6 Cvičení 6 - Kinematika tekutin

6.1 Příklad – Proudnice potenciálního víru

Rychlostní pole *potenciálního víru* je popsáno složkami:

$$u = \frac{-\Gamma y}{2\pi(x^2+y^2)}, \tag{1}$$

$$v = \frac{\Gamma x}{2\pi(x^2+y^2)}, \tag{2}$$

kde Γ je parametr *síly* víru – cirkulace, souřadnice x a y jsou měřeny od středu víru.

(a) Ukažte, na čem závisí velikost rychlosti.

(b) Jaký tvar mají *proudnice*?

(c) Jaká je vířivost?

6.1.1 Řešení

Ad (a) velikost rychlosti je

$$|u| = \sqrt{u^2+v^2} = \frac{\Gamma}{2\pi}\sqrt{\frac{(-y)^2+x^2}{(x^2+y^2)^2}} = \frac{\Gamma}{2\pi}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \tag{3}$$

kde si můžeme všimnout, že $\sqrt{x^2+y^2}$ je vzdálenost r od osy víru, tedy

$$|u|(r) = \frac{\Gamma}{2\pi r} \tag{4}$$

Ad (b) *proudnice* jsou křivky vždy tečné k vektorovému poli v konstantním čase. Takové křivky jsou řešením obyčejné diferenciální rovnice

$$\frac{\mathrm{d}\vec{x}}{\mathrm{d}t} = \vec{u}\left(\vec{x}, t_0\right), \tag{5}$$

kde rychlostní pole je spočítáno pro zamrznutou hodnotu času t_0. Vystartujeme-li v bodě $\vec{x}_0$ a $t = t_0$, řešením této rovnice získáme křivku $\vec{x} = \vec{x}\left(t, \vec{x}_0, t_0\right)$ proudnice. Jelikož je rychlostní pole vyjádřeno v zamrznutém časovém okamžiku t_0, musí existovat nejvýše (v singulárních bodech a v sedlech existovat nemusí) jedna tečna v každém bodě rychlostního pole. Proudnice representují rychlostní pole v jednom konkrétním okamžiku a nikdy se neprotínají.

Pokud rovnici (5) vyjádříme po složkách

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = u\left(\vec{x}, t_0\right) \tag{6}$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = v\left(\vec{x}, t_0\right) \tag{7}$$

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = w\left(\vec{x}, t_0\right) \tag{8}$$

a uvědomíme si, že rychlostní pole je zamrzlé, tedy není funkcí času t (t_0 je jiná proměnná, je to tedy *konstanta* vzhledem k t), můžeme rovnice vynásobit dt a vydělit vždy příslušnou složkou rychlosti

$$\frac{\mathrm{d}x}{u\left(\vec{x}, t_0\right)} = \mathrm{d}t \tag{9}$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{v\left(\vec{x}, t_0\right)} = \mathrm{d}t \tag{10}$$

$$\frac{\mathrm{d}z}{w\left(\vec{x}, t_0\right)} = \mathrm{d}t, \tag{11}$$

a vzhledem k tomu, že mají vždy stejnou pravou stranu, můžeme levé strany posadit vzájemně rovny

$$\frac{\mathrm{d}x}{u(\vec{x},t_0)}=\frac{\mathrm{d}y}{v(\vec{x},t_0)}=\frac{\mathrm{d}z}{w(\vec{x},t_0)} \tag{12}$$

V našem příkladu máme jen dvě složky

$$\frac{\mathrm{d}x 2\pi\left(x^2+y^2\right)}{\Gamma(-y)}=\frac{\mathrm{d}y 2\pi\left(x^2+y^2\right)}{\Gamma x} \tag{13}$$

$$-\frac{\mathrm{d}x}{y}=\frac{\mathrm{d}y}{x} \tag{14}$$

$$\int x\mathrm{d}x=-\int y\mathrm{d}y \tag{15}$$

$$\frac{1}{2}x^2=-\frac{1}{2}y^2+K \tag{16}$$

což je rovnice kružnic o různých poloměrech. V tomto příkladu nebylo vektorové pole funkcíé času, tedy proudnice jsou stejné jako trajektorie. Představme si jiný (nefyzikální, ale matematicky triviální) případ:

$$\vec{u}(\vec{x},t)=\begin{pmatrix}a\\bt\end{pmatrix} \tag{17}$$

tedy proudnice jsou

$$\frac{\mathrm{d}x}{a}=\frac{\mathrm{d}y}{bt_0} \tag{18}$$

čili po jednoduché integraci

$$y=\frac{bt_0}{a}x+K \tag{19}$$

zjistíme, že se jedná o přímky. Naproti tomu *trajektorie*

$$\frac{\mathrm{d}\vec{x}}{\mathrm{d}t}=\begin{pmatrix}a\\bt\end{pmatrix} \tag{20}$$

jsou paraboly

$$x=at+x_0 \tag{21}$$

$$y=\frac{1}{b}t^2+y_0. \tag{22}$$

Ad (3) zde se jedná pouze o dvourozměrné vektorové pole, tedy má smysl vyšetřovat pouze složku vířivosti kolmou k rovině, ve které je vektorové pole popsáno:

$$\begin{aligned}\omega_z=(\nabla\times\vec{u})_z=\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\Gamma}{2\pi}\left[\frac{\partial}{\partial x}\frac{x}{x^2+y^2}-\frac{\partial}{\partial y}\frac{-y}{x^2+y^2}\right]=\\
=\frac{\Gamma}{2\pi}\left[\frac{\left(x^2+y^2\right)\frac{\partial}{\partial x}x-x\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2+y^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2}+\frac{\left(x^2+y^2\right)\frac{\partial}{\partial y}y-y\frac{\partial}{\partial y}\left(x^2+y^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2}\right]=\\
=\frac{\Gamma}{2\pi}\left[\frac{\left(x^2+y^2\right)\cdot 1-x\cdot 2x+\left(x^2+y^2\right)\cdot 1-2y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}\right]=\\
=\frac{\Gamma}{2\pi}\left[\frac{0}{\left(x^2+y^2\right)^2}\right]=0\,\text{všude mimo bod }[0,0].\end{aligned} \tag{23}$$

6.2 Příklady na prostorové derivace vektorového pole

(a) Mějme rychlostní pole $\vec{u} = (u; v; w)^T$ vyjádřené jako

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ 4x^2y^2 \\ x - y \end{pmatrix}. \tag{24}$$

Spočítejte *gradient* $\nabla\vec{u}$ tohoto pole, potom jeho *divergenci* $\nabla \cdot \vec{u}$, *rotaci* $\nabla \times \vec{u}$ a nakonec *zrychlení* $\frac{\mathrm{d}\vec{u}}{\mathrm{d}t}$.

(b)

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} \sin x \sin y \\ \cos x \cos y \end{pmatrix}. \tag{25}$$

(c)

$$\vec{u} = \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{1 - e^{-\left(x^2+y^2\right)/R^2}}{x^2 + y^2} \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}. \tag{26}$$

6.2.1 Řešení zrychlení $\mathrm{d}\vec{u}/\mathrm{d}t$

Totální (substanciální, materiálový) diferenciál $\mathrm{d}f$ funkce $f(\vec{x}, t)$ vícero proměnných je vhodné vyjádřit pomocí *parciálních* derivací, což jsou ryze matematické konstrukty, se kterými umíme celkem dobře pracovat – jednoduše derivujeme podle vyznačené proměnné s tím, že ostatní pokládáme za konstanty, což samozřejmě v reálném případě není pravda.

$$\mathrm{d}f(x, y, t) = \frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial f}{\partial t}\mathrm{d}t \tag{27}$$

Derivace je podíl dvou diferenciálů, tedy například změnu funkce f v čase lze vyjádřit pomocí parciálních derivací jako:

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial f}{\partial t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}, \tag{28}$$

kde si všimněme, že podíl $\mathrm{d}t/\mathrm{d}t$ v prvním členu je 1 a v dalších členech je podíl $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t$ příslušnou složkou rychlosti

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x}\vec{u}_x + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{u}_y, \tag{29}$$

Vzpomeneme si na definici skalárního součinu dvou vektorů $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y +$ případné další složky. Pomocí skalárného součinu tedy zpřehledníme zápis nahoře

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial f}{\partial t} + (\nabla f) \cdot \vec{u}, \tag{30}$$

Skalární součin je komutativní (na rozdíl od vektorového součinu nebo obecného tensorového součinu s operátory), takže můžeme klidně členy prohodit, aby si náhodou někdo nemyslel, že operátor ∇ působí i na vektor $\vec{u}$, kdybychom například zapomněli závorku.

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial f}{\partial t} + (\nabla f) \cdot \vec{u} = \frac{\partial f}{\partial t} + \vec{u} \cdot (\nabla f) = \frac{\partial f}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla f = \frac{\partial f}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) f, \tag{31}$$

Poslední vyjádření v této rovnici nám zdůrazňuje, že derivace podle času je univerzální operátor, který může působit na libovolné skalární, vektorové nebo tensorové pole a poslední člen $(\vec{u}\cdot\nabla)$ je samostatný operátor, se kterým se setkáme překvapivě často. Například, časová změna pole teploty vypadá takto:

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial T}{\partial t} + (\vec{u}\cdot\nabla)\,T \tag{32}$$

nebo časová změna rychlostního pole vypadá takto

$$\frac{\mathrm{d}\vec{u}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u}\cdot\nabla)\,\vec{u} \tag{33}$$

Stále je však třeba pamatovat na to, že za skalárním součinem se schovává součet součinů odpovídajících složek, takže explicitné vyjádření může být i celkem dlouhé.

V tomto cvičení explicitně vyřeším jen případ (b). Všimněme si, že rychlostní pole neobsahuje čas explicitně, tedy by se mohlo zdát, že zrychlení je nulové, což není pravda, neboť na zrychlení, které by pociťovala částice unášená tímto polem, by se podílela i změna rychlosti mezi sousedními místy, která částice navštíví.

$$\frac{\mathrm{d}\vec{u}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u}\cdot\nabla)\,\vec{u} \tag{34}$$

první člen je nula, k výpočtu druhého členu se hodí předpočítat si gradient

$$\nabla\vec{u} = \begin{pmatrix} \partial u/\partial x & \partial v/\partial x \\ \partial u/\partial y & \partial v/\partial y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos x \sin y & -\sin x \cos y \\ \sin x \cos y & -\cos x \sin y \end{pmatrix} \tag{35}$$

Z gradientu mimo jiné vidíme, že rovnice kontinuity je pro toto vektorové pole splněna. Dále tedy tuto matici násobíme vektorem rychlosti a dostaneme

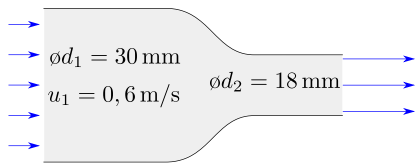
$$\vec{u}\cdot\nabla\vec{u} = \begin{pmatrix} \cos x \sin x \sin^2 y + \sin x \cos x \cos^2 y \\ -\sin^2 x \sin y \cos y - \cos^2 x \cos y \sin y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos x \sin x \left(\sin^2 y + \cos^2 y\right) \\ -\sin y \cos y \left(\sin^2 x + \cos^2 x\right) \end{pmatrix} \tag{36}$$

a fajnšmekři si to zjednoduší pomocí součtových vzorců...

6.3 Příklady na rovnici kontinuity

Pro nestlačitelnou tekutinu je rovnice kontinuity vlastně rovnicí konstantního objemu a limituje topologii vektorového pole rychlostí následovně:

$$\nabla\cdot\vec{u} = 0 \tag{37}$$



(a) Vypočítejte rychlost u_2 na výstupu ze zužující se dýzy, je-li vstupní rychlost u_1 a známe průměry dýzy na vstupu d_1 a na výstupu d_2.

(b) Vektorové pole rychlostí má v rovině tvar

$$u = u_0 + 0,1y^2 \sin x \tag{38}$$

$$v = \frac{1}{2}(y+z) \tag{39}$$

Rozhodněte, zda pole splňuje rovnici kontinuity pro nestlačitelnou tektuinu ve dvourozměrném případě. Pokud ne, dopočítejte kolmou složku w tak, aby v prostoru splněna byla.

6.3.1 Řešení

Ad (a) látka, která se propasuje prvním průřezem, se musí propasovat i druhým prlřezem, tedy

$$\frac{\pi d_1^2}{4}u_1 = \frac{\pi d_2^2}{4}u_2 \longrightarrow u_2 = u_1\left(\frac{d_1}{d_2}\right)^2 \tag{40}$$

Ad (b) Rovnice kontinuity zní

$$\nabla\cdot\vec{u} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \tag{41}$$

V našem pípadě

$$\nabla\cdot\vec{u} = 0 + 0,1y^2\cos x + \frac{1}{2}(1+0) + \frac{\partial w}{\partial z} \tag{42}$$

Vidíme, že toto se nule nerovná, pokud nezahrneme i třetí složku. Rovnice kontinuity však omezí pouze parciální derivaci třetí složky, konkrétně víme, že

$$\frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} = -\left(\frac{1}{2} + 0,1y^2\cos x\right) \tag{43}$$

integrujeme

$$w = -\int \frac{1}{2} + 0,1y^2\cos x \mathrm{d}z = w_0(x,y) - z\cdot\left(\frac{1}{2} + 0,1y^2\cos x\right) \tag{44}$$

kde integrační konstanta w_0 může být libovolnou funkcí x a y.

7 Bernoulliova rovnice

Odvození BR z NSR

Navierova-Stokesova rovnice bez tření (tj. Eulerova rovnice):

$$\frac{\mathrm{d}\vec{u}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial\vec{u}}{\partial t} + (\vec{u}\cdot\nabla)\,\vec{u} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \vec{R}, \tag{45}$$

přepsaná pomocí indexů:

$$\frac{\mathrm{d}u_i}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial u_i}{\partial t} + \left(u_j\frac{\partial}{\partial x_j}\right)u_i = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x_i}p + R_i, \tag{46}$$

ze které chceme vyjádřit tlak p, což provedeme násobením $\mathrm{d}x_i$:

$$\frac{\mathrm{d}u_i\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i}\mathrm{d}x_i + R_i\mathrm{d}x_i, \tag{47}$$

kde si na levé straně všimněme, že $\mathrm{d}x_i/\mathrm{d}t = u_i$, tedy

$$u_i\mathrm{d}u_i = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i}\mathrm{d}x_i + R_i\mathrm{d}x_i. \tag{48}$$

Jedná se o 3 rovnice, které nyní sečteme, jenže díky *Einsteinově sumační konvenci* $a_ib_i = \sum_i a_ib_i$ se touto operací zápis nijak nezmění. Dále využijeme toho, že $u_i\mathrm{d}u_i = u\mathrm{d}u$, kde pod u rozumíme *velikost* rychlosti $u = \sqrt{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2}$, neboť $u^2 = \sum u_i^2 \xrightarrow{\mathrm{d}} 2u\mathrm{d}u = 2u_i\mathrm{d}u_i$.

Dále se zaměříme na *tlak* p a vzpomeneme si, že

$$\mathrm{d}p = \frac{\partial p}{\partial t}\mathrm{d}t + \frac{\partial p}{\partial x_i}\mathrm{d}x_i \tag{49}$$

a nahradíme první člen pravé strany rovnice 48:

$$u\mathrm{d}u = -\frac{1}{\rho}\left(\mathrm{d}p - \frac{\partial p}{\partial t}\mathrm{d}t\right) + R_i\mathrm{d}x_i. \tag{50}$$

Toto je *Bernoulliova rovnice.*

Pokud dále považujeme děj za *stacionární* ($\partial p/\partial t = 0$) a tekutinu za nestlačitelnou ($\partial\rho/\partial p = 0$), lze rovnici zintegrovat **podél proudnice**:

$$\int u\mathrm{d}u = -\int \frac{1}{\rho}\mathrm{d}p + \int R_i\mathrm{d}x_i \tag{51}$$

(pokud hustota ρ nezávisí na tlaku p a vnější zrychlení $\vec{R}$ na poloze $\vec{x}$)

$$\frac{1}{2}u^2 = -\frac{p}{\rho} + R_i x_i + H, \tag{52}$$

$$\frac{1}{2}u^2 + \frac{p}{\rho} - R_i x_i = H. \tag{53}$$

7.1 Příklad – výber rovnice (50) nebo (53)

Uvažujte dýzu jako v příkladu 6.3, na vstupu o ploše průřezu S_1 mějme tlak p_1 a teplotu T_1, na výstupu o ploše průřezu S_2 uvažujme statický tlak p_2. Děj považujme za (a) nestlačitelný ($\rho = \rho_1$) (b) za izotermický ($T_2 = T_1$) nebo (c) za adiabatický ($\delta Q_{12} = 0$). Určete výstupní rychlost u_2. Pracovní látkou je vzduch za podmínek blízkých pokojovým.

7.1.1 Řešení

Rovnice kontinuity

$$\rho_1 u_1 S_1 = \rho_2 u_2 S_2 \longrightarrow u_1 = u_2 \cdot \frac{\rho_2}{\rho_1} \cdot \frac{S_2}{S_1} \tag{54}$$

Bernoulliova rovnice

$$u\mathrm{d}u + \frac{1}{\rho}\mathrm{d}p = 0 \tag{55}$$

a rovnice pro hutotu (v případě (b) bez další diskuse použijeme poučku pro adiabatický děj v ideálním plynu: $pv^\kappa = \text{konst.}$)

$$(a)\ \rho(p) = \rho_1 = \frac{p_1}{rT_1} \tag{56}$$

$$(b)\ \rho(p) = \frac{p}{rT_1} \tag{57}$$

$$(c)\ \rho(p) = \rho_1\left(\frac{p}{p_1}\right)^{1/\kappa} \tag{58}$$

V případě (a) je hustota konstantou vzhledem k p a Bernoulliovu rovnici můžeme rovnou integrovat a přes integrační konstantu spojit na obou koncích dýzy

$$\frac{1}{2}u_1^2 + \frac{p_1}{\rho_1} = \frac{1}{2}u_2^2 + \frac{p_2}{\rho_1} \tag{59}$$

Za u_1 dosadíme z rovnice kontinuity

$$\frac{1}{2}u_2^2\left(\frac{S_2}{S_1}\right)^2 + \frac{p_1}{\rho_1} = \frac{1}{2}u_2^2 + \frac{p_2}{\rho_1} \tag{60}$$

a přeskládáme, abychom měli u_2 jen jednou

$$\frac{1}{2}u_2^2\left[\left(\frac{S_2}{S_1}\right)^2 - 1\right] = \frac{1}{\rho_1}(p_2 - p_1) \tag{61}$$

$$u_2 = \sqrt{\frac{\frac{2}{\rho_1}(p_2 - p_1)}{\left(\frac{S_2}{S_1}\right)^2 - 1}} \tag{62}$$

A nyní už jen kosmetické úpravy: z horní závorky vytkneme p_1 abychom dostali tlakový spád p_2/p_1 a p_1/ρ_1 nahradíme rT_1; dále si všimněme, že obě závorky jsou vlastně záporné ($p_2 < p_1$ a $S_2 < S_1$), tak prohodíme členy

$$u_2 = \sqrt{\frac{rT_1\left(1 - \frac{p_2}{p_1}\right)}{1 - \left(\frac{S_2}{S_1}\right)^2}} \tag{63}$$

Nyní se podívejme na řešení případu (c), případ (b) si udělá každý sám. Obou techto případech je třeba nejprve do rovnice (50) vložit explicitní závislost hustoty na tlaku a teprve potom integrovat.

$$= \int u\mathrm{d}u + \frac{1}{\rho(p)}\mathrm{d}p = \int u\mathrm{d}u + \frac{1}{\rho_1}\cdot p_1^{1/\kappa}\cdot p^{-1/\kappa}\cdot \mathrm{d}p = \tag{64}$$

p_1 i ρ_1 jsou konstanty vzhledem k p, který se vyvíjí po proudnici, tak je můžeme vytknout a soustředit se jen na integraci mocninné závislosti p

$$\left[\frac{1}{2}u^2\right]_1^2 + \frac{p_1^{1/\kappa}}{\rho_1}\left[\frac{1}{1-1/\kappa}p^{1-1/\kappa}\right]_1^2 = \frac{1}{2}\left(u_2^2 - u_1^2\right) + \frac{p_1^{1/\kappa}}{\rho_1}\cdot\frac{\kappa}{\kappa-1}\cdot\left(p_2^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} - p_1^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}\right) = \tag{65}$$

Opět za u_1 dosadíme z rovnice kontinuity (tentokrát i s ρ) a ze závorky vytkeneme příslušnou mocninu tlaku, abychom dostali tlakový spád

$$= \frac{1}{2}u_2^2\left(1 - \left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)^2\left(\frac{S_2}{S_1}\right)^2\right) + \frac{p_1^{1/\kappa}}{\rho_1}\cdot\frac{\kappa}{\kappa-1}\cdot p_1^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}\left(\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} - 1\right) = \tag{66}$$

Uvědomíme si, že poměr hustot na začátku a na konci je svázán adiabatickým pravidlem, takže $\rho_2/\rho_1 = (p_2/p_1)^{1/\kappa}$; dále si všiměneme, že počáteční tlaky p_1 ve druhém členu se nám celkem elegantně zjednoduší: $p_1^{\frac{1}{\kappa}}p_1^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} = p_1^{\frac{\kappa-1+1}{\kappa}} = p_1$. A $p_1/\rho_1 = rT_1$

$$= \frac{1}{2}u_2^2\left(1 - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{2/\kappa}\left(\frac{S_2}{S_1}\right)^2\right) + rT_1\frac{\kappa}{\kappa-1}\left(\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} - 1\right) = 0 \tag{67}$$

Nyní už jen odečteme druhý člen od nuly na pravé straně, podělíme závorkou u u_2 a odmocníme

$$u_2 = \sqrt{\frac{2rT_1 \frac{\kappa}{\kappa-1}\left(1 - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}\right)}{1 - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{2}{\kappa}}\left(\frac{S_2}{S_1}\right)^2}}. \tag{68}$$

Na zbytek stránky si každý sám vypočte u_2 pro případ izotermického děje v dýze: