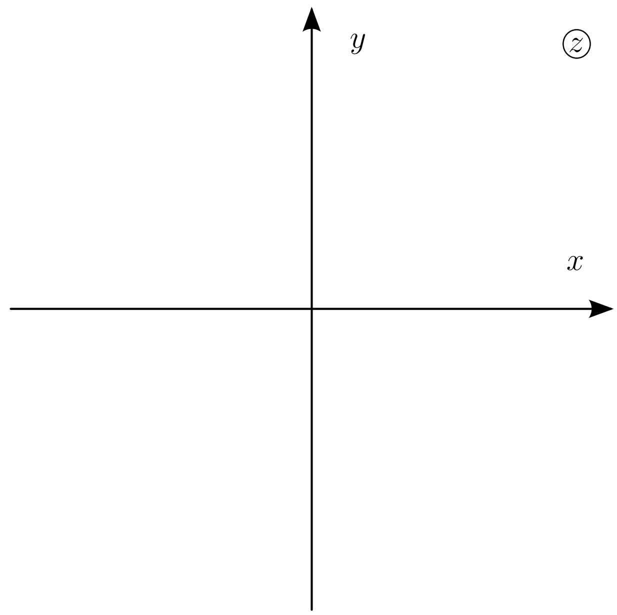
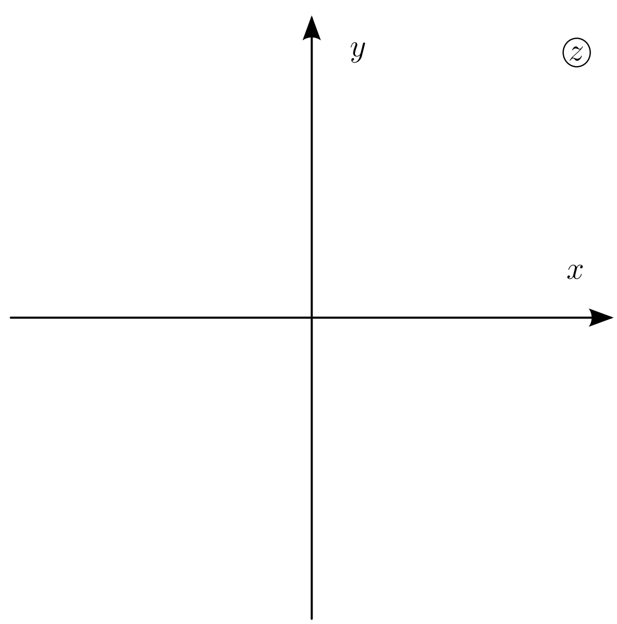
Jméno a PŘÍJMENÍ: ....

Příklad 1. (koeficient roztažnosti)
Určete, ve kerých bodech Gaussovy roviny dochází při daném zobrazení ke **kontrakci** a ve kterých k **dilataci**:

1. $f(z) = \dfrac{2}{z}$



2. $f(z) = \ln(z+4)$



Příklad 2. (konstrukce holomorfních funkcí) Najděte (existuje-li) na oblasti Ω holomorfní funkci $f = u + \mathrm{i}\, v$, je-li

1. $u(x, y) = x, \quad \Omega = \mathbb{C}$,

2. $v(x, y) = \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x}, \quad \Omega = \{z \in \mathbb{C} : \ \operatorname{Re} z > 0\}$,

3. $u(x, y) = x^2 + y^2, \quad \Omega = \mathbb{C}$,

Příklad 3. (vlastnosti holomorfních funkcí) Dokažte následující tvrzení.

1. $f = u + \mathrm{i}\, v$ je holomorfní na oblasti $\Omega \subset \mathbb{C} \quad \Longrightarrow \quad u$ a v jsou **harmonické funkce** na Ω

2. u a v jsou **harmonicky sdružené funkce** na oblasti $\Omega \subset \mathbb{C} \quad \Longrightarrow \quad f = u + \mathrm{i}\, v$ je holomorfní na Ω

3. f je holomorfní na oblasti $\Omega \in \mathbb{C}$ a $\forall z \subset \Omega : \; f'(z) = 0 \quad \Longrightarrow \quad f$ je konstantní na Ω

4. f je holomorfní na oblasti $\Omega \subset \mathbb{C}$ a $H(f) \subset \mathbb{R} \quad \Longrightarrow \quad f$ je konstantní na Ω

Příklad 4. (invariantnost Laplaceovy rovnice vůči konformnímu zobrazení)
Mějme holomorfní funkci f na oblasti $\Omega \in \mathbb{C}$, pro kterou platí

$$\forall z \in \Omega : \; f'(z) \neq 0.$$

Dokažte následující implikaci

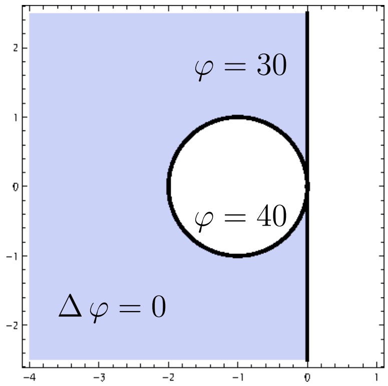
$$\Delta \varphi = 0 \quad \text{na } \Omega \qquad \Longrightarrow \qquad \Delta \tilde{\varphi} = 0 \quad \text{na } \tilde{\Omega},$$

kde $\tilde{\Omega} = f(\Omega)$ a $\tilde{\varphi}(f(z)) = \varphi(z)$ na Ω.

Příklad 5. (okrajové úlohy)

Užitím konformního zobrazení $f(z) = \dfrac{1}{z}$ najděte řešení $\varphi = \varphi(x, y)$ následující okrajové úlohy

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0 & \text{pro } (x, y) \in \Omega, \\ \varphi(x, y) = 30 & \text{pro } (x, y) \in \partial\,\Omega_1, \\ \varphi(x, y) = 40 & \text{pro } (x, y) \in \partial\,\Omega_2. \end{cases}$$



kde

$$\begin{aligned} \Omega &= \{z \in \mathbb{C} : \ |z + 1| > 1, \ \operatorname{Re} z < 0\}, \\ \partial\,\Omega_1 &= \{z \in \mathbb{C} : \ \operatorname{Re} z = 0, \ z \neq 0\}, \\ \partial\,\Omega_2 &= \{z \in \mathbb{C} : \ |z + 1| = 1, \ z \neq 0\}. \end{aligned}$$

Načrtněte několik vrstevnic nalezeného řešení $\varphi = \varphi(x, y)$.

Příklad 6. (konstrukce lineární lomené funkce)
Najděte lineární lomenou funkci f takovou, aby

$$f(0) = \mathrm{i}, \qquad f(-1) = 0, \qquad f(1) = \infty.$$

Příklad 7. (okrajové úlohy)
Užitím lineární lomené transformace najděte řešení $\varphi = \varphi(x, y)$ následující okrajové úlohy

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = 0 & \text{pro } (x,y) \in \Omega, \\ \varphi(x,y) = -10 & \text{pro } (x,y) \in \partial\,\Omega_1, \\ \varphi(x,y) = 20 & \text{pro } (x,y) \in \partial\,\Omega_2. \end{cases}$$

kde

$$\begin{aligned} \Omega &= \left\{ z \in \mathbb{C} : \ |z| < 1, \ \left|z - \tfrac{1}{2}\right| > \tfrac{1}{2} \right\}, \\ \partial\,\Omega_1 &= \left\{ z \in \mathbb{C} : \ |z| = 1, \ z \neq 1 \right\}, \\ \partial\,\Omega_2 &= \left\{ z \in \mathbb{C} : \ \left|z - \tfrac{1}{2}\right| = \tfrac{1}{2}, \ z \neq 1 \right\}. \end{aligned}$$

Načrtněte několik vrstevnic nalezeného řešení $\varphi = \varphi(x, y)$.

Příklad 8. (Schwarz-Christoffelova transformace) Vyšetřete rozložení potenciálu v oblasti Ω, kde na hranicích Γ_1 a Γ_2 jsou předepsána napětí U_1 a U_2 ($U_1 \neq U_2$). Zakreslete alespoň 20 siločar a 20 ekvipotenciál v Ω. K řešení úlohy použijte Schwarz-Christoffelovu transformaci, která je k dispozici v prostředí `MATLAB`u po instalaci `Schwarz-Christoffelova Toolboxu`:

`http://www.math.udel.edu/~driscoll/SC/index.html`