ZÁPADOČESKÁ UNIVERZITA V PLZNI

www.KMA.zcu.cz
SINCE 1954

Plochy tenzorového součinu – Bézierovy, B-spline a NURBS plochy

KMA/ITG – Informační technologie ve vyučování geometrie + KMA/GM1 – Geometrické modelování 1

Coonsovy pláty - opakování

Coonsovy pláty

- typy Coonsových platů:
  1. přechodová plocha – určena dvěma okrajovými křivkami
  2. bilineární Coonsův plát – určen čtyřmi okrajovými křivkami (křivočarým čtyřúhelníkem)
  3. bikubický Coonsův plát – určen čtyřmi okrajovými křivkami (křivočarým čtyřúhelníkem)
  4. dvanáctivektorový Coonsův plát – určen čtyřmi rohovými body a tečnými vektory parametrických křivek v nich (tj. vektory parciálních derivací v těchto bodech)
  5. šestnáctivektorový plát – určen čtyřmi rohovými body, tečnými vektory parametrických křivek v nich a twisty v rozích plátu (tj. vektory druhých parciálních derivací v rozích plátu)
  6. obecný Coonsův plát – určen čtyřmi rohovými body, okrajovými křivkami plátu, průběhem příčných derivací podél okrajových křivek a twisty v rozích plátu

Bilineární a bikubický Coonsův plát

- určen okrajovými křivkami $\mathbf{a}_0(v)$, $\mathbf{a}_1(v)$, $\mathbf{b}_0(u)$, $\mathbf{b}_1(u)$
- všechny okrajové křivky musí být parametrizovány nad intervalem $\langle 0, 1\rangle$ (pokud ne, je možné je snadno transformovat)
- rovnice bilineárního Coonsova plátu potom je

$$(1-u, -1, u) \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{P}_{00} & \mathbf{a}_0(v) & \mathbf{P}_{01} \\ \mathbf{b}_0(u) & \mathbf{P}(u,v) & \mathbf{b}_1(u) \\ \mathbf{P}_{10} & \mathbf{a}_1(v) & \mathbf{P}_{11} \end{pmatrix}}_{\mathbf{M}} \cdot \begin{pmatrix} 1-v \\ -1 \\ v \end{pmatrix} = \mathbf{0},$$

kde $(u, v) \in \langle 0, 1\rangle \times \langle 0, 1\rangle$

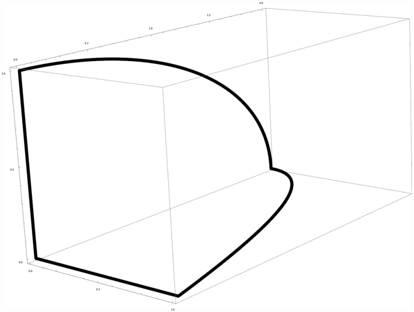
- rovnice bikubikckého Coonsova plátu potom je

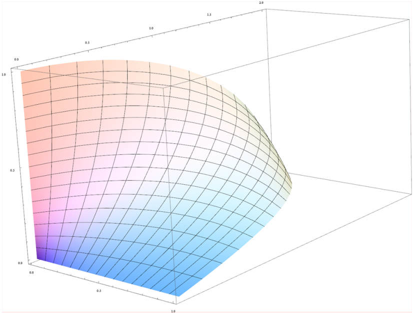
$$(F_0(u), -1, F_1(u)) \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{P}_{00} & \mathbf{a}_0(v) & \mathbf{P}_{01} \\ \mathbf{b}_0(u) & \mathbf{P}(u,v) & \mathbf{b}_1(u) \\ \mathbf{P}_{10} & \mathbf{a}_1(v) & \mathbf{P}_{11} \end{pmatrix}}_{\mathbf{M}} \cdot \begin{pmatrix} F_0(v) \\ -1 \\ F_1(v) \end{pmatrix} = \mathbf{0},$$

kde $F_0(t) = 2t^3 - 3t^2 + 1$, $F_1(t) = -2t^3 + 3t^2$ a $(u, v) \in \langle 0, 1\rangle \times \langle 0, 1\rangle$

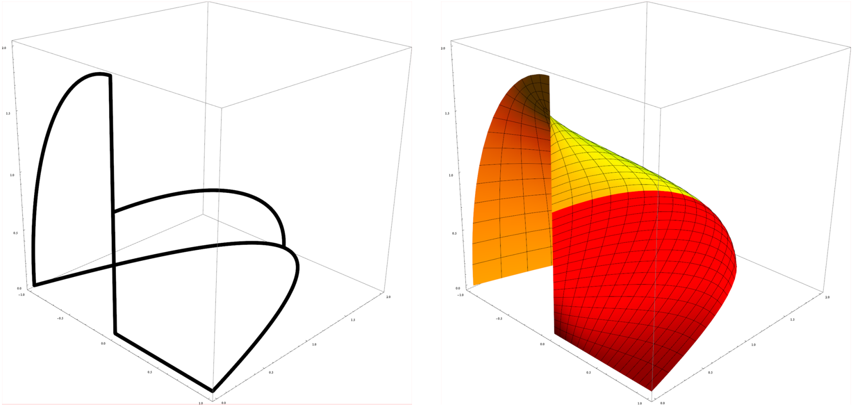
- bikubický Coonsův plát zajišťuje plátování

Příklad bilineárního Coonsova plátu





Příklad bikubického Coonsova plátu



Dvanáctivektorový plát

- určen polohovými vektory rohových bodů $\mathbf{P}_{00}, \mathbf{P}_{10}, \mathbf{P}_{01}, \mathbf{P}_{11}$, tečnými vektory v jednom směru v rohových bodech $\mathbf{P}^u_{00}, \mathbf{P}^u_{10}, \mathbf{P}^u_{01}, \mathbf{P}^u_{11}$, tečnými vektory ve druhém směru v rohových bodech $\mathbf{P}^v_{00}, \mathbf{P}^v_{10}, \mathbf{P}^v_{01}, \mathbf{P}^v_{11}$
- plát se nazývá také Fergusonův plát
- twisty v rozích plochy jsou nulové
- rovnice plochy je

$$\mathbf{P}(u,v) = (F_0(u), F_1(u), F_2(u), F_3(u)) \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{P}_{00} & \mathbf{P}_{01} & \mathbf{P}^v_{00} & \mathbf{P}^v_{01} \\ \mathbf{P}_{10} & \mathbf{P}_{11} & \mathbf{P}^v_{10} & \mathbf{P}^v_{11} \\ \mathbf{P}^u_{00} & \mathbf{P}^u_{01} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{P}^u_{10} & \mathbf{P}^u_{11} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} F_0(v) \\ F_1(v) \\ F_2(v) \\ F_3(v) \end{pmatrix},$$

  kde $F_i(t)$ jsou bázové funkce Fergusonovy kubiky a $(u,v) \in \langle 0,1\rangle \times \langle 0,1\rangle$
- okrajovými křivkami plátu jsou Fergusonovy kubiky
- splývá s bikubickým Coonsovým plátem, jehož okrajovými křivkami jsou Fergusonovy kubiky
- dvanáctivektorový plát zajišťuje plátování
- lze použít např. pro vytvoření hladce napojené plochy mezi dvěma plochami

Šestnáctivektorový plát

- určen
  - polohovými vektory rohových bodů $\mathbf{P}_{00}, \mathbf{P}_{10}, \mathbf{P}_{01}, \mathbf{P}_{11}$,
  - tečnými vektory v jednom směru v rohových bodech $\mathbf{P}^u_{00}, \mathbf{P}^u_{10}, \mathbf{P}^u_{01}, \mathbf{P}^u_{11}$,
  - tečnými vektory ve druhém směru v rohových bodech $\mathbf{P}^v_{00}, \mathbf{P}^v_{10}, \mathbf{P}^v_{01}, \mathbf{P}^v_{11}$ a
  - twisty v rozích plátu $\mathbf{P}^{uv}_{00}, \mathbf{P}^{uv}_{10}, \mathbf{P}^{uv}_{01}, \mathbf{P}^{uv}_{11}$
- rovnice plochy je

$$\mathbf{P}(u,v) = (F_0(u), F_1(u), F_2(u), F_3(u)) \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{P}_{00} & \mathbf{P}_{01} & \mathbf{P}^v_{00} & \mathbf{P}^v_{01} \\ \mathbf{P}_{10} & \mathbf{P}_{11} & \mathbf{P}^v_{10} & \mathbf{P}^v_{11} \\ \mathbf{P}^u_{00} & \mathbf{P}^u_{01} & \mathbf{P}^{uv}_{00} & \mathbf{P}^{uv}_{01} \\ \mathbf{P}^u_{10} & \mathbf{P}^u_{11} & \mathbf{P}^{uv}_{10} & \mathbf{P}^{uv}_{11} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} F_0(v) \\ F_1(v) \\ F_2(v) \\ F_3(v) \end{pmatrix},$$

  kde $F_i(t)$ jsou bázové funkce Fergusonovy kubiky a $(u,v) \in \langle 0,1 \rangle \times \langle 0,1 \rangle$
- okrajovými křivkami plátu jsou opět Fergusonovy kubiky
- šestnáctivektorý plát je základem pro generování tzv. spline ploch, tj. ploch, jejichž parametrické křivky jsou spline křivkami

Obecný Coonsův plát

- bikubický Coonsův plát zajišťuje plátování, ale pouze při napojení opět na bikubický Coonsův plát
- pokud jej potřebujeme napojit na obecný plát (který není bikubickým C. plátem), je výhodné použít obecný Coonsův plát
- rovnice plochy potom je

$$(F_0(u), -1, F_1(u), F_2(u), F_3(u)) \cdot \mathbf{M} \cdot \begin{pmatrix} F_0(v) \\ -1 \\ F_1(v) \\ F_2(v) \\ F_3(v) \end{pmatrix} = \mathbf{0},$$

kde

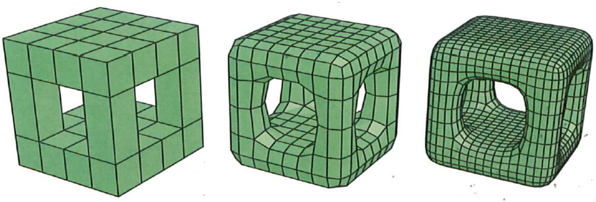
$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{P}_{00} & \mathbf{a}_0(v) & \mathbf{P}_{01} & \mathbf{P}^v(0,0) & \mathbf{P}^v(0,1) \\ \mathbf{b}_0(u) & \mathbf{P}(u,v) & \mathbf{b}_1(u) & \mathbf{P}^v(u,0) & \mathbf{P}^v(u,1) \\ \mathbf{P}_{10} & \mathbf{a}_1(v) & \mathbf{P}_{11} & \mathbf{P}^v(1,0) & \mathbf{P}^v(1,1) \\ \mathbf{P}^u(0,0) & \mathbf{P}^u(0,v) & \mathbf{P}^u(0,1) & \mathbf{P}^{uv}_{00} & \mathbf{P}^{uv}_{01} \\ \mathbf{P}^u(1,0) & \mathbf{P}^u(1,v) & \mathbf{P}^u(1,1) & \mathbf{P}^{uv}_{10} & \mathbf{P}^{uv}_{11} \end{pmatrix}$$

a $F_i(t)$ jsou bázové funkce Fergusonovy kubiky a $(u, v) \in \langle 0, 1\rangle \times \langle 0, 1\rangle$

Plochy tenzorového součinu – Bézierovy, B-spline a NURBS plochy

Plochy volného tvaru

- s využitím pouze základních ploch jako jsou válec, kužel, kulové plocha, rotační a přímkové plochy (a jejich kombinace) je obtížné dosáhnout dostatečné volnosti při vytváření 3D objektů
- proto byly zavedeny přirozená zobecnění Bézierových a B-spline křivek pro plochy – Bézierovy a B-spline plochy a jejich racionální specializace
- nicméně ani pomocí těchto ploch není možné reprezentovat objekty libovolné topologie – tzv. subdivision plochy tento problém eliminují
- subdivision plochy se v poslední době využívají stále častěji – hlavní využitím je tvorba animovaných filmů



Historie

- složité geometrie a plochy volného tvaru se objevují v architektuře velmi brzo, první náznaky jsou již před 400000 lety
- v 19. století se začínají tyto plochy využívat více – architekti mohou využívat výhod nových materiálů (železo, ocel, železobeton)
- Antoni Gaudi (1852-1926) byl jedním z prvních, který intenzivně využíval plochy volného tvaru – Sagrada Familia (1882-dodnes)

Historie

- složité geometrie a plochy volného tvaru se objevují v architektuře velmi brzo, první náznaky jsou již před 400000 lety
- v 19. století se začínají tyto plochy využívat více – architekti mohou využívat výhod nových materiálů (železo, ocel, železobeton)
- Antoni Gaudi (1852-1926) byl jedním z prvních, který intenzivně využíval plochy volného tvaru – Casa Milà (1905-1907)

Historie

- složité geometrie a plochy volného tvaru se objevují v architektuře velmi brzo, první náznaky jsou již před 400000 lety
- v 19. století se začínají tyto plochy využívat více – architekti mohou využívat výhod nových materiálů (železo, ocel, železobeton)
- Erich Mendelsohn (1887–1953) – Einstein Tower (1920-1921)

Historie

- složité geometrie a plochy volného tvaru se objevují v architektuře velmi brzo, první náznaky jsou již před 400000 lety
- v 19. století se začínají tyto plochy využívat více – architekti mohou využívat výhod nových materiálů (železo, ocel, železobeton)
- Le Corbusier (1887–1965) – Notre Dame du Haut (1950-1955)

Historie

- složité geometrie a plochy volného tvaru se objevují v architektuře velmi brzo, první náznaky jsou již před 400000 lety
- v 19. století se začínají tyto plochy využívat více – architekti mohou využívat výhod nových materiálů (železo, ocel, železobeton)
- Eero Saarinen (1910-1961) – TWA Flight Center (1956-1962)

Historie

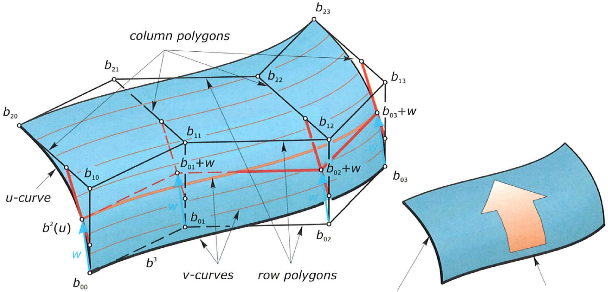
- složité geometrie a plochy volného tvaru se objevují v architektuře velmi brzo, první náznaky jsou již před 400000 lety
- v 19. století se začínají tyto plochy využívat více – architekti mohou využívat výhod nových materiálů (železo, ocel, železobeton)
- Frank Owen Gehry (1929-) – Guggenheim Museum Bilbao (1991-1997)

Historie

- složité geometrie a plochy volného tvaru se objevují v architektuře velmi brzo, první náznaky jsou již před 400000 lety
- v 19. století se začínají tyto plochy využívat více – architekti mohou využívat výhod nových materiálů (železo, ocel, železobeton)
- Frank Owen Gehry (1929-) – Walt Disney Concert Hall (1950-1955)

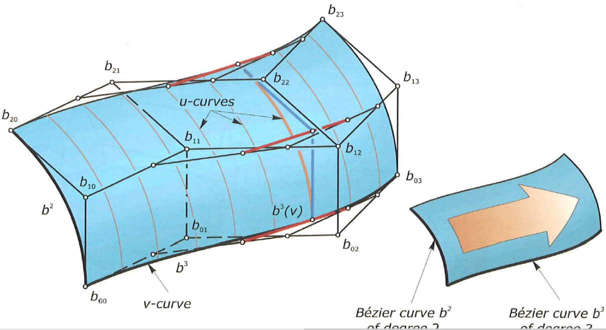
Translační Bézierovy plochy

- mějme dvě Bézierovy křivky $\mathbf{B}^2$ (určenou body $\mathbf{B}_{00}$, $\mathbf{B}_{10}$, $\mathbf{B}_{20}$) a $\mathbf{B}^3$ (určenou body $\mathbf{B}_{00}$, $\mathbf{B}_{01}$, $\mathbf{B}_{02}$, $\mathbf{B}_{03}$)
- bod $\mathbf{B}_{00}$ je společný pro obě křivky, můžeme tedy vytvořit translační plochu, která obsahuje dva systémy křivek – jeden kvadratický, druhý kubický
- každá křivka z těchto systémů odpovídá konstantnímu parametru u nebo v a hovoříme o tzv. u-křivkách a v-křivkách



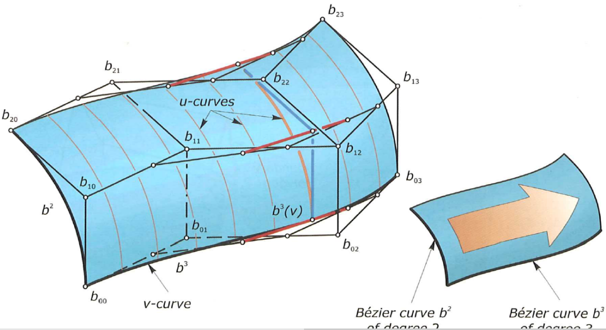
Translační Bézierovy plochy

- jak získáme u-křivky a v-křivky?



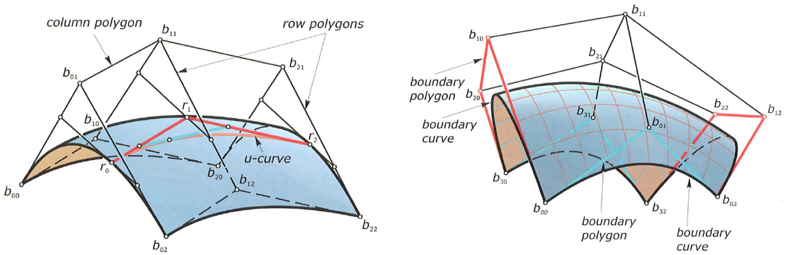
Translační Bézierovy plochy

- jak získáme u-křivky a v-křivky?
- v-křivka: pro konstantní u najdeme bod na Bézierově křivce $\mathbf{B}^2(u)$ pomocí algoritmu de Casteljau a řídící polygon pro křivku $\mathbf{B}^3(v)$ posuneme o vektor $w = \mathbf{B}^2(u) - \mathbf{B}_{00}$
- podobným způsobem můžeme „posunout“ body řídících polygonů a získat tak síť řídících bodů, které určují celou translační Bézierovu plochu
- okrajové řídící polygony určují speciální u-křivky a v-křivky, „vnitřní“ řídící polygony neurčují u-křivky a v-křivky



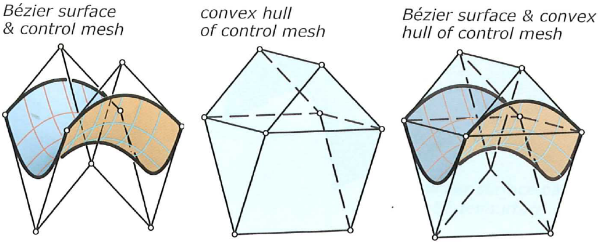
Bézierovy křivky

- obecná Bézierova plocha je určena řídící sítí bodů $\mathbf{B}_{i,j}$, $i = 0, \ldots, m$, $j = 0, \ldots, n$
- plocha obsahuje dva systémy Bézierových křivek: u-křivky stupně m a v-křivky stupně n
- k nalezení bodu na Bézierově ploše, který odpovídá dvojici parametrů (u_0, v_0) se dá využít algoritmus de Casteljau pro křivky – nejdříve pro u_0 najdeme řídící body odpovídající v-křivky a pro tuto v-křivku najdeme bod odpovídající parametru v_0 (i obráceně)



Vlastnosti Bézierových křivek

- Bézierova plocha je pro danou řídící síť $\mathbf{B}_{i,j}$, $i = 0, \ldots, m$, $j = 0, \ldots, n$ dána parametrizací
$$\mathbf{B}(u,v) = \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} B_i^m(u) B_j^n(v) \mathbf{B}_{i,j},$$
kde $B_{i,m}(u)$, $B_{j,n}(v)$ jsou Bernsteinovy polynomy
- hraniční řídící polygony řídící sítě určují Bézierovy křivky, které jsou okrajovými křivkami dané Bézierovy plochy
- Bézierova plocha leží v konvexním obalu své řídící sítě
- afinní invariantnost (podobně jako pro křivky)



Bézierova plocha stupně (1,1)

- řídící sítí je pouze čtyřúhelník – pokud body neleží v jedné rovině, odpovídající Bézeirova plocha je částí hyperbolického paraboloidu
- u-křivky a v-křivky jsou zde úsečkami
- jak získáme u-křivku v tomto případě?

Bézierova plocha stupně (1,1)

- řídící sítí je pouze čtyřúhelník – pokud body neleží v jedné rovině, odpovídající Bézeirova plocha je částí hyperbolického paraboloidu
- u-křivky a v-křivky jsou zde úsečkami
- jak získáme u-křivku v tomto případě?
- pro daná v rozdělíme úsečky $\mathbf{B}_{00}\mathbf{B}_{01}$ a $\mathbf{B}_{10}\mathbf{B}_{11}$ v poměru $(1-v):v$, tj.

$$\mathbf{R}_0 = (1-v)\mathbf{B}_{00} + v\mathbf{B}_{01},\ \mathbf{R}_1 = (1-v)\mathbf{B}_{10} + v\mathbf{B}_{11}$$

- u-křivkou je potom úsečka $\mathbf{R}_0\mathbf{R}_1$, která je určena vztahem $(1-u)\mathbf{R}_0 + u\mathbf{R}_1$
- dosazením potom dostáváme parametrizaci Bézierovy plochy

$$\begin{aligned}\mathbf{B}(u,v) &= (1-u)(1-v)\mathbf{B}_{00}+\\ &+ (1-u)v\mathbf{B}_{01}+\\ &+ u(1-v)\mathbf{B}_{10}+\\ &+ uv\mathbf{B}_{11} =\\ &= \sum_{i=0}^{1}\sum_{j=0}^{1} B_i^1(u)B_j^1(v)\mathbf{B}_{ij}\end{aligned}$$

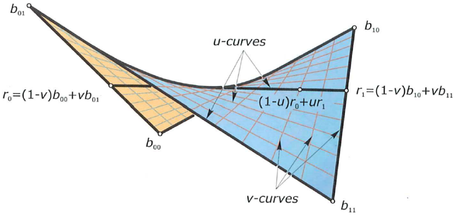
Bézierova plocha stupně (1,1)

- řídící sítí je pouze čtyřúhelník – pokud body neleží v jedné rovině, odpovídající Bézeirova plocha je částí hyperbolického paraboloidu
- u-křivky a v-křivky jsou zde úsečkami
- jak získáme u-křivku v tomto případě?
- pro daná v rozdělíme úsečky $\mathbf{B}_{00}\mathbf{B}_{01}$ a $\mathbf{B}_{10}\mathbf{B}_{11}$ v poměru $(1-v):v$, tj.

$$\mathbf{R}_0 = (1-v)\mathbf{B}_{00} + v\mathbf{B}_{01}, \ \mathbf{R}_1 = (1-v)\mathbf{B}_{10} + v\mathbf{B}_{11}$$

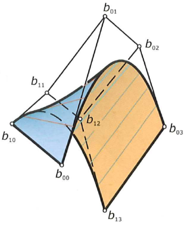
- u-křivkou je potom úsečka $\mathbf{R}_0\mathbf{R}_1$, která je určena vztahem $(1-u)\mathbf{R}_0 + u\mathbf{R}_1$
- dosazením potom dostáváme parametrizaci Bézierovy plochy

$$\begin{aligned}\mathbf{B}(u,v) &= (1-u)(1-v)\mathbf{B}_{00}+ \\ &+ (1-u)v\mathbf{B}_{01}+ \\ &+ u(1-v)\mathbf{B}_{10}+ \\ &+ uv\mathbf{B}_{11} = \\ &= \sum_{i=0}^{1}\sum_{j=0}^{1} B_i^1(u)B_j^1(v)\mathbf{B}_{ij}\end{aligned}$$



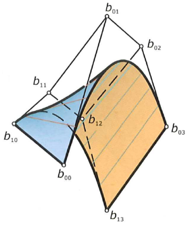
Přímkové Bézierovy plochy

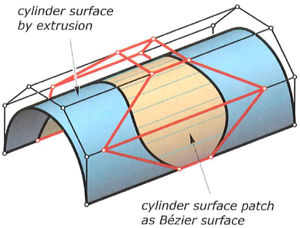
- Bézierova plocha je částí přímkové plochy, pokud je stupně $(1, n)$, tj. u-křivky jsou Bézierovy křivky stupně 1 (úsečky)
- speciálním případem je zobecněná válcová plocha, kterou získáme, pokud jsou všechny hrany řídící sítě „ve směru u“ rovnoběžné
- pro modelování zobecněných válcových ploch tak získáváme mnohem větší volnost, oproti standardní funkci „vytažení ve směru“
- navíc můžeme ztotožňovat řídící body – pokud ztotožníme všechny body jedné řídící hrany „ve směru v“, získáme kuželovou plochu s tímto vrcholem



Přímkové Bézierovy plochy

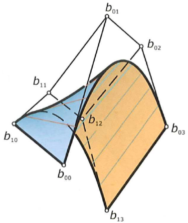
- Bézierova plocha je částí přímkové plochy, pokud je stupně $(1, n)$, tj. u-křivky jsou Bézierovy křivky stupně 1 (úsečky)
- speciálním případem je zobecněná válcová plocha, kterou získáme, pokud jsou všechny hrany řídící sítě „ve směru u“ rovnoběžné
- pro modelování zobecněných válcových ploch tak získáváme mnohem větší volnost, oproti standardní funkci „vytažení ve směru“
- navíc můžeme ztotožňovat řídící body – pokud ztotožníme všechny body jedné řídící hrany „ve směru v“, získáme kuželovou plochu s tímto vrcholem

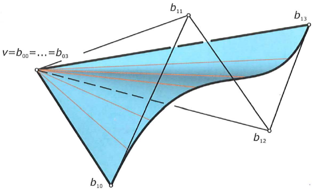


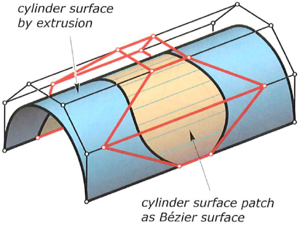


Přímkové Bézierovy plochy

- Bézierova plocha je částí přímkové plochy, pokud je stupně $(1, n)$, tj. u-křivky jsou Bézierovy křivky stupně 1 (úsečky)
- speciálním případem je zobecněná válcová plocha, kterou získáme, pokud jsou všechny hrany řídící sítě „ve směru u“ rovnoběžné
- pro modelování zobecněných válcových ploch tak získáváme mnohem větší volnost, oproti standardní funkci „vytažení ve směru“
- navíc můžeme ztotožňovat řídící body – pokud ztotožníme všechny body jedné řídící hrany „ve směru v“, získáme kuželovou plochu s tímto vrcholem

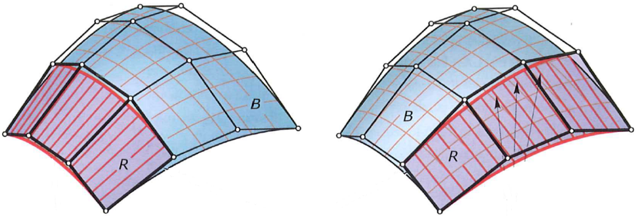






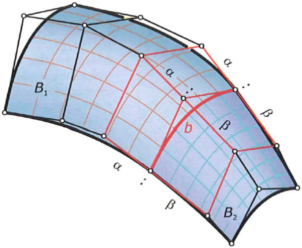
Hladké napojení Bézierových ploch

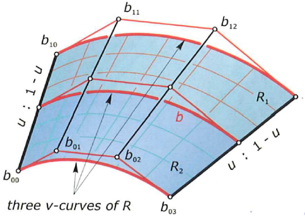
- vezmeme-li dvě poslední řady řídících bodů u libovolného okraje řídící sítě Bézierovy plochy, získáme řídící síť přímkové plochy, jejíž površky určují tečny v odpovídajích krajních bodech Bézierovy plochy – tedy tato přímková plocha je tečná podél hranice Bézierovy plochy
- nechť máme dvě Bézierovy plochy $\mathbf{B}^1$, $\mathbf{B}^2$, jejichž řídící sítě mají společný okraj
- potom tyto dvě plochy jsou na sebe napojeny obecně ve třídě C^0 – mají společnou okrajovou Bézierovy křivku, ale tečné roviny v bodech této křivky mohou být různé
- pro zajištění G^1, resp. C^1 spojitosti je nutné splnění speciálního vztahu mezi řídícími sítěmi tečných přímkových ploch



Hladké napojení Bézierových ploch

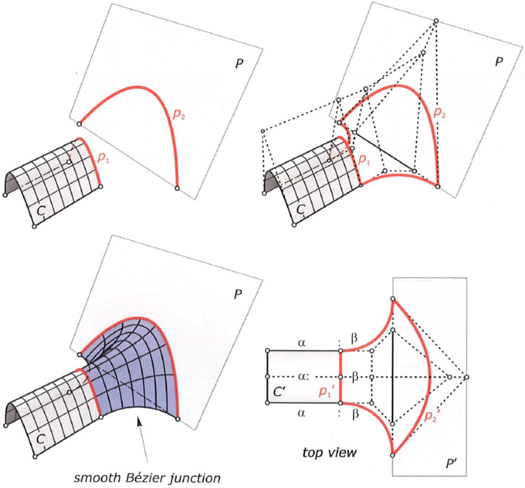
- vezmeme-li dvě poslední řady řídících bodů u libovolného okraje řídící sítě Bézierovy plochy, získáme řídící síť přímkové plochy, jejíž površky určují tečny v odpovídajích krajních bodech Bézierovy plochy – tedy tato přímková plocha je tečná podél hranice Bézierovy plochy
- nechť máme dvě Bézierovy plochy $\mathbf{B}^1$, $\mathbf{B}^2$, jejichž řídící sítě mají společný okraj
- potom tyto dvě plochy jsou na sebe napojeny obecně ve třídě C^0 – mají společnou okrajovou Bézierovy křivku, ale tečné roviny v bodech této křivky mohou být různé
- pro zajištění G^1, resp. C^1 spojitosti je nutné splnění speciálního vztahu mezi řídícími sítěmi tečných přímkových ploch





Hladké napojení Bézierových ploch – příklad

- hladké napojení parabolického válce a roviny

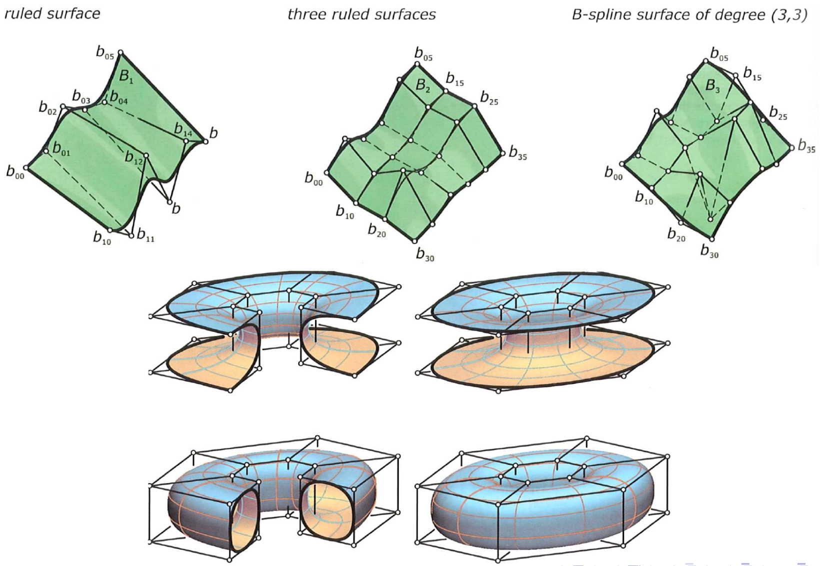


B-spline plochy

- jelikož Bézierovy plochy přímo vycházejí z Bézierových křivek, mají také stejné nevýhody – parametrizace jsou vysokého stupně, špatně zachycují tvar daný řídící sítí, změna polohy jednoho řídícího bodu mění celou výslednou plochu
- proto se podobně jako pro křivky zavádí pojem B-spline ploch
- B-spline plocha je určena čtyřúhelníkovou sítí řídících bodů, dvěma uzlovými vektory U a V (pro oba parametry u, v plochy) a stupni v u a v
- vlastnosti B-spline ploch se přenášejí z vlastností pro křivky:
  - uzlové vektory se chovají stejně (násobné uzly opět snižují spojitost),
  - plocha je lokálně modifikovatelná,
  - plocha leží v konvexním obalu řídící sítě a navíc, každá část plochy leží v konvexním obalu příslušné části řídící sítě (viz křivky)
  - afinní invariantnost
- pro danou řídící síť bodů $\mathbf{P}_{i,j}$, $i = 0, \dots, m$, $j = 0, \dots, n$ a pro dva uzlové vektory $U = (u_0, \dots, u_k)$ a $V = (v_0, \dots, v_l)$ je B-spline plocha stupně (p, q) dána vztahem

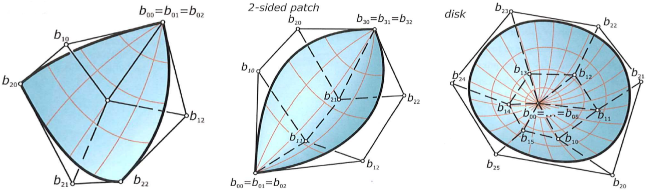
$$\mathbf{S}(u, v) = \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} N_{i,p}(u) N_{j,q}(v) \mathbf{P}_{i,j}$$

B-spline plochy – příklady

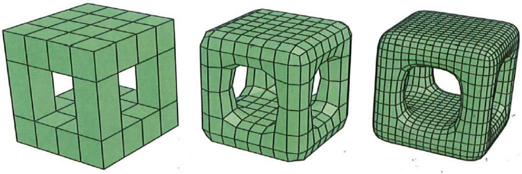


B-spline plochy – příklady

- pokud jeden nebo více řídící polygonů dané řídící sítě splyne do bodu, je možné vytvořit plochy s méně než čtyřmi okrajovými křivkami



- pomocí B-spline ploch je možné typicky popsat pouze objekty, jejichž topologie je shodná s topologií sféry – nelze tedy např. popsat objekty typu ...



NURBS plochy

- podobně je možné přímo zobecnit NURBS křivky a získat tzv. NURBS plochy
- NURBS plocha je určena řídící sítí bodů $\mathbf{P}_{i,j}$, jejich váhami $w_{i,j}$, $i = 0, \ldots, m$, $j = 0, \ldots, n$, dvěma uzlovými vektory $U = (u_0, \ldots, u_k)$ a $V = (v_0, \ldots, v_l)$ a stupni v u a v
- parametrizace takové NURBS plochy je potom dána vztahem

$$\mathbf{S}(u,v) = \frac{\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} N_{i,p}(u)N_{j,q}(v)w_{i,j}\mathbf{P}_{i,j}}{\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} N_{i,p}(u)N_{j,q}(v)w_{i,j}}$$