



ZÁPADOČESKÁ
UNIVERZITA
V PLZNI

www.KMA.zcu.cz
SINCE 1954

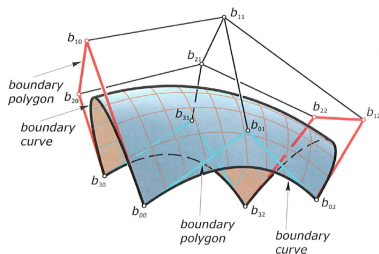
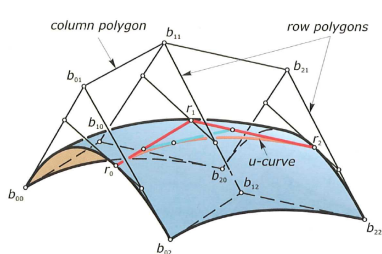
Subdivision křivky a plochy

KMA/ITG – Informační technologie ve vyučování geometrie +
KMA/GM1 – Geometrické modelování 1

Plochy volného tvaru – opakování

Bézierovy plochy

- ▶ obecná **Bézierova plocha** je určena řídicí sítí bodů $\mathbf{B}_{i,j}$, $i = 0, \dots, m$, $j = 0, \dots, n$
- ▶ plocha obsahuje dva systémy Bézierových křivek: u -křivky stupně m a v -křivky stupně n
- ▶ k nalezení bodu na Bézierově ploše, který odpovídá dvojici parametrů (u_0, v_0) se dá využít **algoritmus de Casteljau pro křivky** – nejdříve pro u_0 najdeme řídicí body odpovídající v -křivky a pro tuto v -křivku najdeme bod odpovídající parametru v_0 (i obráceně)



Vlastnosti Bézierových křivek

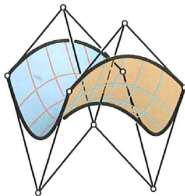
- ▶ Bézierova plocha je pro danou řídicí síť $\mathbf{B}_{i,j}$, $i = 0, \dots, m$, $j = 0, \dots, n$ dána parametrizací

$$\mathbf{B}(u, v) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n B_i^m(u) B_j^n(v) \mathbf{B}_{i,j},$$

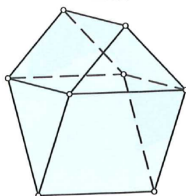
kde $B_{i,m}(u)$, $B_{j,n}(v)$ jsou Bernsteinovy polynomy

- ▶ hraniční řídicí polygony řídicí sítě určují Bézierovy křivky, které jsou okrajovými křivkami dané Bézierovy plochy
- ▶ Bézierova plocha leží v konvexním obalu své řídicí sítě
- ▶ afinní invariantnost (podobně jako pro křivky)

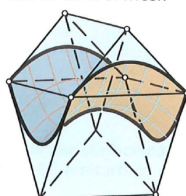
*Bézier surface
& control mesh*



*convex hull
of control mesh*

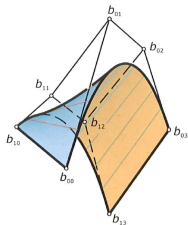


*Bézier surface & convex
hull of control mesh*



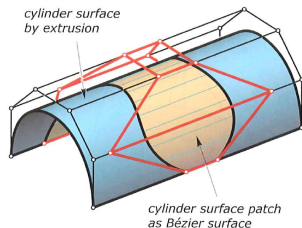
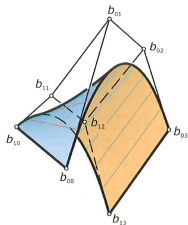
Přímkové Bézierovy plochy

- ▶ Bézierova plocha je částí přímkové plochy, pokud je **stupně $(1, n)$** , tj. u -křivky jsou Bézierovy křivky stupně 1 (úsečky)
- ▶ speciálním případem je **zobecněná válcová plocha**, kterou získáme, pokud jsou všechny hrany řídicí sítě „ve směru u “ rovnoběžné
- ▶ pro modelování zobecněných válcových ploch tak získáváme mnohem větší volnost, oproti standardní funkci „vytažení ve směru“
- ▶ navíc můžeme ztotožňovat řídicí body – pokud ztotožníme všechny body jedné řídicí hrany „ve směru v “, získáme **kuželovou plochu** s tímto vrcholem



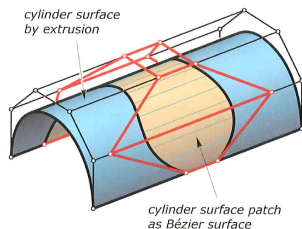
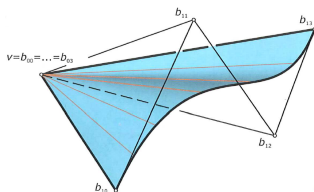
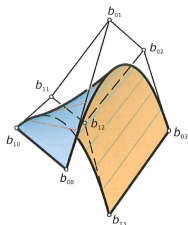
Přímkové Bézierovy plochy

- ▶ Bézierova plocha je částí přímkové plochy, pokud je **stupně (1, n)**, tj. u -křivky jsou Bézierovy křivky stupně 1 (úsečky)
- ▶ speciálním případem je **zobecněná válcová plocha**, kterou získáme, pokud jsou všechny hrany řídicí sítě „ve směru u “ rovnoběžné
- ▶ pro modelování zobecněných válcových ploch tak získáváme mnohem větší volnost, oproti standardní funkci „vytažení ve směru“
- ▶ navíc můžeme ztotožňovat řídicí body – pokud ztotožníme všechny body jedné řídicí hrany „ve směru v “, získáme **kuželovou plochu** s tímto vrcholem



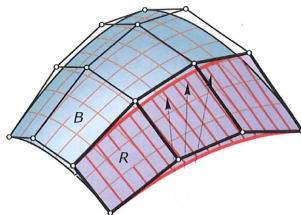
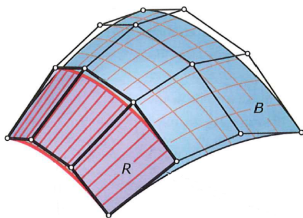
Přímkové Bézierovy plochy

- ▶ Bézierova plocha je částí přímkové plochy, pokud je **stupně (1, n)**, tj. u -křivky jsou Bézierovy křivky stupně 1 (úsečky)
- ▶ speciálním případem je **zobecněná válcová plocha**, kterou získáme, pokud jsou všechny hrany řídicí sítě „ve směru u “ rovnoběžné
- ▶ pro modelování zobecněných válcových ploch tak získáváme mnohem větší volnost, oproti standardní funkci „vytažení ve směru“
- ▶ navíc můžeme ztotožňovat řídicí body – pokud ztotožníme všechny body jedné řídicí hrany „ve směru v “, získáme **kuželovou plochu** s tímto vrcholem



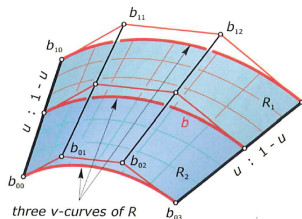
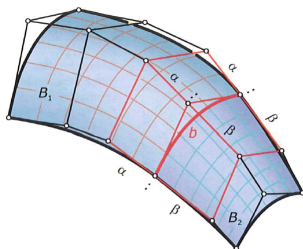
Hladké napojení Bézierových ploch

- ▶ vezmeme-li dvě poslední řady řídicích bodů u libovolného okraje řídicí sítě Bézierovy plochy, získáme řídicí síť **přímkové plochy, jejíž povrchy určují tečny v odpovídajících krajních bodech Bézierovy plochy** – tedy tato přímková plocha je tečná podél hranice Bézierovy plochy
- ▶ necht' máme dvě Bézierovy plochy B^1 , B^2 , jejichž řídicí sítě mají společný okraj
- ▶ potom tyto dvě plochy jsou na sebe napojeny obecně ve třídě C^0 – mají společnou okrajovou Bézierovy křivku, ale **tečné roviny v bodech této křivky mohou být různé**
- ▶ pro zajištění G^1 , resp. C^1 spojitosti je nutné splnění speciálního vztahu mezi řídicími sítěmi tečných přímkových ploch



Hladké napojení Bézierových ploch

- ▶ vezmeme-li dvě poslední řady řídicích bodů u libovolného okraje řídicí sítě Bézierovy plochy, získáme řídicí síť **přímkové plochy, jejíž povrchy určují tečny v odpovídajících krajních bodech Bézierovy plochy** – tedy tato přímková plocha je tečná podél hranice Bézierovy plochy
- ▶ necht' máme dvě Bézierovy plochy B^1, B^2 , jejichž řídicí sítě mají společný okraj
- ▶ potom tyto dvě plochy jsou na sebe napojeny obecně ve třídě C^0 – mají společnou okrajovou Bézierovy křivku, ale **tečné roviny v bodech této křivky mohou být různé**
- ▶ pro zajištění G^1 , resp. C^1 spojitosti je nutné splnění speciálního vztahu mezi řídicími sítěmi tečných přímkových ploch



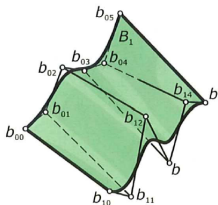
B-spline plochy

- ▶ jelikož Bézierovy plochy přímo vycházejí z Bézierových křivek, mají také **stejně nevýhody** – parametrizace jsou vysokého stupně, špatně zachycují tvar daný řídicí sítí, změna polohy jednoho řídicího bodu mění celou výslednou plochu
- ▶ proto se podobně jako pro křivky zavádí pojem **B-spline ploch**
- ▶ B-spline plocha je určena čtyřúhelníkovou **sítí řídicích bodů**, **dvěma uzlovými vektory U a V** (pro oba parametry u, v plochy) a **stupni v u a v**
- ▶ vlastnosti B-spline ploch se přenášejí z vlastností pro křivky:
 - ▶ uzlové vektory se chovají stejně (násobné uzly opět snižují spojitost),
 - ▶ plocha je lokálně modifikovatelná,
 - ▶ plocha leží v konvexním obalu řídicí sítě a navíc, každá část plochy leží v konvexním obalu příslušné části řídicí sítě (viz křivky)
 - ▶ afinní invariantnost
- ▶ pro danou řídicí síť bodů $\mathbf{P}_{i,j}$, $i = 0, \dots, m$, $j = 0, \dots, n$ a pro dva uzlové vektory $U = (u_0, \dots, u_k)$ a $V = (v_0, \dots, v_l)$ je **B-spline plocha stupně (p, q)** dána vztahem

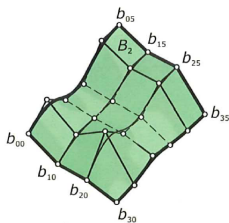
$$\mathbf{S}(u, v) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n N_{i,p}(u) N_{j,q}(v) \mathbf{P}_{i,j}$$

B-spline plochy – příklady

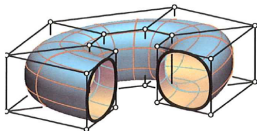
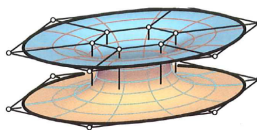
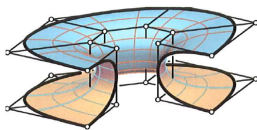
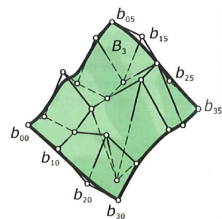
ruled surface



three ruled surfaces

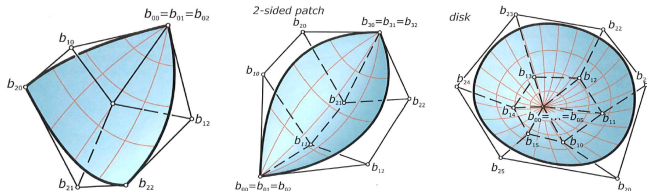


B-spline surface of degree (3,3)

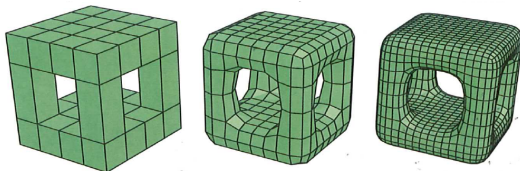


B-spline plochy – příklady

- ▶ pokud jeden nebo více řídicí polygonů dané řídicí sítě splyne do bodu, je možné vytvořit plochy s méně než čtyřmi okrajovými křivkami



- ▶ pomocí B-spline ploch je možné typicky popsat pouze objekty, jejichž topologie je shodná s topologií sféry – nelze tedy např. popsat objekty typu ...

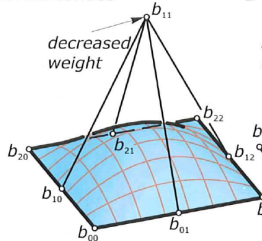


NURBS plochy

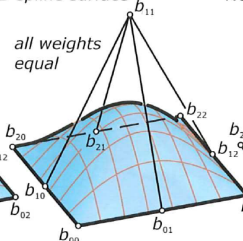
- ▶ podobně je možné přímo zobecnit NURBS křivky a získat tzv. **NURBS plochy**
- ▶ **NURBS plocha** je určena **řídící sítí bodů** $\mathbf{P}_{i,j}$, jejich **váhami** $w_{i,j}$, $i = 0, \dots, m$, $j = 0, \dots, n$, **dvěma uzlovými vektory** $U = (u_0, \dots, u_k)$ a $V = (v_0, \dots, v_l)$ a **stupni** u a v
- ▶ parametrizace takové NURBS plochy je potom dána vztahem

$$\mathbf{S}(u, v) = \frac{\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n N_{i,p}(u) N_{j,q}(v) w_{i,j} \mathbf{P}_{i,j}}{\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n N_{i,p}(u) N_{j,q}(v) w_{i,j}}$$

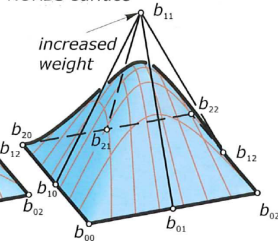
NURBS surface



B-spline surface



NURBS surface



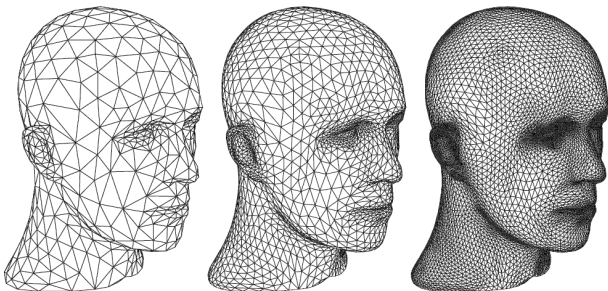
Subdivision křivky a plochy

Motivace, základní vlastnosti

- ▶ základní myšlenkou subdivision křivek a ploch je definovat hladkou křivku/plochu jako **limitní křivku/plochu subdivision procesu**, během kterého je postupně počáteční řídicí polygon/síť zjemňován(a) pomocí nově vkládaných vrcholů
- ▶ subdivision proces v jistém smyslu zobecňuje klasické spline plochy – lze pomocí něho popsat plochy **libovolné topologie** (klasickým problémem NURBSů je jejich „ořezávání“, což není problémem pro subdivision plochy)
- ▶ vzhledem k rekurzivité subdivision procesu je přirozeně zahrnut např. **level-of-detail rendering**
- ▶ **jednotnost reprezentace** – subdivision do jisté míry vyplňuje mezeru mezi polygonálními sítěmi a spline plochami, jelikož je na ně možné nahlížet podle potřeby oběma způsoby
- ▶ **numerická stabilita** – síť vytvořené a modifikované pomocí subdivision mají mnoho hezkých vlastností, které jsou potřeba např. pro metodu konečných prvků, jsou tedy vhodné pro numerické experimenty
- ▶ subdivision proces je obvykle velmi **snadno implementovatelný** a **velmi efektivní**

Motivace, základní vlastnosti

- ▶ subdivision je tedy proces, který z dané počáteční řídicí sítě vytvoří novou síť pomocí **předem daných a známých pravidel**
- ▶ nová řídicí síť může obsahovat body původní sítě, ale také nemusí
- ▶ aplikovaná pravidla mohou být stejná pro celou, ale také nemusí, mohou se i měnit v průběhu subdivision procesu
- ▶ na obrázku dole je vidět příklad subdivision procesu pro zadanou počáteční síť (vlevo) – každý trojúhelník počáteční sítě je rozdělen na 4 nové, po jednom kroku procesu (uprostřed), na dvou krocích (vpravo)

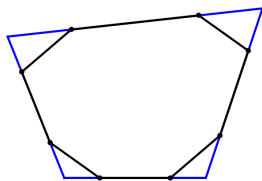
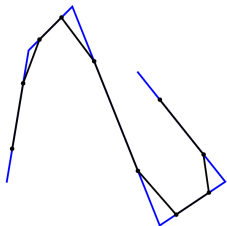


Motivace, základní vlastnosti

- ▶ pravidla (schémata) pro modifikaci výchozí sítě je možné sestavit mnoha různými způsoby
- ▶ je zřejmé, že dané schéma ovlivňuje také tvar a hladkost výsledné křivky/plochy
- ▶ vlastnosti subdivision schémat:
 - ▶ **efektivnost** – pozice nového bodu by měla být nalezena s malým počtem operací
 - ▶ **kompaktní support** – oblast vlivu každého výchozího bodu na výslednou křivku/plochu by měla být malá a konečná
 - ▶ **lokální definice** – nalezení nového bodu by nemělo záviset na příliš vzdálených bodech výchozí sítě
 - ▶ **jednoduchost** – samotná pravidla by měla být jednoduchá a měl by jich být malý počet
 - ▶ **spojitost** – z pravidel by mělo být možné dokázat např. jakou spojitost má limitní křivka/plocha
- ▶ každé schéma se musí vypořádat i se speciálními situacemi, jako jsou výjimečné vrcholy (speciální valence vrcholu), hranice sítě apod. při zachování určité třídy spojitosti limitního povrchu

Subdivision pro křivky, Chaikinův algoritmus

- ▶ počátky subdivision technik se datují do roku 1974, kdy **George Chaikin** prezentoval novou metodu pro generování křivek pod názvem *algoritmus pro vysokorychlostní generování křivek*
- ▶ princip metody spočívá v **ořezávání vrcholů** – pro vrchol původního polygon jsou nalezeny dva nové body a původní vrchol je pomocí nich „odstříhnut“



- ▶ umístění nových vrcholů potom popisují **geometrická pravidla** – pokud původní vrcholy označíme v_i , $i = 1, \dots, n$, potom nové vrcholy jsou

$$v'_{2i-1} = \frac{3}{4}v_i + \frac{1}{4}v_{i+1}, \quad v'_{2i} = \frac{1}{4}v_i + \frac{3}{4}v_{i+1}, \quad i = 1, \dots, n-1$$

Chaikinův algoritmus

- ▶ geometrická pravidla se reprezentují pomocí tzv. **masky** (topologická pravidla)

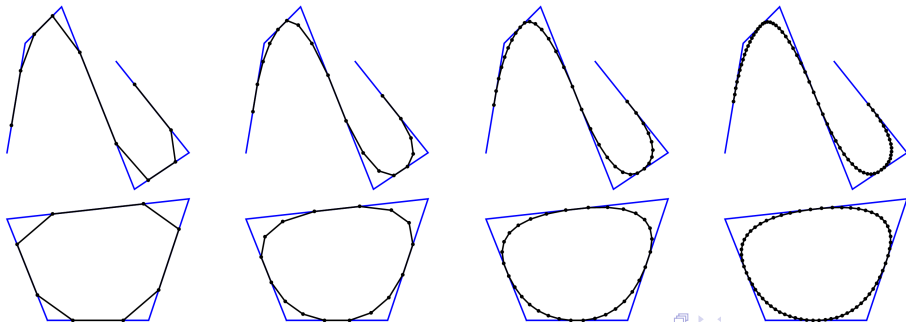


(a)



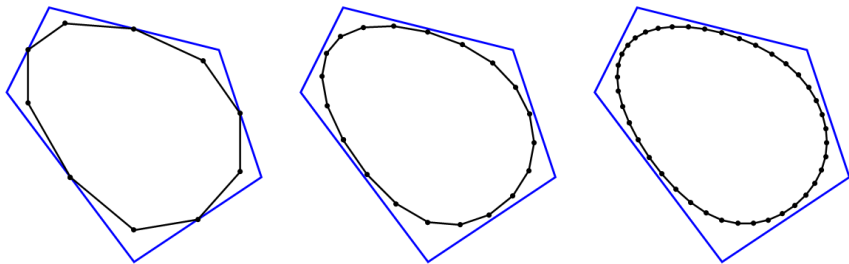
(b)

- ▶ metoda konverguje k po částech kvadratické uniformní B-spline křivce
- ▶ první čtyři kroky metody pro neuzavřenou a uzavřenou křivku:



Algoritmus Lane-Riesenfeld

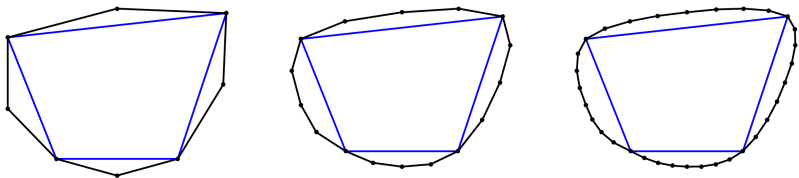
- ▶ Chaikinův algoritmus můžeme také provést tak, že nejprve řídící polygon **doplníme o středy** všech jeho hran a **nový polygon potom získáme průměrováním** – každé nové hraně přiřadíme její střed a tyto středy vytvoří nový polygon
- ▶ algoritmus Lane-Riesenfeld potom spočívá v tom, že toto **průměrování** neprovádíme pouze jednou, ale **n -krát**
- ▶ v limitě potom tento proces konverguje k **uniformní B-spline křivce stupně $n + 1$**



4-bodové schéma

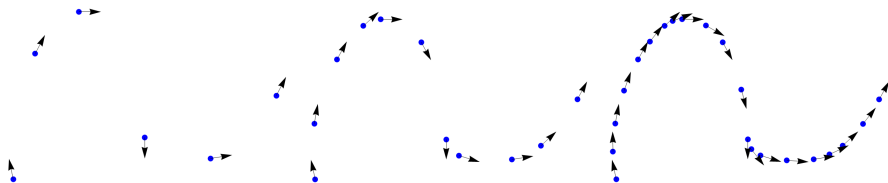
- ▶ je vidět, že všechna dosud ukázaná schémata **aproximují** výchozí řídicí polygon – to vyplývá z faktu, že všechna tato schémata konvergují k uniformním B-spline křivkám, které také aproximují zadaný řídicí polygon
- ▶ nicméně je možné vytvořit i schémata, která zachovávají výchozí řídicí polygon ve všech krocích – výchozí body jsou tedy i v limitní křivce a schéma je **interpolační**
- ▶ nejjednodušším takovým případem je tzv. **čtyřbodové schéma** – mezi každé dva body v_i, v_{i+1} vložíme nový bod, původní body zůstávají, tedy geometrická pravidla jsou

$$v'_{2i} = v_i, v'_{2i+1} = -\frac{1}{16}v_{i-1} + \frac{9}{16}v_i + \frac{9}{16}v_{i+1} - \frac{1}{16}v_{i+2}$$



Hermitovská subdivision schémata

- ▶ vstupem není lomená čára, ale množina bodů s přiřazenými tečnými, případně tečnými vektory nebo vektory druhých derivací
- ▶ schéma generuje data stejného typu a konverguje ke křivce spojitosti indukované vstupními daty
- ▶ příklad Hermitovského subdivision schématu:
 - ▶ vstupem jsou dané body a jednotkové tečné vektory v nich
 - ▶ sestrojíme trojúhelník určený dvěma po sobě jdoucími body P_i, P_{i+1} a jejich jednotkovými tečnými vektory
 - ▶ nově vloženým bodem je střed kružnice vepsané tohoto trojúhelníka a asociovaný jednotkový tečný vektor získáme normováním $P_{i+1} - P_i$
 - ▶ limitní křivka je třídy G^1



Subdivision pro plochy – základní pojmy

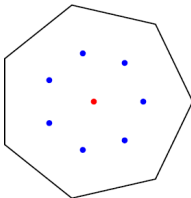
- ▶ síť dělíme na dva základní typy – **čtyřúhelníkové** a **trojúhelníkové** (obecně je možné mít i jiné, např. šestiúhelníkové, ty se ale v subdivision moc nepoužívají)
- ▶ síť dále rozdělujeme na **pravidelné** a **nepravidelné** – pravidelná síť má všechny vrcholy se stejnou **valencí** (počet hran jdoucích z vrcholu):
 - ▶ 4 pro vnitřní body čtyřúhelníkové sítě, 3 pro její krajní body
 - ▶ 6 pro vnitřní body trojúhelníkové sítě, 4 pro její krajní body
- ▶ vrcholy s jinou valencí se nazývají **výjimečné**, síť s výjimečnými body jsou **nepravidelné**
- ▶ pro pravidelné sítě z Eulerovy charakteristiky vyplývá, že takovéto sítě je možné sestavit pouze pro objekty, jejichž **topologie je shodná s topologií roviny, válce nebo anuloidu**, jinak ne. Např. pro sféru nelze najít pravidelnou síť (ani trojúhelníkovou, ani čtyřúhelníkovou)
- ▶ dále rozlišujeme **otevřené** a **uzavřené** sítě
- ▶ metody obvykle umí pracovat a zachovat tzv. **zlomy** (předepsané hrany, ve kterých má být spojitost C^0 i na limitním povrchu)

Klasifikace metod

- ▶ **aproximační** vs. **interpolační** metody – pro aproximační schémata limitní objekt neprochází vrcholy počáteční sítě; pro interpolační prochází ve všech krocích sítě počátečními body
- ▶ **stacionární** vs. **nestacionární** metody – pro stacionární metodu jsou pravidla aplikovaná na síť během dělení neměnná; pokud jsou v některých iteracích použita různá pravidla, hovoříme o nestacionární metodě
- ▶ **uniformní** vs. **neuniformní** metody – pro uniformní metodu je v jednu kroku dělení aplikována stejná pravidla na celou síť; pokud jsou v různých místech sítě aplikována různá schémata, hovoříme o neuniformní metodě
- ▶ **globální** vs. **lokální** dělení – při globálním dělení jsou pravidla aplikována na celou síť; při lokálním dělení pouze na nějakou část sítě (adaptivní dělení)
- ▶ **čtyřúhelníkové** vs. **trojúhelníkové** metody – rozlišení podle typu sítě, na kterou je možné pravidla aplikovat
- ▶ subdivision schémata typicky během procesu vytvářejí **regulární vrcholy** (ne výjimečné), počet výjimečných vrcholů zůstává konstantní

Doo-Sabin

- ▶ jedná se o **aproximační metodu**, která je **přímým rozšířením Chaikinova algoritmu** pro křivky
- ▶ je tedy založena na **ořezávání vrcholů** zadané sítě – každému vrcholu je přiřazeno právě tolik nových vrcholů, kolik stěn daný vrchol obsahuje
- ▶ typicky se používá pro čtyřúhelníkové sítě (je možné ji ale aplikovat i na jiné sítě)
- ▶ **postup**: pro každou stěnu vypočteme její těžiště c (jako průměr všech vrcholů) a každému vrcholu v_i stěny potom přiřadíme nový bod jako střed úsečky spojující c a v_i



- ▶ limitní plocha je typu C^1 , s výjimkou oblastí v okolí výjimečných vrcholů
- ▶ všechny stěny původní sítě směřují ke svému těžišti, limitní plochou je **bikvadratická B-spline plocha**

Doo-Sabin

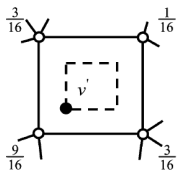
- **geometrická pravidla schématu** je nutné rozdělit na dvě části: **pro čtyřúhelník** získáme nové body cyklickou záměnou koeficientů ve vztahu

$$v' = \frac{9}{16}v_j + \frac{3}{16}v_{j-1} + \frac{1}{16}v_{j+2} + \frac{3}{16}v_{j+1},$$

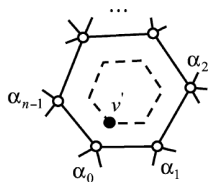
pro jiné stěny než čtyřúhelníkové platí

$$v' = \sum_{i=0}^n \alpha_i v_i,$$

$$\alpha_i = \begin{cases} \frac{n+5}{4n} & i = 0 \\ \frac{3+2 \cos(2\pi i/n)}{4n} & i = 1, \dots, n-1 \end{cases}, \quad \alpha_i = \begin{cases} \frac{1}{2} + \frac{1}{4n} & i = 0 \\ \frac{1}{8} + \frac{1}{4n} & i = 1, n-1 \\ \frac{1}{4n} & i = 2, \dots, n-2 \end{cases}$$



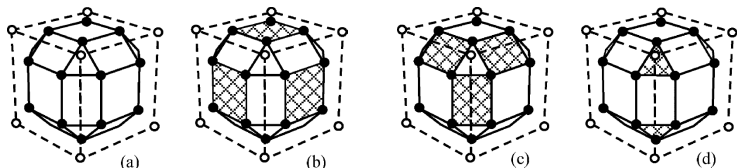
(a)



(b)

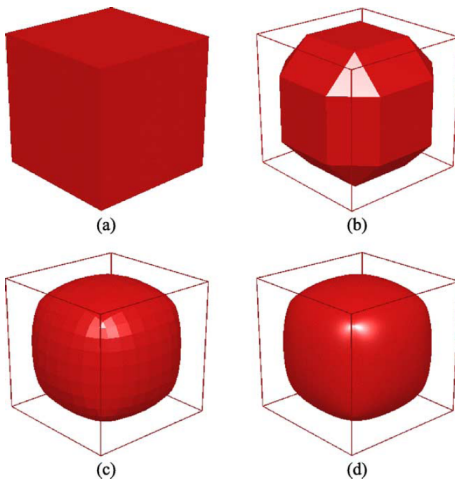
Doo-Sabin

- ▶ **topologická pravidla** je možné shrnout do následujícího obrázku



- ▶ nová síť vznikne z nově vypočtených vrcholů pomocí geometrických pravidel a obsahuje stěny tří typů:
 - ▶ **F-stěny** vzniknou spojením nových vrcholů přiřazených k dané stěně, pro každou stěnu původní sítě je vytvořena jedna nová F-stěna (viz obrázek (b))
 - ▶ **E-stěny** vzniknou pro každou hranu původní sítě spojením čtyř nově vložených vrcholů, které jsou obrazy koncových bodů tvořících hranu (viz obrázek (c))
 - ▶ **V-stěny** vzniknou spojením nových vrcholů, které byly získány z jednoho vrcholu původní sítě; pokud měl vrchol valenci n , V-stěna je n -úhelník (viz obrázek (d))

Doo-Sabin



Obrázek: Doo-Sabin subdivision plocha: (a) výchozí síť, (b) po jedné iteraci schématu, (c) po třech iteracích schématu, (d) limitní plocha

Catmull-Clark

- ▶ opět se jedná o **aproximační metodu**, která vznikla podobně jako kubická modifikace Chaikinova algoritmu
- ▶ podobně jako pro křivky lze totiž i pro plochy **využít vlastností B-spline bázevých funkcí** k odvození schémat, které konvergují k uniformním bikvadratickým, bikubickým, bikvartickým ... B-spline plochám
- ▶ schéma se aplikuje na pravidelné i nepravidelné **čtyřúhelníkové sítě**
- ▶ limitní plocha je třídy C^2 , až na okolí výjimečných bodů, kde je C^1 ; limitní plocha je **uniformní bikubickou B-spline plochou**
- ▶ po prvním kroku dělení jsou všechny nově vytvořené stěny čtyřúhelníky a počet výjimečných vrcholů (a nepravidelných stěn) zůstává konstantní
- ▶ nově vložené vrcholy jsou trojího typu, jejich **geometrická pravidla** jsou následující:
 - ▶ **F-vrcholy** – odpovídají těžišti původní stěny, tedy

$$u_F = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^4 v_i$$

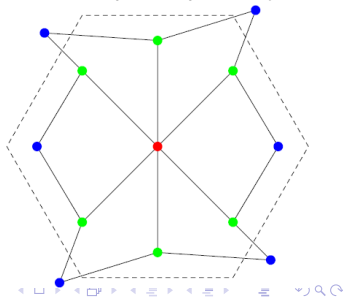
Catmull-Clark

- ▶ pokračujeme v geometrických pravidlech ...
 - ▶ **E-vrcholy** – vzniknou pro každou hranu původní sítě jako průměr koncových bodů hrany a nově nalezených F-vrcholů stěn, k nimž daná hrana přísluší, tedy

$$u_E = \frac{1}{4}(v_i + v_{i+1} + u_{F_i} + u_{F_{i+1}})$$

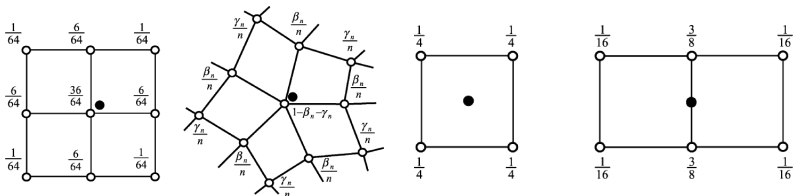
- ▶ **V-vrcholy** – vzniknou posunutím původního vrcholu v ; je-li E průměr středů hran vycházejících z vrcholu v a U_F průměr nově nalezených F-vrcholů pro stěny, kterým náležel vrchol v a n je valence vrcholu v , potom pro nový vrchol u_V platí

$$u_V = \frac{n-3}{n}v + \frac{2}{n}E + \frac{1}{n}U_F$$

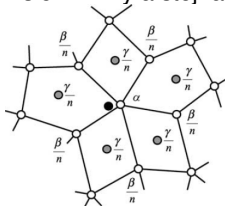
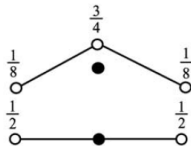


Catmull-Clark

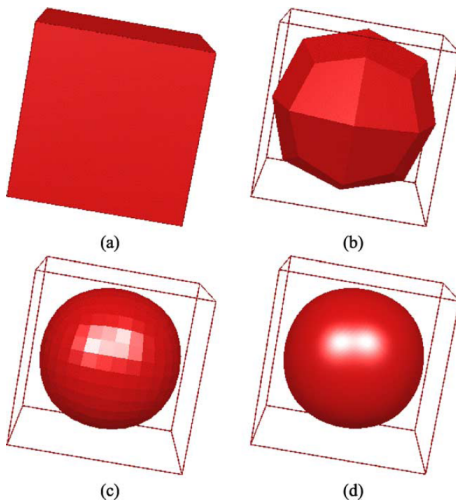
- **topologická pravidla** jsou následující ($\beta_n = 3/(2n)$, $\gamma_n = 1/(4n)$)



- spojením nově vložených vrcholů je získána nová síť – nejprve jsou vytvořeny hrany mezi vrcholy u_F a u_E , následně hrany mezi u_E a u_V
- navíc je možné zahrnout pravidla pro tzv. „sharp features“, jako jsou **zlomy**, **hraniční hrany**, **roh**, **hroty** – rohy necháváme nezměněné, pro zlomy a hraniční hrany použijeme pravidla pro kubické subdivision křivky a stejná pravidla jako pro hladké vrcholy také pro hroty



Catmull-Clark



Obrázek: Catmull-Clark subdivision plocha: (a) výchozí síť, (b) po jedné iteraci schématu, (c) po třech iteracích schématu, (d) limitní plocha

Loop

- ▶ jedná se o **aproximační schéma**, které se aplikuje na **trojúhelníkové síť**
- ▶ limitní plocha je třída C^2 , až na okolí výjimečných vrcholů, kde je třídy C^1
- ▶ zjemňování sítě probíhá opět pomocí **vkládání nových vrcholů**, které jsou zde dvojího typu
- ▶ první typ jsou **body vzniklé z hran původní sítě** – každá hrana náleží dvěma stěnám, jejichž vrcholy označíme $v_i, i = 1, \dots, 4$, nový bod u_E najdeme ze vztahu

$$u_E = \frac{1}{8}v_1 + \frac{3}{8}v_2 + \frac{3}{8}v_3 + \frac{1}{8}v_4$$

- ▶ druhý typ jsou **body vzniklé z vrcholů původní sítě** – označíme-li v_0 vrchol, pro který počítáme nový vrchol u_V a $v_i, i = 1, \dots, n$ jsou koncové vrcholy hran, které vycházejí z v_0 , potom pro u_V platí

$$u_V = \beta \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{n} v_i \right) + (1 - \beta)v_0,$$

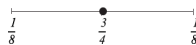
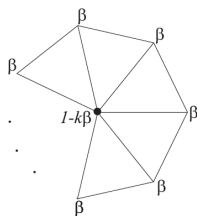
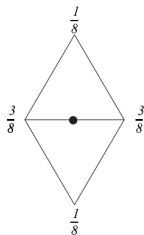
kde

$$\beta = \frac{5}{8} - \left(\frac{3}{8} + \frac{1}{4} \cos \frac{2\pi}{n} \right)^2$$

- ▶ pro vrchol valence 6 je $\beta = \frac{3}{8}$

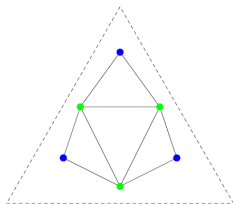
Loop

- ▶ topologická pravidla schématu jsou

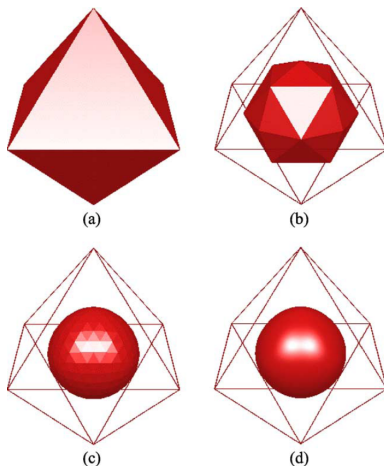


zlomy, hranice

- ▶ ze získaných vrcholů se vytváří **nová síť** (viz obrázek) – každý trojúhelník je rozložen na čtyři nové trojúhelníky a vrcholy mají valenci 6 kromě vrcholů, jež vznikly z výjimečných vrcholů



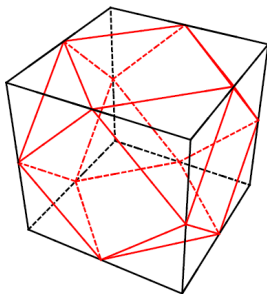
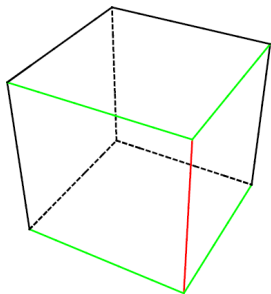
Loop



Obrázek: Loop subdivision plocha: (a) výchozí síť, (b) po jedné iteraci schématu, (c) po třech iteracích schématu, (d) limitní plocha

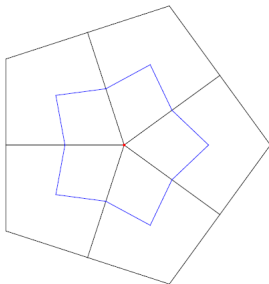
Metoda střední hrany

- ▶ opět se jedná o **aproximační schéma**, tentokrát určené pro **čtyřúhelníkové sítě**
- ▶ limitní plocha je všude třídy C^1
- ▶ princip metody spočívá ve **vkládání středů hran** původní sítě
- ▶ **postup**: jestliže $v_i v_{i+1}$ je hrana původní sítě, najdeme střed této hrany $u = 1/2(v_i + v_{i+1})$ a tento střed spojíme se středy sousedních hran (hrany původní sítě, jejichž jeden vrchol je v_i nebo v_{i+1}), na závěr jsou původní hrany odstraněny



Metoda střední hrany

- ▶ v případě výjimečných vrcholů je potřeba postupovat jinak – **středky stran se spojují s těžišti stěn**, které mají společný výjimečný vrchol



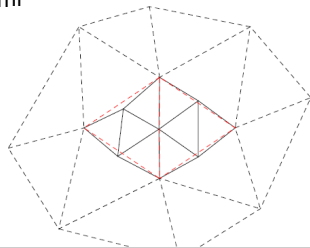
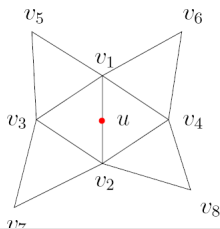
- ▶ většina bodů vytvořených během metody je regulárních, tedy s valencí 4 (nový bod je typicky spojen se čtyřmi sousedy)
- ▶ pokud na počáteční síť aplikujeme metodu střední hrany dvakrát, dostaneme síť, která je shodná se sítí po aplikaci **Doo-Sabinovy metody** na počáteční síť

Motýlí metoda

- ▶ jedno z prvních **interpolačních schémat**, které se aplikuje na **trojúhelníkové sítě**
- ▶ limitní povrch je třídy C^1 , až na okolí výjimečných vrcholů
- ▶ jedná se o **rozšíření 4-bodového schématu** pro křivky, které je rozšířeno pro **osmibodové okolí vrcholu sítě**
- ▶ **nový bod** u^E sítě, příslušný hraně v_1v_2 lze najít pomocí vztahu

$$u^E = \frac{1}{2}(v_1 + v_2) + \frac{1}{8}\gamma(v_3 + v_4) - \frac{1}{16}\gamma(v_5 + v_6 + v_7 + v_8)$$

- ▶ maska metody je na obrázku vlevo, metoda má jméno podle tvaru masky
- ▶ **nové hrany** vzniknou tak, že nový vrchol je spojen hranou se starými vrcholy v_1 , v_2 a dále s ostatními novými vrcholy příslušnými ke hranám v_1v_3 , v_2v_3 , v_1v_4 , v_2v_4 – každý trojúhelník je tak nahrazen 4 novými



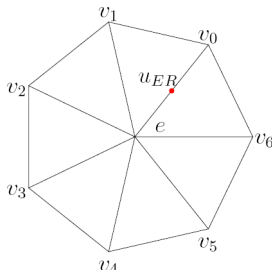
Modifikovaná motýlí metoda

- ▶ později se zjistilo, že klasická motýlí metoda neprodukuje dostatečně hladké plochy pro nepravidelné sítě
- ▶ pokud je jeden z vrcholů hrany výjimečný (e) a v_i jsou vrcholy mající společnou hranu s e , najdeme bod příslušný hraně pomocí vztahu (pro valenci $k \geq 5$)

$$u^E = \frac{3}{4}e + \sum_{i=0}^{k-1} \omega_i v_i, \quad \omega_i = \frac{1}{k} \left(\frac{1}{4} + \cos(2\pi i/k) + \frac{1}{2} \cos(4\pi i/k) \right)$$

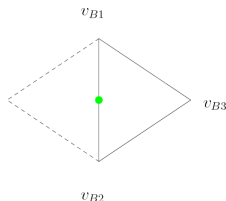
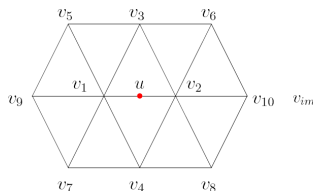
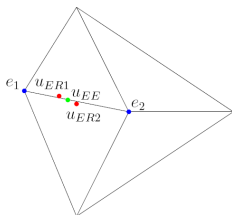
- ▶ pro valence $k = 3$ a $k = 4$ koeficienty jsou

$$k = 3 : \omega_0 = \frac{5}{12}, \omega_{1,2} = -\frac{1}{12}, \quad k = 4 : \omega_0 = \frac{3}{8}, \omega_2 = -\frac{1}{8}, \omega_{1,3} = 0$$



Modifikovaná motýlí metoda

- ▶ další možností je, že **hranu tvoří jen výjimečné vrcholy** – potom je nový bod příslušný této hraně vypočten jako průměr hodnot získaných z předchozích vztahů (viz obrázek vlevo)
- ▶ někdy se u modifikované metody také uvádí modifikace výpočtu nového vrcholu pro hranu bez výjimečných vrcholů – **desetibodové schéma** (viz obrázek uprostřed)

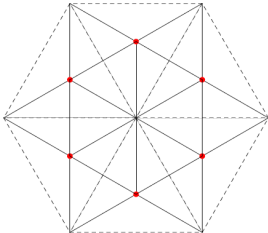


- ▶ metoda řeší také **dělení na hranici** – založeno na principu virtuálního vrcholu, kdy k otevřené síti přidáme síť se stejnou hranicí; nový vrchol je potom vygenerován pomocí 4 bodů (3 vrcholy původní síť, 1 virtuální vrchol) ze vztahu

$$u_B^E = -\frac{1}{16}v_{im} + \frac{9}{16}v_{B1} + \frac{9}{16}v_{B2} - \frac{1}{16}v_{B3}$$

$\sqrt{3}$

- ▶ jedná se o **interpolační metodu**, která se aplikuje na **trojúhelníkové sítě**
- ▶ limitní plocha je třídy C^2 , až na okolí výjimečných bodů, kde je C^1
- ▶ zjemnění probíhá pomocí **vkládání nových vrcholů**, která náleží stěnám sítě
- ▶ **postup**: nový vrchol je vložen na místo těžiště stěny (průměr vrcholů stěny), staré hrany potom zaniknou a vzniknou nové hrany, nejprve mezi těžištěm a vrcholy dané stěny a následně jsou vytvořeny hrany mezi těžišti sousedních stěn



- ▶ nově vložené vrcholy mají valenci 6

Kobbelt

- ▶ jedná se o **interpolační schéma**, které se aplikuje na **čtyřúhelníkové síť**
- ▶ limitní povrch je třídy C^1
- ▶ pro pravidelné síť se redukuje na tenzorový součin dvou 4-bodových interpolačních schémat pro křivky
- ▶ obecný vztah pro **geometrická pravidla 4-bodového schématu** jsou

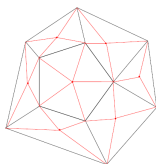
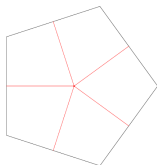
$$\begin{aligned} u_{2j+1} &= \left(\frac{8+\gamma}{16}\right) (v_i + v_{i+1}) - \left(\frac{\gamma}{16}\right) (v_{i-1} + v_{i+2}) \\ u_{2i} &= v_i \end{aligned}$$

kde γ se volí z intervalu $(0, 2(\sqrt{5} - 1))$, jelikož tyto hodnoty zajišťují konvergenci metody ke hladké křivce (typicky je $\gamma = 1$, viz dříve)

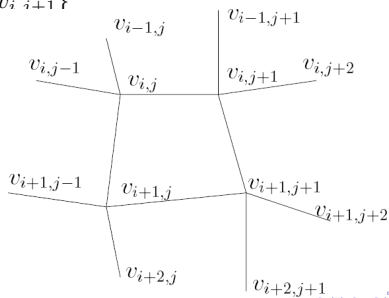
- ▶ metoda může začít tím, že **z libovolné síť vytvoříme síť čtyřúhelníkovou**:
 - ▶ jednou z možností je aplikovat na síť jednu iteraci metody **Catmull-Clark (C)** – každý n -úhelník je rozdělen na n čtyřúhelníků tak, že se vypočtou těžiště všech n -úhelníků, středy všech hran a každá stěna je nahrazena čtyřúhelníky, jež vzniknou spojením středů původních hran a těžiště stěny
 - ▶ alternativou je modifikace metody **Catmull-Clark (\sqrt{C})** – změnou je, že se vypočtou pouze těžiště všech stěn a ty se spojují s vrcholy příslušných stěn

Kobbelt

- ▶ metoda (C) a (\sqrt{C})



- ▶ máme-li čtyřúhelníkovou síť, můžeme aplikovat samotná pravidla – zaměříme se nyní na regulární vrcholy a jejich okolí, stěna f_{ij} je určena vrcholy $\{v_{i,j}, v_{i+1,j}, v_{i+1,j+1}, v_{i,j+1}\}$



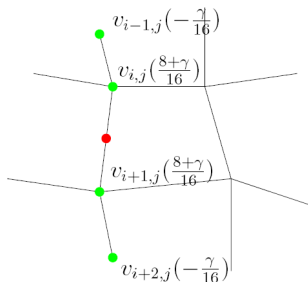
Kobbelt

- nově vložené vrcholy lze rozdělit do tří skupin: **vrcholové** $u_{2i,2j}^V$, **hranové** $u_{2i+1,2j}^E$, $u_{2i,2j+1}^E$ a **stěnové** $u_{2i+1,2j+1}^F$
- vrcholové $u_{2i,2j}^V$ jsou přímo body původní sítě (jde o interpolační metodu), tedy

$$u_{2i,2j}^V = v_{i,j}$$

- hranové $u_{2i+1,2j}^E$, $u_{2i,2j+1}^E$ najdeme opakovanou aplikací 4-bodového schématu

$$\begin{aligned} u_{2i+1,2j}^E &= \left(\frac{8+\gamma}{16}\right)(v_{i,j} + v_{i+1,j}) - \left(\frac{\gamma}{16}\right)(v_{i-1,j} + v_{i+2,j}) \\ u_{2i,2j+1}^E &= \left(\frac{8+\gamma}{16}\right)(v_{i,j} + v_{i,j+1}) - \left(\frac{\gamma}{16}\right)(v_{i,j-1} + v_{i,j+2}) \end{aligned}$$



Kobbelt

- ▶ posledními vrcholy jsou stěnové vrcholy $u_{2i+1,2j+1}^F$ – je možné je najít dvojnásobným způsobem
- ▶ první možností je využít již vypočtených hranových vrcholů $u_{2i+1,2j-2}^E, \dots, u_{2i+1,2j+4}^E$ nebo $u_{2i-2,2j+1}^E, \dots, u_{2i+4,2j+1}^E$ a 4-bodového schématu, tedy

$$u_{2i+1,2j+1}^F = \left(\frac{8+\gamma}{16} \right) (u_{2i+1,j}^E + u_{2i+1,2j+2}^E) - \left(\frac{\gamma}{16} \right) (u_{2i+1,2j-2}^E + u_{2i+1,2j+4}^E)$$

nebo

$$u_{2i+1,2j+1}^F = \left(\frac{8+\gamma}{16} \right) (u_{2i,2j+1}^E + u_{2i+2,2j+1}^E) - \left(\frac{\gamma}{16} \right) (u_{2i-2,2j+1}^E + u_{2i+4,2j+1}^E)$$

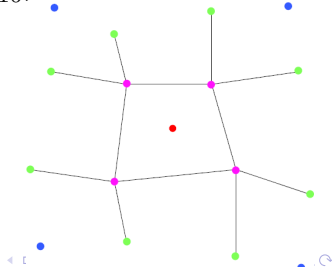
Oba způsoby dávají stejný výsledek.

- ▶ druhý postup využívá původních vrcholů

• $-\frac{\gamma}{16} \frac{8+\gamma}{16}$

• $\left(\frac{8+\gamma}{16} \right)^2$

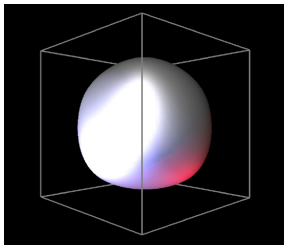
• $\left(-\frac{\gamma}{16} \right)^2$



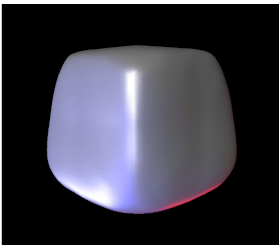
Shrnutí metod

Název metody	Typ metody	Typ sítě	Spojitosť
Doo-Sabin	aproximační	□	$C^1 (C^0)$
Catmull-Clark	aproximační	□	$C^2 (C^1)$
Metoda střední hrany	aproximační	□	$C^1 (C^1)$
Loop	aproximační	△	$C^2 (C^1)$
Motýlí metoda	interpolační	△	$C^1 (C^0)$
Modifikovaná motýlí metoda	interpolační	△	$C^1 (C^1)$
$\sqrt{3}$	interpolační	△	$C^2 (C^1)$
Kobbelt	interpolační	□	$C^1 (C^1)$

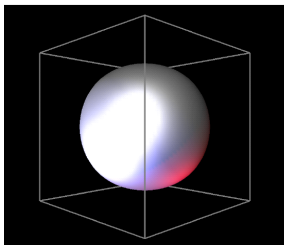
Srovnání metod



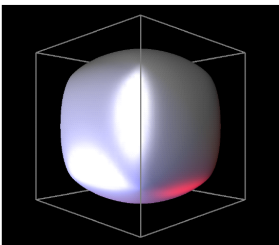
Loop



Butterfly

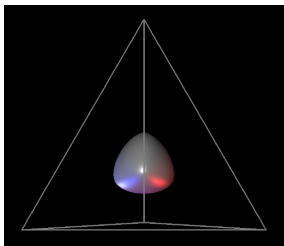


Catmull-Clark

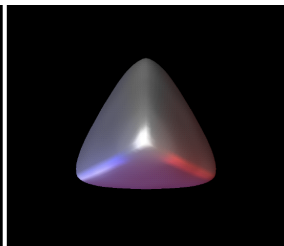


Doo-Sabin

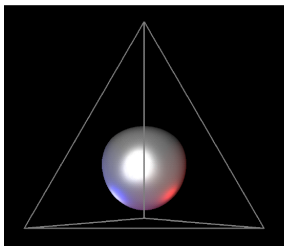
Srovnání metod



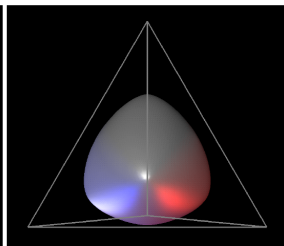
Loop



Butterfly



Catmull-Clark



Doo-Sabin

Srovnání metod

Krychle

- ▶ Loop a Catmull-Clark produkují asi nejlíbivější výsledky, hlavním důvodem je, že obě metody konvergují k ploše třídy C^2 pro pravidelné počáteční sítě
- ▶ jelikož počáteční síť je čtyřúhelníková, asi nejhezčí plochu produkuje Catmull-Clark; plocha generovaná Loopovou metodu je více asymetrická, jelikož krychle musela být nejprve triangulována
- ▶ Doo-Sabin je mnohem blíže původní síti než ostatní aproximační metody
- ▶ plochu nejhorší kvality produkuje interpolační modifikovaná motýlí metoda

Čtyřstěn

- ▶ platí podobná pozorování jako pro krychli
- ▶ navíc je dobré si všimnout extrémního zmenšení výsledné plochy oproti počáteční síti pro Loopovu a Catmull-Clarkovu metod, což je charakteristické pro aproximační metody

Shrnutí

- ▶ pokud nevyžadujeme interpolační plochu, jako optimální volba se zdá Loopova a Catmull-Clarkova metoda, v závislosti na typu počáteční sítě