

Západočeská univerzita v Plzni
Fakulta aplikovaných věd

SÍŤOVÁ ANALÝZA
Semestrální práce z předmětu KMA/MAB

Vypracovala: Kristýna Slabá
kslaba@students.zcu.cz
Obor: Matematické inženýrství
Školní rok: 2009/2010

Obsah

1 Úvod do síťové analýzy	3
1.1 Hlavní metody síťové analýzy a jejich charakteristika	4
1.1.1 Metoda CPM	6
1.1.2 Metoda PERT	8
1.2 Nákladová analýza	8
1.2.1 Metoda CPM/COST	9
2 Konkrétní projekt - Vybudování kamenné prodejny obchodu <i>Inkshop</i>	10
Literatura	16

Kapitola 1

Úvod do síťové analýzy

Síťová analýza je označení metod pro modelování určitého souboru činností, které je nutno provést k dosažení určitého cíle. Činnostím můžeme říkat aktivity a cíl je realizací konkrétního projektu. Projekt je charakterizován souborem prostorových a časových činností, které jsou na sobě podmíněné a jejichž realizace je nutná ke splnění cíle.

Cílem síťové analýzy je zejména:

- nalezení nejvhodnějšího uspořádání činností tak, aby bylo dosaženo optimálního času;
- plánování projektu tak, aby byl cíl projektu splněn v daném termínu;
- minimalizace časových prostojů při realizace navazujících činností a minimalizace nákladů na realizace činností - čili nalezení neoptimálnějšího sledu činností s respektováním jejich závislosti.

Běžnými a hlavními otázkami, které zodpovídá síťová analýza je zejména:

- celková doba trvání projektu;
- předpokládané začátky a konce jednotlivých činností v rámci projektu;
- nalezení kritických činností, jejichž zpoždění či nesplnění ovlivní konečnou dobu trvání projektu;
- možné zpoždění nekritických činností tak, aby nedošlo ke zdržení projektu.

Pomocí síťové analýzy dokážeme také určit minimální dodatečné náklady, které budou potřeba při předčasném splnění cíle projektu. Síťová analýza nám také ukáže, v jakém čase jsou použity konkrétní zdroje a prostředky.

Příklady typického použití jsou zejména:

- rekonstrukce a výstavba rozsáhlých konstrukcí;

- vývoj a výzkum;
- údržba;
- a mnoho dalších.

1.1 Hlavní metody síťové analýzy a jejich charakteristika

Existuje mnoho metod síťové analýzy, které vycházejí ze dvou hlavních - *Metoda CPM - Critical Path Method* a *Metoda PERT - Program Evaluation and Review Technique*.

Než budou jednotlivé metody popsány detailněji, je potřeba vymezit některé základní pojmy síťové analýzy. Podstatným prvkem síťové analýzy je *síťový graf*, který zobrazuje projekt. Díky této grafové reprezentaci je možno vysledovat návaznost jednotlivých činností a díky síťovému grafu lze také snadno graficky znázornit závislosti jednotlivých aktivit. Graf se skládá z hran a uzlů doplněných relacemi. Dále jsou specifikovány množiny činností a jevů. Tyto dvě množiny mohou být „ohodnoceny“ dobou trvání činnosti, náklady, které jsou spojeny s danou činností (jevem), zdroji a prostředky potřebnými k uskutečnění dané činnosti či jevu.

V síťové analýze se používají hranově i uzlově orientované grafy pro reprezentaci činností a jevů. V hranově orientovaném grafu (Activity-on-arrow) jsou činnosti označovány orientovanými šipkami a uzly představují jevy nebo události. Naproti tomu u uzlově orientovaného grafu (Activity-on-node), kdy uzly představují jednotlivé činnosti a hrany představují jevy či události. Rozdíl v reprezentaci ukazuje obrázek 1.1. Metody CPM a PERT používají zejména hranově orientované grafy.



Obrázek 1.1: Vlevo je ukázka hranově orientovaného grafu a vpravo je zobrazen uzlově orientovaný graf.

Dále rozlišujeme vztahy mezi činnostmi. Uvažujme dvě činnosti A, B. Případy, které mohou nastat jsou následující:

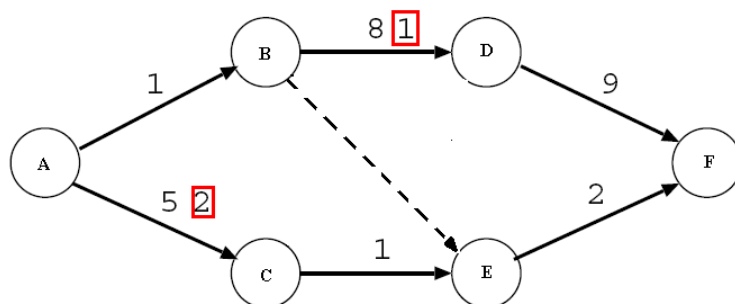
- úloha B nemůže začít, dokud neskončí A
- úloha B nemůže začít, dokud nezačne A
- B nemůže skončit, dokud neskončí A
- B nemůže skončit, dokud nezačne A

Tyto vztahy mohou nastat jak v metodě CPM tak i v metodě PERT. V této práci se bude používat nejběžnější případ, kdy úloha B nemůže začít, dokud neskončí A.

Nyní si více popíšeme některé prvky v hranově orientovaném síťovém grafu. *Uzel* v hranově orientovaném grafu představuje moment ukončení jedné činnosti a zahájení další činnosti. Výjimkou je první a poslední uzel, který nemá předcházející činnost resp. následující činnost. *Hrana* vyjadřuje konkrétní činnost, která může být:

- reálná (probíhá v čase a spotřebovává prostředky)
- čekající (probíhá v čase a nespotebovává prostředky)
- fiktivní (vyjadřuje závislost mezi činnostmi)

Hranově orientovaný síťový graf může být reprezentován graficky nebo incidenční tabulkou. Na obrázku 1.2 je zobrazen příklad hranově orientovaném síťovém grafu daného graficky a 1.3 je příklad zadání pomocí incidenční tabulky.



Obrázek 1.2: Na obrázku jsou hrany ohodnoceny trváním odpovídající činnosti a nebo také prostředky znázorněnými v červeném rámečku (může se jednat nejen o materiální prostředky, ale i o pracovní sílu, např. počet dělníků, apod.). Fiktivní hrana je znázorněna přerušovaně.

	A	B	C	D	E	F
A	×	1	5			
B		×		8		
C			×	0	1	
D				×		9
E					×	2
F						×

Obrázek 1.3: Incidenční tabulka hranově orientovaného síťového grafu. Kde je 0, tam je fiktivní hrana.

1.1.1 Metoda CPM

Metoda kritické cesty byla vyvinuta ve firmě Du Pont v roce 1957 pro plánování výstavby chemického provozu. Cílem této metody bylo zkrácení projektu při minimálních dodatečných nákladech. Konkrétně při výstavbě této továrny v hodnotě \$10 mil. bylo dosaženo zkrácení o 2 měsíce a možnost zkrácení o další dva měsíce při nárůstu nákladů o 1%.

Jedná se o metodu, která se používá pro deterministické činnosti a využívá hranově orientovaný graf. O každé činnosti víme, jak dlouho trvá (například známe průběh činnosti díky tomu, že činnost již byla dříve provedena).

Nyní provedeme časovou analýzu projektu (bude se jednat o hranově orientovaný síťový graf) (viz [1]). Mějme daný síťový graf projektu s ohodnocením dob trvání jednotlivých činností, plánovaný termín zahájení (označme jej t_S) a ukončení projektu (označme jej t_F). Nejprve hledáme nejkratší možnou dobu trvání projektu, pro každou činnost určíme nejdříve možný termín zahájení (ukončení) činnosti a nejpozději možný termín zahájení (ukončení) činnosti.

Pro každou hranu zavedeme tedy tyto čtyři veličiny:

- t_i^E (nejdříve možný termín zahájení činnosti (i,j))
- t_i^L (nejpozději možný termín zahájení činnosti (i,j))
- t_j^E (nejdříve možný termín ukončení činnosti (i,j))
- t_j^L (nejpozději možný termín ukončení činnosti (i,j))

Pro každý uzel zavedeme:

- $t_{A_i}^E$ (nejdříve možný termín provedení jevu A_i)
- $t_{A_i}^L$ (nejpozději možný termín provedení jevu A_i).

Vlastní výpočet probíhá ve dvou fázích.

Postup vpřed

- v počátečním uzlu položíme nejdříve možný termín zahájení projektu roven plánovanému termínu

$$t_{J_i}^E = t_S$$

- vypočteme nejprve možné termíny realizace ostatních jevů

$$t_{J_i}^E = \max_{(h,i) \in H_i^-} (t_h + t_{i,j})$$

kde $i = 2,3,\dots,n$; H_i^- je množina všech hran vstupujících do i

Postup vzad

- nejpozději přípustný termín realizace koncového uzlu položíme roven nejdříve možnému termínu jeho realizace

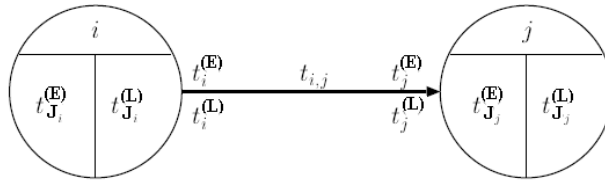
$$t_{J_n}^L = t_{J_n}^E$$

- vypočteme nejpozději přípustný termín realizace uzlů $n-1, n-2, \dots, 2, 1$ (n je počet uzlů projektu, číslování je od 1)

$$t_{J_i}^L = \min_{(i,j) \in H_i^+} (t_{J_j}^L - t_{i,j}),$$

kde $i = n-1, n-2, \dots, 2, 1$; H_i^+ je množina všech hran vystupujících z i

Na následujícím obrázku 1.4 zobrazuje označení prvků síťového grafu se zanesenými výsledky.



Obrázek 1.4: Forma zápisu prvků grafu.

Doba, o níž může být činnost prodloužena (aniž nedojde k prodloužení celkové doby potřebné k dokončení projektu) se nazývá *časová rezerva*. Rezervu označíme $r_{i,j}$ ($r_{i,j} = t_{J_j}^L - t_{J_i}^E$; $r_{i,j} = t_j^L - t_j^E$; $r_{i,j} = t_i^L - t_i^E$).

Kritická činnost je taková činnost, jejíž rezerva je rovna nule. Prodlouží-li se doba kritické činnosti, prodlouží se celková doba projektu.

Kritická cesta je časově nejdelší cesta¹ grafem (délka je dána součtem časů jednotlivých činností).

¹Cesta je posloupnost navazujících činností začínající v počátečním uzlu a končící v koncovém uzlu projektu.

1.1.2 Metoda PERT

Tato metoda byla vypracována pro projekt Polaris v roce 1958.

Narozdíl od CPM jsou činnosti ohodnoceny stochasticky (nejistá doba trvání aktivit; aktivity nebyly předtím vyzkoušeny). Uplatnění této metody se nachází například při výzkumech.

Díky tomu, že činnosti jsou ohodnoceny stochasticky, musíme přidat nové veličiny:

- $a_{i,j}$ (optimistický odhad - nejkratší doba trvání činnosti, pokud se nevyskytnou problémy)
- $m_{i,j}$ (nejpravděpodobnější trvání činnosti - za normálních podmínek)
- $b_{i,j}$ (pesimistický odhad - nejdelší doba trvání činnosti, pokud se vyskytnou problémy)

Odhad těchto veličin specifikuje dobu trvání činnosti (i,j). Z těchto hodnot se pro každou činnost spočítá *očekávané trvání činnosti*

$$\bar{t}_{i,j} = \frac{a_{i,j} + 4m_{i,j} + b_{i,j}}{6}$$

a *rozptyl doby činnosti*

$$\sigma_{\bar{t}_{i,j}}^2 = \left(\frac{b_{i,j} - a_{i,j}}{6}\right)^2.$$

Při řešení postupujeme analogicky jako v metodě CPM, ale jako časové ohodnocení jednotlivých činností bereme $\bar{t}_{i,j}$. Opět můžeme určit časové rezervy, kritické činnosti a kritickou cestu. Dále je možné určit rozptyl pro ukončení projektu a také lze provést pravděpodobnostní analýzu (viz [1], [2]).

1.2 Nákladová analýza

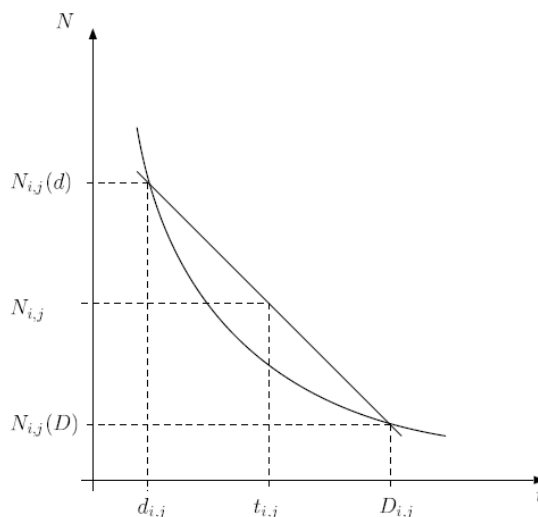
V této části se budeme zabývat závislostí nákladů na době trvání činnosti. Krom těchto nákladů, které jsou proměnné s časem (*náklady proměnné*), existují ještě *fixní náklady*, které nezávisí na době trvání činnosti (např. materiál zakoupený pro realizaci určité činnosti).

Nyní budeme zkoumat proměnné náklady. Zavedeme tyto veličiny:

- $d_{i,j}$ (nejkratší doba trvání činnosti (i,j))
- $D_{i,j}$ (nejdelší doba trvání činnosti (i,j))
- $N_{i,j}(d)$ (náklady, pokud doba trvání činnosti je $d_{i,j}$)

- $N_{i,j}(D)$ (náklady, pokud doba trvání činnosti je $D_{i,j}$)
- $N_{i,j}$ (náklady v očekávané době $t_{i,j}$)

Náklady budou růst se zkracováním doby trvání činnosti. Jelikož nejsou vždy známa přesná data, je nutné nákladovou křivku aproximovat (nejjednodušší je lineární aproximace). Na následujícím obrázku 1.5 je graficky znázorněn vztah nákladů a doby trvání činnosti a aproximace dané křivky.



Obrázek 1.5: Nákladová křivka (viz [1]).

Přímku popíšeme následující rovností

$$N_{i,j} = -c_{i,j} * t_{i,j} + b_{i,j},$$

kde $t \in \langle d_{i,j} \rangle$, $c_{i,j} = -\frac{N_{i,j}(D) - N_{i,j}(d)}{D_{i,j} - d_{i,j}}$ a jedná se o přírůstek nákladů při zkrácení a $b_{i,j} = \frac{-N_{i,j}(D) - N_{i,j}(d)}{D_{i,j} - d_{i,j}} + N_{i,j}(d)$ jsou fixní náklady.

Celkové náklady jsou pak součtem nákladů jednotlivých činností.

1.2.1 Metoda CPM/COST

Tato modifikace metody CPM obsahuje kromě časového aspektu i aspekt nákladový. Navíc je tedy možné řešit výši nákladů na celý projekt, náklady závislé na době trvání projektu, při jakém čase trvání budou náklady minimální, atd.

Využívá se toho, že se změnou doby trvání činnosti se mění také náklady, potřebné k realizaci této činnosti. Pokud budeme zvyšovat náklady některé činnosti, bude se zkracovat doba trvání činnosti (pozn. avšak existuje mez, při které se doba trvání činnosti přestane zkracovat i přes další zvyšování nákladů).

Konkrétní ukázka aplikace metody CPM/COST je uvedena v následující kapitole.

Kapitola 2

Konkrétní projekt - Vybudování kamenné prodejny obchodu *Inkshop*

Internetový obchod Inkshop s adresou *www.inkshop.cz* se zabývá prodejem náplní do tiskáren. Tento obchod nemá kamennou prodejnu a díky velkému ohlasu zákazníků, kteří by kamennou prodejnu uvítali, bylo rozhodnuto vytvořit projekt vybudování kamenné prodejny.

V následující tabulce jsou uvedeny jednotlivé činnosti, jejich předchůdci a doba realizace v týdnech.

Činnost	Popis	Předchůdci	Trvání
A	příprava stavebního povolení	-	1
B	podání stavebního povolení a čekání na schválení	A	4
C	plán výstavby	-	5
D	výběr zhotovitele	C	3
E	vybudování	C,B,D	20
F	nastěhování	E	5

Na posledních dvou stranách jsou grafické zpracování postupu vpřed a vzad s vyznačenou kritickou cestou (obrázek 2.1 a obrázek 2.2).

Jak je vidět z grafického zpracování síťového grafu kritické činnosti jsou C, D, E, F. Projekt bude dokončen za 33 týdnů. Následující tabulka shrnuje veškeré poznatky. V následující tabulce jsou uvedeny rezervy jednotlivých činností.

Činnost	Rezerva
A	3
B	3
C	0
D	0
E	0
F	0

Následuje navíc analýza nákladů projektu (využití metody CPM/COST). Následující tabulka je souhrn veškerých nákladů na jednotlivé činnosti, navíc jsou uvedeny náklady nutné pro zkrácení doby činnosti v závorkách a na jakou dobu je realizace činnosti zkrácena.

Činnost	Náklady proměnné	náklady fixní	Trvání
A	0	0	1
B	0 (10 000,-)	30 000,-	4 (3)
C	25 000,- (50 000,-)	20 000,-	5 (3)
D	0	70 000,-	3
E	1 700 000,- (2 300 000,-)	2 000 000,-	20 (17)
F	60 000,- (90 000,-)	0	5 (2)

Pokud bychom dodrželi původní plán vyhotovení tzn. 33 týdnů. Celý projekt by stál 3 905 000,- z toho fixní náklady činí 2 120 000,- a proměnné náklady jsou 1 785 000,-. Uvažujme nyní tu možnost, že chceme projekt stihnout dříve než za 33 týdnů.

V tabulce s uvedenými náklady uvažujme minimální doby trvání projektu. Projekt by v tu chvíli bylo možné uskutečnit za 25 týdnů (k tomuto závěru dojdeme stejným způsobem jako při časové analýze, nyní však s novými hodnotami dob trvání). Za 25 týdnů by byl projekt realizován za částku 4 570 000,-, fixní náklady zůstávají stejné 2 120 000,- a proměnné náklady jsou 2 450 000,- .

Předpokládejme, že všechny náklady uvedené v tabulce rostou rovnoměrně, dále předpokládejme, že ještě zahrneme ztráty z prodloužení, tzn. za každý týden projektu navíc přijde firma o 60 000,-. To by znamenalo, že za celý projekt, který bychom zpracovali za k projektu zpracovanému za 33 týdnů připočteme částku 480 000,- (60 000*8, 8 týdnů zpoždění oproti zpracování za 25 týdnů). Nyní tedy jsou celkové náklady při 33 týdnech 4 385 000,-.

Vypočítejme náklady na zkrácení činnosti za 1 týden (uvažujeme pouze náklady proměnné)

Start → A	0,-
Start → C	12 500,-
A → B	10 000,-
C → D	0,-
C → E	200 000,-
D → E	200 000,-
B → E	200 000,-
E → F	10 000,-

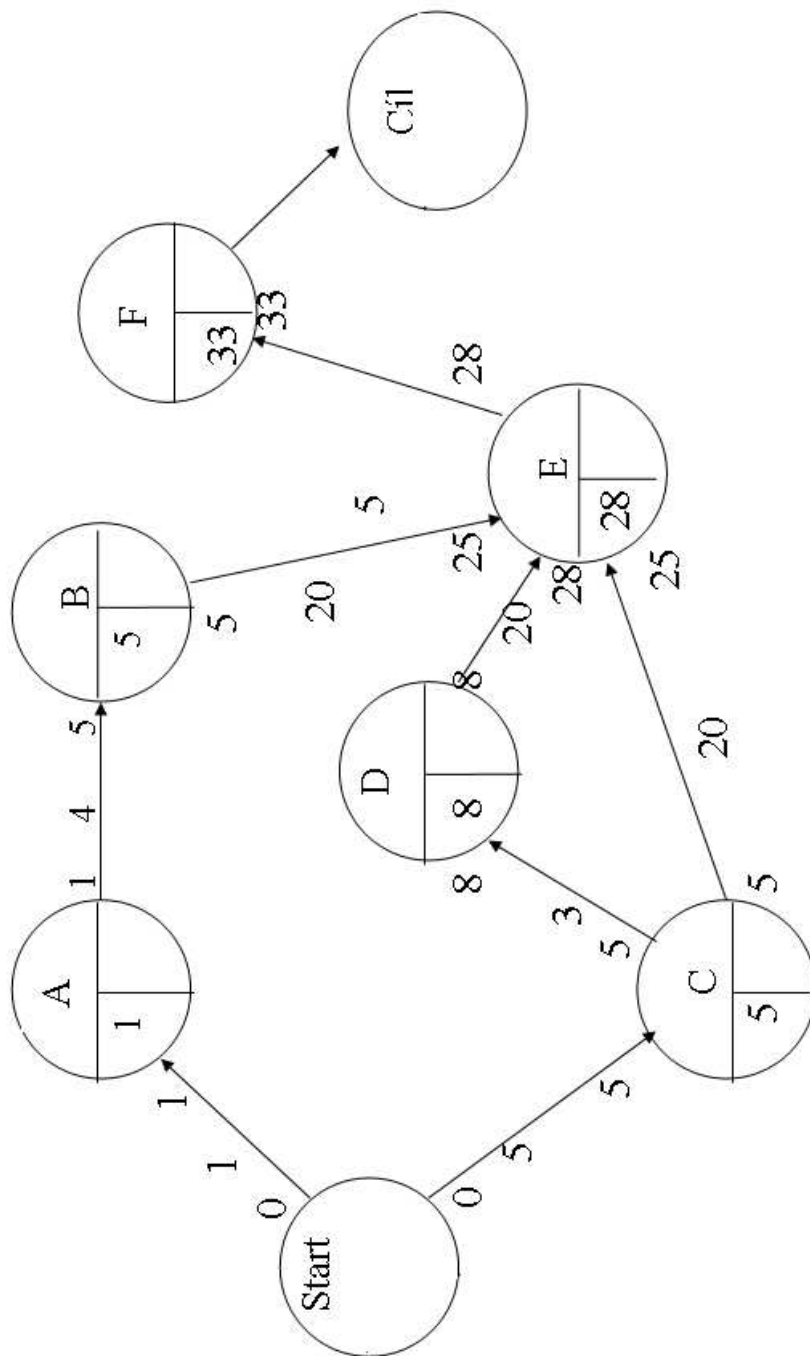
Můžeme určit minimální proměnné náklady při 25 týdnech, jelikož můžeme prodloužit trvání činností mimo kritickou cestu (avšak musíme zachovat celkovou dobu projektu 25 týdnů a dobu činností mimo kritickou cestu můžeme navýšit jen tak, aby kritická cesta byla stále nejdelší). V našem případě můžeme navýšit pouze činnost B na čtyři týdny, jelikož ostatní navýšení by bylo již navýšení kritických činností. Za 25 týdnů by byl projekt realizován za částku 4 560 000,-, fixní náklady zůstávají stejné 2 120 000,- a proměnné náklady jsou 2 440 000,-.

Nyní budeme volit doby trvání projektu uprostřed krajních hodnot (mezi 25 a 33 týdny při minimálních proměnných nákladech). Následující tabulka zahrnuje všechny cesty grafu a výčet činností (1. cesta je cesta kritická)

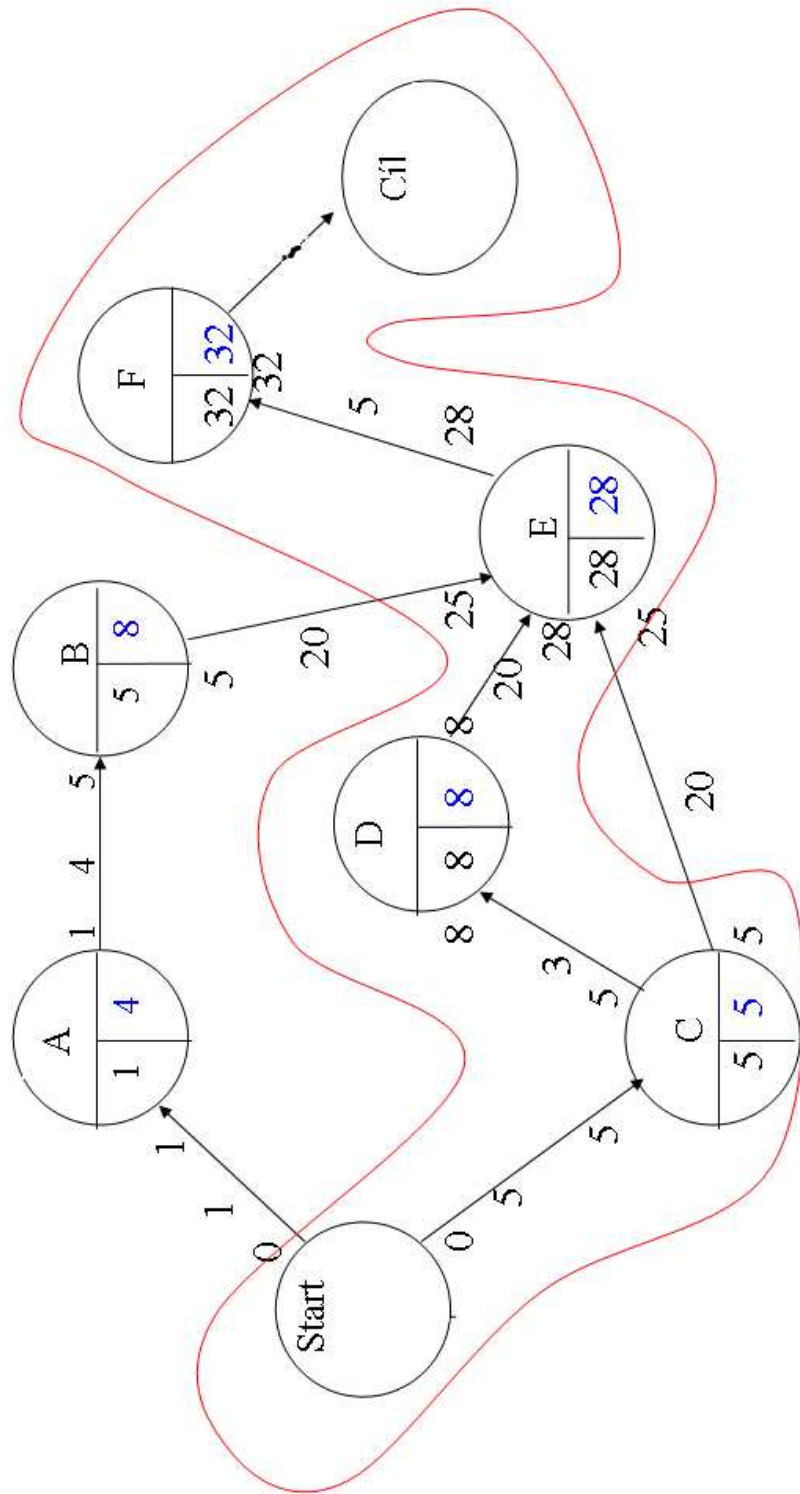
1. Cesta	Start → C	3	3	3	3	4	5	5	5	5
	C → D	3	3	3	3	3	3	3	3	3
	D → E	17	18	19	20	20	20	20	20	20
	E → F	2	2	2	2	2	2	3	4	5
týdny celkem		25	26	27	28	29	30	31	32	33
2. Cesta	Start → C	3	3	3	3	4	5	5	5	5
	C → E	17	18	19	20	20	20	20	20	20
	E → F	2	2	2	2	2	2	3	4	5
týdny celkem		22	23	24	25	26	27	28	29	30
2. Cesta	Start → A	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	A → B	4	4	4	4	4	4	4	4	4
	B → E	17	18	19	20	20	20	20	20	20
	E → F	2	2	2	2	2	2	3	4	5
týdny celkem		23	24	25	26	26	26	27	28	29

Poslední tabulka na následující straně ukazuje náklady v průběhu projektu (částky jsou uvedeny v tisících!!! a jsou uvedeny činnosti, které nějak ovlivní proměnné náklady - neuvádí se nulové položky). Lze tedy vysledovat, že optimální doba projektu je 28 týdnů a celkové náklady činí 4 240 000,- (včetně fixních nákladů).

týdny celkem		25	26	27	28	29	30	31	32	33
proměnné náklady										
	Start → C	50,-	50,-	50,-	50,-	37.5,-	25,-	25,-	25,-	25,-
	D → E	2 300,-	2 100,-	1 900,-	1 700,-	1 700,-	1 700,-	1 700,-	1 700,-	1 700,-
	E → F	90,-	90,-	90,-	90,-	90,-	90,-	80,-	70,-	60,-
Ztráty z prodloužení		0	60,-	120,-	180,-	240,-	300,-	360,-	420,-	480,-
celkem		2 440,-	2 300,-	2 160,-	2 020,-	2 067.5,-	2 115,-	2 165,-	2 215,-	2 265,-



Obrázek 2.1: Postup vpřed.



Obrázek 2.2: Postup vzad zobrazen modře a červeně vyznačená kritická cesta.

Literatura

- [1] Ing. MATOUŠEK Jindřich, Ph.D. *Síťová analýza ZČU KKY*
- [2] GRYZC Vladislav. *Použití metody PERT při řízení projektů*
www.fce.vutbr.cz/veda/dk2003texty/pdf/5-3/np/grycz.pdf
- [3] ROSENAU, Milton D. *Řízení projektů*. Computer Press, a.s., Brno 2003