2. DVOJROZMĚRNÝ (DVOJNÝ) INTEGRÁL

Úvodem připomenutí základních integračních vzorců, bez nichž se neobejdete:

[1.] $\int 0dx = C$

[2.] $\int 1dx = x + C$

[3.] $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ pro $x > 0,\ \ n \neq -1$

[4.] $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$ pro $x \neq 0$

[5.] $\int \sin x dx = -\cos x + C$

[6.] $\int \cos x dx = \sin x + C$

[7.] $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C$ pro $x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2},\ \ \mathrm{k} \in \mathrm{Z}$

[8.] $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{cotg} x + C$ pro $x \neq k\pi,\ \ \mathrm{k} \in \mathrm{Z}$

[9.] $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C$ pro $x \in (-1,1)$

[10.] $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \operatorname{arctg} x + C$

[11.] $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$ pro $a > 0,\ \ a \neq 1$

[12.] $\int e^x dx = e^x + C$

[13.] $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + C,\ \ f(x) \neq 0$

[14.] $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C,\ \ a > 0$

[15.] $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$ pro $x \in (-a, a),\ \ a > 0$

[16.] $\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + C,\ \ a \neq 0$

Metoda per partes : $\int u(x) \cdot v'(x) dx = u(x) \cdot v(x) - \int u'(x) \cdot v(x) dx$,

případně $\int u'(x) \cdot v(x) dx = u(x) \cdot v(x) - \int u(x) \cdot v'(x) dx$

2.1. Dvojrozměrný integrál v obdélníku

Riemannův dvojrozměrný nebo také dvojný integrál je obecně definován pro funkci dvou proměnných $z = f(x, y)$. Výpočet Riemannova dvojrozměrného integrálu je jednoduchý, je-li integrační oblastí obdélník $D = \{(x, y) : x \in \langle a, b\rangle,\ y \in \langle c, d\rangle\}$, jehož strany jsou rovnoběžné se souřadnicovými osami a funkce $z = f(x, y)$ je v tomto obdélníku spojitá. Pak platí

$$\iint_D f(x, y)dxdy = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y)dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y)dx. \tag{1}$$

Ve vztahu (1) je nutno odlišovat

dvojrozměrný nebo také **dvojný integrál** $\iint_D f(x, y)dxdy$

od **integrálu dvojnásobného** $$\int_a^b dx \int_c^d f(x, y)dy \tag{1a}$$

nebo $$\int_c^d dy \int_a^b f(x, y)dx. \tag{1b}$$

Dvojrozměrný integrál vypočítáme převedením na integrál dvojnásobný. **V dvojnásobném integrálu počítáme** obecně **nejprve vnitřní integrál** (v zápisu je vpravo) a teprve **pak integrál vnější** (v zápisu je vlevo).

Praktický výpočet provádíme dvojnásobnou integrací funkcí jedné proměnné, při čemž druhou proměnnou považujeme za konstantu podobně jako při praktickém výpočtu parciálních derivací.

Dvojrozměrný integrál v obdélníku $D = \{(x, y) : x \in \langle a, b\rangle,\ y \in \langle c, d\rangle\}$ snadno vypočítáme pro funkce, které lze napsat jako součin dvou funkcí jedné proměnné: $f(x, y) = f_1(x).f_2(y)$. Pak zřejmě platí:

$$\iint_D f_1(x).f_2(y)dxdy = \int_a^b f_1(x)dx \int_c^d f_2(y)dy. \tag{1c}$$

Příklad 2.1.1. Vypočtěte dvojrozměrný integrál

$$A = \iint_D e^{2x+3y}dxdy,\quad D = \{(x, y) : x \in \langle 0, 1\rangle,\ y \in \langle 1, 2\rangle\}.$$

Řešení: 1. Podle vztahu (1a): $A=\int_0^1 dx\int_1^2 e^{2x+3y}dy=\int_0^1 dx\int_1^2 e^{2x}e^{3y}dy=\int_0^1 e^{2x}dx\left[\frac{e^{3y}}{3}\right]_1^2=$

$$=\int_0^1 e^{2x}\left(\frac{1}{3}e^6-\frac{1}{3}e^3\right)dx=\frac{1}{3}e^3(e^3-1)\int_0^1 e^{2x}dx=\frac{1}{3}e^3(e^3-1)\left[\frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^1=$$

$$=\frac{1}{3}e^3(e^3-1)\frac{1}{2}(e^2-1)=\frac{1}{6}e^3(e^3-1)(e^2-1),$$

2. podle vztahu (1b):

$$A=\int_1^2 dy\int_0^1 e^{2x+3y}dx=\int_1^2 dy\int_0^1 e^{2x}e^{3y}dx=\int_1^2 e^{3y}\left[\frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^1 dy=$$

$$=\int_1^2 e^{3y}\left(\frac{1}{2}e^2-\frac{1}{2}\right)dy=\frac{1}{2}(e^2-1)\int_1^2 e^{3y}dy=\frac{1}{2}(e^2-1)\left[\frac{1}{3}e^{3y}\right]_1^2=$$

$$=\frac{1}{2}(e^2-1)(\frac{1}{3}e^6-\frac{1}{3}e^3)=\frac{1}{6}e^3(e^3-1)(e^2-1),$$

3. podle vztahu (1c):

$$A=\iint_D e^{2x+3y}dxdy=\iint_D e^{2x}e^{3y}dxdy=\int_0^1 e^{2x}dx\int_1^2 e^{3y}dy=$$

$$=\left[\frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^1\left[\frac{1}{3}e^{3y}\right]_1^2=\frac{1}{6}e^3(e^3-1)(e^2-1).$$

Nelze-li funkci $f(x,y)$ rozložit na součin dvou funkcí jedné proměnné $f_1(x).f_2(y)$, pak při integraci musíme postupovat stejně jako v prvním nebo druhém způsobu řešení integrálu *A*, tj. podle vztahů (1a) nebo (1b).

Příklad 2.1.2. Vypočtěte $B=\iint_D \frac{1}{(x+2y+1)^2}dxdy,\ D=\{(x,y): x\in<1,3>,\ \ y\in<1,2>\}.$

Řešení: Protože integrand $\frac{1}{(x+2y+1)^2}$ nelze rozložit na součin dvou funkcí jedné proměnné, použijeme vztah (1a): $B=\int_1^3 dx\int_1^2\frac{1}{(x+2y+1)^2}dy=\int_1^3 dx\int_1^2(x+2y+1)^{-2}dy=$

$$=\int_1^3\left[\frac{1}{2}.\frac{(x+2y+1)^{-1}}{-1}\right]_1^2 dx=-\frac{1}{2}\int_1^3((x+5)^{-1}-(x+3)^{-1})dx=-\frac{1}{2}\int_1^3(\frac{1}{x+5}-\frac{1}{x+3})dx=$$

$$= -\frac{1}{2}\left[\ln|x+5| - \ln|x+3|\right]_1^3 = -\frac{1}{2}(\ln 8 - \ln 6 - \ln 6 + \ln 4) = -\frac{1}{2}\ln\frac{32}{36} = \frac{1}{2}\ln\frac{9}{8}.$$

Mohli bychom použít rovněž vztah (1b).

Poznámky

1. Pokud se zdá přímé integrování užitím vztahu [16] $\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b)$ *obtížné, lze užít při integraci substituci:*

$$B = \int_1^3 dx \int_1^2 \frac{1}{(x+2y+1)^2}dy = \left| \begin{matrix} x+2y+1=t, & y=1, & t=x+3 \\ 2dy=dt, & y=2, & t=x+5 \end{matrix} \right| =$$

$$= \frac{1}{2}\int_1^3 dx \int_{x+3}^{x+5} \frac{dt}{t^2} = \frac{1}{2}\int_1^3 \left[-\frac{1}{t}\right]_{x+3}^{x+5} dx = -\frac{1}{2}\int_1^3 \left(\frac{1}{x+5} - \frac{1}{x+3}\right)dx = \frac{1}{2}\ln\frac{9}{8}.$$

2. Obecně nezáleží na pořadí integrace, tedy platí vztahy (1a, 1b). V některých případech ale daný dvojrozměrný integrál může být snadno řešitelný jedním způsobem, druhý způsob však může být komplikovaný v závislosti na tvaru integrované funkce.

Příklad 2.1.3. Vypočtěte integrál $C = \iint_D x^y dxdy,\ D = \{(x,y) : x \in <0,1>,\ y \in <1,2>\}.$

Řešení: 1. Použijeme vztah (1b): $C = \int_1^2 dy \int_0^1 x^y dx = \int_1^2 \left[\frac{x^{y+1}}{y+1}\right]_0^1 dy = \int_1^2 \left(\frac{1}{y+1} - \frac{0}{y+1}\right)dy =$

$$= \int_1^2 \frac{dy}{y+1} = \left[\ln|y+1|\right]_1^2 = \ln 3 - \ln 2 = \ln\frac{3}{2}.$$

2. Použijeme vztah (1a): $C = \int_0^1 dx \int_1^2 x^y dy = \int_0^1 \left[\frac{x^y}{\ln x}\right]_1^2 dx = \int_0^1 \left(\frac{x^2}{\ln x} - \frac{x}{\ln x}\right)dx = \ldots$.

Je zřejmé, že další výpočet integrálu je pracný, proto je vhodnější postup podle (1b).

Příklady k procvičení:

1. Vypočtěte dvojrozměrné integrály v obdélníku *D* užitím vztahu (1a) nebo (1b):

a) $\iint_D (x+3)dxdy,\ D = \{(x,y) : x \in <0,1>,\ y \in <0,2>\},$

b) $\iint_D (2x-4y)dxdy,\ D=\{(x,y): x\in<1,3>,\ y\in<-1,1>\}$,

c) $\iint_D (x^2+y^2)dxdy,\ D=\{(x,y): x\in<-2,0>,\ y\in<-1,2>\}$,

d) $\iint_D x(x^2+y)^{\frac{1}{2}}dxdy,\ D=\{(x,y): x\in<0,1>,\ y\in<0,3>\}$,

e) $\iint_D x\sqrt{1-x^2}dxdy,\ D=\{(x,y): x\in<0,1>,\ y\in<2,3>\}$,

f) $\iint_D \cos(x+y)dxdy,\ D=\left\{(x,y): x\in<-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}>,\ y\in<0,\frac{\pi}{4}>\right\}$.

2. Vypočtěte dvojrozměrné integrály v obdélníku *D* užitím vztahu (1c):

a) $\iint_D x^2ydxdy,\ D=\{(x,y): x\in<0,2>,\ y\in<1,2>\}$,

b) $\iint_D \frac{y^2}{1+x^2}dxdy,\ D=\{(x,y): x\in<0,1>,\ y\in<0,1>\}$,

c) $\iint_D ye^{x+y}dxdy,\ D=\{(x,y): x\in<0,1>,\ y\in<0,1>\}$,

d) $\iint_D \ln(1+x)^{2y}dxdy,\ D=\{(x,y): x\in<0,1>,\ y\in<0,1>\}$,

e) $\iint_D x\sin y\, dxdy,\ D=\left\{(x,y): x\in<1,2>,\ y\in<0,\frac{\pi}{2}>\right\}$.

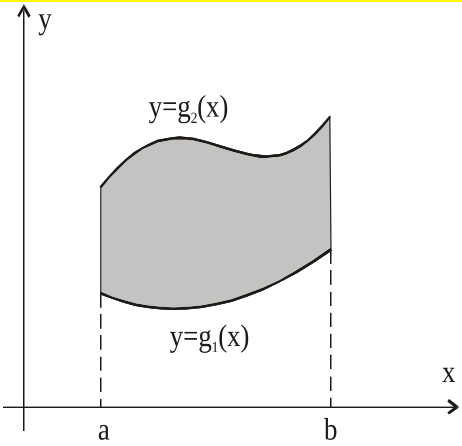
Výsledky:

1. a) 7; b) 16; c) 14; d) $\frac{2}{15}(31-9\sqrt{3})$; e) $\frac{1}{3}$; f) 1. **2.** a) 4; b) $\frac{\pi}{12}$; c) $e-1$; d) $2\ln 2-1$; e) $\frac{3}{2}$.

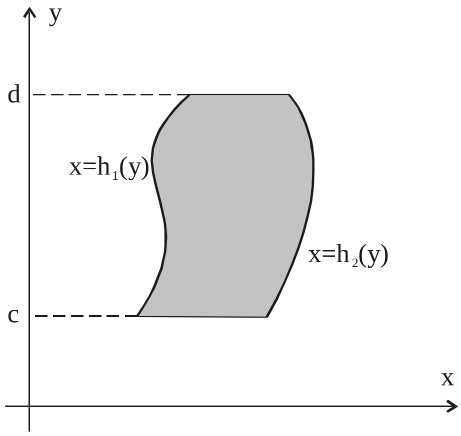
2.2. Dvojrozměrný integrál v obecné uzavřené oblasti

Abychom mohli vypočítat dvojrozměrný integrál v uzavřené oblasti Ω, musíme znát integrační meze. Musíme tedy nejprve oblast Ω analyticky vyjádřit.

Oblast Ω_x normální vzhledem k ose *x* (obr. 1) obecně popisují nerovnice



Obr. 1



Obr. 2

$$\begin{matrix} a \le x \le b, & a \le b \\ g_1(x) \le y \le g_2(x), & \end{matrix}$$, kde funkce $y = g_1(x),\ \ y = g_2(x)$ jsou spojité v $<a, b>$.

Meze proměnné *x* vyjádříme číselně (nebo pomocí konstanty), meze proměnné *y* pomocí funkcí proměnné *x.*

Teprve pak můžeme dvojrozměrný integrál v uzavřené oblasti Ω převést na integrál dvojnásobný, ve kterém **vnější integrál vždy musí mít konstantní (číselné) meze,** protože dvojný integrál je integrál určitý a výsledkem musí být konstanta (číslo):

$$\iint\limits_{\Omega} f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)dy, \tag{2a}$$

Oblast Ω_y normální vzhledem k ose *y* (obr. 2) obecně popisují nerovnice

$$\begin{matrix} c \le y \le d, & c \le d \\ h_1(y) \le x \le h_2(y), & \end{matrix}$$, kde funkce $x = h_1(y),\ \ x = h_2(y)$ jsou spojité v $<c, d>$.

Meze proměnné *y* vyjádříme číselně (nebo pomocí konstanty), meze proměnné *x* pomocí funkcí proměnné *y.*

$$\iint\limits_{\Omega} f(x,y)dxdy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)dx. \tag{2b}$$

Poznámka

Přechod od zápisu dvojnásobného integrálu ve tvaru (2a) *do tvaru* (2b), *respektive naopak nazýváme záměna pořadí integrace.*

Ve vztazích (2a), (2b) vždy integrační meze vnějšího integrálu musí být konstantní (číselné), integrační meze vnitřního integrálu mohou být funkce jedné

proměnné. Nejdříve počítáme v dvojnásobných integrálech (2a), (2b) zásadně vnitřní integrál s proměnnými mezemi a teprve pak vnější integrál s mezemi konstantními.

Význam dvojných integrálů:

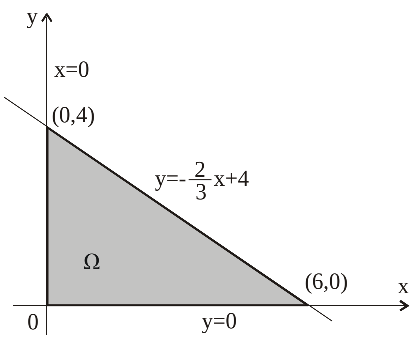
$\iint\limits_{\Omega} f(x,y)dxdy$ určuje pro $f(x,y) > 0$ objem tělesa, jehož dolní podstavou je oblast Ω, které je shora ohraničeno funkcí $z = f(x,y)$.

Příklad 2.2.1. Určete nerovnice pro převedení dvojrozměrného integrálu $\iint\limits_{\Omega} f(x,y)dxdy$, kde Ω je trojúhelník o vrcholech $(0,0), (6,0), (0,4)$, na dvojnásobný.

Řešení: a) Nejprve vyjádříme Ω jako oblast normální vzhledem k ose *x*. Je zřejmé, že oblast Ω ohraničíme ve směru osy x zleva a zprava přímkami $x = 0, x = 6$, viz obr. 3. Ve směru osy *y* oblast Ω ohraničíme zdola osou *x*, která má rovnici $y = 0$ a shora přímkou $\frac{x}{6} + \frac{y}{4} = 1$, kterou převedeme na tvar $y = 4 - \frac{2}{3}x$.

Oblast Ω zapíšeme ve tvaru:
$$\Omega_x: \quad 0 \le x \le 6, \quad 0 \le y \le 4 - \frac{2}{3}x$$

a podle (2a) platí: $\iint\limits_{\Omega} f(x,y)dxdy = \int\limits_0^6 dx \int\limits_0^{4-\frac{2}{3}x} f(x,y)dy.$



Obr. 3

b) Nyní vyjádříme Ω jako oblast normální vzhledem k ose *y*. Je zřejmé, že oblast Ω ohraničíme ve směru osy y zdola a shora přímkami $y = 0, y = 4$. Ve směru osy *x* oblast Ω ohraničíme zleva osou *y*, která má rovnici $x = 0$, a zprava přímkou $\frac{x}{6} + \frac{y}{4} = 1$, kterou převedeme na tvar $x = 6 - \frac{3}{2}y$.

Oblast Ω zapíšeme ve tvaru: $\Omega_y: \quad 0 \le y \le 4,$
$$0 \le x \le 6 - \frac{3}{2}y$$

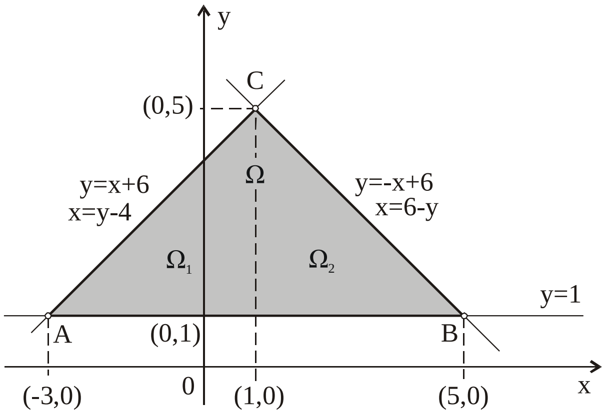
a podle (2b) platí: $\iint\limits_{\Omega} f(x,y)dxdy = \int\limits_0^4 dy \int\limits_0^{6-\frac{3}{2}y} f(x,y)dx.$

Příklad 2.2.2. Určete integrační meze pro $\iint\limits_{\Omega} f(x,y)dxdy$, kde Ω je ΔABC, jehož strany jsou dány rovnicemi $y = 1,\ y = x + 4,\ y = 6 - x$.

Řešení: a) Nejprve vyjádříme Ω jako oblast normální vzhledem k ose *x*. Pokud ohraničíme oblast Ω ve směru osy x přímkami $x = -3,\ x = 5,$ pak Ω **není shora hraničena jedinou křivkou** a **je nutno rozdělit ji na oblasti** $\Omega_1,\ \Omega_2$ přímkou $x = 1$, viz obr. 4.

Nerovnice pro oblasti Ω_1 a Ω_2 mají pak tvar:

$$\Omega_1: -3 \le x \le 1, \quad (x \in <-3,1>), \qquad \Omega_2: 1 \le x \le 5, \quad (x \in <1,5>),$$
$$1 \le y \le x + 4,\ (y \in <1, x+4>), \qquad 1 \le y \le -x + 6,\ (y \in <1, -x+6>).$$



Obr. 4

Podle vztahu (2a) pak platí:

$$\iint\limits_{\Omega} f(x,y)dxdy = \iint\limits_{\Omega_1} f(x,y)dxdy + \iint\limits_{\Omega_2} f(x,y)dxdy = \int\limits_{-3}^{1} dx \int\limits_{1}^{x+4} f(x,y)dy + \int\limits_{1}^{5} dx \int\limits_{1}^{6-x} f(x,y)dy.$$

b) Nyní zapíšeme Ω jako oblast normální vzhledem k ose *y*. Ohraničíme oblast Ω ve směru osy y přímkami $y = 1,\ y = 5.$ Proměnnou *x* vyjádříme ze zadání příkladu jako funkci proměnné y, tj. $x = y - 4,\ x = 6 - y.$

Nerovnice pro oblast Ω_y pak mají tvar:

$$\Omega: \quad 1 \le y \le 5, \qquad (y \in <1,5>),$$
$$y - 4 \le x \le 6 - y, \qquad (x \in <y-4, 6-y>).$$

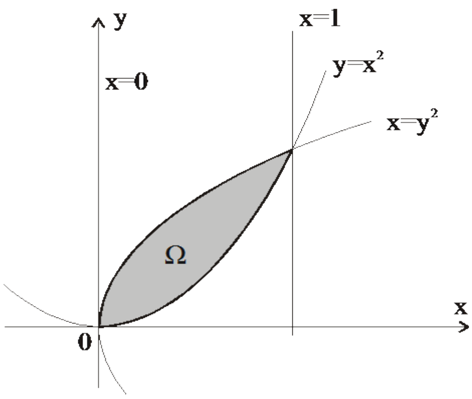
Podle vztahu (2b) dostáváme $\iint\limits_{\Omega} f(x,y)dxdy = \int\limits_{1}^{5} dy \int\limits_{y-4}^{6-y} f(x,y)dx.$

Je zřejmé, že druhé řešení je jednodušší, neboť vede k řešení jediného dvojnásobného integrálu.

Příklad 2.2.3. Stanovte nerovnice určující oblast Ω, která je ohraničena křivkami $y = x^2$ a $y^2 = x$.

Řešení: a) Nejprve určíme průsečíky křivek $y = x^2$ a $y^2 = x$, viz obr. 5. Vyřešením soustavy těchto dvou rovnic dostaneme postupně $x^2 = \sqrt{x},\ x^4 - x = 0,\ x(x^3 - 1) = 0$. Reálné kořeny tedy jsou $x_1 = 0,\ x_2 = 1$.

Oblast Ω zapíšeme jako oblast normální vzhledem k ose *x.* Proto ji ohraničíme ve směru osy x přímkami $x = 0, x = 1$. Křivka, která ohraničuje Ω shora, má rovnici $y = \sqrt{x}$. Křivka, která ohraničuje Ω zdola, má rovnici $y = x^2$.



Nerovnice pro oblast Ω mají tvar:

$\Omega: \quad 0 \le x \le 1,$

$x^2 \le y \le \sqrt{x}.$

b) Podobně určíme oblast Ω jako oblast normální vzhledem k ose *y:*

$\Omega: \quad 0 \le y \le 1,$

$y^2 \le x \le \sqrt{y}.$

Obr. 5

Příklady k procvičení:

1. Určete integrační meze pro $\iint\limits_{\Omega} f(x,y)dxdy$ jednodušším z obou způsobů, jestliže Ω je

a) čtyřúhelník o vrcholech $(2,1), (6,-2), (6,2), (2,5)$,

b) čtyřúhelník o vrcholech $(2,5), (2,1), (6,-2), (6,7)$,

c) čtyřúhelník o stranách $x = 1,\ x = 2,\ y = x,\ y = 2x$,

d) trojúhelník o stranách $x + 2y - 3 = 0,\ x - y = 1,\ x - 4 = 0$.

2. Určete integrační meze pro $\iint\limits_{\Omega} f(x,y)dxdy$ oběma způsoby, jestliže Ω je

a) ohraničena křivkou $x^2 + y^2 = 4$,

b) ohraničena čarami $y = 2x,\ y = \frac{1}{2}x,\ xy = 2\ (x \ge 0,\ y \ge 0)$.

Výsledky:

1. a) $2 \le x \le 6; -\frac{3}{4}x + \frac{5}{2} \le y \le -\frac{3}{4}x + \frac{13}{2}$; **b)** $2 \le x \le 6; -\frac{3}{4}x + \frac{5}{2} \le y \le \frac{1}{2}x + 4$;

c) $1 \le x \le 2,\ x \le y \le 2x$; **d)** $\frac{5}{3} \le x \le 4,\ -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2} \le y \le x - 1$

2. a) $-2 \le x \le 2,\ -\sqrt{4 - x^2} \le y \le \sqrt{4 - x^2}$ nebo $-2 \le y \le 2,\ -\sqrt{4 - y^2} \le x \le \sqrt{4 - y^2}$;

b) $\Omega_1 : 0 \le x \le 1,\ \frac{1}{2}x \le y \le 2x,\ \Omega_2 : 1 \le x \le 2,\ \frac{1}{2}x \le y \le \frac{2}{x}$ nebo

$\Omega_1 : 0 \le y \le 1,\ \frac{1}{2}y \le x \le 2y,\ \Omega_2 : 1 \le y \le 2,\ \frac{1}{2}y \le x \le \frac{2}{y}$.

Vlastní výpočet dvojrozměrných integrálů si objasníme na příkladech.

Příklad 2.2.4. Vypočtěte $\iint\limits_{\Omega} xy\,dx\,dy$, je-li oblast Ω ohraničena čarami

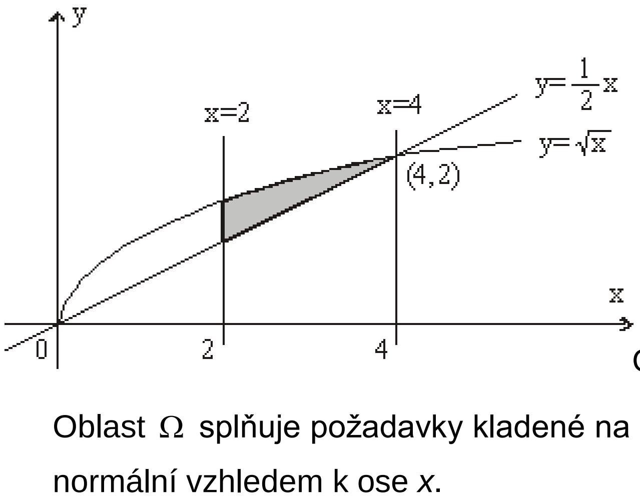
$y = \frac{1}{2}x,\ y = \sqrt{x}$ a $x = 2,\ (x \ge 2)$.

Řešení: Zakreslíme oblast Ω, viz obr. 6.

Řešením soustavy rovnic $y = \frac{1}{2}x,\ \ y = \sqrt{x}$ dostaneme postupně

$$\frac{1}{2}x = \sqrt{x},\ \ x^2 = 4x,\ \ x^2 - 4x = 0,\ \ x(x-4) = 0,\ \ x_1 = 0,\ \ x_2 = 4,\ \ y_1 = 0,\ \ y_2 = 2.$$

Přímka $y = \frac{1}{2}x$ a křivka $y = \sqrt{x}$ (část paraboly v I. kvadrantu) se tedy pro $x \ge 2$ protínají v bodě $(4, 2)$.



Obr. 6

Oblast Ω splňuje požadavky kladené na oblasti obou typů. Vyjádříme ji jako oblast normální vzhledem k ose *x*.

$\Omega_x: \quad 2 \le x \le 4,$

$\frac{x}{2} \le y \le \sqrt{x}.$

Nyní můžeme integrál vyřešit:

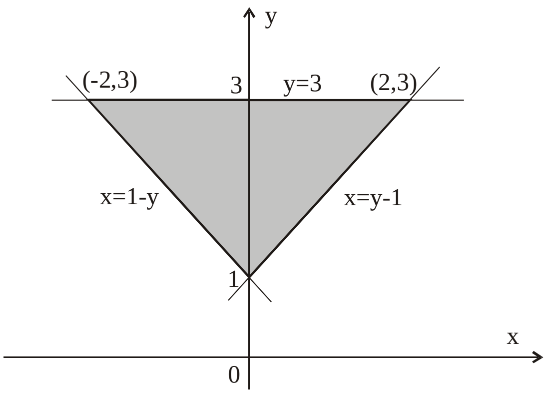
$$\iint_\Omega xy\,dxdy = \int_2^4 dx \int_{\frac{x}{2}}^{\sqrt{x}} xy\,dy = \int_2^4 xdx \int_{\frac{x}{2}}^{\sqrt{x}} y\,dy = \int_2^4 x\left[\frac{y^2}{2}\right]_{\frac{x}{2}}^{\sqrt{x}} dx = \int_2^4 x\left(\frac{x-\frac{x^2}{4}}{2}\right)dx =$$

$$= \int_2^4 \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{8}\right)dx = \left[\frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{32}\right]_2^4 = \left(\frac{64}{6} - \frac{256}{32}\right) - \left(\frac{8}{6} - \frac{16}{32}\right) = \frac{11}{6}.$$

Proveďte sami záměnu pořadí integrace (oblast Ω zapište jako oblast normální vzhledem k ose *y*).

Příklad 2.2.5. Vypočtěte $\iint_\Omega (2x - y^2)dxdy$, je-li oblast Ω ohraničena přímkami $y = 1 - x$, $y = 1 + x$ a $y = 3$.

Řešení:



Obr. 7

Z obr. 7 je zřejmé, že jednodušší bude vyjádřit oblast Ω jako oblast normální vzhledem k ose *y*. Při zápisu jako oblast normální vzhledem k ose *x*, bychom oblast Ω museli rozdělit na dvě podoblasti přímkou $x = 0$, podobně jako v příkladu 2.2.2.

$\Omega_y: \quad 1 \le y \le 3,$

$1 - y \le x \le y - 1.$

Integrál převedeme na dvojrozměrný integrál podle vztahu (2b):

$$\iint_{\Omega}(2x-y^2)dxdy=\int_1^3 dy\int_{1-y}^{y-1}(2x-y^2)dx=\int_1^3\left[x^2-y^2x\right]_{1-y}^{y-1}dy=$$

$$=\int_1^3((1-2y+2y^2-y^3)-(1-2y+y^3))dy=\int_1^3(2y^2-2y^3)dy==\left[\frac{2y^3}{3}-\frac{y^4}{2}\right]_1^3=-\frac{68}{3}.$$

Příklady k procvičení:

Vypočtěte dvojrozměrné integrály v oblasti Ω :

a) $\iint_{\Omega}(5x^2-2xy)dxdy,\ \Omega$ je $\Delta ABC,\ A=(0,0),\ B=(2,0),\ C=(0,1),$

b) $\iint_{\Omega}x^3y^2dxdy,\ \Omega$ je dána nerovnicí $x^2+y^2\le 4,$

c) $\iint_{\Omega}(x-y)dxdy,\ \Omega$ je ohraničena přímkami $y=0,\ y=x,\ x+y=2,$

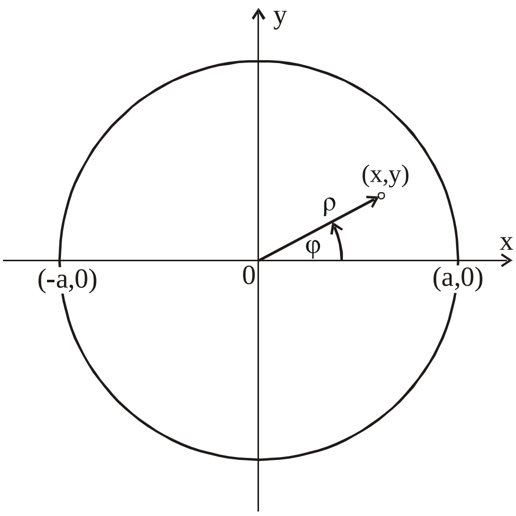
d) $\iint_{\Omega}xy\ dxdy,\ \Omega$ je dána nerovnicemi $x^2+4y^2\le 4,\ x\ge 0,\ y\ge 0,$

e) $\iint_{\Omega}xy\ dxdy,\ \Omega$ je ohraničená čarami $y^2=2x,\ x=2.$

Výsledky: a) 3; b) 0; c) $\frac{2}{3}$; d) $\frac{1}{2}$; e) 0.

2.3. Transformace v dvojrozměrném integrálu

Dvojrozměrné integrály, jejichž integrační oblastí je kruh, případně část kruhu, lze jednoduše vyřešit ***transformací do polárních souřadnic.***



Kartézské souřadnice x,y bodu nahradíme polárními souřadnicemi $\rho,\varphi,$ v nichž ρ znamená vzdálenost bodu o souřadnicích (x,y) od počátku soustavy souřadnic a φ označuje orientovaný úhel, měřený od kladného směru osy x po průvodič bodu (x,y) v kladném smyslu, viz obr. 8.

Obr. 8

Transformační rovnice při přechodu z kartézských souřadnic do polárních souřadnic mají tvar

$x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi$.

Součin diferenciálů $dxdy$ v dvojrozměrném integrálu nahradíme výrazem $|J|\,d\rho\,d\varphi$,

v němž výraz $J = J(\rho,\varphi) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi \end{vmatrix} = \rho$

nazýváme jakobián transformace.

Pro transformaci dvojrozměrného integrálu do polárních souřadnic platí

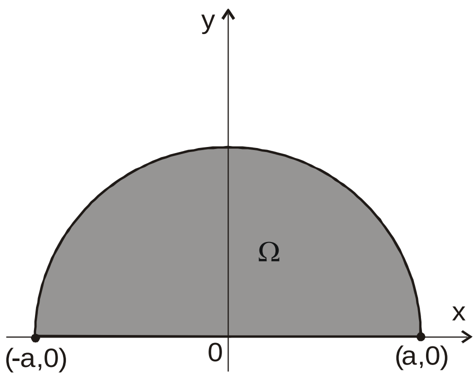
$$\iint_{\Omega} f(x,y)dxdy = \iint_{\Omega^*} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho\, d\rho\, d\varphi. \qquad (3)$$

Oblast Ω^* je obrazem oblasti Ω v polárních souřadnicích. Například kruh se středem v počátku a poloměrem a, $\Omega: \{(x,y): x^2 + y^2 \le a^2\}$, se zobrazí na obdélník o délkách stran a a 2π, $\Omega^*: \{(\rho,\varphi): \rho \in (0, a>, \varphi \in <0, 2\pi)\}$.

Příklad 2.3.1. Proveďte transformaci do polárních souřadnic a vypočítejte integrál

$$\iint_{\Omega} ydxdy, \Omega: x^2 + y^2 \le a^2, y \ge 0, a > 0.$$

Řešení: Oblast Ω tvoří horní polovina kruhu se středem v počátku a poloměrem a (souřadnice y je nezáporná v prvním a druhém kvadrantu). Pro každý bod (x,y) oblasti Ω při transformaci do polárních souřadnic platí $0 < \rho \le a, 0 \le \varphi < \pi$, viz obr. 9. Uvedené nerovnice určují oblast Ω^*, integrační meze obou proměnných jsou konstantní, proto integrujeme na obdélníku a dosazením podle (3) dostaneme



Obr. 9

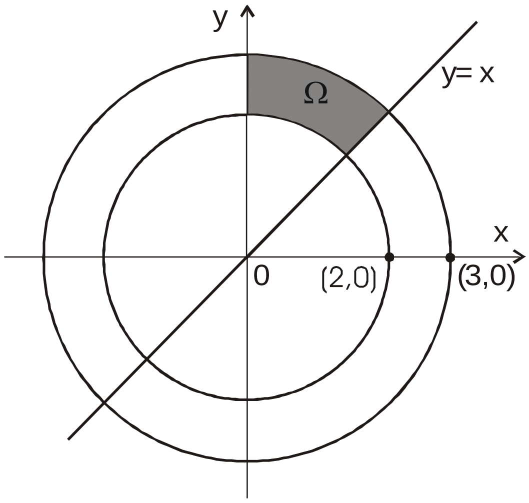
$$\iint_{\Omega} y dxdy = \iint_{\Omega^*} \rho \sin\varphi \, \rho \, d\rho \, d\varphi = \int_0^a \rho^2 d\rho \int_0^{\pi} \sin\varphi \, d\varphi = \left[\frac{\rho^3}{3}\right]_0^a \left[-\cos\varphi\right]_0^{\pi} =$$

$$= \frac{a^3}{3}\left[-(-1)-(-1)\right] = \frac{2a^3}{3}.$$

Příklad 2.3.2. Proveďte transformaci do polárních souřadnic a vypočítejte integrál

$$\iint_{\Omega} x dxdy, \quad \Omega: x^2+y^2 \geq 4,\ x^2+y^2 \leq 9,\ y \geq x,\ x \geq 0.$$

Řešení: Oblast Ω je ohraničena dvěma soustřednými kružnicemi (o poloměru $a_1 = 2, a_2 = 3$), přímkou $y = x$ (která je osou prvního a třetího kvadrantu a svírá tedy s kladným směrem osy x úhel $\varphi = \frac{\pi}{4}$) a osou y, viz obr. 10.



Obr. 10

Pro oblast Ω^* v polárních souřadnicích platí

$$\Omega^*: \quad \begin{array}{l} \frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, \\ 2 \leq \rho \leq 3. \end{array}$$

Je zřejmé, že integrace v polárních souřadnicích (3) je jednodušší než v kartézských souřadnicích, protože nyní integrujeme na obdélníku.

$$\iint_{\Omega^*} \rho \cos\varphi \, \rho \, d\rho \, d\varphi = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi d\varphi \int_2^3 \rho^2 d\rho = \left[\sin\varphi\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{\rho^3}{3}\right]_2^3 = \frac{19}{3}\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

Příklad 2.3.3. Vypočtěte dvojrozměrný integrál

$$\iint_{\Omega} \frac{\ln(x^2+y^2)}{x^2+y^2} dxdy, \quad \Omega: 1 \leq x^2+y^2 \leq e.$$

Řešení: Oblast Ω je mezikruží ohraničené kružnicemi $x^2+y^2=1$ a $x^2+y^2=e$. Užijeme proto transformaci do polárních souřadnic (3). Pro transformovanou oblast Ω^* platí nerovnice $\Omega^*:\ 1\le\rho\le\sqrt{e},\ 0\le\varphi<2\pi$.

$$\iint_{\Omega^*}\frac{\ln(\rho^2\cos^2\varphi+\rho^2\sin^2\varphi)}{\rho^2\cos^2\varphi+\rho^2\sin^2\varphi}\,\rho\,d\rho\,d\varphi=\int_1^{\sqrt{e}}\rho\,d\rho\int_0^{2\pi}\frac{\ln(\rho^2(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi))}{\rho^2(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)}\,d\varphi=$$

$$=\int_1^{\sqrt{e}}\frac{\ln\rho^2}{\rho}\,d\rho\int_0^{2\pi}d\varphi=2\int_1^{\sqrt{e}}\frac{\ln\rho}{\rho}\,d\rho\int_0^{2\pi}d\varphi=2\left[\frac{\ln^2\rho}{2}\right]_1^{\sqrt{e}}\left[\varphi\right]_0^{2\pi}=$$

$$=2\pi\ln^2\sqrt{e}=2\pi\left(\frac{1}{2}\ln e\right)^2=\frac{\pi}{2}.$$

Při řešení jsme použili vztahy $\ln\rho^2=2\ln\rho$ a $\cos^2\varphi+\sin^2\varphi=1$.

Vnější integrál jsme vyřešili substitucí $\ln\rho=t,\ \frac{1}{\rho}d\rho=dt$.

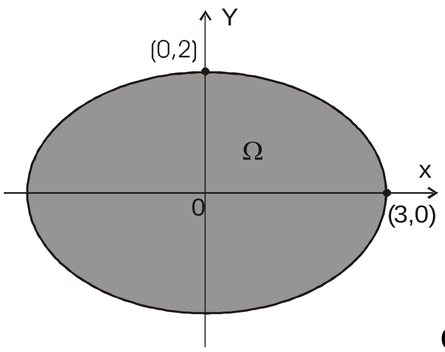
Příklad 2.3.4. Vypočtěte dvojrozměrný integrál

$\iint_{\Omega}\sqrt{4-\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}}\,dxdy$, je-li integrační oblast Ω ohraničena křivkou $4x^2+9y^2=36$.

Řešení: Rovnici hranice oblasti Ω upravíme na tvar $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$, ze kterého je vidět, že jde o elipsu se středem v počátku a poloosami o délkách $a=3, b=2$, viz obr. 11.

V takovém případě ke zjednodušení výpočtu s výhodou používáme tzv. ***zobecněné polární souřadnice***, které mají obecně tvar

$$x=a\rho\cos\varphi,\quad y=b\rho\sin\varphi. \tag{4}$$



Obr. 11

Pro jakobián transformace snadno odvodíme vztah

$$J = J(\rho,\varphi) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \rho} & \dfrac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \dfrac{\partial y}{\partial \rho} & \dfrac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a\cos\varphi & -a\rho\sin\varphi \\ b\sin\varphi & b\rho\cos\varphi \end{vmatrix} = ab\rho.$$

V našem případě platí (pro $a = 3, b = 2$):

$x = 3\rho\cos\varphi, \quad y = 2\rho\sin\varphi, \quad J = 2.3\rho = 6\rho.$

Z obr. 11 je zřejmé, že platí $0 \le \varphi < 2\pi.$ Meze pro ρ zjistíme dosazením transformačních rovnic do analytického vyjádření hranice oblasti Ω:

$4(3\rho\cos\varphi)^2 + 9(2\rho\sin\varphi)^2 = 36,$ odtud po úpravě dostaneme $\rho^2 = 1, \rho = 1\,(\rho > 0).$ Proto platí $0 < \rho \le 1.$ Transformovaná oblast Ω^* tedy představuje obdélník:

$$\Omega^*: \begin{array}{l} 0 \le \varphi < 2\pi, \\ 0 < \rho \le 1. \end{array}$$

Zadaný integrál nyní snadno vyřešíme.

$$\iint_{\Omega} \sqrt{4 - \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4}}\, dxdy = \iint_{\Omega^*} \sqrt{4 - \frac{(3\rho\cos\varphi)^2}{9} - \frac{(2\rho\sin\varphi)^2}{4}}\, 6\rho\, d\rho\, d\varphi =$$

$$= \iint_{\Omega^*} \sqrt{4-\rho^2}\, 6\rho\, d\rho\, d\varphi = 6\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \sqrt{4-\rho^2}\,\rho\, d\rho = 6.2\pi.(-\frac{1}{2})\left[\frac{(4-\rho^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^1 =$$

$$= 4\pi(8 - 3\sqrt{3}).$$

Integrál v proměnné ρ jsme vyřešili substitucí $4 - \rho^2 = t, \; -2\rho\, d\rho = dt, \; \rho\, d\rho = -\frac{1}{2}dt$.

Příklady k procvičení:

Vypočtěte dané dvojrozměrné integrály v oblasti Ω transformací do polárních souřadnic:

a) $\iint_{\Omega} (1 - 2x - 3y)dxdy, \; \Omega: x^2 + y^2 \le 2,$

b) $\iint_{\Omega} (x^2 + y^2)dxdy, \; \Omega: (x-4)^2 + y^2 \le 16,$

c) $\iint_{\Omega} \sqrt{1 - x^2 - y^2}\,dxdy, \; \Omega: x^2 + y^2 \le 1, x \ge 0, y \ge 0,$

d) $\iint_{\Omega} e^{-(x^2+y^2)}dxdy, \; \Omega: x \ge 0, x^2 + y^2 \le 9,$

e) $\iint\limits_{\Omega} \sin\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy,\ \Omega: \pi^2 \le x^2+y^2 \le 4\pi^2.$

Výsledky: a) 2π ; b) 384π ; c) $\frac{1}{6}\pi$; d) $\frac{\pi}{2}(1-e^{-9})$; e) $-6\pi^2$.

2.4. Aplikace dvojrozměrného integrálu

2.4.1. Objem válcovitého tělesa nad oblastí Ω,

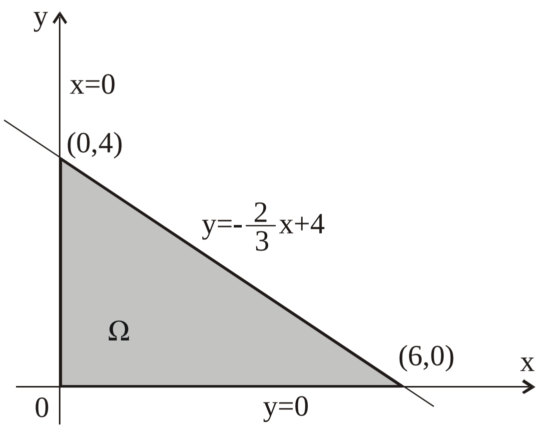
Objem válcovitého tělesa nad oblastí Ω, které je shora, resp. zdola ohraničeno plochou $z = f(x,y)$, je dán vztahem

$$V = \iint\limits_{\Omega} |\, f(x,y)\,|\, dxdy. \tag{5}$$

Příklad 2.4.1. Vypočtěte objem tělesa ohraničeného plochami

$2x+3y=12,\ 2z = y^2,\ x=0,\ y=0,\ z=0$.

Řešení: Rovina $z=0$ je rovina podstavy daného tělesa.



Obr. 12

Roviny $x=0,\ y=0,\ 2x+3y=12$ protínají rovinu $z=0$ v přímkách $x=0,\ y=0,\ 2x+3y=12$, které určují hranice oblasti Ω. Přímku $2x+3y=12$ převedeme na úsekový tvar $\frac{x}{6}+\frac{y}{4}=1$. Odtud je zřejmé, že tato přímka protíná osu x v bodě $(6,0)$ a osu y v bodě $(0,4)$, viz obr. 12.

Plocha $z=\frac{y^2}{2}$ ohraničuje těleso shora. $\frac{y^2}{2}\ge 0$ pro všechny body $(x,y)\in\Omega$. Obvykle je třeba zjistit, zda průniková čára této plochy s rovinou $z=0$ neprotíná oblast Ω v jejích vnitřních bodech. Položíme tedy $z=0$ a dostaneme $\frac{y^2}{2}=0,$ z toho $y=0,$ a to je rovnice hraniční přímky oblasti Ω.

Integrační oblast Ω zapíšeme jako oblast normální vzhledem k ose x.

$\Omega_x:\ 0 \le x \le 6,\quad 0 \le y \le 4-\frac{2x}{3}$.

Podle vztahu (5) vypočítáme:

$$V=\iint\limits_{\Omega}\frac{y^2}{2}\,dxdy=\frac{1}{2}\int_0^6 dx\int_0^{4-\frac{2}{3}x} y^2dy=\frac{1}{2}\int_0^6\left[\frac{y^3}{3}\right]_0^{4-\frac{2}{3}x}dx=\frac{1}{6}\int_0^6(4-\frac{2}{3}x)^3dx=$$

$$=\frac{1}{6}(-\frac{3}{2})\left[\frac{(4-\frac{2}{3}x)^4}{4}\right]_0^6=(-\frac{1}{16})(-256)=16.$$

Při výpočtu integrálu lze použít substituci $4-\frac{2}{3}x=t,\ -\frac{2}{3}dx=dt,\ dx=-\frac{3}{2}dt$.

Příklady k procvičení:

1. Vypočtěte objem tělesa ohraničeného plochami:

a) $z=0,\ x+y+z=6,\ y=0,\ 3x+2y=12$,

b) $x-y+z=6,\ x+y=2,\ x=y,\ y=0,\ z=0$,

c) $z=0,\ z=x^2+y^2,\ y=1,\ y=2x,\ y=6-x$,

d) $z=0,\ z=x^2+y^2,\ x=0,\ y=0,\ x+y=1$,

e) $y=x^2,\ z=0,\ y+z=2$.

2. Vypočtěte objem tělesa ohraničeného danými plochami užitím transformace do polárních souřadnic (3):

a) $z=1-x^2-y^2,\ z=0$ (Ω je průnik tělesa a roviny $z=0$),

b) $x^2+y^2+z^2=4,\ x^2+y^2=1$ (část vně válce),

c) $z=0,\ z=x,\ x^2+y^2=1$,

d) $z=0,\ x^2+y^2=2y,\ z=\sqrt{x^2+y^2}$,

e) $z=0,\ x^2+y^2-x=0,\ z=1-x^2-y^2$.

Výsledky: 1. a) 4; b) $\frac{16}{3}$**; c)** $\frac{2511}{32}$**; d)** $\frac{1}{6}$**; e)** $\frac{32\sqrt{2}}{15}$**. 2. a)** $\frac{\pi}{2}$**; b)** $4\sqrt{3}\pi$**; c)** $\frac{4}{3}$**; d)** $\frac{32}{9}$**; e)** $\frac{5\pi}{32}$**.**

2.4.2. Obsah rovinné oblasti

Pro **obsah rovinné oblasti** Ω platí vztah

$$P = \iint_{\Omega} dxdy. \qquad (6)$$

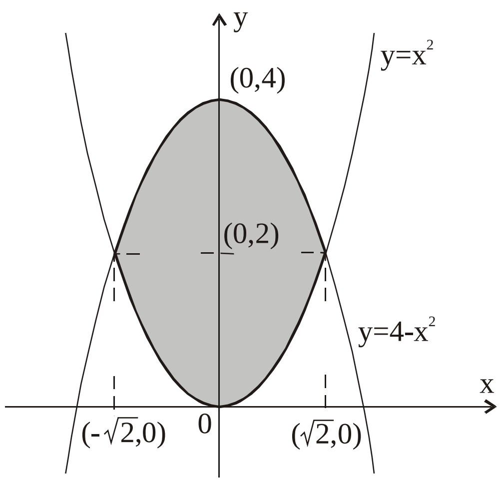
Příklad 2.4.2. Vypočtěte obsah rovinné oblasti ohraničené křivkami $y = x^2$, $y = 4 - x^2$.

Řešení: Hranice rovinné oblasti tvoří dvě paraboly, viz obr. 13. Abychom získali souřadnice jejich průsečíků, vyřešíme příslušnou soustavu rovnic:

$x^2 = 4 - x^2,\ 2x^2 = 4,\ x^2 = 2,\ x_{1,2} = \pm\sqrt{2},$ tedy $P_1(\sqrt{2}, 2),\ P_2(-\sqrt{2}, 2)$.

Integrační oblast Ω zapíšeme jako oblast normální vzhledem k ose x.

$\Omega_x: -\sqrt{2} \le x \le \sqrt{2},\quad x^2 \le y \le 4 - x^2.$



Obr. 13

$$P = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} dx \int_{x^2}^{4-x^2} dy = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} [y]_{x^2}^{4-x^2} dx = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} (4 - x^2 - x^2)dx = \left[4x - \frac{2}{3}x^3\right]_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} =$$

$$= 4\sqrt{2} - \frac{4}{3}\sqrt{2} + 4\sqrt{2} - \frac{4}{3}\sqrt{2} = \frac{16}{3}\sqrt{2}.$$

Příklad 2.4.3. Odvoďte vzorec pro výpočet plošného obsahu elipsy.

Řešení: Aby byl výpočet snadný, umístíme střed elipsy do počátku soustavy souřadnic, délky jejích poloos označíme *a*, *b*, ($a > 0, b > 0$). Rovnice takové elipsy má tvar

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Výpočet provedeme v zobecněných polárních souřadnicích (4):

$x = a\rho\cos\varphi,\ y = b\rho\sin\varphi,\ J = ab\rho.$

Je zřejmé, že pro celou elipsu platí $0 \le \varphi < 2\pi$, dosazením transformačních rovnic do rovnice elipsy určíme meze pro ρ: $\frac{(a\rho\cos\varphi)^2}{a^2} + \frac{(b\rho\sin\varphi)^2}{b^2} = 1,\ \rho^2 = 1,\ \rho = 1.$ Protože v počátku soustavy souřadnic platí $\rho = 0$, jsou hranice transformované oblasti Ω^* určeny nerovnicemi: $0 \le \varphi < 2\pi,\ 0 < \rho \le 1.$

Dosazením do vztahu (6) získáme

$$P=\iint\limits_{\Omega} dxdy=\iint\limits_{\Omega^*} ab\rho\, d\rho\, d\varphi = ab\int\limits_0^{2\pi} d\varphi\int\limits_0^1 \rho\, d\rho = ab[\varphi]_0^{2\pi}\left[\frac{\rho^2}{2}\right]_0^1 = ab.2\pi.\frac{1}{2}=\pi ab.$$

Příklady k procvičení:
Vypočtěte obsah rovinné oblasti ohraničené čarami:

a) $y=x,\ y=5x,\ x=1,$

b) $y=x,\ y=x^2,$

c) $y=x^2,\ y=\sqrt{x},$

d) $2x-y=0,\ 2x-y=7,\ x-4y+7=0,\ x-4y+14=0,$

e) $x=0,\ y=\sin x,\ y=\cos x,\ x\geq 0.$

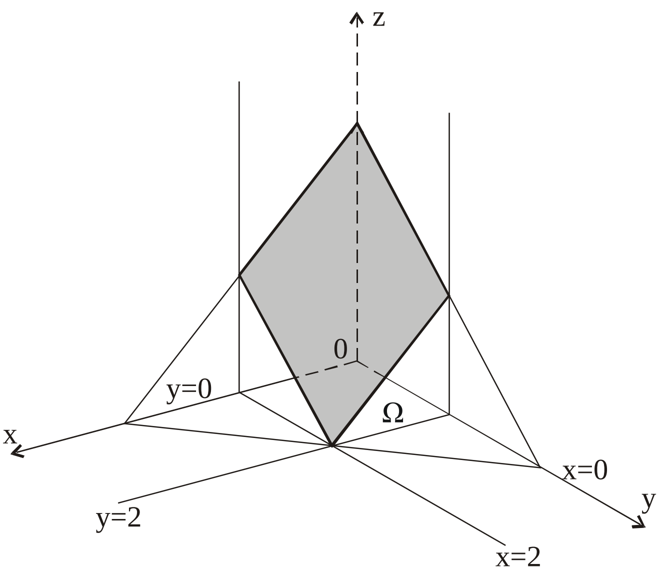
Výsledky: a) 2; b) $\frac{1}{6}$; c) $\frac{1}{3}$; d) 7; e) $\sqrt{2}-1$.

2.4.3. Obsah plochy

Budeme-li určovat **obsah části plochy** $z=f(x,y)$, která je ohraničena průnikovou křivkou této plochy s válcovou plochou, která má povrchové přímky rovnoběžné s osou z a řídící křivku v hranici elementární oblasti Ω, pak platí

$$S=\iint\limits_{\Omega}\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}\,dxdy. \tag{7}$$

Příklad 2.4.5. Vypočtěte obsah plochy $x+y+z=4$, která je ohraničena rovinami $x=0,\ y=0,\ x=2,\ y=2,$ viz obr. 14.



Řešení: Z rovnice plochy vyjádříme $z=4-x-y,\ z'_x=-1,\ z'_y=-1$.
Oblast Ω je podle zadání čtverec určený nerovnicemi: $0\leq x\leq 2,\ 0\leq y\leq 2$.
Podle vztahu (7) platí:

$$S=\iint\limits_{\Omega}\sqrt{1+(-1)^2+(-1)^2}\,dxdy=\sqrt{3}\int\limits_0^2 dx\int\limits_0^2 dy=$$
$$=\sqrt{3}[x]_0^2[y]_0^2=4\sqrt{3}$$

Obr. 14

Příklady k procvičení:

Určete obsahy částí ploch:

a) $6x+3y+2z=12$ ohraničené rovinami $x=0,\ y=0,\ z=0,$

b) $z^2=2xy$ ohraničené rovinami $x=0,\ x=3,\ y=0,\ y=6,$

c) $z^2=2xy$ ohraničené rovinami $x=1,\ y=1,\ x=2,\ y=4,$

d) $z=xy$ ohraničené válcovou plochou $x^2+y^2=4$,

e) $z=\dfrac{x^2+y^2}{2}$ ohraničené válcovou plochou $x^2+y^2=3$.

Výsledky: a) 14; b) 36; c) $12-\frac{16}{3}\sqrt{2}$; d) $\frac{2}{3}\pi(5\sqrt{5}-1)$; e) $\frac{14}{3}\pi$.

2.4.4. Fyzikální aplikace

Jestliže je v hmotné rovinné oblasti Ω dána hustota v jejím libovolném bodě (x,y) funkcí $\sigma(x,y)$, pak **hmotnost oblasti** Ω je určena vztahem

$$m=\iint_{\Omega}\sigma(x,y)dxdy, \tag{8}$$

statický moment oblasti Ω **vzhledem k ose *x*, resp. *y*** je určen vztahem

$$S_x=\iint_{\Omega}y\sigma(x,y)dxdy, \quad \text{resp.} \quad S_y=\iint_{\Omega}x\sigma(x,y)dxdy, \tag{9}$$

souřadnice těžiště $T=(\xi,\eta)$ **hmotné oblasti** Ω jsou

$$\xi=\frac{S_y}{m}, \qquad \eta=\frac{S_x}{m}, \tag{10}$$

moment setrvačnosti oblasti Ω **při rotaci kolem osy** *x*, resp. *y*, resp. *z* je

$$I_x=\iint_{\Omega}y^2\sigma(x,y)dxdy, \qquad \text{resp.} \quad I_y=\iint_{\Omega}x^2\sigma(x,y)dxdy,$$

$$\text{resp.} \qquad I_z=I_x+I_y=\iint_{\Omega}(x^2+y^2)\sigma(x,y)dxdy. \tag{11}$$

Příklad 2.4.4. Vypočtěte hmotnost oblasti Ω ohraničené přímkami $x=1, x=3, y=1, y=2$, jestliže její hustota je dána funkcí $\sigma=\dfrac{1}{(x+2y+1)^2}$.

Řešení: Je stejné jako řešení integrálu B v příkladu 2.1.2 v kapitole 2.1: $m=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{9}{8}$.

Příklad 2.4.5. Vypočtěte statický moment čtverce ohraničeného přímkami $x=0,\ x=1, y=1, y=2$ vzhledem k ose y, je-li hustota dána funkcí $\sigma=x^{y-1}$.

Řešení: Platí $x\,\sigma(x,y)=x\,x^{y-1}=x^y$, a proto úloha vede k řešení integrálu C v příkladu 2.1.3 v kapitole 2.1: $S_y=\ln\dfrac{3}{2}$.

Příklad 2.4.6. Vypočtěte moment setrvačnosti čtverce ohraničeného přímkami $x=0, x=1, y=1, y=2$, který rotuje kolem osy y, je-li hustota dána funkcí $\sigma=x^{y-2}$.

Řešení: Protože $x^2\,\sigma(x,y)=x^2\,x^{y-2}=x^y$, úloha vede opět k řešení integrálu C v příkladu 2.1.3 v kapitole 2.1: $I_y=\ln\dfrac{3}{2}$.

Příklad 2.4.7. Vypočtěte souřadnice těžiště T homogenní oblasti Ω, která je ohraničena kružnicí $(x-1)^2+y^2=1$, jestliže hustota $\sigma(x,y)=1$ pro všechny body $(x,y)\in\Omega$.

Řešení: Uvědomíme-li si, že střed $S(1,0)$ homogenního kruhu je středem symetrie dané oblasti Ω, hned můžeme určit $S(1,0)\equiv T(1,0)$.

Příklad lze vyřešit transformací do polárních souřadnic.

Příklady k procvičení:

1. Určete hmotnost oblasti Ω při daném rozložení hustoty:

a) Ω je ohraničena přímkami $x=0, x=1, y=1, y=2$, hustota v bodě $P\in\Omega$ je přímo úměrná druhé mocnině vzdálenosti bodu P od bodu (0,1),

b) Ω je ohraničena čarami $x=3, y=4x, y=\dfrac{1}{x}$, hustota je dána funkcí $\sigma=\dfrac{x^2}{y^2}$.

2. Vypočtěte statický moment homogenní rovinné oblasti Ω, je-li $\sigma = 1$,

a) Ω je obdélník o délkách stran $a = 1, b = 2$ vzhledem ke straně *a*,

b) Ω je půlkruh o poloměru $r = 4$ vzhledem k jeho průměru.

3. Vypočtěte souřadnice těžiště oblasti Ω, kde $\sigma(x, y) = 1,$ ohraničené čarami:

a) $y = x, \ y = x^2$,

b) $y = x^2, \ x + y = 2$,

c) $y = x^2, \ x = 4, \ y = 0$,

d) $y = \sin x, \ y = 0, \ x = \frac{\pi}{4}$,

4. Vypočtěte moment setrvačnosti oblasti Ω, kde $\sigma(x, y) = 1,$ ohraničené

a) čarami $y = x, \ y = x^2$ při rotaci kolem osy *x*,

b) čarami $y = 1 + x^2, \ y = 2x, \ x = 0$ při rotaci kolem osy *y*,

c) stranami $\Delta ABC, \ A = (0,2), \ B = (1,0), \ C = (1,1)$ při rotaci kolem osy *y*,

d) přímkami $y = \frac{x}{2}, \ x = 1, \ y = 1$ při rotaci kolem osy *x*.

Výsledky: 1. a) $\frac{2}{3}k$ **;** b) $\frac{1225}{64}$**. 2**. a) 2 **;** b) $\frac{128}{3}$**. 3**. a) $(\frac{1}{2}, \frac{2}{5})$**;** b) $(-\frac{1}{2}, \frac{8}{5})$**;** c) $(3, \frac{24}{5})$**;** d) $(\frac{(4-\pi)(\sqrt{2}+1)}{4}, \frac{(\pi-2)(\sqrt{2}+2)}{16})$**. 4**. a) $\frac{1}{28}$**;** b) $\frac{1}{30}$**;** c) $\frac{1}{4}$**;** d) $\frac{17}{96}$**.**