{i,p}(u) w_i} \quad (2)$$

- ▶ pokud  $\mathbf{P}_i^w$  jsou příslušné projektivní řídicí body, potom platí

$$C^w(u) = \sum_{i=0}^n N_{i,p}(u) \mathbf{P}_i^w = \sum_{i=0}^n N_{i,p}(u) (w_i(\mathbf{P}_i)_1, w_i(\mathbf{P}_i)_2, w_i)$$

a odhomogenizováním vzhledem k poslední souřadnici (vydělením poslední souřadnicí) dostáváme vztah (2)

- ▶ vlastnosti obdobné B-spline křivkám – **lokalizace změn**, platí **podmínka konvexního obalu**, **projektivní invariantnost**
- ▶ pokud jsou **váhy všech řídicích bodů stejné**, dostáváme polynomiální B-spline křivku
- ▶ (racionální) Bézierovy křivky a B-spline křivky jsou tedy speciálními případy NURBS křivek

# NURBS křivky

- ▶ pokud  $\mathbf{P}_i$  a  $w_i$ ,  $i = 0, \dots, n$  jsou řídicí body a váhy NURBS křivky,  $T$  je vektor parametrizace, potom parametrizace **NURBS křivky stupně  $p$**  je

$$C(u) = \frac{\sum_{i=0}^n N_{i,p}(u) w_i \mathbf{P}_i}{\sum_{i=0}^n N_{i,p}(u) w_i} \quad (2)$$

- ▶ pokud  $\mathbf{P}_i^w$  jsou příslušné projektivní řídicí body, potom platí

$$C^w(u) = \sum_{i=0}^n N_{i,p}(u) \mathbf{P}_i^w = \sum_{i=0}^n N_{i,p}(u) (w_i(\mathbf{P}_i)_1, w_i(\mathbf{P}_i)_2, w_i)$$

a odhomogenizováním vzhledem k poslední souřadnici (vydělením poslední souřadnicí) dostáváme vztah (2)

- ▶ vlastnosti obdobné B-spline křivkám – **lokalizace změn**, platí **podmínka konvexního obalu**, **projektivní invariantnost**
- ▶ pokud jsou **váhy všech řídicích bodů stejné**, dostáváme polynomiální B-spline křivku
- ▶ (racionální) Bézierovy křivky a B-spline křivky jsou tedy speciálními případy NURBS křivek



# NURBS křivky

- ▶ pokud  $\mathbf{P}_i$  a  $w_i$ ,  $i = 0, \dots, n$  jsou řídicí body a váhy NURBS křivky,  $T$  je vektor parametrizace, potom parametrizace **NURBS křivky stupně  $p$**  je

$$C(u) = \frac{\sum_{i=0}^n N_{i,p}(u) w_i \mathbf{P}_i}{\sum_{i=0}^n N_{i,p}(u) w_i} \quad (2)$$

- ▶ pokud  $\mathbf{P}_i^w$  jsou příslušné projektivní řídicí body, potom platí

$$C^w(u) = \sum_{i=0}^n N_{i,p}(u) \mathbf{P}_i^w = \sum_{i=0}^n N_{i,p}(u) (w_i(\mathbf{P}_i)_1, w_i(\mathbf{P}_i)_2, w_i)$$

a odhomogenizováním vzhledem k poslední souřadnici (vydělením poslední souřadnicí) dostáváme vztah (2)

- ▶ vlastnosti obdobné B-spline křivkám – **lokalizace změn**, platí **podmínka konvexního obalu**, **projektivní invariantnost**
- ▶ pokud jsou **váhy všech řídicích bodů stejné**, dostáváme polynomiální B-spline křivku
- ▶ (racionální) Bézierovy křivky a B-spline křivky jsou tedy speciálními případy NURBS křivek

# NURBS křivky

- ▶ pokud  $\mathbf{P}_i$  a  $w_i$ ,  $i = 0, \dots, n$  jsou řídicí body a váhy NURBS křivky,  $T$  je vektor parametrizace, potom parametrizace **NURBS křivky stupně  $p$**  je

$$C(u) = \frac{\sum_{i=0}^n N_{i,p}(u) w_i \mathbf{P}_i}{\sum_{i=0}^n N_{i,p}(u) w_i} \quad (2)$$

- ▶ pokud  $\mathbf{P}_i^w$  jsou příslušné projektivní řídicí body, potom platí

$$C^w(u) = \sum_{i=0}^n N_{i,p}(u) \mathbf{P}_i^w = \sum_{i=0}^n N_{i,p}(u) (w_i(\mathbf{P}_i)_1, w_i(\mathbf{P}_i)_2, w_i)$$

a odhomogenizováním vzhledem k poslední souřadnici (vydělením poslední souřadnicí) dostáváme vztah (2)

- ▶ vlastnosti obdobné B-spline křivkám – **lokalizace změn**, platí **podmínka konvexního obalu**, **projektivní invariantnost**
- ▶ pokud jsou **váhy všech řídicích bodů stejné**, dostáváme polynomiální B-spline křivku
- ▶ (racionální) Bézierovy křivky a B-spline křivky jsou tedy speciálními případy NURBS křivek