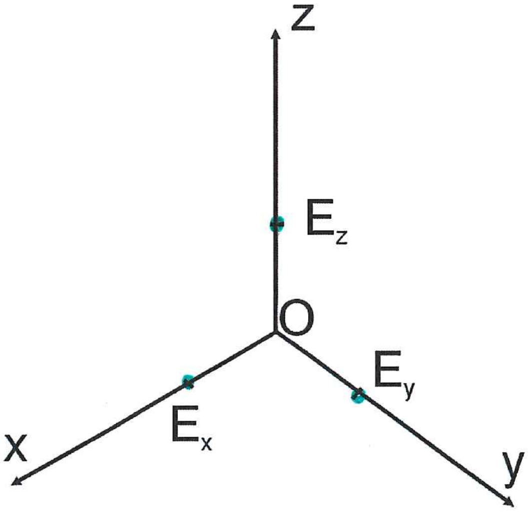
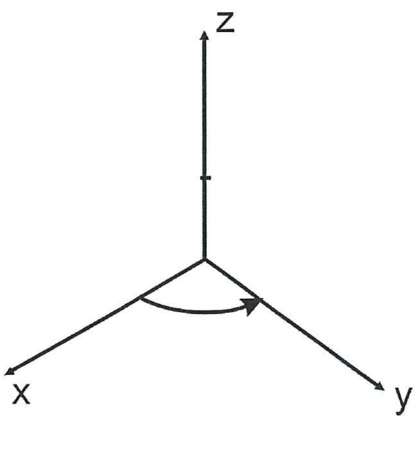
Eukleidovský prostor a KSS

Eukleidovský prostor je bodový prostor, ve kterém je definována vzdálenost dvou bodů (metrika)

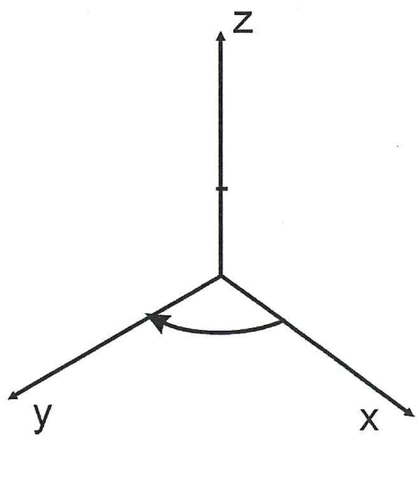
Kartézská soustava souřadnic je dána počátkem O a uspořádanou trojicí bodů E_x, E_y, E_z tak, že platí:



$$OE_x \perp OE_y \perp OE_z \perp OE_x$$
$$|OE_x| = |OE_y| = |OE_z| = 1$$

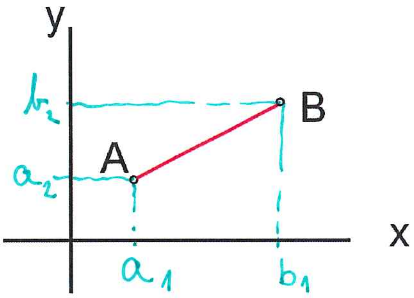


Obrázek 1: Pravotočivá soustava



Obrázek 2: Levotočivá soustava

Vzdálenost dvou bodů (Pythagorova věta)



$$d(AB) = \sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2}$$

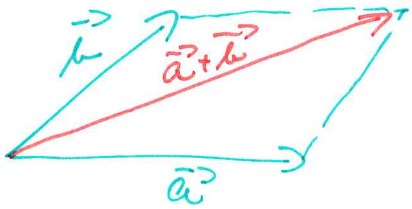
$$d(AB) = \sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2+(b_3-a_3)^2}$$

Geometrický vektor

- vázaný – orientovaná úsečka $\overrightarrow{AB}$
- volný – každý vektor $\overrightarrow{a}$ stejně velký, stejně orientovaný a rovnoběžný s $\overrightarrow{AB}$

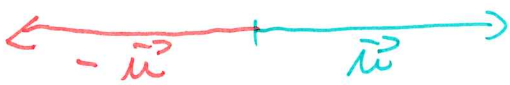
Operace s geometrickými vektory

- Součet vektorů: $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$

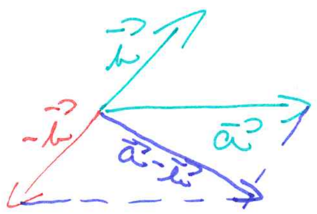


Platí:

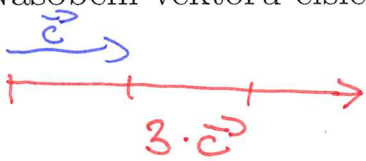
1. $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u}$
2. $(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) + \overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} + (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w})$
3. $\exists \overrightarrow{o} \in V$ (nulový vektor) tak, že $\overrightarrow{o} + \overrightarrow{u} = \overrightarrow{u}$
   nulový vektor $\overrightarrow{AA}, \overrightarrow{BB}, \ldots$
4. $\forall \overrightarrow{u} \in V \; \exists (-\overrightarrow{u}) \in V$ tak, že $\overrightarrow{u} + (-\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{o}$
   opačný vektor k vektoru $\overrightarrow{AB}$ je $\overrightarrow{BA}$

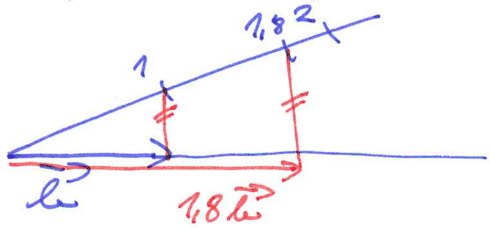


- Rozdíl vektorů: $\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}$



- Násobení vektoru číslem: $c \cdot \overrightarrow{a} = (ca_1, ca_2, ca_3)$



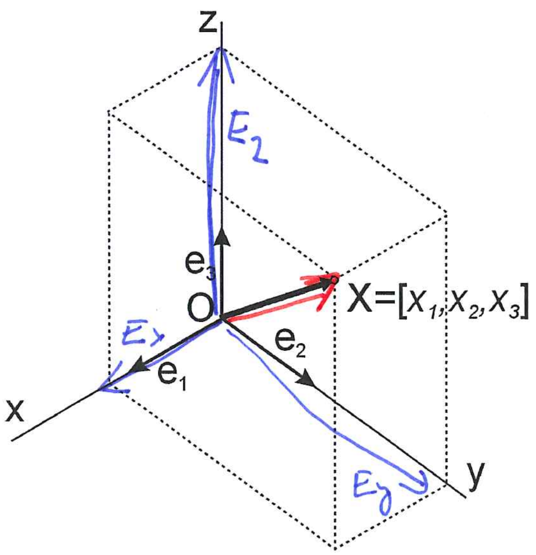


Platí:

1. $a(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = a\overrightarrow{v} + a\overrightarrow{u}$
2. $(a+b)\overrightarrow{u} = a\overrightarrow{u} + b\overrightarrow{u}$
3. $b(a\overrightarrow{u}) = (ba)\overrightarrow{u}$
4. $1\overrightarrow{u} = \overrightarrow{u}$, kde 1 je jednotkový prvek z T.

- Kolineární vektory (rovnoběžné): existuje c takové, že $\overrightarrow{a} = c \cdot \overrightarrow{b}$ nebo $\overrightarrow{b} = c \cdot \overrightarrow{a}$

Souřadnice vektoru



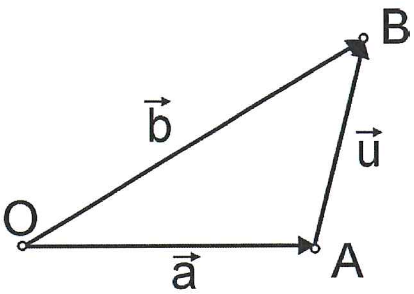
Souřadnicové vektory

$\overrightarrow{e_1} = \overrightarrow{OE_x} = (1,0,0)$
$\overrightarrow{e_2} = \overrightarrow{OE_y} = (0,1,0)$
$\overrightarrow{e_3} = \overrightarrow{OE_z} = (0,0,1)$

polohový vektor bodu X
$\overrightarrow{x} = \overrightarrow{OX} = (x_1, x_2, x_3)$

$\overrightarrow{X} = x_1 \cdot \overrightarrow{e_1} + x_2 \cdot \overrightarrow{e_2} + x_3 \cdot \overrightarrow{e_3}$

$\overrightarrow{X} = (x_1, x_2, x_3)$



$$\vec{a} + \vec{u} = \vec{b}$$
$$\Downarrow$$
$$\vec{u} = \overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a} =$$
$$= (b_1, b_2, b_3) - (a_1, a_2, a_3) =$$
$$= (b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3)$$

Aritmetický vektor

$$\vec{x} = x_1\vec{e_1} + x_2\vec{e_2} + x_3\vec{e_3}$$
$$\Downarrow$$
$\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ . . . aritmetické vyjádření souřadnic vektoru

Nerozlišujeme mezi geometrickými vektory a aritmetickými vyjádřeními jejich souřadnic.

- Součet vektorů: $(x_1, x_2, x_3) + (y_1, y_2, y_3) =$
  $= (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3)$

  Opět platí:
  1. $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$
  2. $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$
  3. $\exists \vec{o} \in V$ (nulový vektor) tak, že $\vec{o} + \vec{u} = \vec{u}$
  4. $\forall \vec{u} \in V\ \exists (-\vec{u}) \in V$ tak, že $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{o}$
- Rozdíl vektorů: $(x_1, x_2, x_3) - (y_1, y_2, y_3) =$
  $= (x_1 - y_1, x_2 - y_2, x_3 - y_3)$

- Násobení vektoru číslem: $c \cdot (x_1, x_2, x_3) = (cx_1, cx_2, cx_3)$

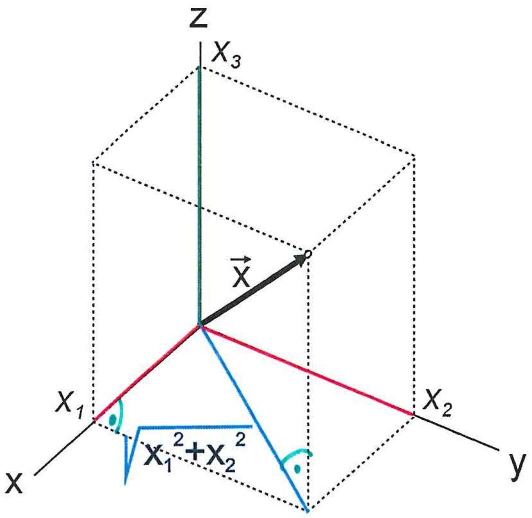
  Opět platí:

  1. $a(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = a\overrightarrow{v} + a\overrightarrow{u}$
  2. $(a + b)\overrightarrow{u} = a\overrightarrow{u} + b\overrightarrow{u}$
  3. $b(a\overrightarrow{u}) = (ba)\overrightarrow{u}$
  4. $1\overrightarrow{u} = \overrightarrow{u}$, kde 1 je jednotkový prvek z T.

Velikost vektoru

$$\sqrt{\left(\sqrt{x_1^2+x_2^2}\right)^2+x_3^2}$$

$$\Downarrow$$

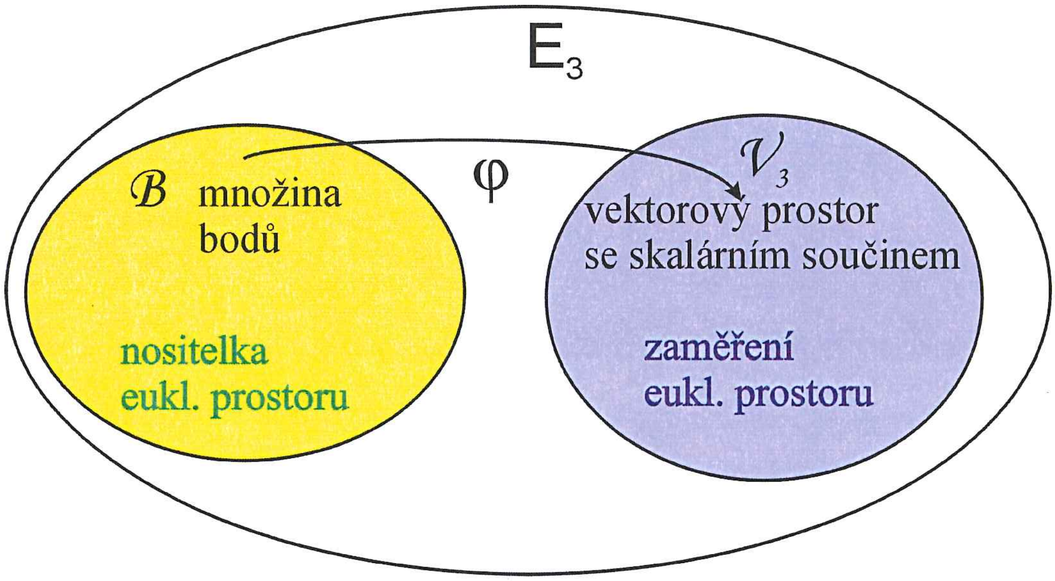


$$|\overrightarrow{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}$$

Jednotkový vektor: $|\overrightarrow{u}| = 1$

Eukleidovský prostor



Lineární kombinace vektorů, lineární závislost

Definice: Nechť $\overrightarrow{u_1}, \ldots, \overrightarrow{u_n}$ jsou vektory v E_n. Řekneme, že vektor $\overrightarrow{v}$ je lineární kombinací vektorů $\overrightarrow{u_1}, \ldots, \overrightarrow{u_n}$ jestliže existují čísla $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ tak, že

$$\overrightarrow{v} = \lambda_1 \overrightarrow{u_1} + \lambda_2 \overrightarrow{u_2} + \ldots + \lambda_n \overrightarrow{u_n} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overrightarrow{u_i}.$$

Příklad: Jsou dány vektory $\overrightarrow{u} = (1, 0, 0)$, $\overrightarrow{v} = (0, 1, 0)$. Napište vektor, který bude jejich lineární kombinací.

$\overrightarrow{w} = \lambda_1 \cdot \overrightarrow{u} + \lambda_2 \cdot \overrightarrow{v}$

$\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3$ $\quad \overrightarrow{w} = 2 \cdot (1; 0; 0) + 3(0; 1; 0)$

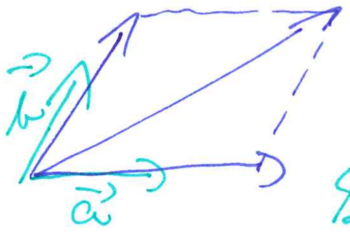
$\overrightarrow{w} = (2; 3; 0)$

$\lambda_1 = 4, \lambda_2 = 5 \Rightarrow \overrightarrow{w'} = (4; 5; 0)$

Definice: Vektory $\overrightarrow{v_1}, \ldots, \overrightarrow{v_n}$ jsou lineárně závislé, jestliže jeden z nich lze vyjádřit jako lineární kombinaci ostatních.

Vektory $\overrightarrow{v_1}, \ldots, \overrightarrow{v_n}$ jsou lineárně nezávislé, jestliže nejsou lineárně závislé tj. žádný z nich nelze vyjádřit jako lineární kombinaci ostatních.

Příklad: Jsou dány vektory $\overrightarrow{a} = (1, 2, 0)$, $\overrightarrow{b} = (0, 1, 1)$. Napište vektor, který je lineárně závislý s vektory $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$.



$$k \cdot \vec{a} + l \cdot \vec{b}$$

$$\left.\begin{matrix} k=2 \\ l=1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow (2;4;0)+(0;1;1) = \underline{\underline{(2,5,1)}}$$

$$\left.\begin{matrix} k=0 \\ l=-1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow (0;0;0)+(0;-1;-1) = (0;-1,-1)$$

Příklad: Zjistěte, zda vektory $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ a $\overrightarrow{w}$ jsou lineárně závislé.

1. $\overrightarrow{u} = (1, 0, 0)$, $\overrightarrow{v} = (0, 1, 0)$, $\overrightarrow{w} = (1, 2, 0)$.
2. $\overrightarrow{u} = (1, 0, 0)$, $\overrightarrow{v} = (0, 1, 0)$, $\overrightarrow{w} = (0, 0, 3)$.

1) Jelikož $\vec{u} + 2\vec{v} = \vec{w} \Rightarrow$ jsou lineárně závislé

2) lineární kombinací vektorů $\vec{u}$ a $\vec{v}$ lze získat vektor $\vec{k} = (\lambda_1; \lambda_2; 0)$, který se pro žádné hodnoty λ_1, λ_2 nerovná vektoru $\vec{w}$ $\Rightarrow$ jsou lineárně nezávislé

Lineární kombinace vektorů, lineární závislost

Platí:

1. Dva vektory $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ jsou LZ, když $\overrightarrow{u} = c \cdot \overrightarrow{v}$ (jeden je násobkem druhého). Mohu je umístit na jednu přímku - jsou kolineární.
2. Tři vektory $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{w}$ jsou LZ, když jeden z nich (např. $\overrightarrow{u}$) mohu vyjádřit $\overrightarrow{u} = k \cdot \overrightarrow{v} + l \cdot \overrightarrow{w}$. Mohu je umístit do jedné roviny - jsou komplanární.

- Kolik v rovině (E_2) existuje maximálně LN vektorů?
- Kolik v prostoru (E_3) existuje maximálně LN vektorů?

Vektory $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{w}$ napíšeme do matice A.

$$A = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix}.$$

Co znamená že vektory $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{w}$ jsou LZ?

Mohu jeden řádek (vektor) napsat jako lin. kombinaci ostatních $\Longrightarrow$

!| 1. hodnost matice je menší než n (počet vektorů)

!| 2. det $A = 0$ (čtvercová matice)

Báze, dimenze

Definice: Báze vektorového (Euklidovského) prostoru je množina vektorů $\overrightarrow{u_1}, \ldots, \overrightarrow{u_n}$, pro kterou platí:

1. $\overrightarrow{u_1}, \ldots, \overrightarrow{u_n}$ jsou LN
2. Každý další vektor $\overrightarrow{v}$ z tohoto prostoru můžeme vyjádřit jako lin. kombinaci vektorů $\overrightarrow{u_1}, \ldots, \overrightarrow{u_n}$

Definice: Dimenze vektorového (tj. i Euklidovského) prostoru je počet vektorů báze. (neboli max počet lin. nezávislých vektorů).

Ortogonální báze – vektory báze jsou kolmé.

Ortonormální báze – vektory báze jsou kolmé a jednotkové.

V E_3 tvoří bázi každé tři LN vektory

Speciální případ báze v E_3 (tu používáme)

$e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1)$

Souřadnice vektoru jsou koeficienty lineární kombinace vektorů e_1, e_2, e_3.

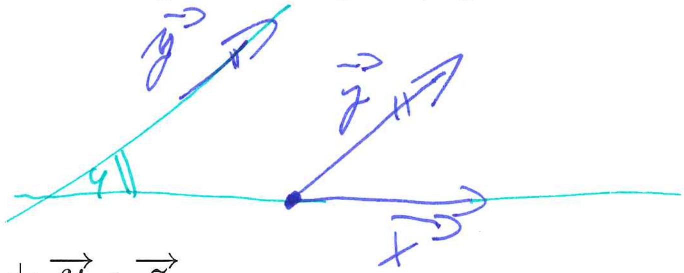
např. $(-5, 2, 3) = -5 \cdot e_1 + 2 \cdot e_2 + 3 \cdot e_3$

Skalární součin

Definice: Skalární součin vektorů $\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{y}$ je reálné číslo a platí:

a) jestliže $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{o}$ nebo $\overrightarrow{y} = \overrightarrow{o}$ pak $\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{y} = 0$,

b) jestliže $\overrightarrow{x} \neq \overrightarrow{o}$ a $\overrightarrow{y} \neq \overrightarrow{o}$ pak $\boxed{\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{y} = |\overrightarrow{x}| \cdot |\overrightarrow{y}| \cdot \cos\varphi}$,
kde φ je odchylka polopřímek určených vektory $\overrightarrow{x}$, $\overrightarrow{y}$
($\varphi \in < 0°; 180° >$).



Platí:

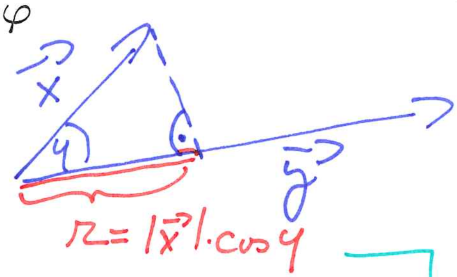
1. $\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{y} = \overrightarrow{y} \cdot \overrightarrow{x}$
2. $(\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}) \cdot \overrightarrow{z} = \overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{z} + \overrightarrow{y} \cdot \overrightarrow{z}$
3. $\boxed{\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{y} = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3} = \sum_{i=1}^{3} x_iy_i$
4. pokud $\overrightarrow{x} \neq \overrightarrow{o}$ a $\overrightarrow{y} \neq \overrightarrow{o}$ pak $\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{y} = 0$, právě když $\overrightarrow{x} \perp \overrightarrow{y}$ ($\varphi = 90^o$)

$$\cos\varphi = \frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{|\vec{x}| \cdot |\vec{y}|} = \frac{x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \cdot \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2}}$$

Geometrický význam:

$\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{y} = |\overrightarrow{x}| \cdot |\overrightarrow{y}| \cdot \cos\varphi$

Jestliže $|\overrightarrow{y}| = 1$ pak $\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{y} = |\overrightarrow{x}| \cdot \cos\varphi$



$\frac{r}{|\overrightarrow{x}|} = \cos\varphi \Rightarrow r = |\overrightarrow{x}| \cos\varphi$

Pokud je $\overrightarrow{y}$ jednotkový vektor, pak skalární součin $\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{y}$ je velikost pravoúhlého průmětu vektoru $\overrightarrow{x}$ na přímku určenou vektorem $\overrightarrow{y}$.

Příklad: Najděte jednotkový vektor $\overrightarrow{u}$, který je kolmý k vektorům $\overrightarrow{a} = (1, 2, 0)$ a $\overrightarrow{b} = (0, 3, 0)$.

(pomocí skalárního součinu)

$\vec{x} \cdot \vec{y} = 0 \Rightarrow |\vec{x}| = 0$

$|\vec{y}| = 0$

$\varphi = \frac{\pi}{2}$

$\vec{u} \cdot \vec{a} = 0$

$\vec{u} \cdot \vec{b} = 0$

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \end{array}\right)$

$u_1 a_1 + u_2 a_2 + u_3 a_3 = 0$

$u_1 b_1 + u_2 b_2 + u_3 b_3 = 0$

$u_1 + 2u_2 = 0$

$3u_2 = 0$

$u_2 = 0$

$u_1 = 0$

$u_3 = k \ldots k \in R$

$u \ldots$ jednotkový

$\Downarrow$

$k = \pm 1$

Definice: Směrové kosiny vektoru $\boldsymbol{u}$ jsou kosiny úhlů α_i, které svírá vektor $\overrightarrow{u}$ s vektory báze $\overrightarrow{e}_i$, $i = 1, 2, 3$.

$\overrightarrow{e_1} \cdot \overrightarrow{u} =$

$\overrightarrow{e_i} \cdot \overrightarrow{u} =$

Příklad: Určete velikost pravoúhlého průmětu vektoru $\overrightarrow{a} = (1, 0, 0)$ do vektoru $\overrightarrow{b} = (3, 4, 0)$.

$\vec{a} \cdot \vec{b}'$

$\vec{b}' \ldots$ jednotkový

$\vec{b}' = \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} = \frac{(3;4;0)}{\sqrt{9+16+0}} = \left(\frac{3}{5}; \frac{4}{5}; 0\right)$

$\vec{a} \cdot \vec{b}' = 1 \cdot \frac{3}{5} + 0 \cdot \frac{4}{5} + 0 \cdot 0 = \underline{\underline{\frac{3}{5}}}$

Vektorový součin

Definice: Vektorový součin vektorů $\vec{x} \times \vec{y}$ je vektor $\vec{z}$ a platí:

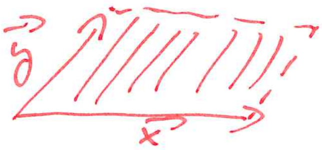
a) pro $\vec{x}$, $\vec{y}$ kolineární je $\vec{x} \times \vec{y} = \vec{o}$ jinak
$|\vec{x} \times \vec{y}| = |\vec{x}| \cdot |\vec{y}| \cdot \sin\varphi$, kde φ je odchylka vektorů $\vec{x}$, $\vec{y}$.

b) $\vec{z} = \vec{x} \times \vec{y}$ je kolmý k vektorům $\vec{x}$, $\vec{y}$.

c) vektory $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$ tvoří pravotočivý systém (v pravotočivé bázi).

Platí:

1. $\vec{x} \times \vec{y} = -(\vec{y} \times \vec{x})$
2. $\vec{x} \times \vec{x} = \vec{o}$
3. $\vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = \vec{e}_3$, $\vec{e}_2 \times \vec{e}_3 = \vec{e}_1$, $\vec{e}_3 \times \vec{e}_1 = \vec{e}_2$
4. $\boxed{\vec{x} \times \vec{y} = \left(\begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \right)}$
5. $\vec{x} \times (\vec{y} + \vec{z}) = \vec{x} \times \vec{y} + \vec{x} \times \vec{z}$
6. $|\vec{x} \times \vec{y}|$ . . . obsah rovnoběžníka



Příklad: Najděte jednotkový vektor $\vec{u}$, který je kolmý k vektorům $\vec{a} = (1, 2, 0)$ a $\vec{b} = (0, 3, 0)$. (pomocí vektorového součinu)

$\vec{a} = (1; 2; 0)$

$\vec{b} = (0; 3; 0)$

$$\vec{u} = \vec{a} \times \vec{b} = \left(\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}; - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} \right) = (0; 0; 3)$$

$$\vec{u}' = \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|} = \frac{(0; 0; 3)}{\sqrt{0+0+3^2}} = \underline{\underline{(0; 0, 1)}}$$

$$\vec{b} \times \vec{a} = (0; 0; -3) \Rightarrow (0; 0; -1)$$

Smíšený součin

Definice: Smíšený součin (vnější) vektorů je číslo

$$\boxed{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) = \vec{x} \cdot (\vec{y} \times \vec{z}) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}}$$

Platí:

1. Vyjadřuje objem V rovnoběžnostěnu určeného vektory $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$, objem čtyřstěnu je $\frac{1}{6}V$
2. $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) = (\vec{z}, \vec{x}, \vec{y}) = (\vec{y}, \vec{z}, \vec{x}) = -(\vec{y}, \vec{x}, \vec{z})$
3. $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3) = 1$
4. $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) = (\vec{x} \times \vec{y}) \cdot \vec{z}$

Příklad: Vypočtěte objem čtyřstěnu $ABCD$.
$A = [2, 4, 5]$, $B = [1, 0, 0]$, $C = [0, 2, 0]$, $D = [0, 0, 3]$.

$\overrightarrow{AB} = B - A = (-1; -4; -5)$
$\overrightarrow{AC} = C - A = (-2; -2; -5)$
$\overrightarrow{AD} = D - A = (-2; -4; -2)$

$$V = \frac{1}{6} \cdot \left| \begin{vmatrix} -1 & -4 & -5 \\ -2 & -2 & -5 \\ -2 & -4 & -2 \end{vmatrix} \right| =$$

$$= \frac{1}{6} \cdot \left| (-4 - 40 - 40 + 20 + 20 + 16 \right| =$$

$$= \frac{28}{6} = \underline{\underline{\frac{14}{3}}}$$