



ZÁPADOČESKÁ
UNIVERZITA
V PLZNI

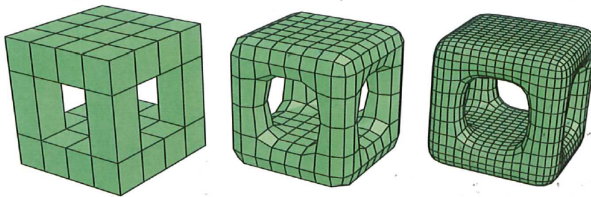
www.KMA.zcu.cz
SINCE 1954

Plochy volného tvaru I.

KMA/ITG – Informační technologie ve vyučování geometrie

Plochy volného tvaru

- ▶ s využitím pouze základních ploch jako jsou válec, kužel, kulová plocha, rotační a přímkové plochy (a jejich kombinace) je obtížné dosáhnout dostatečné volnosti při vytváření 3D objektů
- ▶ proto byly zavedeny přirozená zobecnění Bézierových a B-spline křivek pro plochy – Bézierovy a B-spline plochy a jejich racionální specializace
- ▶ nicméně ani pomocí těchto ploch není možné reprezentovat objekty libovolné topologie – tzv. subdivision plochy tento problém eliminují
- ▶ subdivision plochy se v poslední době využívají stále častěji – hlavní využitím je tvorba animovaných filmů



Historie

- ▶ složité geometrie a plochy volného tvaru se objevují v architektuře velmi brzo, první náznaky jsou již před 400000 lety
- ▶ v 19. století se začínají tyto plochy využívat více – architekti mohou využívat výhod nových materiálů (železo, ocel, železobeton)
- ▶ **Antoni Gaudí** (1852-1926) byl jedním z prvních, který intenzivně využíval plochy volného tvaru – **Sagrada Familia** (1882-dodnes)



Historie

- ▶ složité geometrie a plochy volného tvaru se objevují v architektuře velmi brzo, první náznaky jsou již před 400000 lety
- ▶ v 19. století se začínají tyto plochy využívat více – architekti mohou využívat výhod nových materiálů (železo, ocel, železobeton)
- ▶ **Antoni Gaudi** (1852-1926) byl jedním z prvních, který intenzivně využíval plochy volného tvaru – **Casa Milà** (1905-1907)



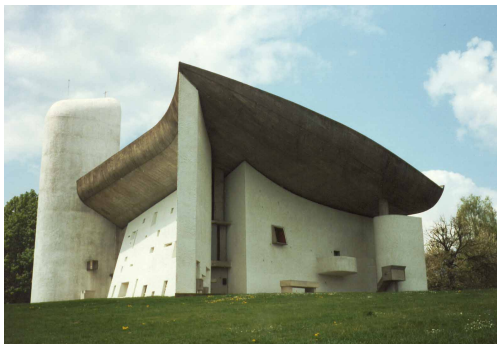
Historie

- ▶ složité geometrie a plochy volného tvaru se objevují v architektuře velmi brzo, první náznaky jsou již před 400000 lety
- ▶ v 19. století se začínají tyto plochy využívat více – architekti mohou využívat výhod nových materiálů (železo, ocel, železobeton)
- ▶ **Erich Mendelsohn (1887–1953)** – **Einstein Tower** (1920-1921)



Historie

- ▶ složité geometrie a plochy volného tvaru se objevují v architektuře velmi brzo, první náznaky jsou již před 400000 lety
- ▶ v 19. století se začínají tyto plochy využívat více – architekti mohou využívat výhod nových materiálů (železo, ocel, železobeton)
- ▶ **Le Corbusier (1887–1965)** – **Notre Dame du Haut (1950-1955)**



Historie

- ▶ složité geometrie a plochy volného tvaru se objevují v architektuře velmi brzo, první náznaky jsou již před 400000 lety
- ▶ v 19. století se začínají tyto plochy využívat více – architekti mohou využívat výhod nových materiálů (železo, ocel, železobeton)
- ▶ **Eero Saarinen (1910-1961)** – **TWA Flight Center (1956-1962)**



Historie

- ▶ složité geometrie a plochy volného tvaru se objevují v architektuře velmi brzo, první náznaky jsou již před 400000 lety
- ▶ v 19. století se začínají tyto plochy využívat více – architekti mohou využívat výhod nových materiálů (železo, ocel, železobeton)
- ▶ Frank Owen Gehry (1929-) – Guggenheim Museum Bilbao (1991-1997)



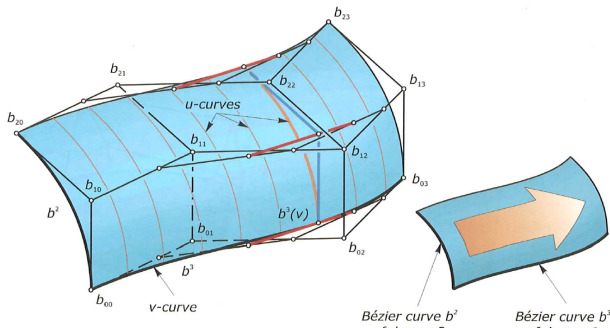
Historie

- ▶ složité geometrie a plochy volného tvaru se objevují v architektuře velmi brzo, první náznaky jsou již před 400000 lety
- ▶ v 19. století se začínají tyto plochy využívat více – architekti mohou využívat výhod nových materiálů (železo, ocel, železobeton)
- ▶ Frank Owen Gehry (1929-) – Walt Disney Concert Hall (1950-1955)



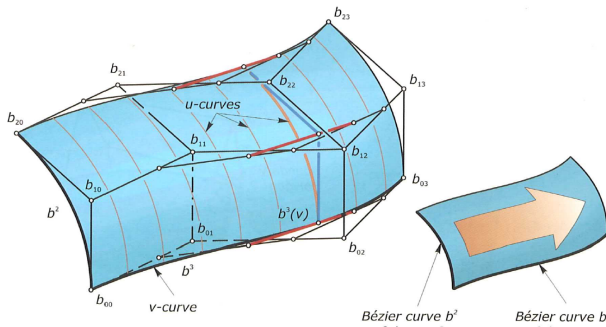
Translační Bézierovy plochy

- ▶ jak získáme u -křivky a v -křivky?



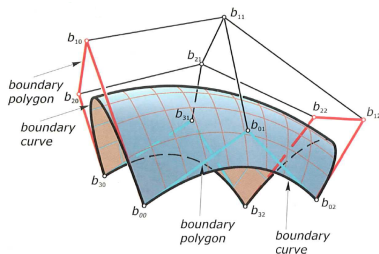
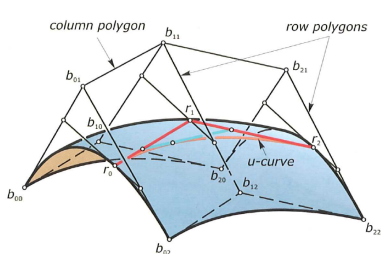
Translační Bézierovy plochy

- ▶ jak získáme u -křivky a v -křivky?
- ▶ v -křivka: pro konstantní u najdeme bod na Bézierově křivce $\mathbf{B}^2(u)$ pomocí algoritmu de Casteljau a řídicí polygon pro křivku $\mathbf{B}^3(v)$ posuneme o vektor $w = \mathbf{B}^2(u) - \mathbf{B}_{00}$
- ▶ podobným způsobem můžeme „posunout“ body řídicích polygonů a získat tak **sít' řídicích bodů**, které určují celou translační Bézierovu plochu
- ▶ okrajové řídicí polygony určují speciální u -křivky a v -křivky, „vnitřní“ řídicí polygony **neurčují** u -křivky a v -křivky



Bézierovy křivky

- ▶ obecná **Bézierova plocha** je určena řídicí sítí bodů $\mathbf{B}_{i,j}$, $i = 0, \dots, m$, $j = 0, \dots, n$
- ▶ plocha obsahuje dva systémy Bézierových křivek: u -křivky stupně m a v -křivky stupně n
- ▶ k nalezení bodu na Bézierově ploše, který odpovídá dvojici parametrů (u_0, v_0) se dá využít **algoritmus de Casteljau pro křivky** – nejdříve pro u_0 najdeme řídicí body odpovídající v -křivky a pro tuto v -křivku najdeme bod odpovídající parametru v_0 (i obráceně)



Vlastnosti Bézierových křivek

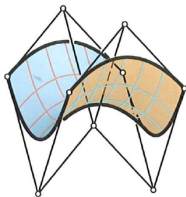
- ▶ Bézierova plocha je pro danou řídicí síť $\mathbf{B}_{i,j}$, $i = 0, \dots, m$, $j = 0, \dots, n$ dána parametrizací

$$\mathbf{B}(u, v) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n B_i^m(u) B_j^n(v) \mathbf{B}_{i,j},$$

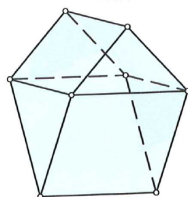
kde $B_{i,m}(u)$, $B_{j,n}(v)$ jsou Bernsteinovy polynomy

- ▶ hraniční řídicí polygony řídicí sítě určují Bézierovy křivky, které jsou okrajovými křivkami dané Bézierovy plochy
- ▶ Bézierova plocha leží v konvexním obalu své řídicí sítě
- ▶ afinní invariantnost (podobně jako pro křivky)

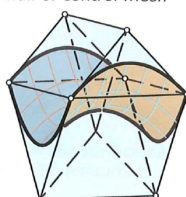
*Bézier surface
& control mesh*



*convex hull
of control mesh*



*Bézier surface & convex
hull of control mesh*



Bézierova plocha stupně (1,1)

- ▶ řídicí síť je pouze čtyřúhelník – pokud body neleží v jedné rovině, odpovídající Bézeirova plocha je částí **hyperbolického paraboloidu**
- ▶ u -křivky a v -křivky jsou zde úsečkami
- ▶ **jak získáme u -křivku v tomto případě?**

Bézierova plocha stupně (1,1)

- ▶ řídicí síť je pouze čtyřúhelník – pokud body neleží v jedné rovině, odpovídající Bézeirova plocha je částí **hyperbolického paraboloidu**
- ▶ u -křivky a v -křivky jsou zde úsečkami
- ▶ **jak získáme u -křivku v tomto případě?**
- ▶ pro daná v rozdělíme úsečky $\mathbf{B}_{00}\mathbf{B}_{01}$ a $\mathbf{B}_{10}\mathbf{B}_{11}$ v poměru $(1 - v) : v$, tj.

$$\mathbf{R}_0 = (1 - v)\mathbf{B}_{00} + v\mathbf{B}_{01}, \quad \mathbf{R}_1 = (1 - v)\mathbf{B}_{10} + v\mathbf{B}_{11}$$

- ▶ u -křivkou je potom úsečka $\mathbf{R}_0\mathbf{R}_1$, která je určena vztahem $(1 - u)\mathbf{R}_0 + u\mathbf{R}_1$
- ▶ dosazením potom dostáváme parametrizaci Bézierovy plochy

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(u, v) &= (1 - u)(1 - v)\mathbf{B}_{00} + \\ &+ (1 - u)v\mathbf{B}_{01} + \\ &+ u(1 - v)\mathbf{B}_{10} + \\ &+ uv\mathbf{B}_{11} = \\ &= \sum_{i=0}^1 \sum_{j=0}^1 B_i^1(u)B_j^1(v)\mathbf{B}_{ij} \end{aligned}$$

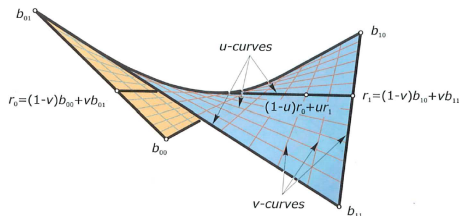
Bézierova plocha stupně (1,1)

- ▶ řídicí síť je pouze čtyřúhelník – pokud body neleží v jedné rovině, odpovídající Bézeirova plocha je částí **hyperbolického paraboloidu**
- ▶ u -křivky a v -křivky jsou zde úsečkami
- ▶ jak získáme u -křivku v tomto případě?
- ▶ pro daná v rozdělíme úsečky $\mathbf{B}_{00}\mathbf{B}_{01}$ a $\mathbf{B}_{10}\mathbf{B}_{11}$ v poměru $(1-v) : v$, tj.

$$\mathbf{R}_0 = (1-v)\mathbf{B}_{00} + v\mathbf{B}_{01}, \quad \mathbf{R}_1 = (1-v)\mathbf{B}_{10} + v\mathbf{B}_{11}$$

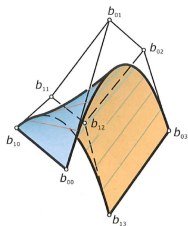
- ▶ u -křivkou je potom úsečka $\mathbf{R}_0\mathbf{R}_1$, která je určena vztahem $(1-u)\mathbf{R}_0 + u\mathbf{R}_1$
- ▶ dosazením potom dostáváme parametrizaci Bézierovy plochy

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(u, v) &= (1-u)(1-v)\mathbf{B}_{00} + \\ &+ (1-u)v\mathbf{B}_{01} + \\ &+ u(1-v)\mathbf{B}_{10} + \\ &+ uv\mathbf{B}_{11} = \\ &= \sum_{i=0}^1 \sum_{j=0}^1 B_i^1(u)B_j^1(v)\mathbf{B}_{ij} \end{aligned}$$



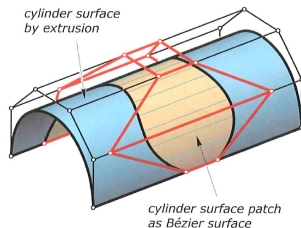
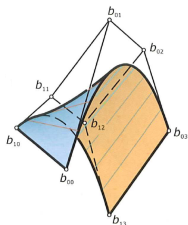
Přímkové Bézierovy plochy

- ▶ Bézierova plocha je částí přímkové plochy, pokud je **stupně $(1, n)$** , tj. u -křivky jsou Bézierovy křivky stupně 1 (úsečky)
- ▶ speciálním případem je **zobecněná válcová plocha**, kterou získáme, pokud jsou všechny hrany řídicí sítě „ve směru u “ rovnoběžné
- ▶ pro modelování zobecněných válcových ploch tak získáváme mnohem větší volnost, oproti standardní funkci „vytažení ve směru“
- ▶ navíc můžeme ztotožňovat řídicí body – pokud ztotožníme všechny body jedné řídicí hrany „ve směru v “, získáme **kuželovou plochu** s tímto vrcholem



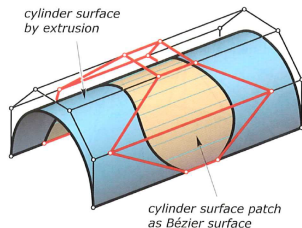
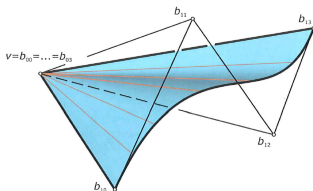
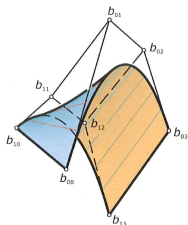
Přímkové Bézierovy plochy

- ▶ Bézierova plocha je částí přímkové plochy, pokud je **stupně (1, n)**, tj. u -křivky jsou Bézierovy křivky stupně 1 (úsečky)
- ▶ speciálním případem je **zobecněná válcová plocha**, kterou získáme, pokud jsou všechny hrany řídicí sítě „ve směru u “ rovnoběžné
- ▶ pro modelování zobecněných válcových ploch tak získáváme mnohem větší volnost, oproti standardní funkci „vytažení ve směru“
- ▶ navíc můžeme ztotožňovat řídicí body – pokud ztotožníme všechny body jedné řídicí hrany „ve směru v “, získáme **kuželovou plochu** s tímto vrcholem



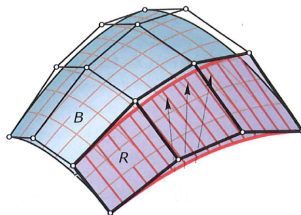
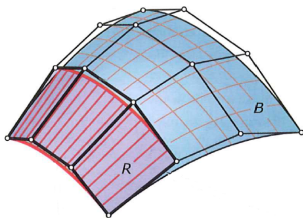
Přímkové Bézierovy plochy

- ▶ Bézierova plocha je částí přímkové plochy, pokud je **stupně (1, n)**, tj. u -křivky jsou Bézierovy křivky stupně 1 (úsečky)
- ▶ speciálním případem je **zobecněná válcová plocha**, kterou získáme, pokud jsou všechny hrany řídicí sítě „ve směru u “ rovnoběžné
- ▶ pro modelování zobecněných válcových ploch tak získáváme mnohem větší volnost, oproti standardní funkci „vytažení ve směru“
- ▶ navíc můžeme ztotožňovat řídicí body – pokud ztotožníme všechny body jedné řídicí hrany „ve směru v “, získáme **kuželovou plochu** s tímto vrcholem



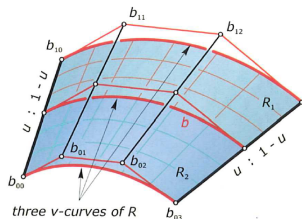
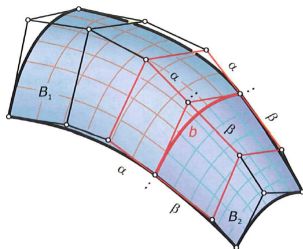
Hladké napojení Bézierových ploch

- ▶ vezmeme-li dvě poslední řady řídicích bodů u libovolného okraje řídicí sítě Bézierovy plochy, získáme řídicí síť **přímkové plochy**, jejíž **površky určují tečny v odpovídajících krajních bodech Bézierovy plochy** – tedy tato přímková plocha je tečná podél hranice Bézierovy plochy
- ▶ necht' máme dvě Bézierovy plochy B^1 , B^2 , jejichž řídicí sítě mají společný okraj
- ▶ potom tyto dvě plochy jsou na sebe napojeny obecně ve třídě C^0 – mají společnou okrajovou Bézierovy křivku, ale **tečné roviny v bodech této křivky mohou být různé**
- ▶ pro zajištění G^1 , resp. C^1 spojitosti je nutné splnění speciálního vztahu mezi řídicími sítěmi tečných přímkových ploch



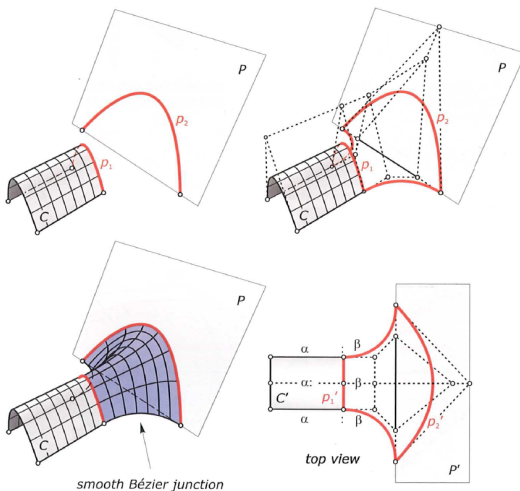
Hladké napojení Bézierových ploch

- ▶ vezmeme-li dvě poslední řady řídicích bodů u libovolného okraje řídicí sítě Bézierovy plochy, získáme řídicí síť **přímkové plochy, jejíž povrchy určují tečny v odpovídajících krajních bodech Bézierovy plochy** – tedy tato přímková plocha je tečná podél hranice Bézierovy plochy
- ▶ necht' máme dvě Bézierovy plochy B^1, B^2 , jejichž řídicí sítě mají společný okraj
- ▶ potom tyto dvě plochy jsou na sebe napojeny obecně ve třídě C^0 – mají společnou okrajovou Bézierovy křivku, ale **tečné roviny v bodech této křivky mohou být různé**
- ▶ pro zajištění G^1 , resp. C^1 spojitosti je nutné splnění speciálního vztahu mezi řídicími sítěmi tečných přímkových ploch



Hladké napojení Bézierových ploch – příklad

- ▶ hladké napojení parabolického válce a roviny



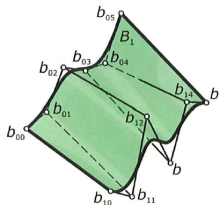
B-spline plochy

- ▶ jelikož Bézierovy plochy přímo vycházejí z Bézierových křivek, mají také **stejně nevýhody** – parametrizace jsou vysokého stupně, špatně zachycují tvar daný řídicí sítí, změna polohy jednoho řídicího bodu mění celou výslednou plochu
- ▶ proto se podobně jako pro křivky zavádí pojem **B-spline ploch**
- ▶ B-spline plocha je určena čtyřúhelníkovou **sítí řídicích bodů**, **dvěma uzlovými vektory U a V** (pro oba parametry u, v plochy) a **stupni v u a v**
- ▶ vlastnosti B-spline ploch se přenášejí z vlastností pro křivky:
 - ▶ uzlové vektory se chovají stejně (násobné uzly opět snižují spojitost),
 - ▶ plocha je lokálně modifikovatelná,
 - ▶ plocha leží v konvexním obalu řídicí sítě a navíc, každá část plochy leží v konvexním obalu příslušné části řídicí sítě (viz křivky)
 - ▶ afinní invariantnost
- ▶ pro danou řídicí síť bodů $\mathbf{P}_{i,j}$, $i = 0, \dots, m$, $j = 0, \dots, n$ a pro dva uzlové vektory $U = (u_0, \dots, u_k)$ a $V = (v_0, \dots, v_l)$ je **B-spline plocha stupně (p, q)** dána vztahem

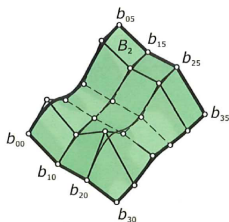
$$\mathbf{S}(u, v) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n N_{i,p}(u) N_{j,q}(v) \mathbf{P}_{i,j}$$

B-spline plochy – příklady

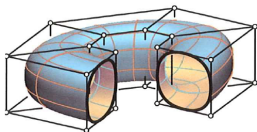
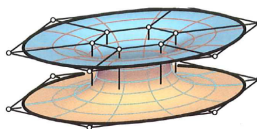
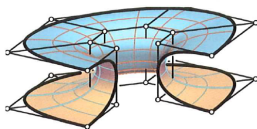
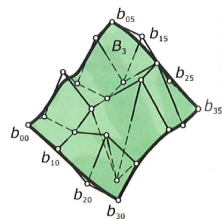
ruled surface



three ruled surfaces

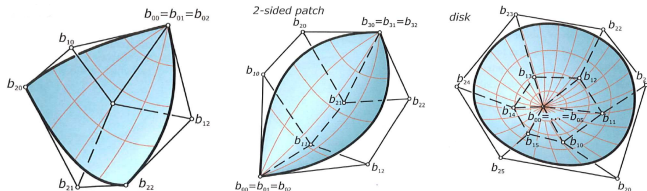


B-spline surface of degree (3,3)

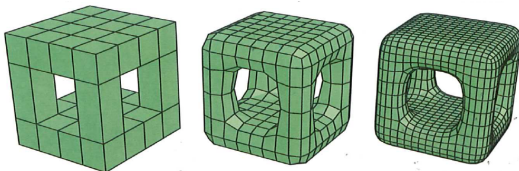


B-spline plochy – příklady

- ▶ pokud jeden nebo více řídicí polygonů dané řídicí sítě splyne do bodu, je možné vytvořit plochy s méně než čtyřmi okrajovými křivkami



- ▶ pomocí B-spline ploch je možné typicky popsat pouze objekty, jejichž topologie je shodná s topologií sféry – nelze tedy např. popsat objekty typu ...

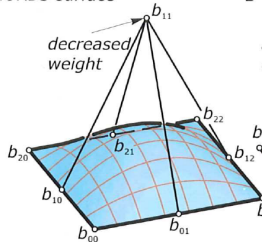


NURBS plochy

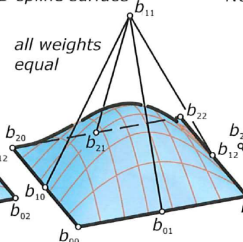
- ▶ podobně je možné přímo zobecnit NURBS křivky a získat tzv. **NURBS plochy**
- ▶ **NURBS plocha** je určena **řídící sítí bodů** $\mathbf{P}_{i,j}$, jejich **váhami** $w_{i,j}$, $i = 0, \dots, m$, $j = 0, \dots, n$, **dvěma uzlovými vektory** $U = (u_0, \dots, u_k)$ a $V = (v_0, \dots, v_l)$ a **stupni** u a v
- ▶ parametrizace takové NURBS plochy je potom dána vztahem

$$\mathbf{S}(u, v) = \frac{\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n N_{i,p}(u) N_{j,q}(v) w_{i,j} \mathbf{P}_{i,j}}{\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n N_{i,p}(u) N_{j,q}(v) w_{i,j}}$$

NURBS surface



B-spline surface



NURBS surface

