Enfoques contextuales del predicado verdad

Trabajo final de licenciatura

María Inés Crespo

Director:

Dr. Luis A. Urtubey

Escuela de Filosofía
Facultad de Filosofía y Humanidades
Universidad Nacional de Córdoba

Agradecimientos

Luis Urtubey, mi director, ha sido un implacable y generoso guía; a él agradezco la confianza, la paciencia, la enseñanza y las oportunidades. Su lacónica mayéutica ha reunido a un grupo de personas a quienes debo sabios consejos, agudas observaciones y muy gratos momentos: Alba, Diego, Manolo.

A mi familia natural, que estuvo a mi lado de diversos modos hasta llegar a esta instancia. Santiago, con su afectuosa y constante presencia. Mamá y papá, de quienes aprendo a reconocer y valorar diferentes maneras de querer.

Mi familia adquirida me abrió las puertas hacia una intensa y más feliz forma de vivir, justificando esfuerzos como este, entre tantos otros. A mis entrañables e incondicionales amigos, mi gratitud y cariño.

Abstract

La definición formal del predicado verdad plantea, desde su caracterización ortodoxa, una división cualitativa irreconciliable entre lenguajes formales y lenguajes naturales – puntualmente encarnada en el teorema de indefinibilidad de Tarski – y una discusión alrededor de tal escisión. Contra el abandono de ciertos rasgos naturales de las relaciones semánticas, nuevos y más complejos modelos formales del predicado para lenguajes autorreferenciales se elaboraron, como el construido por Kripke. Sin embargo, se prueba de inmediato que se someten a limitaciones expresivas muy próximas a las establecidas por la ortodoxia, lo cual se vuelve notorio por el empleo del mismo método de demostración: un argumento diagonal. Desde la tradición contextual en lógica, originada en el seno de la IA, se ha intentado dar respuesta a la versión reforzada o regenerada de la paradoja del Mentiroso que representa la limitación de diversas definiciones no ortodoxas del predicado. Se emplean nociones y rasgos propios del lenguaje natural a fin de articular una caracterización formal que no se someta a las restricciones expresivas antes establecidas.

En este trabajo, intentamos en primer lugar establecer una continuidad entre las definiciones ortodoxas, las no ortodoxas y las contextuales, demostrando mediante un mismo tipo de argumento limitaciones análogas para cada uno de estos lenguajes. Los resultados que se obtienen, un teorema de limitación para lenguajes contextuales y una versión contextual de la paradoja del Mentiroso, consituyen un parámetro seguro de evaluación de las propuestas contextuales. En segundo lugar, presentaremos la propuesta jerárquico-contextual de M. Glanzberg a fin de evaluar su solvencia conceptual – el justificado empleo de nociones lingüísticas para explicar determinadas restricciones expresivas del predicado – y las características generales del modelo formal elaborado.

Palabras clave

<*verdad*>, <*paradojas*>, <*contextos*> <*lógica*> <*diagonalización*>

El presente trabajo final de licenciatura contó con el apoyo de la Agencia Córdoba Ciencia mediante el otorgamiento de una beca ConCiencias, período Ago/2005 a Jul/2006.

La contradiction, c'est l'étoffe de la jouissance.

(Pierre Naveau, d'après Jacques Lacan)

Índice

Presentación 8

Parte I - Definiciones del predicado verdad: perspectivas y limitaciones

1 El predicado verdad y los límites del lenguaje 14

1.1 Requisitos y rasgos de la definición tarskiana del predicado 18

1.2 Teorema de indefinibilidad del predicado verdad 21

1.2.1 Cantor 22

1.2.2 Richard 24

1.2.3 Numeración de Gödel 25

1.2.4 Gödel 25

1.2.5 Generalización del lema de Gödel 26

1.2.6 Demostración del teorema de indefinibilidad 27

1.3 Funciones y argumentos diagonales: generalización del teorema de Cantor 28

1.3.1 Partes de un argumento diagonal 31

1.3.2 Tipos de argumentos diagonales 32

1.4 Teorema de indefinibilidad diagonalizado 33

1.5 Paradoja del Mentiroso 35

1.5.1 Paradoja del Mentiroso diagonalizada 37

1.5.2 Primer teorema de Gödel diagonalizado 39

1.6 Universalidad, metalenguajes y jerarquías 40

2 Abandono de la jerarquía: Kripke 44

2.1 Breve presentación 45

2.2 Falencias de la definición de Kripke 50

2.2.1 Inexpresabilidad del complemento de la verdad 51

2.2.2 Presentación diagonal 53

2.3 Retorno a la paradoja: el Mentiroso Reforzado 54

2.3.1 Presentación diagonal 56

2.3.2 ¿Qué efecto tiene la paradoja sobre la teoría de Kripke? 57

3 La noción de contexto como clave de resolución 58

3.1 Comentario de las primeras soluciones contextuales 64

3.2 Nociones de contexto tras las primeras soluciones 65

3.2.1 Indexical 65

3.2.2 Presuposicional 67

3.3 Contextos lingüísticos y el Mentiroso Reforzado 69

4 Limitaciones formales de una solución contextual 71

4.1 Paradoja del Mentiroso Contextual 71

4.2 Teorema de limitación para contextos 73

5 *Against stepping back*: objeción general contra el contextualismo 74

5. 1 Bloqueo de la autorreferencia contextual 75

5.2 Opciones a contemplar 76

Parte II - Enfoques lingüísticos: una propuesta jerárquico-contextual de definición formal del predicado verdad

1 Rasgos conceptuales de la propuesta de Glanzberg 79

1.1 Contexto como estructura de saliencia 79

1.2 Dependencia contextual extraordinaria 83

1.2.1 La proposición como portadora de verdad 84

1.2.2 *Exp* y cuantificación tácita 86

1.3 Introducción de artefactos del discurso: cambio contextual 88

1.3.1 Imposibilidad de autorreferencia contextual 89

1.3.2 Cambio contextual 90

1.4 Teoría de la verdad no contextual: derivación de PMR 91

1.4.1 Verdad interna: el enfoque jerárquico 93

2 Resumen del modelo formal de la dependencia extraordinaria y de la expansión contextual 96

2.1 Lenguaje 97

2.2 Contexto como estructura de saliencia 98

2.3 Dominios de condiciones de verdad 99

2.4 Predicado(s) verdad 101

2.5 Expansión contextual 102

3 Objeciones y apoyos 106

3.1 *Against stepping back* contra Glanzberg 106

3.2 El *step back* está justificado 107

3.2.1 Justificación teórica 107

3.2.2 Correlato formal 109

3.2.3 Alternativa: contextos objetivos 111

3.3 Apoyos teóricos de la noción de contexto de Glanzberg 113

3.3.1 Soluciones al Sorites 113

3.3.2 Lógicas modales epistémicas, múltiples agentes y contextos 115

3.3.3 Contextos y tipos 116

Conclusión: ¿Qué costo tiene retornar a las jerarquías? 119

Apéndice: Notas sobre los aspectos matemáticos de la teoría de la verdad de Kripke 124

Bibliografía 146

Presentación

En el siglo XX, las discusiones alrededor del predicado "verdad"[1] en lenguajes autorreferenciales encontraron un primer hito en el teorema de indefinibilidad del lógico polaco A. Tarski. La definición matemática del predicado dio a Tarski la oportunidad de plantear de manera contundente de qué modo puede quedar exento del peligro que constituyen las paradojas semánticas como la del Mentiroso, excluyéndose la posibilidad de que se defina en un lenguaje de la aritmética de características básicas el predicado verdad correspondiente a ese mismo lenguaje. ¿Qué implicaría violar este resultado acerca de la limitación expresiva de este tipo de lenguajes? Se reproduciría en el ámbito formal la conocida sentencia de Epiménides, cuya evaluación resulta paradójica cuando se la considera en cualquier lenguaje natural.

La definición semántica del predicado dada por Tarski, aquella que restringía la definición a un metalenguaje estrictamente más amplio que aquél cuyo predicado se formalizara, fue objeto de numerosas críticas. Particularmente difundidas fueron las objeciones que apuntaban a la "falta de naturalidad", a la artificiosidad de la caracterización del predicado en una jerarquía de metalenguajes, con la consecuente fragmentación de la relación semántica. Contra esta imagen, se alzaba la idea de que el predicado correspondiente al lenguaje natural es autorreferencial de manera irrestricta, sin que de ello resultara una trivialización del lenguaje.

S. Kripke fue, quizás, el máximo exponente contra la perspectiva jerárquica u ortodoxa: haciéndose cargo del desafío de elaborar una definición matemática alternativa del predicado verdad, asumió además la tarea de formalizar, en alguna medida, su comportamiento autorreferencial. Los lenguajes de puntos fijos resultaron ser la herramienta adecuada para semejante empresa, y se consiguió una teoría matemática de la verdad basada en una semántica parcial que daba sentido a esta fuerte intuición pre-formal. No se hicieron esperar las nuevas réplicas, siendo el mismo Kripke quien advirtiera que sólo reconociendo cierta debilidad expresiva era posible sostener los lenguajes de puntos fijos como candidatos fuertes contra la definición ortodoxa. Una nueva paradoja, una nueva advertencia, otra predicación de la verdad problemática: la paradoja del Mentiroso Reforzado, exhibe inmediatamente la imposibilidad de los lenguajes de puntos fijos para dar cuenta de un predicado alético aparentemente claro: lo

[1] De aquí en adelante, nos referiremos al predicado sin emplear las comillas, aunque lo estemos mencionando. El contexto preservará al lector de confusiones entre uso y mención.

no verdadero, el complemento del predicado verdad, no necesariamente idéntico a la predicación de la falsedad en una semántica parcial.

A partir de estos resultados, una tradición se gestó para dar respuesta a la nueva dificultad en la caracterización matemática de la verdad: los lenguajes contextuales. Bajo el presupuesto de que en algún sentido, el predicado verdad es contextualmente dependiente, se intentó elaborar teorías que permitieran la autorreferencialidad del predicado pero que no sucumbieran ante la inferencia de tal regeneración de la antinomia original. Se consideran pioneros en esta línea los trabajos de C. Parsons y T. Burge. Una variedad de enfoques se ha adoptado como sustento de estos lenguajes enriquecidos y de distintas maneras se ha justificado la contextualidad del predicado, argumento difícil de conciliar con algunas de las intuiciones pre-formales que subyacen: no se supone que sea ambiguo o vago, ni tampoco muestra rasgos evidentemente anafóricos o variables. Más aun, sólo determinadas predicaciones enturbian la claridad de sus aplicaciones: las autorreferenciales. Se pregunta entonces ¿cómo justificar que el predicado verdad sea de algún modo contextualmente dependiente? ¿Cualquier solución contextual es exitosa frente a la recurrente paradoja semántica? ¿Cómo se tratan y se explican las predicaciones reflexivas una vez relativizado el predicado al contexto?

Existen diferentes enfoques contextuales de definición del predicado verdad. Sus divergencias abren un panorama complejo de consideración comparativa de las distintas propuestas, haciendo difícil una apreciación general en tanto perspectiva teórica. Sólo para dar una idea de las discrepancias existentes, obsérvese que ni siquiera hay acuerdo con respecto a la noción de contexto que se formaliza; de ahí en adelante, cada solución da argumentos y modelos formales particulares del predicado y su contextualidad. Se carece, pues, de una apreciación crítica de estas orientaciones teóricas. A esto se suma que su considerable diversidad y complejidad dificulta su comprensión respecto de las definiciones no contextuales del predicado que las antecedieron.

Un problema más delicado, creemos, es que la proliferación de soluciones contextuales se nutre de una multiplicidad de instancias o manifestaciones de los contextos. Podría decirse que cada solución supone una noción, y que la tendencia general (que halla una justificación histórica, creemos[2]) se inclina hacia un empleo más bien libre de escollos teóricos, de fundamentaciones conceptuales de los contextos.

[2] El hecho de que las teorías contextuales de McCarthy *et al.* hayan sido pioneras en ámbitos de trabajo formal motiva en gran parte de la literatura la reducción del contexto a un objeto o término indefinido.

Concebidos en general como términos indefinidos u objetos indeterminados, se manejan como parámetros adicionales en la evaluación de sentencias, considerándose críticamente sólo su efectividad en la resolución de la antinomia o las consecuencias formales de las definiciones o teorías. ¿Acaso da lo mismo una solución conceptualmente fundamentada que un artilugio técnico o escape lógico más complejo? En tanto soluciones a paradojas, consideramos que un recurso exclusivamente pergeñado para disolver la antinomia es, como mínimo, sospechoso.

A la luz de esto planteamos en la presente investigación, en primer lugar, que es posible poner en relación la teoría de Tarski, la de Kripke y las contextuales, si se plantean sus principales resultados y desafíos bajo un mismo formato. Pretendemos solventar la hipótesis de que las limitaciones expresivas de cada uno de esos lenguajes y las versiones de la paradoja del Mentiroso correspondientes a cada uno, son instancias de un mismo tipo de argumento, el diagonal, trazando así un esqueleto entre estos diversos intentos de definición al arraigarlos en una línea de trabajo que se continúa. Además, mediante la presentación diagonalizada de paradojas y teoremas de limitación expresiva correspondientes a las teorías anteriores a las contextuales, encontraremos un parámetro seguro de evaluación de las propuestas contextuales: un teorema de limitación para lenguajes contextuales y una versión contextual de la paradoja del Mentiroso. Planteado de este modo, se explicita formalmente un límite de los lenguajes contextuales que, sostenemos, resulta uno de los primeros criterios de apreciación de estos enfoques. A partir de este primer instrumento de calificación de las versiones contextuales del predicado verdad, creemos, ha de evaluarse la fundamentación conceptual de la imagen de contexto que se defienda, observándose de qué modo se da sentido a la limitación expresiva inherente a estos lenguajes sin que ello signifique un bloqueo arbitrario o injustificado de la reflexividad contextual. Condensando esto, diríamos que el éxito de una solución contextual de las recurrencias de la paradoja del Mentiroso (de una caracterización contextual del predicado verdad) se sostiene sobre una sólida y fundada explicación de la imposibilidad de la autorreferencia contextual.

Para sostener estas ideas, desarrollamos en la primera parte - a modo de extenso prolegómeno - el trazado de la genealogía y la familia de teorías contextuales y los resultados de limitación respecto de las mismas. Para ello, haremos una exposición en primer lugar de la caracterización tarskiana del predicado, que recoge los resultados del teorema de indefinibilidad de la verdad. Presentaremos también este teorema, para lo cual nos detendremos particularmente en uno de los lemas sobre los cuales se sostiene, a saber, el lema diagonal de Gödel. Una correcta exposición de este lema supone la metodología empleada en el célebre teorema de Cantor y en la conocida paradoja de Richard. Luego de este encadenamiento de resultados, pretenderemos que la generalización del método diagonal como tipo de argumento, resulte no sólo teórica sino también técnicamente clara. A partir de su esquematización, procuraremos subsumir los resultados tarskianos más importantes, e inscribir en la misma línea las conclusiones más significativas del enfoque de Kripke, tras dar una sucinta presentación de su teoría de puntos fijos. A la luz de tales derivaciones, haremos una introducción a las perspectivas contextuales acerca del predicado verdad, observando limitaciones formales, mediante la aplicación del mismo método diagonal y requisitos teórico-argumentativos.

Reservaremos para la segunda parte la exposición de la teoría y conceptos centrales de un enfoque jerárquico-contextual acerca del predicado verdad elaborado por M. Glanzberg (un autor contemporáneo, cuyas principales áreas de trabajo tienen que ver con la lingüística, la lógica y la filosofía de la lógica), así como nuestros argumentos en apoyo del sustento de tales conceptos. Procuraremos exponer y dar apoyo a la noción de discurso y de contexto que permiten desarrollar una línea particular de solución a la paradoja del Mentiroso. Tratándose de un intento formal de definición de un predicado verdad contextualmente sensible, habremos de exponer en líneas generales y de manera superficial el modelo formal de la dependencia y la expansión contextual que representa lógicamente la imagen lingüística antes defendida.[3] Mostraremos también algunas de las objeciones contra esta, y haremos algunas reflexiones en defensa de los argumentos que avalan este punto de vista acerca del cambio contextual que opera tras la inferencia de la paradoja del Mentiroso (Reforzado). Asimismo, procuraremos exhibir algunos apoyos teóricos hacia esta perspectiva basándonos en distintas estrategias.

En el apéndice de este trabajo, hemos traducido dos artículos que consideramos claves para la comprensión de la teoría de puntos fijos de Kripke, pretendiendo así

---

[3] Advertimos desde aquí que la complejidad de la versión formal del argumento de Glanzberg (supone lenguajes infinitarios, conjuntos admisibles, teorías aceptables, teoría de conjuntos con urelementos y varias instancias de codificación sintáctica) nos dará margen sólo para una exposición muy general. Creemos que esto no va en detrimento de nuestro argumento, por cuanto no pretenderemos hacer una apreciación detallada de tal representación, sino más bien de las bases lingüísticas y filosóficas de las que se supone son un modelo.

aprovechar el estudio que antecedió a estos resultados para hacer un aporte - aunque sea mínimo - al acervo bibliográfico en español aconsejable para el estudio de estas problemáticas.

El desarrollo de nuestros argumentos ha requerido, como se verá, una amplia investigación bibliográfica. La comprensión y despliegue del teorema de Tarski supone el dominio y exposición de resultados intermedios complejos – el teorema de Cantor, el primer teorema de Gödel, la paradoja de Richard – en vista de lo cual se emplearon fuentes y análisis posteriores de los cuales hemos intentado priorizar los más recientes o formalmente más generales y abarcativos. La teoría de Kripke, aunque se presenta de manera casi autocontenida en un solo artículo, es un exponente de una corriente más amplia, y su complejidad técnica también obliga a un estudio algo exhaustivo del detalle matemático que conlleva. En lo referente a la literatura contextual, si bien hemos intentado centrarnos en una propuesta específica hemos recorrido buena parte de la bibliografía básica, posterior en todos los casos a la década del '60. Por ser reciente, el material en español es prácticamente inexistente, por lo que las exposiciones generales previas a la indagación correspondiente a la segunda parte son, esperamos, un aporte bibliográfico útil, aunque de seguro pasible de ser profundizado. La consideración de los argumentos de Glanzberg hizo necesario cierto contacto con bibliografía menos filosófica que lingüística, a la que nos hemos aproximado de manera introductoria.

El problema del que nos ocupamos, lograr una apreciación formal y teórica de la propuesta jerárquico-contextual del predicado verdad extiende, lo sabemos, el ámbito de problemas y discusiones que aquí se abordan. Sin embargo, y aunque la generalidad de algunas de nuestras valoraciones pueda ser objeto de crítica, creemos que se trata de un proyecto justificado: hacemos un análisis formal de las posibilidades explicativas y requerimientos de soluciones a las paradojas, enriquecidas mediante conceptos lingüísticos. La estimación de estos enfoques se torna problemática porque sus bases son harto complejas. Sea esta una invitación a ulteriores investigaciones, sin perjuicio de estar frente a una introducción.

Parte I:

Definiciones del predicado verdad: perspectivas y limitaciones

---

En paradoja muestra
de manera muy clara
que, ni común ni rara,
la verdad es siniestra.

(Daniel Vera, *Las leyes libertad)*

---

1 El predicado verdad y los límites del lenguaje

La indagación filosófica alrededor del problema de la verdad, además de tener una historia vasta y de larga data, se ocupa de maneras diversas y de aspectos distintos de tal objeto. Tal profusión de aspectos del problema y de enfoques para tratarlos obliga a comenzar cualquier trabajo que tenga que ver con la verdad anteponiendo una aclaración o demarcación.

Si bien es posible clasificar tan extensa bibliografía de varias maneras, una primera distinción podría trazarse entre las reflexiones que se ocupan de la cuestión general de la verdad (qué es la verdad, cuáles son los criterios de evidencia de la misma, qué significa que algo sea verdadero, etc.) y aquellas que refieren particularmente al predicado verdad. Dentro de estas últimas, la variedad de cuestiones es también amplia: cómo se usa, a qué objetos se aplica, cómo se define, qué problemas suscita tal definición, sólo por mencionar algunas.

Centraremos aquí nuestra atención sobre los intentos de dar definiciones formales del predicado, y no en la (inagotable) problematización filosófica alrededor de la cuestión de la verdad. Sobre esto último mucho se ha escrito y se seguirá produciendo: teorías correspondentistas, coherentistas, deflacionistas, redundantistas, mínimas, entre otras. En general, el tratamiento que se da al predicado verdad en estos enfoques apunta más bien a indagar y esclarecer su comportamiento en los lenguajes naturales. Aunque el redundantismo de Ramsey e incluso algunos deflacionistas se dirijan en alguna medida al predicado en su uso formal, el tipo de reflexión que constituyen no toma en cuenta las particularidades y problemas que presenta intentar definirlo matemáticamente.

El estudio de los intentos por definir formalmente el predicado plantea una nueva distinción, a saber, la de su determinación desde el ámbito de los lenguajes formales distinta de la caracterización que emana del terreno del lenguaje natural. Tanto el enfoque semántico como el sintáctico de su definición han tenido que enfrentar este desafío. Tal parece que los ajustes de las caracterizaciones formales ha llevado, según la literatura, a un alejamiento de los rasgos "naturales" o "esenciales" de la verdad. Esto de inmediato obliga a preguntarse por las propiedades que se quiere adscribir al predicado. Pese a la variedad de enfoques posibles, parece que pervive la voluntad de contemplar en la definición formal rasgos recurrentes del predicado del lenguaje natural. Desde la perspectiva semántica, se ha explorado la posibilidad de que los modelos contengan su propia relación de satisfacción, que desde Tarski es la piedra de toque del predicado verdad. Desde la tradición sintáctica, que a través de los años ha encontrado varios desarrollos[4], las investigaciones han procurado establecer hasta qué punto puede una teoría demostrar enunciados correctos acerca de sí misma.

La elaboración de una teoría formal de la verdad es una fuerte instancia de depuración de un lenguaje, sea éste natural o formal. Frente al comportamiento más o menos dispar de la semántica, el esclarecimiento de nociones clave como las de la verdad, satisfacción, expresión, puede resultar horadante. La gravedad de esto no radica en algún carácter corrosivo o destructivo de las teorías de la verdad, sino en la desilusión que puede generar tener pruebas irrefutables – demostraciones – de que aquello que sosteníamos por ser intuitivamente claro deriva en teorías inconsistentes o incompletas.

En el centro de tales expectativas forjadas a partir del modelo que da el lenguaje natural se encuentra la universalidad expresiva y semántica. Es perentorio distinguir una noción de otra a fin de evitar discusiones infructuosas.[5] El concepto que se pone en cuestión al delinear formalmente la verdad en un lenguaje es el de **universalidad semántica**: el hecho de que en un lenguaje natural puedan expresarse todos los conceptos semánticos que involucra. Lo que la tradición semántica ha mostrado es la caída de la universalidad ante las inconsistencias resultantes de mantenerla frente a cualquier definición del predicado que satisfaga condiciones mínimas. Distinto de esto es pretender que un lenguaje pueda expresar absolutamente cualquier cosa, lo cual es sospechoso respecto de uno natural e imposible respecto de uno formal. Sirve remarcar la diferencia para además reparar en que una es una variedad de la otra, a partir de lo cual resultará menos extraño encontrar la imposibilidad del subcaso.

La imposibilidad se ha revelado a través de las paradojas generadas desde el seno clásico en la semántica y en la lógica. Se ha puesto de manifiesto que la universalidad semántica es inviable si se desea conseguir una definición del predicado verdad a partir de cánones clásicos (más adelante mostramos que para lenguajes menos clásicos

---

[4] Prácticamente toda reflexión, sintáctica o semántica, acerca de la definición del predicado verdad refleja la preocupación tarskiana acerca de la adecuación material, esto es, que la definición garantice que la predicación se dé sobre todo aquello que consideramos que debe darse.

[5] La importancia de este punto puede pasar desapercibida, pero aun un breve recorrido por la literatura crítica en el tema muestra la necesidad de tal distinción. Cf. K. Simmons (1993), Cap. 1.3.

tampoco es posible conseguirla[6]). Y tal resultado se puso de manifiesto de manera positiva por primera vez, como teorema, a partir del célebre trabajo de Tarski "The concept of truth in formalized languages", al establecer la indefinibilidad del predicado verdad.[7]

Los logros de Tarski en dirección a establecer la dimensión semántica como objeto teórico de estudio escasamente puedan señalarse en un solo escrito de manera comprehensiva y justa. Sin embargo, puede destacarse uno de los aspectos recurrentes y más característicos de su obra: la preocupación por una sistematización de los conceptos semánticos propios de disciplinas científicas, a saber, aquellas que pueden recibir una caracterización formal sin pérdida sustancial de su significado.[8] Más aun, en el caso de propiedades particularmente delicadas como la universalidad semántica, universalidad lingüística, etc., los esfuerzos de Tarski abrieron una línea de interpretación de problemas históricos de la filosofía del lenguaje y de la lógica. La idea de trazar un límite determinado en la expresividad de un lenguaje aparece como una concepción completa más que como artilugio técnico para huir de la paradoja del Mentiroso.

Esta concepción o esfuerzo limitativo puede parafrasearse desde el *Tractatus* de Wittgenstein, al manifestarse como un alumbramiento, la elaboración de un producto teórico cuyo principal aunque no único objetivo es mostrar los límites, los lugares permitidos, los umbrales del sentido. La particularidad de la presentación es que el objeto y la herramienta son formales, lo cual ha facilitado que una buena porción de comunidad filosófica haya malinterpretado o menospreciado la trascendencia de un estudio que marca el fin de la universalidad semántica de los lenguajes, el fin de la asimilación de rasgos presuntamente indiscutibles del lenguaje natural hacia los lenguajes formales. A partir de un estudio como este, se comprende el carácter acotado de un aparato expresivo construido, definido, en el cual la reflexividad está impedida por los límites del sentido establecidos desde un principio.

El ambiente intelectual de la época abundaba en sentencias de límite para los poderosos lenguajes científicos. Cantor, Gödel, Russell y Hilbert, entre otros, son exponentes de la dirección que tomó una buena parte de los estudios lógicos de aquel

[6] Cf. I.2.2.2 y I.4.2 más adelante, donde se dan pruebas de teoremas de limitación para lenguajes de puntos fijos y lenguajes contextuales.
[7] A. Tarski (1933), citamos aquí la versión publicada en A. Tarski (1969).
[8] Cf. A. Tarski (1936).

tiempo[9]. Pero fue con Tarski con quien se abrió la tradición que observa al lenguaje formal como esencialmente limitado. Si bien llovieron críticas contra la solución que propone a tal limitación expresiva, ya nadie pudo afirmar la universalidad semántica ingenua.

Como expresión filosófica de este momento encontramos el principio del círculo vicioso de Russell, el cual se sostuvo como principio generalizador de paradojas conjuntistas y semánticas:

> 'Cualquier cosa que involucre la totalidad de una colección no puede ser considerada parte de la colección', o, de manera conversa, 'si, supuesto que una cierta colección tuviera un todo, tendría miembros únicamente definibles en términos de dicho todo, entonces la colección no tiene un todo' [Nota al pie: quiero decir que las aseveraciones acerca de *todos* sus miembros no tienen sentido] [10]

El peso de este principio radica fundamentalmente en que permitió reunir cohesivamente una serie de problemas y escollos que encontró esa generación de lógicos en la tarea de sistematizar lenguajes formales y de establecer conclusiones metateóricas acerca de ellos. La teoría de conjuntos, la aritmética y la formalización de la semántica de la lógica encontraron de diversas maneras ecos de esta advertencia. No obstante, debe advertirse inmediatamente que esta máxima general, como casi todas las de su tipo, tiene numerosos y sólidos contraejemplos: no es cierto que toda inferencia que involucre alguna forma de autorreferencia sea inválida, ni tampoco se da que toda paradoja implique autorreferencialidad. Sin embargo, suele señalarse, la cercanía del análisis tarskiano del predicado respecto de esta máxima es sugerente. [11]

Cargar sobre la autorreferencia el peso de la contradicción parece dudoso por varios motivos. Por una parte, existen ejemplos de autorreferencialidad completamente inocua: "esta es una frase de siete palabras", : entre ellos, el hecho de que Gödel haya demostrado que para los lenguajes básicos de la aritmética siempre puede definirse un enunciado autorreferencial, pone en duda el escape de la paradoja mediante el mero bloqueo de la autorreferencia.

---

[9] G. Cantor (1874)-(1890-1), K. Gödel (1931), B. Russell (1903), D. Hilbert; P. Bernays (1934), (1939).
[10] B. Russell (1908), citado en S. Haack (1978), cap. 8. Hemos optado por traducir las citas incluidas en el texto para aportar fluidez a la lectura.
[11] Cf. por ejemplo S. Haack (1978), cap. 8.

1.1 Requisitos y rasgos de la definición tarskiana del predicado

Mostramos a continuación algunos de los requisitos impuestos por Tarski sobre la definición y el predicado mismo. Puesto que nos referiremos reiteradamente a algunos de los rasgos de la definición y la teoría, será útil tener una exposición sucinta de sus características fundamentales.

- La definición del predicado debía conservar su carácter "desencomillante".
- La verdad y afirmabilidad de toda instancia del esquema T es condición necesaria y suficiente para la caracterización del predicado. Cada instancia del esquema es una **definición parcial** del predicado. El esquema T dice que *S* es verdadera si y sólo si (sii, de aquí en adelante) *p*, donde "*p*" puede reemplazarse por cualquier sentencia del lenguaje para el cual se está definiendo la verdad, y "*S*" debe reemplazarse por el nombre de una sentencia que reemplace a "*p*".
- La **adecuación material** del predicado se logra a través del hecho de su definición debe implicar lógicamente una instancia del esquema T para cada enunciado en el lenguaje L.
- La **corrección formal** se consigue construyendo una definición que cumpla con los requisitos formales de una definición.
- La definición **no** debía emplear **términos semánticos indefinidos**.

Para los lenguajes con un número finito de sentencias, la definición es más bien trivial, y es posible dar una definición explícita. Un ejemplo de esto sería una fórmula como la siguiente:

$$\forall s\ V(s) \text{ sii } \begin{cases} s = \text{‘}p\text{’} \wedge p \\ s = \text{‘}q\text{’} \wedge q \\ s = \text{‘}r\text{’} \wedge r \\ \vdots \\ \text{(para toda proposición a la que refiera el lenguaje)} \\ \text{Cada instancia del esquema T define al predicado parcialmente.} \end{cases}$$

Para conseguir una generalización que permita aplicar la definición a lenguajes con una cantidad infinita de enunciados, es necesario emplear cuantificadores, pero la interacción de éstos con distintos tipos de elementos resulta problemática.

Para todos los enunciados x de L, x es verdadero en L sii para alguna S, x="S" y S. La variable cuantificacional x está asociada con un rango de objetos – los enunciados de L –, mientras que la variable S es de un orden mayor, ya que se asocia con una clase de sustitución de expresiones – el conjunto de sentencias de L –. La objeción apunta a la imposibilidad de cuantificar dentro del encomillado. Se emplea por tanto otro tipo de definición, la definición recursiva, consistente en crear un análisis extensional de términos como "verdadero" cuya extensión (el conjunto de objetos a los que se aplica) es infinito. Partiendo de una o más cláusulas que definen los elementos básicos del conjunto que quiere definirse, se añaden una o más sentencias recursivas que definen cómo se construyen miembros complejos del conjunto a partir de elementos simples.

> Las definiciones inductivas emplean el término que se está definiendo (…) en cláusulas que especifican su aplicación a nuevos casos en términos de su aplicación a casos previamente definidos. Para convertir tal definición en una definición explícita, se convierten las apariciones del término que se está definiendo en ocurrencias de una variable de conjunto, y se rescriben las cláusulas de manera que especifiquen condiciones de pertenencia a conjuntos para nuevos casos en términos de condiciones de casos previamente definidos. La conversión se completa poniendo la definición en la forma de un bicondicional universalmente cuantificado con una cuantificación explícita sobre conjuntos (para ligar la nueva variable de conjuntos) que sigue inmediatamente al 'sii'.[12]

Tomando el caso del lenguaje de la aritmética de Peano (PA) aumentado con un predicado unario $V(x)$ (PA_V), se define un vocabulario lógico y no lógico (término, fórmula, sentencia), y se da una definición recursiva de la denotación de términos con variables libres y de la aplicación de predicados. Pero para definir $V(x)$, hay que tener en cuenta que pueden construirse sentencias a partir de sentencias con variables libres (como "x es blanco") y de fórmulas cuantificadas ($\exists x$ tal que x es blanco). Puesto que las sentencias con variables libres no tienen un valor de verdad, no puede definirse recursivamente la verdad de estas sentencias ni de las fórmulas donde éstas aparezcan. Ante esto, se toma el predicado de Satisfacción como el eje sobre el cual definir recursivamente la verdad de estas sentencias. *Sat* es una propiedad relacional entre secuencias de objetos y sentencias. Se define mediante esquemas análogos la denotación y la satisfacción para cada nombre, término y predicado en el lenguaje (mostramos sólo el caso de la denotación):

[12] S. Soames (1999), cap. 3.

$$\forall x \forall y \, Den(x, y) \text{ sii } \begin{cases} x = \text{‘}p\text{’} \wedge y = p \\ x = \text{‘}q\text{’} \wedge y = q \\ x = \text{‘}r\text{’} \wedge y = r \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \text{(para toda proposición a la que refiera el lenguaje)} \end{cases}$$

Como cada predicado requiere de una cláusula independiente, los lenguajes con distintos predicados $V(x)$ requieren de definiciones y como Tarski plantea el requisito de que para cada lenguaje objeto se defina en un metalenguaje el predicado $V(x)$, lo que obtenemos es una definición de verdad-en-un-lenguaje para L_0, L_1, L_2, … Esto es lo que genera la fragmentación del predicado a la que más adelante nos referiremos como crítica a la definición tarskiana.

Se trata en este caso de una *definición*, no un *criterio* de verdad, y ha de quedar claro que la definición no es el esquema T (que tiene variables libres, por lo que no implica nada), sino la fórmula universalmente cuantificada para la denotación y satisfacción de cada lenguaje, obtenida recursivamente.[13] Esta definición procura no incluir términos semánticos primitivos, por lo que se toma como primitiva la noción de satisfacción entre sentencias y secuencias de objetos, lo cual ha sugerido a algunos intérpretes que la teoría tarskiana tiene un fondo correspondentista. Aunque no haremos ulteriores comentarios acerca de las implicaciones filosóficas de este tipo de la teoría formal de Tarski, creemos que es justo, por un lado, dejar constancia de que el mismo Tarski pretendió que su definición no dependiera de una perspectiva filosófica particular, correspondentista u otra[14]; por otro lado, cabe señalar que hubo varios intentos por justificar algún trasfondo filosófico particular de la definición tarskiana (al respecto, el enfoque de Field parece ser el más polémico, aunque también quizás es el más plausible históricamente analizado[15]), y si bien algunos enfoques parecen más justificables que otros, se trata en todo caso de una problematización acerca de la definición que responde a una reflexión ulterior, a una preocupación filosófica que no tiene (o no debería tener) injerencia sobre la apreciación de la teoría que surge desde la filosofía de la lógica, y no ya desde la filosofía en general. Tratándose de una teorización

[13] Cf. R. Kirkham (1992), cap. 5.
[14] Cf. A. Tarski (1944).
[15] Cf. H. Field (1972), (1986).

acerca del predicado formal, creemos que es justo reservar la reflexión teórica que tenga que ver con este tipo particular de investigación: Tarski no se ocupó en sus escritos lógicos del predicado natural. Más bien, tomó distancia del mismo para delimitar y pesquisar las posibilidades del predicado matemáticamente definido.

Volviendo a la relación entre definición y criterio, podría pensarse en emplear - en el ámbito del lenguaje de la aritmética - la demostrabilidad de un enunciado como criterio de verdad. No obstante, por el primer teorema de Gödel, queda demostrado que estos dos conjuntos, el de los enunciados demostrables y el de los enunciados verdaderos, no son idénticos. De ahí que quede descartada la posibilidad de interdefinir o correlacionar demostrabilidad y verdad.

1.2 Teorema de indefinibilidad del predicado verdad

La elaboración de un teorema es de insoslayable importancia para la construcción de una imagen cada vez más crítica de los lenguajes formales que empleamos. Y de mayor trascendencia es dar una demostración que establezca un resultado que confronta con la idea más tradicional y/o más ingenua de un concepto. En el caso del predicado verdad, fue Tarski con su teorema de indefinibilidad[16] quien estableció un hito, quizás el primero, en la historia de la formalización de dicha noción.

El resultado del teorema de Tarski plantea que el conjunto de números de Gödel de verdades de la aritmética no es la extensión de ninguna fórmula aritmética. Un lenguaje de la aritmética PA puede extenderse a un nuevo lenguaje PA_V agregándole un predicado que exprese la verdad aritmética ("verdadero en *L*" o, más explícitamente, "número de Gödel de un enunciado verdadero de *L**"). Pero el conjunto de números de Gödel de enunciados verdaderos de PA_V no será definible en PA_V. Podemos movernos hacia un lenguaje más rico PA_{V*} agregándole a PA_V un nuevo predicado que exprese "verdadero en PA_V". Pero, nuevamente, la verdad para PA_{V*} no será definible en PA_{V*}.

La forma tradicional de presentar la construcción y los resultados de este teorema muestra cómo el conjunto de sentencias verdaderas de un lenguaje clásico PA no es aritmético, esto es, no puede expresarse mediante alguna fórmula de *L*.[17] Para ello,

16 A. Tarski (1969), VIII, §5, Teorema I.

17 El artículo de Tarski presenta estos resultados respecto de un lenguaje de clases. La presentación que hemos tomado aquí corresponde a la dada por R. Smullyan (1992), por ser más amigable al lector contemporáneo, puesto que se toma el caso del lenguaje de la aritmética.

se apela a una función diagonal, recurso del que hablaremos con mayor detalle en el siguiente apartado. Cabe señalar aquí que esta función aparece como la jugada clave en la demostración de la limitación, ya que su aplicación permite sistemáticamente predicar sentencias sobre sentencias, consiguiendo así encontrar una predicación particular que, según se demuestra, no ha de ser posible si es que queremos evitar el derrumbe del lenguaje que tomamos, o de la lógica sobre la cual se sustenta, por la aparición de una contradicción.

El carácter crucial del lema diagonal (también conocido como teorema de punto fijo o teorema de reflexión) en la demostración del teorema de Tarski, justifica una explicación algo detallada de la manera como se obtiene. Este lema se desprende de la prueba de los teoremas de Gödel como abstracción o generalización. No obstante, no es en su forma general como aparece en las célebres pruebas de incompletitud de la matemática. Allí se da una construcción directa de una sentencia similar a la del Mentiroso, donde "verdadero" se reemplaza por "demostrable"; una sentencia $\gamma \leftrightarrow \neg Demostrable(\ulcorner\gamma\urcorner)$ es demostrable en la teoría ($\ulcorner\gamma\urcorner$ es el código que nombra o denota a γ según el esquema de codificación del lenguaje en la sintaxis que se adopte[18]). Esta construcción directa deriva, según Gaifman, del método de diagonalización de Cantor, conjuntamente con ciertos elementos provenientes de la conocida paradoja de Richard. Reconstruyamos, pues, este camino.

1.2.1 Cantor

La diagonalización como procedimiento se atribuye a Cantor, quien lo empleara en su demostración de la diferencia en la cardinalidad de los conjuntos de los números naturales ($\mathbb{N}$) y de los números reales ($\mathbb{R}$).[19] Cantor demostró que no hay función subyectiva $\mathbb{N} \rightarrow 2^{\mathbb{N}} \cong \wp(\mathbb{N})$, donde $2^{\mathbb{N}}$ es el conjunto de funciones desde $\mathbb{N}$ hacia

[18] Cf. I.1.2.3 más abajo.

[19] La versión del argumento que dio en su elaboración se daba en términos de funciones de indicación sobre un conjunto más que como subconjuntos de un conjunto. Allí mostró que si *f* es una function definida sobre X cuyos valores son funciones de dos valores sobre X, entonces la función de dos valores $G(x)=1 - f(x)(x)$ no está en el rango de *f*. Russell tiene una prueba similar en (1903), donde muestra que hay más funciones proposicionales que objetos. Zermelo tiene un teorema idéntico al anterior respecto de su forma en su artículo que se convirtió en el cimiento de la teoría de conjuntos moderna (1908). Cf. E. W. Weisstein (2006).

$2=\{0,1\}$. $2^{\mathbb{N}}$ es el conjunto de funciones características sobre $\mathbb{N}$ y es equivalente al conjunto potencia de $\mathbb{N}$.[20]

Véase aquí una breve explicación de cómo se consigue la predicación de una sentencia de sí misma a través de la construcción de un número representativo, con el objeto de demostrar la imposibilidad o el absurdo que surge de considerarla. Considérese una secuencia infinita de clases de números naturales, indexadas por un subíndice que varía también sobre $\mathbb{N}$:

$X_0 , X_1 ,\ldots, X_n, \ldots$

Sea '$X(y)$' la manera de referirse a '$y \in X$'. Cantor considera la clase X^* de todos los *n´s* tales que $n \notin Xn$, en otras palabras, todas las *n´s* para las que *no* $X_n(n)$. Supóngase que para algún *k,* $X^* = X_k$; entonces obtenemos una contradicción al preguntar si $X_k(k)$:

$X_k(k) \Leftrightarrow k$ tiene la propiedad que define $X^* \Leftrightarrow$ *no* $X_k(k)$

Esto muestra que X^* no está en la secuencia de clases.

■

X^* es definida por diagonalización, es decir, a través de una condición que implica la predicación de '$Xn(\,)$' de su *propio número representativo n*. El último paso en el argumento también emplea una diagonalización: predicamos '$Xk(\,)$' of *k*.[21]

Considérese diagramáticamente la estructura del teorema de Cantor, lo cual explica la raíz topológica de la denominación de esta función:

Secuencias numerables de elementos de $\mathbb{N}$

$\mathbb{N}$	1	2	3	…
E_1	**m**			
E_2		**w**		
E_3			**m**	
⋮				…

$\Rightarrow$

$\mathbb{N}$	1	2	3	…
E_1	**w**			
E_2		**m**		
E_3			**w**	
⋮				…

Debería ser claro ahora la siguiente definición: sea S^* un subconjunto de S, asumiendo que una función f asocia con cada $x \in S$ un subconjunto $f(x) \subseteq S$, de la siguiente forma: $x \in S^* \Leftrightarrow x \notin f(x)$. Al suponer que para algún z, $S^*=f(z)$, llegamos de

[20] Tomamos de N. Yanofksy (2003) esta breve y precisa descripción conjuntista.
[21] Cf. H. Gaifman (2006).

inmediato a una contradicción. Si ordenamos las definiciones de conjuntos de números naturales (una enumeración de todas las fbfs con una variable libre $\varphi_0(v),\ldots,\varphi_n(v),\ldots$) por su longitud[22], sea $S=\mathbb{N}$ y considérese una enumeración de todas las definiciones. Defínase ahora S^* mediante la condición de que $n\in S^* \Leftrightarrow n \notin$ al conjunto definido por $\varphi_n(v)$. Luego, S* no se define por ninguna de las fbfs enumeradas. Una versión de la paradoja del Mentiroso se obtiene, pues, como un bicondicional de este tipo: $\varphi_m(\mathbf{m})\Leftrightarrow\neg Verdadero(``\varphi_m(\mathbf{m})")$(donde **m** es el nombre de *m* en el lenguaje formal).

1.2.2 Richard

Considérese un lenguaje (por ejemplo, el español), en el cual se definen las propiedades aritméticas de los números. Por ejemplo, "el primer número natural" define la propiedad de ser el primer número natural. Aunque la lista de definiciones posiblemente sea infinita, cada definición está compuesta de un número finito de palabras y de letras, de manera que pueden ordenarse lexicográficamente según su longitud. Si mapeamos cada definición sobre el conjunto de los números cardinales, tal que la definición más corta se corresponda con el 1, la siguiente con el 2, y así sucesivamente, vemos que ocasionalmente, el número asignado a una definición puede corresponderse con tal definición. Piénsese que a la descripción "no divisible por ningún número más que por 1 o por sí mismo" correspondiera en el mapeo el número 43; el número asignado a la definición se corresponde con la misma definición. En cambio, si a "el primer número natural" se le asigna el cardinal 4, vemos que 4 no tiene la propiedad de la definición. Llámese al número que, como en este caso, no se corresponde con su definición, Richardiano (más formalmente, "*x* es Richardiano" equivale a "*x* no tiene la propiedad designada por la definición con la que se correlaciona *x* en la lista ordenada de definiciones"). Como la propiedad "ser Richardiano" también puede enlistarse, sigue la pregunta: es *n* (el número asignado a la definición de número Richardiano) un número Richardiano? Si *n* es Richardiano, *n* no cumple con la propiedad con la cual se lo correlaciona. En otras palabras, *n* es Richardiano sólo si *n* no es Richardiano. Pero si *n* no es Richardiano, entonces no cumple con la propiedad con la cual se lo correlaciona; por lo tanto, *n* es Richardiano.

[22] Aunque es similar al procedimiento empleado en toda prueba inductiva, en general se atribuye la idea de ordenar definiciones por su longitud al planteo de Richard de su paradoja.

Luego, el enunciado "*n* es Richardiano" no puede designarse consistentemente como verdadero o falso.

1.2.3 Numeración de Gödel

La construcción del teorema requiere además de algún tipo de numeración de Gödel, una función que asigna a cada símbolo y fórmula en un lenguaje formal un único número natural llamado número de Gödel. El concepto fue usado por primera vez por Gödel en la demostración de sus teoremas de incompletud.[23] Mediante este recurso es posible hablar de la sintaxis en el lenguaje mismo, pudiendo así construir la sentencia $V(v)$, la cual no ha de poder formularse como la expresión de un conjunto aritméticamente construido. El reflejo de la sintaxis en el mismo lenguaje es sin duda un paso crucial en la posibilidad de construir cualquier teorema de limitación, ya que sólo así podemos ver desde dentro del lenguaje hasta dónde puede emplearse sin desafiar las definiciones de las que se parte.

1.2.4 Gödel

El uso de un predicado semántico implica algún tipo de circularidad, que en el caso del predicado verdad se bloquea por el teorema de indefinibilidad de Tarski. La idea de Gödel consistió en reemplazar "verdadero" por "demostrable" – su aproximación sintáctica, definible en el mismo lenguaje, supuesta cierta riqueza expresiva. La sentencia indecidible, entonces, se puede formular como $\varphi_m(\mathbf{m}) \Leftrightarrow \neg \mathit{Demostrable}(``\varphi_m(\mathbf{m})")$. Asumiendo que el lenguaje es consistente, si $\varphi_m(\mathbf{m})$ es demostrable, entonces es verdadera, de lo cual se deduce $\neg \mathit{Demostrable}(``\varphi_m(\mathbf{m})")$; de allí que $\varphi_m(\mathbf{m})$ resulte indecidible – no puede demostrarse ni demostrarse que no puede demostrarse – y no contradictoria.[24]

[23] No hay una única manera de establecer una numeración de Gödel, pero puede tomarse como referencia la dada por E. Nagel y E. Newman (1979) en su didáctica exposición de los teoremas de incompletud. Una opción filosóficamente interesante es la que presenta D. Hofstädter (1979).

[24] Al respecto, H. Gaifman (inédito) hace este acertado comentario: "It is customary to present Gödel's results by proving first the fixed point theorem. This leaves the construction unmotivated and it appears as a magic trick."

$Dem(y)$ sii existe una demostración de y

Toda demostración es codificable

$Dem(x, y)$ sii x es una demostración de y

$\neg Dem(x, y)$ sii x no es una demostración de y

$\neg Dem(x, \neg Dem(x, y)$ sii no es demostrable que x no es una demostración de y

La sentencia $\neg Dem(x, \neg Dem(x, y))$ es aritmética.

$\neg Dem$(x, $\neg Dem$(x, y) es refutable sii $Dem(\neg Dem(x, \neg Dem(x, y))$ es demostrable

Supóngase que la sentencia $\neg Dem(x, \neg Dem(x, y))$ es demostrable. Entonces hay un número de Gödel que corresponde a su demostración, por lo que es demostrable la sentencia $Dem(\neg Dem(x, \neg Dem(x, y))$. Y si esto se da, $\neg Dem(x, \neg Dem(x, y))$ no es demostrable. Luego, si $\neg Dem(x, \neg Dem(x, y))$ es demostrable, $\neg Dem(x, \neg Dem(x, y))$ no es demostrable: se trata de una sentencia indecidible. Así, si el lenguaje es consistente (todo lo demostrable es verdadero), entonces es incompleto, ya que la sentencia $\neg Dem(x,\neg Dem(x,y))$ es aritmética, verdadera en un modelo estándar, pero no es demostrable.

■

1.2.5 Generalización del lema de Gödel

El lema diagonal en tanto resultado general demuestra que si $B(x)$ (cuya x es libre) es una fórmula del lenguaje de la aritmética de Peano aumentado por un predicado $V(x)$ (PA_V), hay una sentencia G tal que es demostrable en ese lenguaje que $G \leftrightarrow B(\ulcorner G \urcorner)$. Dada una fórmula $A(x)$ donde x es la única variable libre, sea $\exists x(x=\ulcorner A(x) \urcorner \wedge A(x))$ la diagonalización de $A(x)$. Puesto que la diagonalización es una función recursiva sintáctica (primitiva), es representable en el lenguaje PA_V por la fórmula $diag(x, y)$, según la cual y es el número de Gödel de la diagonalización de la fórmula cuyo número de Gödel es x. Queremos mostrar que para toda $B(x)$ (donde x es la única variable libre) es demostrable $G \leftrightarrow B(\ulcorner G \urcorner)$. Consideremos la fórmula $\exists y(diag(x, y) \wedge B(y))$. Su diagonalización es la sentencia $\exists x(x=\ulcorner \exists y(diag(x,y) \wedge B(y)) \urcorner \wedge \exists y(diag(x, y) \wedge B(y)))$, que según veremos, es la fórmula G. Sabemos que $diag(\ulcorner \exists y(diag(x,y) \wedge B(y)) \urcorner$,

$\exists x(x=\ulcorner \exists y(diag(x,y)\wedge B(y))\urcorner \wedge \exists y(diag(x, y)\wedge B(y))))$ es demostrable en PA_V. Luego, es demostrable en PA_V que $\exists x(x=\ulcorner \exists y(diag(x,y)\wedge B(y))\urcorner \wedge \exists y(diag(x, y)\wedge B(y)))$ es equivalente a $B(\ulcorner \exists x(x=\ulcorner \exists y(diag(x,y)\wedge B(y))\urcorner \wedge \exists y(diag(x, y)\wedge B(y)))\urcorner)$.

■

En general, la diagonalización puede emplearse sobre un dominio de objetos y una correlación que relaciona estos objetos con entidades de tipo superior definidas sobre ese mismo dominio. Una entidad de tipo superior es un predicado (o propiedad), o función. Piénsese que el objeto representa la entidad correlacionada (la relación no necesariamente ha de ser uno-a-uno; la misma entidad puede ser representada por distintos objetos). La diagonalización consiste en aplicar a un objeto la propiedad de tipo superior que representa.

1.2.6 Demostración del teorema de indefinibilidad

Se asume aquí que todo número es el número de Gödel de una expresión. E_n es la expresión cuyo número de Gödel es n ($g(E_n)$=n). Si E es una fórmula, E[**n**] (donde **n** es el numeral que designa a n) también lo es (aunque no necesariamente una sentencia). Otra manera de poner esto es emplear la notación funcional $r(e, n)$. $d(x)$, o $r(x, x)$, es el número de Gödel de E_n[**n**]. La imposibilidad de expresar mediante una sentencia del lenguaje en el que operamos el conjunto de (números de Gödel de) sentencias verdaderas de ese mismo lenguaje resulta incuestionable por cuanto se demuestra paso a paso que las funciones a las que se recurre, la de representación y la diagonal, sí son expresables en ese lenguaje (son aritméticas).

L opera con los signos de puntuación básicos, cuantificadores y conectivas lógicas clásicas, variables y términos (t_1+t_2, $t_1 \cdot t_2$, t_1 $\boldsymbol{E}$ t_2).[25] Para ese lenguaje, una fórmula cualquiera $F(v)$ expresa un conjunto A sii para todo número n, F(**n**) es verdadera $\leftrightarrow$ $n \in A$. Una relación es aritmética si es expresada por alguna fórmula del lenguaje L definido.[26]

A partir de una expresión E cualquiera y dos números e y n, $r(e, n)$ es el número de Gödel de la expresión $E[n]$, donde E es la expresión cuyo número de Gödel es e, y

[25] Suma, producto y potencia, respectivamente.
[26] Smullyan repara en la diferencia entre las fórmulas expresadas en L que involucran operaciones de potencia y las que no lo usan. Aquí no es de mayor importancia tal diferencia.

$r(x, y)$ es una función aritmética. $d(x)$, la **función diagonal**, es $r(x, x)$. Y para cualquier conjunto de números A, A^* es el conjunto de todos los n tales que $d(n) \in A$ ($A^* = d^{-1}(A)$).

Si A es aritmético, A^* también lo es. Y para todo A aritmético hay una sentencia de Gödel (H_{v1}) que expresa A^*: h es su número de Gödel. $H[h]$ es verdadera sii $h \in A^*$ sii $d(h) \in A$. $d(h)$ es el número de Gödel de $H[h]$, por lo que $H[h]$ es la sentencia de Gödel para A.

La clase de conjuntos aritméticos es cerrada bajo complementación. Pero no puede haber una sentencia de Gödel para $\sim T$, puesto que sería verdadera si y sólo si no fuera verdadera. Pero si $\sim T$ fuera aritmético, tendría una sentencia de Gödel. **Y si $\sim T$ no es aritmético, T tampoco lo es.**

■

1.3 Funciones y argumentos diagonales: generalización del teorema de Cantor

Podemos generalizar el teorema de Cantor antes mostrado[27] para probar que para cualquier conjunto T, no hay una función subyectiva $T \rightarrow 2^T \cong \wp(T)$. Desde una perspectiva filosófica, el *teorema de Cantor generalizado* dice que si los valores de verdad o propiedades de T no son triviales, el conjunto T no puede describir su propia verdad o sus propiedades. Debe haber una limitación en la manera como T lidia con sus propiedades. El *contrapositivo* del teorema de Cantor dice que si hay una función de un conjunto arbitrario sobre el conjunto de funciones de tal conjunto hacia uno "no degenerado" ($\mathrm{T} \rightarrow \mathrm{Y}^{\mathrm{T}}$), entonces en tal conjunto bien construido debe haber un punto fijo. En otras palabras, si T puede describir sus propiedades, entonces el conjunto con el que se lo mapea debe ser defectuoso en algún sentido.

A partir de la célebre prueba de Cantor que se encarga del caso del intervalo continuo [0, 1] puede abstraerse no una definición sino un método, un argumento y no un mero resultado particular.[28] De allí que K. Simmons parezca justificado en hablar de

[27] Cf. I.1.2.1

[28] El propio Cantor sugirió esta idea al decir que la prueba era remarcable no sólo por su enorme simplicidad, sino también porque el prncipio que sigue puede extenrse al teorema general que indica que las potencias de conjuntos bien definidos no tienen un máximo. Cf. G. Cantor (1980-1). Yanofsky (2003) señala también que hay numerosos teoremas de la matemática "real" (no de la matemática "teórica) que se demuestran mediante diagonalizaciones: la teoría de categorías de Baire sobre espacios métricos, el teorema de Ascoli en topología, el teorema de Helly sobre límites de distribuciones. Otras ideas apoyadas

un argumento diagonal en su libro *Universality and the Liar*. Este autor logró, según podemos apreciar, dar un análisis preciso, perspicaz y verdaderamente útil del diseño y potencial de los argumentos diagonales. La mayor virtud de la presentación de Simmons radica en la sistematización y exacta definición que da de sus partes, a partir de lo cual es posible no sólo comprender y estudiar diversos usos que se han dado de este argumento, sino además trabajar en nuevas aplicaciones, como las que se mostrarán en algunas de las secciones de esta investigación.

Es preciso apuntar, sin embargo, que no se trata de la primera ni de la única referencia a la posibilidad de generalizar la prueba de Cantor. El rol fundamental de las funciones diagonales ha sucitado varias reflexiones en torno de su recurrencia y de la relación entre sus posibles resultados. N. Yanofsky[29] concluye a partir de la existencia del esquema general del resultado de Cantor que realmente *no hay paradojas*, sino que sólo hay limitaciones. Las paradojas señalan que al violar una limitación, se obtienen sistemas inconsistentes. Por ejemplo, la paradoja del Mentiroso (PM, de aquí en adelante) muestra que al permitir hablar al lenguaje (natural) de su propio predicado verdad, cae en la inconsistencia; pero esto es precisamente lo que señala el teorema de indefinibilidad de Tarski para la verdad en sistemas formales.

Desde un punto de vista distinto, autores como Tucker[30] distinguieron entre *procedimientos heterológicos* como los utilizados en PM y el *procedimiento diagonal* involucrado, por ejemplo, en la paradoja de Richard.[31] Un procedimiento heterológico genera una paradoja en la que hay un patrón oscilante de la forma "Si P entonces no P y si no P entonces P". Cada uno de los enunciados es una contradicción informal en el sentido de que P y no P no pueden ser verdaderos al mismo tiempo, y juntos derivan una contradicción veritativo-funcional de la forma "P y no P". De acuerdo con el análisis de Tucker, los procedimientos heterológicos son procedimientos no constructivos defectuosos. El defecto en el procedimiento es la confusión entre predicados de primer y segundo orden: un predicado de segundo orden (Richardiano, o heterológico) que describe algún predicado de primer orden es tratado como un predicado de primer orden ("*x* es un número Richardiano", "'heterológico' es heterológico"), de manera que

sobre esta función particular son: el segundo teorema de incompletitud de Gödel. Aunque usualmente se lo demuestra como consecuencia del primer teorema de incompletitud, es posible dar pruebas directas en teoría de modelos que emplean el método diagonal.

29 Agradezco a Eduardo Ochs haberme señalado este interesante artículo y algo de su importancia.

30 Cf. J. Tucker (1958), (1962), Citado en J. Humpries (1979).

31 Cf. I.1.2.2 más arriba.

no haya predicado alguno de primer orden al cual se aplique el predicado de segundo orden. En cambio, el procedimiento diagonal no genera en sí mismo contradicciones. Es un procedimiento que especifica para una enumeración E de una clase Σ que un elemento D puede construirse, y tal elemento es miembro de Σ pero no pertenece a la enumeración E; D difiere sistemáticamente de cada elemento de E. Así, teoremas y paradojas no derivan de un mismo tipo de argumento o función, por lo que es necesario remarcar y conservar la tajante diferencia entre ambos tipos de resultados.

Semejante diversidad de posturas frente a la relación entre teoremas y paradojas sugiere de inmediato que no se trata de un asunto sencillo. El empleo de argumentos diagonales es sin duda un recurso rico y complejo, que por momentos desafía lo que incluso protagonistas de las ciencias formales han podido apreciar. Fue Russell, probablemente entre otras grandes figuras de la lógica, quien expresó cuán elusivo puede resultar el efecto de esta clase de argumentos, siendo que aun en un razonamiento indiscutible en lo formal parece haber algo falaz, o al menos sutil.[32] En (casi) todas las versiones, sin embargo, se reconoce la presencia de la función diagonal, por lo que comprenderla y caracterizarla puede ayudar no tanto a tomar partido por alguna de estas perspectivas, ya que la divergencia entre ellas implica en alguna medida una toma de posición filosófica quizás irreconciliable, sino más bien a contar con un instrumento esclarecedor que permita en esta investigación encontrar resultados nuevos e inscribirlos en un perspectiva clara, aunque no indiscutible.

La observación, abstracción y generalización de los elementos concurrentes en los diagramas que representan topológicamente la correlación entre conjuntos (de funciones, de nombres de funciones)[33] le permite a Simmons lograr una sistematización y presentación transversal del problema que aparece en las distintas fases de la paradoja. Esta transversalidad, aunque según veremos supone en última instancia una toma de posición filosófica, arroja luz sobre un intrincado problema y presenta no sólo un preciso análisis conjuntista sino también un correcto teorema diagonal. Señalamos aquí la diferencia entre el lema diagonal de Gödel y el teorema diagonal de Simmons.

El teorema diagonal que queda demostrado sobre la base de la definición de los conjuntos del argumento establece lógicamente - de manera bastante transparente - por qué la antidiagonal (el contravalor de la diagonal) no figura en la matriz que se emplea

---

[32] Cf. B. Russell (1903).
[33] Cf. I.1.2.1 más arriba.

para desarrollar las correspondencias de elementos. Esto a su vez le permite a Simmons lograr interesantes generalizaciones del argumento para matrices de *n* dimensiones que permiten demostrar un nuevo teorema diagonal que extiende el resultado de que H no se da en R para cualquier diagonal que se obtenga.[34]

1.3.1 Partes de un argumento diagonal

El análisis que Simmons hace del argumento permite concebirlo matemáticamente como una relación entre distintos conjuntos. A partir de la grilla o matriz que ilustrara el argumento de Cantor, pueden distinguirse los siguientes primeros tres conjuntos:

$$\begin{array}{c|cccc|} & & D_2 & & \\ \hline & z_i & z_i & z_i & z_i \\ D_1 & z_i & z_i & z_i & z_i \\ & z_i & z_i & z_i & z_i \\ & z_i & z_i & z_i & z_i \\ \hline & & & & \ldots \end{array}$$

Sea R una relación triádica. Sean D_1 (*lado*) y D_2 (*tope*) conjuntos. Luego,

R es una matriz sobre D_1 y D_2 sii $\forall x \forall y\ (x \in D_1 \wedge y \in D_2 \rightarrow \exists! z Rxyz)$

F es una diagonal sobre D_1 y D_2 sii F es una función 1-1 de D_1 en D_2.

G es el valor de la diagonal F en R sii $\forall x \forall y \forall z\ (Gxyz \leftrightarrow Fxy \wedge Rxyz)$

H es el contravalor de F en R sii

(i) $\forall x \forall y\ (\exists z\ Hxyz \leftrightarrow Fxy)$

(ii) $\forall x \forall y \forall z \forall z'\ (Hxyz \wedge Hxyz' \rightarrow z = z')$

(iii) $\forall x \forall y \forall z\ (Hxyz \rightarrow z \in$ al rango de R)

(iv) $\forall x \forall y \forall z\ (Hxyz \rightarrow \neg Rxyz)$

La diagonal se concibe así dada por coordenadas $<x, y>$, donde $x \in D_1 \wedge y \in D_2$. La noción intuitiva y visual de la diagonal, que es la que Cantor empleara en su

[34] No ahondaremos en este punto, pero puede señalarse que este teorema es relevante para argumentos diagonales relacionados con la teoría de la computabilidad. Cf. K. Simmons (1993), Apéndice cap. 2.

demostración, no es sin embargo la única manera de definir esta función. Lo esencial es que se coordine cada elemento de D_1 con un único elemento de D_2. Así, es crucial el rol de las filas (y no de las columnas) en la demostración del teorema diagonal. Sea K el valor o contravalor de una diagonal F de R. Luego,

K es una columna de R sii $\exists d \in D_1 \forall x \forall y \forall z (Hxyz \rightarrow Rdyz)$

Puede demostrarse ahora el teorema diagonal básico de Simmons, donde se demuestra que H no ocurre como una fila de R.

1. Se muestra que $\neg\exists w \in D_1 \forall x \forall y \forall z (Hxyz \rightarrow Rwyz)$

2. $\exists w \in D_1 \forall x \forall y \forall z (Hxyz \rightarrow Rwyz)$	Supuesto: H ocurre como una fila de R
3. $\forall x \forall y \forall z (Hxyz \rightarrow Rdyz)$	$\exists$ elim: 2
4. $\forall x \forall y (\exists z Hxyz \leftrightarrow Fxy)$	Premisa: H es un contravalor
5. $\forall y (\exists z Hdyz \leftrightarrow Fdy)$	$\forall$ elim: 4
6. $\forall x \in D_1 \exists y \in D_2 Fxy$	Premisa: F es una diagonal
7. $\exists y \in D_2 Fdy$	$\forall$ elim: 6
8. Fde	$\exists$ elim: 7
9. $Fde \rightarrow \exists z Hdez$	$\forall$ elim: 5 y $\leftrightarrow$ elim: 8
10. $\exists z Hdez$	$\leftrightarrow$ elim: 8, 9
11. $Hdef$	$\exists$ elim: 10
12. $Hdef \rightarrow Rdef$	$\forall$ elim: 3
13. $\mathbf{R}\boldsymbol{def}$	$\rightarrow$ elim: 11, 12
14. $\forall x \forall y \forall z (Hxyz \rightarrow \neg Rxyz)$	Premisa: H es un contravalor
15. $Hdef \rightarrow \neg Rdef$	$\forall$ elim: 14
16. $\neg\mathbf{R}\boldsymbol{def}$	$\rightarrow$ elim: 11, 15

1.3.2 Tipos de argumentos diagonales

Como resultado general, Simmons muestra que el argumento diagonal sirve a fines diversos, según se trate de uno *malo* (en cuyo caso resultan en paradojas o contradicciones) o uno *bueno* (lo que permite establecer teoremas de limitación, esto es, mostrar que hay algo inexpresable en el lenguaje en cuestión). La diferencia entre ellos es que en un mal argumento, alguno(s) de los conjuntos en cuestión no está(n) bien construido(s).

Los buenos argumentos diagonales pueden ser *directos* o *indirectos*. En el caso de los directos, se muestra de qué manera – asumiendo la existencia de determinados conjuntos (lado, tope, matriz y diagonal) – no existe H, el contravalor. Los argumentos indirectos, en cambio, parten de suponer que sí existe tal fila, H (el contravalor de F), pero en el marco de una reducción al absurdo, de tal modo que la contradicción que aparece se salva al cancelar el supuesto original.

En el caso de los malos argumentos diagonales, en cambio, no hay un supuesto para una *reductio*. Se asume la existencia de los conjuntos intervinientes en el argumento, pero alguno de ellos no está bien formado, razón por la cual aparece la contradicción y se cae en una paradoja. La solución a un mal argumento diagonal, sin embargo, no se agota en eliminar o reemplazar el conjunto mal formado, sino que es necesaria una justificación de tal reemplazo o eliminación. Una solución *ad hoc* a la paradoja[35] que se deriva simplemente descartará el conjunto mal formado, pero no conseguirá justificar la separación de ese elemento de manera acabada o sólida.

Esta clasificación presenta según podemos apreciar una primera cualidad: permite desentrañar algo de la confusión que Russell indicara respecto del rol de las funciones diagonales en dos clases de inferencia con tipos de conclusiones antagónicas. Por otra parte, en análisis conjuntista y la resultante división del argumento en conjuntos que deben estar propiamente definidos.[36]

1.4 Teorema de indefinibilidad diagonalizado

Presentamos a continuación la versión diagonal del teorema de indefinibilidad del predicado verdad de Tarski.[37] En la prueba tradicional[38] se demostró que el complemento del conjunto T de (números de Gödel de) sentencias verdaderas del lenguaje definido no puede ser aritmético, puesto que entonces existiría para ese conjunto, por el lema diagonal, una sentencia de Gödel de la forma $\neg V[\neg V]$ tal que es verdadera si y sólo si no es verdadera. La sentencia es verdadera sólo en caso de que su

[35] Cf. I.1.6 más abajo.
[36] G. A. Antonelli (1996) coincide en señalar la importancia de este tratamiento general.
[37] Cf. K. Simmons (1993), cap. 2.
[38] Cf. I.1.2.6 más arriba.

número de Gödel no pertenezca al conjunto de números de Gödel de sentencias verdaderas del lenguaje en cuestión. Tal como analizaremos, se da el mismo resultado. En este caso, el argumento diagonal procede como una *reductio*; se trata de un argumento diagonal indirecto, en el que la existencia del conjunto de números de Gödel de fbfs de S verdaderas en el modelo estándar genera una contradicción si se supone que es aritmético.

S es una teoría de primer orden con identidad, e incluye los postulados de Peano

D_1 (*lado*) es el conjunto de formulas bien formadas (fbf) de aridad 1 de S

D_2 (*tope*) es el conjunto de los números naturales

$R(x, y)$ =	1, si x es verdadera (en el modelo estándar) de la sentencia cuyo número de Gödel es y
(*matriz*)	0, si x no es verdadera de la sentencia cuyo número de Gödel es y

F es la diagonal que lleva a cada fbf de D_1 a su número de Gödel en D_2

H (el contravalor de F) es

$H(x, y)$ =	1, si x no es verdadera de la sentencia cuyo número de Gödel es y, su propio número de Gödel
	0, si x es verdadera de la sentencia cuyo número de Gödel es y, su propio número de Gödel

H muestra que ninguna fbf de S se puede predicar como verdadera de las sentencias no verdaderas de sus propios números de Gödel. Pero la fbf existe si asumimos que el conjunto de números de Gödel de fbfs de S verdaderas en el modelo estándar es aritmético. Así, tal modelo no debe ser aritmético.[39]

Queda ilustrada la limitación en la inexistencia de la fila correspondiente a la sentencia en la matriz, lo cual indica con claridad un coto en la expresividad del lenguaje escogido. La definición del predicado tarskiano, como ya se mencionó previamente,

[39] Cf. I.1.2.6

hizo frente a esta limitación articulando los medios para que se defina recursiva y extensionalmente el predicado en un metalenguaje.

1.5 Paradoja del Mentiroso

Ahora bien, ¿qué se infiere si no descartamos el supuesto de que el conjunto de números de Gödel de fbfs de S verdaderas en el modelo estándar es aritmético? ¿Qué sucede si no se halla una definición alternativa del predicado que no suponga su expresión en el lenguaje objeto tal y como lo presentamos? La paradoja de Epiménides, conocida y difundida en la literatura como la paradoja del Mentiroso, resulta expresable en el lenguaje, y la inconsistencia que genera lo trivializa. Podría verse que es la combinación *Esquemas-T* + *Riqueza sintáctica* + *Lógica clásica* lo que permite la aparición de enunciados paradójicos al tipo del Mentiroso.[40]

Aunque la sentencia del cretense Epiménides, aquella que decía que todos los cretenses eran mentirosos, no es realmente paradójica, puesto que llamar a alguien mentiroso no implica que *todo* lo que dice sea falso, esta locución presenta alternativas que sí resultan de peso.[41] Expresada como:

a) esta sentencia es falsa

b) esta sentencia no es verdadera

c.1) la siguiente sentencia es falsa

c.2) la anterior sentencia es verdadera

d) la quinta sentencia en la lista de la sección 1.5 de esta tesis es falsa

el enunciado del Mentiroso hace inconsistentes teorías de la verdad mínimas, que sólo presuponen el principio de bivalencia y alguna forma, por ejemplo, del esquema T de Tarski (*V*("*s*") sii es el caso que s). Véase el siguiente esquema general de inferencia de la paradoja:

[40] Cf. A. Gupta (2001).

[41] J. Barwise y J. Etchemendy (1987) dan un útil análisis de distintas expresiones de la paradoja de Epiménides.

1. **(λ) λ no es verdadera**

2. V("s") sii es el caso de que s	esquema T
3. $\forall s\ (V(``s") \vee \neg V(``s"))$	Principio de bivalencia
4. $V(``\lambda")$	Supuesto
5. $\neg V(``\lambda")$	Por 2, 3 y 4
6. $V(``\lambda") \wedge \neg V(``\lambda")$	Por 4 y 5
7. $V(``\lambda") \rightarrow (V(``\lambda") \wedge \neg V(``\lambda"))$	Prueba condicional de 4 a 6
8. $\neg V(``\lambda")$	Supuesto
9. $V(``\lambda")$	Por 2, 3 y 8
10. $\neg V(``\lambda") \wedge V(``\lambda")$	Por 8 y 9
11. $\neg V(``\lambda") \rightarrow (\neg V(``\lambda") \wedge V(``\lambda"))$	Prueba condicional de 8 a 10
12. $V(``\lambda") \leftrightarrow \neg V(``\lambda")$	Por 3, 7 y 11

Otro modo de poner esta expresión, siguiendo el teorema de Thomson[42], es el siguiente: piénsese en el predicado $V(x)$ como una relación binaria $V(``x", y)$ entre sentencias y proposiciones (asúmase pues que las proposiciones son los portadores de verdad). La sentencia $x$ es verdadera sii se da el caso que $y$. Si decimos $V(``x", x)$, decimos que la sentencia x es verdadera sii se da el caso de que x (una re-expresión del esquema T). Piénsese además que λ dice que "λ" es verdadera sii no se da λ - $\neg V(``x", x)$. Entonces $\exists x \forall y(V(``y", x) \leftrightarrow \neg V(``y", y)$ es la paradoja del Mentiroso, ya que si instanciamos el existencial tomando el caso de la proposición λ, tenemos que $\forall y(V(``y", \lambda) \leftrightarrow \neg V(``y", y)$.

Planteamos ahora la paradoja en su versión diagonal, siguiendo el modelo general de Simmons. Este mal argumento diagonal, según su clasificación, muestra que si suponemos que el predicado verdad puede expresarse en el mismo lenguaje que se usa, entonces la sentencia del Mentiroso pertenece a ese lenguaje. La contradicción que conlleva su pertenencia al lenguaje y la ausencia de un supuesto que descartar en una

[42] J. F. Thomson (1962), citado en L. Goddard y M. Johnston (1983).

reductio ratifica la clasificación, y muestra cómo H, el contravalor de la diagonal, no ha de pertenecer a la matriz y sin embargo, por λ, sí está presente.[43].

La sugerencia de que la paradoja se origina por el rango de cuantificación del universal en la fórmula α tiene relación directa con la desarticulación contextual de la paradoja del Mentiroso Reforzado que presentaremos, ya que en ella se sitúa el problema en la dependencia contextual del dominio de los cuantificadores. Asimismo, la observación de que la inferencia de la paradoja parte de un enunciado contradictorio pero sin hacerlo con el propósito de una *reductio* permite ratificar la relación que encontramos entre el teorema de Tarski y la paradoja del Mentiroso diagonal que sigue.

1.5.1 Paradoja del Mentiroso diagonalizada

PM: (λ) λ no es verdadera

S es el conjunto de sentencias verdaderas de L, un lenguaje natural autorreferencial y bivalente

D_1 es el conjunto de predicaciones de verdad de sentencias verdaderas de L ("*s*" es Verdadera, o *V*("*s*"))

D_2 es el conjunto de sentencias de L (*a, b, c,…*)

R (*x*, *y*) = 1, si V("*s*") sii *a*
0, si no es el caso de que V("*s*") sii *a*

F es la diagonal que lleva a cada predicación en D_1 a la proposición de la cual predica la verdad en D_2

H (el contravalor de F) es

43 Tal presuposición de la sentencia paradójica ya fue notada for L. Goddard y M. Johnston (1983). Además, estos autores diagnostican la contradicción por el alcance de los cuantificadores en la fórmula señalada, lo cual remite – aunque sea vagamente – al diagnóstico contextual de la paradoja dado por Glanzberg. Cf. II.1.2.2 más abajo.

H (x, y) = 1, si no es el caso de que V("*s*") sii *s* (siendo "*s*" el nombre de la sentencia *s*)

0, si V("*s*") sii *s*

H muestra que la teoría de la verdad ingenua; en el caso de una como la descripta por Tarski, diríamos que el esquema T se aplica a todas las sentencias de L. Pero entre las sentencias de L está λ, que es verdadera sii no es el caso que λ, Así, encontramos una contradicción.

El diagnóstico clásico de esta paradoja apunta a la predicación de la verdad dentro del lenguaje, esto es, al cierre semántico del lenguaje, que emula el comportamiento que intuitivamente atribuimos al lenguaje natural. En términos de Simmons, decimos que el conjunto de predicaciones de verdad de sentencias verdaderas está mal formado por permitir que el predicado se aplique sobre sí mismo, esto es, por pertenecer el predicado al lenguaje al cual pertenecen las sentencias de las cuales se predica la verdad.

Según J. Humpries[44], la opinión que Gödel sostuvo acerca de que su argumento era similar a la paradoja de Richard, y que también estaba relacionado con la paradoja del Mentiroso en que la sentencia indecidible es auto-descriptiva (porque G afirma su propia indemostrabilidad), es claramente incorrecta. Según defiende, la sentencia indecidible difiere de PM en que es un enunciado genuinamente autodescriptivo. En PM, no hay un enunciado de primer orden sobre el cual pueda aplicarse el predicado "falso". El enunciado λ no es ni verdadero ni falso porque no hay una proposición que tal sentencia exprese. Así, no es genuinamente autodescriptiva. Tucker, según lo cita Humpries, distingue los argumentos diagonales de los heterológicos porque los enunciados del primer tipo refieren a una proposición (resultan en un teorema, una conclusión positiva de la inferencia en el argumento), mientras que los del segundo tipo no refieren a ninguna proposición (resultan en una contradicción al final de la inferencia). Como el argumento de Gödel es constructivo, debe involucrar un procedimiento diagonal y no uno heterológico, puesto que sí hay una proposición expresada por la sentencia que se construye.

[44] J. Humpries (1979). Allí se toma la distinción de Tucker entre procedimientos diagonales y heterológicos antes referida (I.1.6).

1.5.2 Primer teorema de Gödel diagonalizado

G: $\neg Dem(x, \neg Dem(x, y))$ (G es un signo de clase de Principia Mathematica verdadero de los números de Gödel de fbfs no demostrables de sus propios números de Gödel[45])

D_1 es el conjunto de signos de clase en *Principia Mathematica*

D_2 es $\mathbb{N}$

$$R(x, y) = \begin{cases} 1, \text{ si } x \text{ es demostrable de } y \\ 0, \text{ si } x \text{ no es demostrable de } y \end{cases}$$

F es la diagonal que lleva a cada término de clase en D_1 a su número asociado en D_2

H (el contravalor de F) es

$$H(x, y) = \begin{cases} 1, \text{ si } x \text{ no es demostrable de } y \\ 0, \text{ si } x \text{ es demostrable de } y \end{cases}$$

El teorema diagonal establece que H no es una fila de la matriz, que ningún signo de clase de PM es demostrable exactamente de los números asociados a signos de clase no demostrables de sus propios números asociados. Sabemos en particular que G no es demostrable de ese modo. No obstante, G es verdadero exactamente de tales números. Así, para algún número n de $\mathbb{N}$, $Dem(n, G)$ es demostrable pero no verdadero, o bien $Dem(n, G)$ es verdadero pero no demostrable. Como se asume que el lenguaje de la aritmética es consistente, entonces debe ser el caso de que la sentencia es verdadera pero no demostrable.

Supóngase, con el propósito de una *reductio*, que G sí es demostrable, que H aparece como una fila en la matriz. Sea que F asocie a G con un número n de $\mathbb{N}$. Tómese tal par $\langle G, n \rangle$ de la matriz en relación con el contravalor H. Por definición de H, H(G,

[45] Cf. K. Simmons (1993), cap. 2.

n)=1 sii R(G, n)=0. Pero como G pertenece a la matriz, se da que H(G, n)=1 sii R(G, n)=1.

A diferencia de lo señalado por Humpries, vemos que el argumento empleado en el caso de λ y en el caso de G es el mismo. Sin embargo, los conjuntos intervinientes no son los mismos; más aún, D_1 en el argumento de λ está mal formado, pero este no es el caso de D_1 en G.

1.6 Universalidad, metalenguajes y jerarquías

La jugada fundamental del enfoque tarskiano acerca del predicado verdad es la distancia que establece respecto de las intuiciones pre-teóricas que asocian su comportamiento al que exhibe el predicado en el lenguaje natural. Al sancionar todo lenguaje semánticamente cerrado, se descarta de plano que el predicado formal que se define para un lenguaje sencillo como el de la aritmética de Peano pueda conservar rasgos particulares del predicado verdad propio de los lenguajes naturales. Pero pese a esta disociación, PM se plantea como un desafío, ya que se sostiene sobre bases mínimas e intuitivas: un lenguaje bivalente y que adopte el esquema T es suficiente para reproducir la paradoja.

> Lo paradójico acerca de las paradojas, entonces, no es que las contradicciones sean demostrables a partir de los supuestos que se toman, ya que los supuestos mismos son contradictorios, sino que haya bases informales e intuitivas para pensar que esos supuestos son o deberían ser verdaderos. .[46]

Siguiendo la terminología de Simmons, vemos que la solución de PM no consiste meramente en bloquear el conjunto mal formado – el de las predicaciones de verdad -, sino que debe afrontar la explicación de tal bloqueo; deben darse motivos teóricamente fundados de la mala formación de ese conjunto. Recordando lo que planteara Haack[47], no sólo hay que indicar qué premisas o principios de inferencia se dejan de lado, sino también por qué se lo(s) abandona. Además, la solución debe eliminar toda manifestación de la paradoja, y no debe recortar aquello que sea correcto o necesario. Por otra parte, generalmente se requiere que la solución no viole intuiciones básicas acerca de los conceptos involucrados.

[46] L. Goddard y M. Johnston (1983).
[47] S. Haack (1978).

La definición formal del predicado del lenguaje objeto en un metalenguaje y la jerarquía de metalenguajes resultante consigue explicar la solución a la paradoja que evita predicaciones dentro del lenguaje objeto a partir del diagnóstico tarskiano de tal anomalía. El cierre semántico queda así sindicado como el motivo principal de la aparición de la contradicción. En el caso de los lenguajes formales, en cambio, la solución asume la imposibilidad del cierre semántico, y desarrolla una definición recursiva de la verdad que – admitiendo la necesidad de un metalenguaje desde el cual emplear el predicado que se predica de sentencias en un lenguaje objeto – da lugar a una teoría axiomática que se prueba consistente, siempre que el metalenguaje escogido también lo sea. La recursividad de la definición es importante en la medida en que se pretende que la teoría axiomática sea relativamente rica en su expresividad a fin de poder derivarse una lista infinita de instancias del esquema T mediante generalizaciones acerca de la verdad.

En el caso del lenguaje natural, sin embargo, no parece posible negar la universalidad semántica. La desilusión o desencantamiento respecto de una idea ingenua o pre-teórica del predicado verdad se da, pese a que quede claro que el requisito de que las nociones semánticas sean definidas metalingüísticamente corresponda sólo a los lenguajes formales. Aunque la gravedad sólo perdura junto al intento por sostener para el ámbito del lenguaje natural requerimientos o resultados que marcan estándares que sólo una definición formal, abstracta puede cumplir. En efecto, un frente de críticas hacia las elaboraciones de Tarski apuntan a lo poco que su definición recoge de las ideas intuitivas que se supone se hallan en la base del predicado.

El teorema prueba que para lenguajes formales clásicos, la definición del predicado, de la cual han de deducirse todas las instancias del esquema T, debe corresponder a un metalenguaje respecto del lenguaje al que pertenecen las sentencias de las que se predica. Entonces, o bien restringimos la aplicabilidad del esquema – una axiomatización de lo cual dieron Sheard y Friedman – o bien sostenemos su aplicabilidad pero debilitamos en alguna medida la lógica clásica para hacerle sitio.[48]

La jerarquía tarskiana de metalenguajes es la clave de la solución y a la vez la evidencia más fuerte en contra de la admisibilidad de la caracterización resultante del predicado verdad. Numerosas críticas de distinto tipo se dirigen en contra de esta

---

[48] H. Field (2006)

medida y de sus resultados.[49] Como limitación formal, tenemos que la jerarquía tarskiana de lenguajes se definía en la literatura sólo para niveles *finitos*. Por otro lado, en cuanto a las intuiciones pre-formales que deja de lado la formalización de Tarski, vemos que un hablante corriente *no* añade subíndices (explícitos o implícitos) que determinen el "nivel de lenguaje" de sus emisiones que involucran el predicado "falso" o ("verdadero"). Además, y esta ha sido la crítica más repetida contra la jerarquía tarskiana, el bloqueo de la definición del predicado en el lenguaje objeto y su consiguiente resolución en una infinita cadena de niveles produce una fragmentación del predicado que parece contradecir toda nuestra intuición respecto del predicado del lenguaje natural.[50]

La literatura que exploraba alternativas al enfoque ortodoxo, esto es, que contemplaba la posibilidad de dejar de lado la bivalencia y aprovechaba la (relativa) libertad resultante de este relajamiento de los estándares de los lenguajes formales, consiguiendo así soluciones alternativas al desafío de PM, acordaba en que hay un solo predicado "verdad", aplicable a enunciados que contienen el mismo predicado.[51] Un interesante conjunto de trabajos se aglutinó alrededor de la noción de *gaps,* huecos en los valores de verdad, un paradigma de interpretación de la trivalencia surgido entre los años ´60 y ´70.[52] En estos trabajos, la paradoja se evitaba aduciendo que la contradicción en la sentencia implicaba una falla en la referencia, fregeanamente entendida. Así como la sentencia "El actual rey de Francia es calvo" no refiere a ningún valor de verdad pero aun así tiene sentido (no es un sinsentido), la sentencia del Mentiroso tampoco refiere a ningún valor, pero no es un sinsentido.[53] Al existir un hueco entre la extensión y la antiextensión del predicado verdad, se niega la bivalencia, principio esencial en la derivación de la paradoja.

Sin embargo, no basta con diagnosticar el fenómeno tras la paradoja de esta manera, ni es suficiente adherir a este paradigma semántico. Respecto de los logros de Tarski, es necesario formular una teoría formal, una definición matemática del predicado que tome este rumbo distinto. van Fraassen (1966) y Martin y Woodruff (1975) son

---

[49] Recogemos aquí particularmente las señaladas por S. Kripke (1975)

[50] "(…) Surely our language contains just one word 'true', not a sequence of distinct phrases $\ulcorner true_n \urcorner$, applying to sentences of higher and higher levels. As against this objection, a defender of the orthodox view (if he does no dismiss natural language altogether, as Tarski inclined to do) may reply that the ordinary notion of truth is systematically ambiguous (…)" S. Kripke (1975)

[51] Cf. B. van Fraassen (1966), (1968) y R. Martin (1970)

[52] B. van Fraassen (1966), (1968) y R. Martin (1970), H. Herzberger (1966), (1967), (1970), B. Skyrms (1970)

[53] S. Kripke señala como antecedente en este sentido a P. Strawson (1950).

referidos por Kripke como antecedentes en la misma dirección que él elaboró, pero en ellos sólo se virtieron críticas hacia Tarski y algunas ideas generales alrededor de la semántica parcial. Veremos a continuación una exposición de la teoría de Kripke, reconociendo sus virtudes formales e indicando algunas de sus limitaciones.

2 Abandono de la jerarquía: Kripke

Ante la evidencia de que no puede encontrarse un criterio *intrínseco* que identifique los enunciados que conducen a paradojas, para eventualmente eliminarlos en razón de estar mal formados o no tener sentido, es necesario encontrar una teoría de la verdad – basada en matrices ya no bivalentes – que permita mediante la semántica y no la sintaxis distinguir y apartar los enunciados problemáticos.

De la jerarquía tarskiana de lenguajes se desprende una familia de predicados verdad, una jerarquía inamovible y determinada que salvaguarda los rasgos de los lenguajes clásicos del riesgo de las interpretaciones autorreferenciales, semánticamente cerradas. Sin embargo, la fragmentación del predicado en esta cadena o sucesión parece alejarse bruscamente de la noción general, pre-formal del predicado verdad que se desprende mayormente de su uso en los lenguajes naturales. Además, la imposición de una jerarquía de predicados indexados sugiere la imagen de la evaluación de sentencias que implican predicaciones de verdad como un proceso uniforme, ordenado y predecible.

Por otra parte, las producciones e intentos de caracterización del predicado surgidos como respuesta a las implicaciones de la teoría de Tarski adolecían, según Kripke, de una importante y notoria falencia: no se trataba de definiciones matemáticas ni de teorías formales acerca del predicado revisado a partir de la noción tarskiana. Hubo esbozos, objeciones y descripciones, pero ya no definiciones matemáticas. Tal pérdida, según el autor, dejó a esa tradición parada en terreno mucho menos preciso y poco provechoso desde el punto de vista del estudio de las propiedades formales de las teorías.

En su "Esbozo de una Teoría de la Verdad", Kripke halla una opción frente al desafío planteado por el teorema de indefinibilidad, apartándose primeramente de uno de los rasgos presentados por los lenguajes estudiados por Tarski: la bivalencia. A partir de esto, y gracias a la construcción de una semántica parcial montada sobre el esquema de evaluación dado por las matrices fuertes de Kleene, consigue dar con un modelo que dé sentido a una idea que, según él, no se había formalizado hasta el momento: la de *groundedness*, o que las sentencias sean *fundadas*. Caracteriza así formalmente el comportamiento de enunciados considerados desde el punto de vista semántico como *infundados*, siendo este el caso tanto de sentencias paradójicas (como la del Mentiroso o las versiones cíclicas) como de sentencias que predican de sí mismas la verdad. De este modo, decir que un enunciado es paradójico se convierte en un término técnico que señala el hecho de que en ningún momento pueda dársele una evaluación estable o fija. Con esto se consigue modelar matemáticamente mediante una cadena de puntos fijos los diferentes momentos de evaluación de un enunciado cuya verdad se evalúa por referencia a otro/s.

A continuación hacemos una presentación estándar de los rasgos más destacables de la construcción del lenguaje de puntos fijos. La reconstrucción que haremos podrá ser completada en sus detalles técnicos remitiéndose el lector al apéndice A, donde figura una traducción del artículo de M. Fitting "Notes on the Mathematical Aspects of Kripke's Theory of Truth". Si bien en ese artículo no se emplean aproximaciones transfinitas para establecer la existencia del mínimo punto fijo sino conjuntos saturados, se trata de una completa exposición de elementos imprescindibles para una genuina comprensión de la teoría de Kripke en su complejidad matemática y no sólo en su relevancia filosófica, opción que en repetidas ocasiones se toma por la complejidad de algunos de los teoremas implícitos en la teoría de la verdad elaborada sobre puntos fijos.

2.1 Breve presentación

La teoría de la verdad de Kripke no es la única que hizo pie en la construcción y aprovechamiento de las propiedades de los puntos fijos.[54] No obstante, puede que a partir del trabajo de Kripke se haya comenzado a estudiar la relevancia filosófica de estas construcciones dentro de la lógica y de las disciplinas formales, así como también puede haber explotado la investigación matemática de esta clase particular de objetos.

De manera no muy técnica pero introductoria, podría resumirse el sentido intuitivo de los puntos fijos como sigue. En un lenguaje de puntos fijos *L*h (un lenguaje *L* extendido mediante la adición de un predicado V, un modelo M que contenga una interpretación para V, y un esquema de valuación que puede ser el de las matrices fuertes de Kleene), V es un predicado Verdad. Esto significa que *si* V tiene la interpretación h, *entonces* es un predicado Verdad de *L*h: V es verdadero (falso)

[54] H. Gaifman (2006), entre otros, ha estudiado de manera exhaustiva las características de los lenguajes de puntos fijos.

precisamente de las verdades (falsedades) de *L*h, siendo así coextensivo con el concepto "enunciado verdadero de *L*h". Esto no quiere decir que V haya *significado* "verdadero" (si hubiese *expresado* el concepto de verdad), entonces su interpretación habría sido h. Los puntos fijos no revelan la interpretación de la verdad de manera absoluta. Sólo revelan cuál sería la interpretación de la verdad bajo el supuesto acerca de la interpretación de V.

Si un enunciado dice que todos, algunos, muchos, etc. de los enunciados de una cierta clase *C* son verdaderos, su valor de verdad puede sostenerse si los valores de verdad de las sentencias en la clase *C* pueden sostenerse. Si algunas de estas sentencias involucran ellas mismas la noción de verdad, su valor de verdad debe en cambio sostenerse observando *otras* sentencias, y así sucesivamente. Si en última instancia este proceso concluye en enunciados que no mencionan el concepto de verdad, de manera que el valor de verdad del enunciado original pueda sostenerse, llamamos al enunciado original *fundado*. De otro modo, lo llamamos *infundado*.

A fin de dar lugar a una semántica que contemple casos de huecos de verdad, se parte de que las sentencias expresan proposiciones. De tal manera, las sentencias *gappy* son aquellas que no expresan una proposición (aunque sí pueda tener sentido básico lo que se sostiene).

Sea *L* un lenguaje de primer orden interpretado de tipo clásico, con una lista finita (o numerable) de predicados primitivos. Se asume que las variables varían sobre un dominio no vacío D, y que los predicados primitivos n-arios son interpretados por relaciones n-arias (totalmente definidas) sobre D. Asumamos además que *L* es tan rico como para que pueda expresarse en él (por aritmetización) la sintaxis de *L* mismo, y que mediante algún código pueden expresarse secuencias finitas de elementos de D mediante elementos de D.[55]

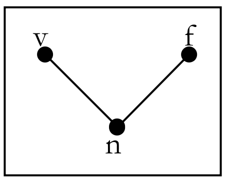
Supóngase que extendemos el lenguaje *L* a $\mathcal{L}$ agregando el predicado monádico $V(x)$, cuya interpretación sólo está parcialmente definida. La interpretación de $V(x)$ está dada por un "conjunto parcial" (S_1, S_2), donde S_1 es la *extensión* de $V(x)$, S_2 es la *antiextensión* de $V(x)$, y $V(x)$ no está definida para entidades fuera de $S_1 \cup S_2$. Sea $\mathcal{L}(S_1, S_2)$ la interpretación de $\mathcal{L}$ que resulta de interpretar $V(x)$ mediante el par (S_1, S_2), quedando la interpretación del resto de los predicados de *L* como antes. Sea S_1' el

[55] Cf. A. Gupta (2001).

conjunto de (códigos de) enunciados verdaderos de $\mathcal{L}(S_1, S_2)$, y sea S_2' el conjunto de todos los elementos de D que o bien no son (códigos de) enunciados de $\mathcal{L}(S_1, S_2)$, o bien son (códigos de) enunciados falsos de $\mathcal{L}(S_1, S_2)$. S_1' y S_2' se determinan unívocamente mediante la elección de (S_1, S_2). Si se interpreta $V(x)$ como la verdad para el lenguaje que contiene $V(x)$, debemos tener que $S_1 = S_1$' y $S_2 = S_2$' (A satisface – falsifica- $V(x)$ sii A es verdadera – falsa – por las reglas de evaluación.

Un esquema apropiado para caracterizar conectivas en este entorno parcial es la lógica trivalente fuerte de Kleene[56]. $P(t_1, \ldots, t_n)$ es verdadero en el modelo D si y sólo si la secuencia de objetos $d_1, \ldots, d_n$ denotada por los términos pertenece a la extensión del predicado. Un enunciado es falso sii $d_1, \ldots, d_n$ pertenece a la antiextensión del predicado; de otro modo, el enunciado no es ni verdadero ni falso. Las conectivas $\wedge$ (conjunción) y ~ (negación) expresan las siguientes funciones:

Dos propiedades de este esquema de Kleene son fundamentales para la construcción de los puntos fijos: por una parte, este esquema respeta la semántica clásica (si los valores son **v** o **f,** los clásicos, la valuación resultante es la misma que la del cálculo proposicional estándar); por otra parte, tiene la propiedad de monotonía. Impóngase sobre el conjunto de valores {**v,f, n**} el siguiente orden de información ≤: **n** ≤ **t**, **n** ≤ **f**, y sean **v** y **f** incomparables. Se establece así un orden de información sobre las interpretaciones de los predicados.



$\sim\mathbf{f} = \mathbf{t}$

$\sim\mathbf{n} = \mathbf{n}$

$\sim\mathbf{v} = \mathbf{f}$

$(\mathbf{v} \wedge \mathbf{v}) = \mathbf{v}$

$(\mathbf{n} \wedge \mathbf{v}) = (\mathbf{v} \wedge \mathbf{n}) = (\mathbf{n} \wedge \mathbf{n}) = \mathbf{n}$

$(\mathbf{val} \wedge \mathbf{f}) = (\mathbf{f} \wedge \mathbf{val}) = \mathbf{f} \qquad \forall \mathbf{val} \in \{\mathbf{v,f,n}\}$

Consideramos en principio una determinada "jerarquía de lenguajes". Definimos en principio el lenguaje interpretado $\mathcal{L}_0$ como $\mathcal{L}(\varnothing, \varnothing)$: en $\mathcal{L}_0$ el predicado $V(x)$ está completamente indefinido. Para cualquier número α, supóngase que hemos definido $\mathcal{L}_\alpha = \mathcal{L}(S_1, S_2)$. Luego $\mathcal{L}_{\alpha+1} = \mathcal{L}(S_1', S_2')$. Hasta aquí, la jerarquía de lenguajes se asemeja

[56] Kripke trabaja también con la semántica de supervaluaciones de van Fraassen.

bastante a la tarskiana, siendo que $V(x)$ se interpreta en $\mathcal{L}_{\alpha+1}$como el predicado verdad para $\mathcal{L}_{\alpha}$. Sea que (S_1^+, S_2^+) *extiende* (S_1, S_2) $((S_1, S_2) \leq (S_1^+, S_2^+)$, $S_1 \subseteq S_1^+$ y $S_2 \subseteq S_2^+)$. Intuitivamente, puede verse que la interpretación de $V(x)$ en (S_1^+, S_2^+) concuerda con la dada en (S_1, S_2), pero para algunos casos indefinidos en (S_1, S_2), la interpretación de $V(x)$ sí está definida en (S_1^+, S_2^+).

Dado un modelo M que es una dupla compuesta de un dominio y de una interpretación, <D, I>, y dadas dos valuaciones h, h' $\in D_n \rightarrow \{\mathbf{v}, \mathbf{f}, \mathbf{n}\}$. h $\leq$ h' sii, para todo $d_1, \ldots, d_n \in D_n$, $h(d_1, \ldots, d_n) \leq h'(d_1, \ldots, d_n)$. Un modelo M' (<D', I'>) es tan informativo como M sii D=D', tanto I como I' asignan las mismas interpretaciones a nombres y símbolos de función, y para todo predicado P, I(P) $\leq$ I´(P). La propiedad de monotonía dice que si M $\leq$ M', entonces los enunciados que son verdaderos (falsos) en M son también verdaderos (falsos) en M'. A medida que se avanza sobre modelos más informativos, nunca hay cambios de valores clásicos anteriores.

Expresado de otra forma, sea H = D $\rightarrow \{\mathbf{v}, \mathbf{f}, \mathbf{n}\}$. Para A, B $\subseteq$ D y A$\cap$B =$\emptyset$, sea (A, B) el único miembro h de H tal que A = {d $\in$ D: h(d)=**t**} y B = {d $\in$ D: h(d)=**f**}. Defínase una función φ sobre H tal que φ(h) = (A', B'), donde A' es el conjunto que contiene los enunciados verdaderos de *L*h, y B' es el conjunto que contiene los enunciados falsos y así como las fórmulas (no enunciados) de *L*h. Nótese que h es un *punto fijo* de φ (φ(h) = h) sii $V(x)$ es el predicado verdad de *L*h. Por el esquema escogido, φ siempre tiene puntos fijos.

Un par (S_1, S_2) que satisface esta condición se llama un *punto fijo*. Para un determinado par (S_1, S_2) escogido para interpretar $V(x)$, sea $\varphi((S_1, S_2)) = (S_1', S_2')$. φ es una función unaria definida sobre todos los pares (S_1, S_2) de conjuntos disjuntos de D, y los "puntos fijos" (S_1, S_2) son literalmente los puntos fijos de φ; son los pares (S_1, S_2) tales que $\varphi((S_1, S_2)) = (S_1, S_2)$. Si (S_1, S_2) es un punto fijo, llamamos punto fijo también a $\mathcal{L}(S_1, S_2)$ por extensión. A partir de aquí, se demuestra la existencia de puntos fijos, lo cual garantiza la confiabilidad de esta clase de lenguajes para su aplicación a la interpretación del predicado verdad.

Dada la monotonía de φ, puede decirse que para cada α, la interpretación de $V(x)$ en $\mathcal{L}_{\alpha+1}$ extiende la dada en $\mathcal{L}_{\alpha}$. Esto es obvio en el caso de que α=0, ya que $V(x)$

es indefinida para toda x. Supóngase que esto se da para $\mathcal{L}_\beta$ - que la interpretación de $V(x)$ en $\mathcal{L}_{\beta+1}$ extiende la dada en $\mathcal{L}_\beta$. Por lo tanto, y observando las definiciones, $\mathcal{L}_{\beta+2}$ extiende la interpretación de $V(x)$ dada en $\mathcal{L}_{\beta+1}$. Se ha demostrado así por inducción que la extensión y la antiextensión de $V(x)$ crecen a medida que α lo hace, para todos los casos finitos. A medida que α aumenta, más enunciados son declarados verdaderos o falsos. Pero una vez que un enunciado ha sido declarado verdadero o falso, retiene tal valor de verdad en todos los niveles más altos. Esto mismo puede demostrarse para niveles transfinitos en la jerarquía. Sea $\mathcal{L}_\omega$ tal nivel; $S_{1\omega}$ (la unión de todos los $S_{1\alpha}$ para los α finitos) la extensión y $S_{2\omega}$ (de igual manera para $S_{2\alpha}$) la antiextensión. Al llegar a un nivel "límite", tomamos nuevamente la unión.

Si λ es un ordinal límite[57], $\mathcal{L}_\lambda=\mathcal{L}(S_{1\lambda}, S_{2\lambda})$, donde $S_{1\lambda}=\bigcup_{\beta<\lambda} S_{2\beta}$ y $S_{2\lambda}=\bigcup_{\beta<\lambda} S_{2\beta}$. En cada nivel sucesivo se toma el predicado verdad del nivel anterior, y para niveles límite (transfinitos) se toma la unión de todos los enunciados verdaderos o falsos anteriormente declarados. ¿En algún momento se detiene este proceso? ¿Hay un nivel σ tal que $S_{1\sigma}=S_{1\sigma+1}$, de manera que no se declaren nuevos enunciados verdaderos o falsos en niveles sucesivos? Puesto que los enunciados en $\mathcal{L}$ forman un conjunto, en algún momento agotamos $\mathcal{L}$ y ya no hay más enunciados sobre los cuales decidir. Hay un nivel σ tal que $(S_{1\sigma}, S_{2\sigma})=(S_{1\sigma+1}, S_{2\sigma+1})$. Como $(S_{1\sigma+1}, S_{2\sigma+1})=\varphi(S_{1\sigma}, S_{2\sigma})$, entonces $(S_{1\sigma}, S_{2\sigma})$ es un *punto fijo*. Puede demostrarse además que es un punto fijo mínimo o minimal.

Una sentencia A de $\mathcal{L}$ es *fundada* si tiene un valor de verdad en el mínimo punto fijo $\mathcal{L}_\sigma$. Si A es *fundada*, defínase el nivel de A como el mínimo ordinal σ tal que A tiene un valor de verdad en $\mathcal{L}_\sigma$. Los enunciados que llegan a ser *fundados* eventualmente obtienen un valor de verdad en un proceso de clarificación, de sucesiva asignación de valores a enunciados que se conectan con otros por involucrar el predicado verdad. Si contiene teoría o sintaxis de números, no hay problema en construir enunciados de Gödel que "dicen de sí mismos" ser verdaderos o falsos: se muestra mediante el modelo que todos ellos son *infundados*. Un enunciado es *paradójico* si no tiene un valor de verdad

[57] A partir de los aportes de Von Neumann a la teoría de conjuntos, un conjunto x es un *ordinal* sii x es transitivo (si $a\in b$ siendo que $b\in x$, entonces $a\in x$) y la relación de pertenencia restringida a $x = \{y | y\in x\}$ es una buena ordenación de x. Un ordinal *límite* es un ordinal sin un predecesor inmediato. Cf. J. Floyd; A. Kanamori (2006).

en ningún punto fijo; si A es paradójico, entonces si $\varphi((S_1, S_2)) = (S_1, S_2)$, A no es un elemento de S_1 ni de S_2.

Empleando el lema de Zorn[58] (cualquier conjunto no vacío parcialmente ordenado en el que todo subconjuntos totalmente ordenado tenga una cota superior contiene al menos un elemento maximal), puede demostrarse que todo punto fijo puede extenderse a un punto fijo maximal (un punto fijo que no tiene una extensión propia que también sea un punto fijo). En él se asignan tantos valores como es posible. Las sentencias que dicen de sí mismas tienen un valor de verdad en un punto fijo maximal; por ello son *infundadas* y no *paradójicas*.

Claramente, se ha dado una teoría: cualquier lenguaje (incluidos los que contengan teoría de números o sintaxis) pueden extenderse a un lenguaje con su propio predicado verdad, y el concepto de verdad se define matemáticamente mediante tecnicas conjuntistas. No presentan problemas los lenguajes con niveles transfinitos en la jerarquía.

2.2 Falencias de la definición de Kripke

¿Qué hay del objetivo general que se propone Kripke en su esbozo? ¿Acaso logra dar con un lenguaje que sea capaz de expresar su propio predicado Verdad, tal como el lenguaje natural? Puede decirse que, parcialmente, lo consigue. Sin embargo, "el fantasma de la jerarquía de Tarski" reaparece, o más bien, nunca se ha ido. Aunque sea posible construir lenguajes de puntos fijos que saturen y den en un nivel transfinito un predicado verdad interno, la riqueza expresiva necesariamente ha de ser limitada. Puesto de otro modo, decimos que el objetivo se consigue parcialmente porque la reproducibilidad de la riqueza expresiva de los lenguajes naturales en lenguajes formales

[58] Este puede ser un esquema de prueba del lema de Zorn. Supóngase que el lema es falso. Entonces existe un conjunto parcialmente ordenado P tal que todo conjunto completamente ordenado tenga una cota máxima, y que para todo elemento haya uno mayor. Para todo subconjunto completamente ordenado T, podremos definir un elemento mayor b(T), puesto que T tiene una cota máxima, y tal cota máxima tiene un elemento mayor. Para realmente definir la función b, es necesario emplear el axioma de elección.
Usando la función b, definiremos elementos $a_0 < a_1 < a_2 < a_3 < \ldots$ en P. Esta secuencia es realmente larga: los índices no son sólo los números naturales, sino todos los ordinales. En efecto, la secuencia es demasiado larga para el conjunto P; hay demasiados ordinales, más que elementos en cualquier conjunto, y el conjunto P será agotado, y así llegaremos a la contradicción buscada.
Los *a*'s son definidos por inducción transfinita: tomamos a_0 en un P arbitrario (esto es posible ya que P tiene una cota máima para el conjunto vacío, y por ello no está vacío), y para cualquier ordinal w decimos que $a_w = b(\{a_v : v < w\})$. Puesto que a_v están totalmente ordenadas, esto funciona correctamente. Cf., entre otras fuentes, E. W. Weisstein (2006).

tales como los que Kripke emplea es por definición imposible. La universalidad semántica es un rasgo excluido por definición de los lenguajes formales como los de la matemática y la lógica: corresponde la lenguaje de puntos fijos un teorema de limitación expresiva que coarta inmediatamente la posibilidad de descartar un metalenguaje de expresividad mayor.

> Las construcciones de puntos fijos funcionan… sólo cuando los lenguajes son expresivamente débiles – i.e., sólo cuando ciertas nociones lógicas o sintácticas no son expresables en ellos. El problema fundamental planteado por las paradojas – el problema de interpretar la verdad en lenguajes ricos – pues, perdura. [59]

Analizamos a continuación un predicado en particular que no es expresable en el lenguaje-objeto definido por Kripke, pero que no sólo tiene sentido intuitivo, sino que además puede articularse desde el metalenguaje. Correspondiendo a esta limitación, encontraremos también una nueva versión de PM, que ejemplifica una vez más la patente relación entre teoremas de limitación expresiva y paradojas semánticas.

2.2.1 Inexpresabilidad del complemento de la verdad

Según el mismo Kripke expresara en las páginas finales de su célebre artículo, la teoría de la verdad que construye adolece de una limitación infranqueable: la inexpresabilidad del complemento de la verdad, de un predicado "No Verdadero" (NV) que abarque el caso en que un enunciado no obtenga un valor verdadero según la valuación escogida, esto es, que sea falso o carezca de valor.

El enfoque de Kripke permite construir un predicado para la verdad y para la satisfacción contenido dentro del mismo lenguaje en el que se predican. Hasta aquí, parece que la esperanza de sostener la universalidad semántica propia de los lenguajes naturales halla sustento. Sin embargo, pronto se ve que no es posible. En primer lugar, la inducción que define el punto fijo minimal se lleva a cabo en un metalenguaje de teoría de conjuntos, no en el lenguaje objeto mismo. En segundo lugar, hay aserciones acerca del lenguaje objeto que no pueden hacerse en el lenguaje objeto mismo. Tal es el caso, por ejemplo, si consideramos que el enunciado del Mentiroso es NV en el lenguaje objeto, en el sentido de que el proceso inductivo nunca los hace verdaderos; pero nos

[59] A. Gupta (2001).

vemos impedidos de decir esto en el lenguaje objeto por la interpretación de la negación y del predicado verdad adoptadas.

Se descarta de esta manera la posibilidad de interpretar el punto fijo minimal como un modelo del lenguaje natural, ya que es imposible que un hablante de ese lenguaje pueda, valiéndose del modelo del punto fijo, asignar un valor a un enunciado que – como notamos de inmediato – tiene sentido y es candidato a obtener un valor desde un punto de vista más general. La necesidad de apelar a un metalenguaje puede, así, considerarse como una debilidad de la teoría de Kripke. El fantasma de la jerarquía de Kripke sigue entre nosotros (Kripke *dixit)*.

El metalenguaje en el cual se escribe el artículo de Kripke no contiene huecos (gaps) de valores. Una sentencia tiene o no tiene un valor de verdad en un punto fijo dado. Nociones semánticas como *fundado, paradójico*, etc. pertenecen al metalenguaje. Si resignamos el objetivo de un lenguaje universal, modelos como el de Kripke son modelos plausibles del lenguaje natural en la etapa anterior a aquella en la cual reflexionamos acerca del proceso de generación asociado con el concepto de verdad, la etapa en la que se da el discurso de los hablantes ordinarios ("no filosóficos" o "no reflexionantes").[60]

Los enfoques de definición parcial del predicado mediante semánticas parciales no ha de ser descartados por su imposibilidad de hacer frente al objetivo de conseguir un lenguaje universal: este objetivo debería descartarse de plano, para cualquier caracterización formal de un lenguaje, desde su sintaxis o su semántica. Han de observarse, en cambio, los méritos que esta perspectiva tiene respecto de las teorías ortodoxas en lo que concierne a la "naturalidad" del lenguaje resultante, esto es, en el éxito en reproducir algunos rasgos que presentan determinados predicados en los lenguajes naturales.

[60] Sin embargo, esto equivale a decir que sólo una perspectiva ingenua acerca de los límites de los lenguajes formales tales como el de puntos fijos puede sostenerlos. Quizás sea mejor reconocer las limitaciones, convivir con ellas, partiendo de la base de que los lenguajes formales son intrínsecamente limitados.

2.2.2 Presentación diagonal

Análogamente respecto de la teoría de la verdad de Tarski, obtenemos aquí nun teorema de limitación expresiva para los lenguajes de puntos fijos. [61] Queda demostrado en lo que sigue que no es posible expresar en estos lenguajes el predicado NV, correspondiente a la idea intuitiva del complemento del predicado Verdad, que en la definición kripkeana abarca no sólo las sentencias falsas, sino también las *gappy*.

Teorema de limitación para lenguajes de puntos fijos

D_1 es el conjunto de fbfs con sólo una variable libre de $\mathcal{L}$

D_2 es el conjunto de los números naturales

R (x, y) = 1, si x es verdadera de la sentencia cuyo número de Gödel es y
0, si x no es verdadera (es falsa o indefinida) de la sentencia cuyo número de Gödel es y

F es la diagonal que lleva a cada fbf en D_1 a su propio número de Gödel en D_2

H (el contravalor de F) es
H (x, y) = 1, si x no es verdadera (es falsa o indefinida) de sí misma, del número de Gödel y de la sentencia x
0, si x es verdadera de sí misma, del número de Gödel y de la sentencia x

H muestra que ninguna fbf de $\mathcal{L}$ es verdadera exactamente de los números de Gödel de sentencias no verdaderas (falsas o indefinidas) de sus propios números de Gödel. De este modo, queda demostrado que no es posible definir este predicado en $\mathcal{L}$. Veremos a continuación de qué modo puede reaparecer la paradoja si se ignora la limitación de estos lenguajes, planteando el argumento diagonal sin partir de un supuesto que vayamos a descartar.

[61] Cf. K. Simmons (1993), Cap. 3.

2.3 Retorno a la paradoja: el Mentiroso Reforzado

En este marco, ha sido de particular interés la llamada "paradoja del Mentiroso Reforzado" - PMR, de aquí en adelante - (o, como sugiere Burge de manera más gráfica[62], mentiroso Persistente), puesto que constituye una objeción clara a las propuestas anteriores de semánticas que lograban resolver la paradoja original.[63] La construcción de esta "revancha" de PM se erige a partir de alguna forma de resolver la antinomia que recurra al abandono de la bivalencia. Sobre esta base, y a partir de reinterpretar la paradoja tradicional a la luz de esta nueva semántica (ya sea trivalente, desde la ausencia de valores o desde los *gluts* de valores) se deduce que el enunciado problemático no es verdadero. Pero esto es justamente lo que el enunciado dice; por lo tanto, es verdadero. Luego, el enunciado nuevamente no es verdadero y es verdadero.

Las siguientes son posibles formulaciones de PMR:

λ es falsa

λ no es verdadera

λ no es verdadera o es paradójica

λ es falsa o no es ni verdadera ni falsa

λ es falsa o es verdadera y falsa

λ es falsa o indefinida

λ no es determinadamente verdadera

λ no es una verdad semánticamente estable

λ_Γ no es verdadera en el contexto Γ

λ no es verdadera en ningún nivel de la jerarquía (de lenguajes, de contextos)

Si bien se trata de sentencias que involucran semánticas diversas, todas pueden derivarse mediante un mismo esquema de prueba. Veamos primero la que consideramos la forma más sencilla del Mentiroso Reforzado. Si analizamos:

(λ) λ no es verdadera

---

[62] T. Burge (1979).

[63] cf. B. van Fraassen (1968), B. Skyrms (1970a), (1970b), D. Ushenko (1941).

desde una semántica que no la considere ni verdadera ni falsa, se sigue intuitivamente que λ no es verdadera. Pero eso es precisamente lo que λ dice. Al parecer, se afirma lo que acaba de declararse carente de valor. Por ello, parece que deberíamos afirmar, después de todo, que "λ no es verdadera" es verdadera. Es importante recalcar el carácter intuitivo de este razonamiento.

El mentiroso Reforzado es más una familia de problemas que una paradoja en particular. Incluso es sindicada por varios autores como la misma PM, sólo que en una presentación menos dirigida hacia el socavamiento de las teorías ingenuas en particular, sino más bien presentada contra cualquier (?) distinción entre falsedad y alguna otra clase de falla en la verdad (*gap, glut,* dialetismo, etc.) De allí la gravedad de su reaparición:

> La imposibilidad de resolver el Mentiroso Reforzado no es una dificultad de detalles o un simple traspié en una solución. Es un fracaso en dar cuenta del fenómeno básico. [64]

Recuérdese que uno de los requisitos de una solución aceptable de las paradojas era que fuera completa, por lo que la regeneración de la paradoja a partir de reinterpretar la extensión y antiextensión del predicado verdad en la paradoja original no ya como exhaustivos es en realidad una indicación de que el diagnóstico original no fue certero y la solución construida, insuficiente.[65]

1. **(λ) λ no es verdadera**	
2. $\lambda \notin S_{1\sigma} \wedge \lambda \notin S_{2\sigma}$	Por la construcción de $\mathcal{L}_\sigma$
3. λ no es verdadera	Descripción metalingüística de la valuación en $\mathcal{L}_\sigma$.
4. "λ no es verdadera" es verdadera	Por un ascenso semántico entre 1 y 3 ($p \leftrightarrow V$("p"))
5. λ es verdadera	Por 1 y 4
6. λ es verdadera y λ no es verdadera	Por 3 y 5

Para varios autores[66] hay una especie de equívoco, de argumento falaz en esta derivación, ya que primero interpretamos *NV* dentro del lenguaje objeto, cuando evaluamos 1, pero luego lo interpretamos metalingüísticamente, observando algo acerca de la evaluación hecha en 3. Si bien esta observación respecto del significado del

[64] T. Burge (1979).
[65] Cf. S. Haack (1978), J. Barwise y J. Etchemendy (1987).
[66] C. Gauker (2006), entre otros.

predicado *NV* ha de atenderse, teniendo en cuenta que hemos de evaluar la corrosividad de la inferencia de una (nueva) paradoja respecto de la solidez de una teoría de la verdad particular, encontramos algunos motivos para relativizarla. En primera medida, la posibilidad de que haya un equívoco, de que se interprete al predicado verdad como parcial y, a raíz de ello, que haya desplazamientos semánticos en el curso de la inferencia, es el fenómeno que procuramos evitar o explicar mediante el establecimiento de una definición formal (clara, exhaustiva y deductiva) del predicado. Además, aun si se tratara de una falacia y no de un genuino argumento, se trata de un fenómeno digno de atender, ya que es un síntoma de que no se dio una buena solución a PM.

2.3.1 Presentación diagonal

PMR:

(λ) λ no es verdadera

(λ) Si λ es paradójica (y carece de valor en una semántica parcial*),* entonces no es verdadera. Luego, λ es verdadera

L es un lenguaje autorreferencial parcialmente interpretado

S es el conjunto de sentencias de *L*

D_1 es el conjunto de predicaciones de verdad de sentencias de S

D_2 es el conjunto de sentencias de S

R(x,y) es 1 sii V("s") en D_1 es verdadera para la sentencia p en D_2
0 sii V("s") es falsa o indefinida para p en D_2

F lleva a cada predicación en D_1 a las sentencias de las cuales predican la verdad en D_2

H es 1 sii V("s") es falsa o indefinida para s
0 sii V("s") es verdadera para s

¿Cómo ha de evaluarse λ en esta semántica? V("λ") no es verdadero de λ - esto es lo que se busca al escoger una semántica trivalente que permita contemplar *gaps*. Pero H prohibe exactamente la clase de comportamiento que exhibe la evaluación de λ. Luego, caemos nuevamente en la contradicción.

2.3.2 ¿Qué efecto tiene la paradoja sobre la teoría de Kripke?

Puesto que ya hemos demostrado que el predicado *NV* no puede definirse en los lenguajes de puntos fijos de Kripke, debería resultar inmediato que PMR no atenta contra la consistencia de tal teoría de la verdad, sino más bien a su aplicabilidad. No hallaremos inconsistencias internas por ser capaces de demostrar PMR, pero sabemos que la teoría tiene una limitación inmediata respecto de una noción intuitivamente significativa.[67]

Reforzamos con esto la interpretación de las paradojas en relación con los teoremas de limitación expresiva. PMR no atenta directamente contra la teoría de la verdad de Kripke, sino que pone de manifiesto el resultado de una posible subestimación de los límites expresivos del lenguaje que define. La presentación diagonal de PMR exhibe claramente esta interpretación, o al menos eso se pretende.

¿Qué hacer con PMR? Así como Tarski concibió y definió el predicado verdad jerárquico atendiendo al síntoma de PM, una actitud similar puede tomarse frente a PMR respecto de los lenguajes de puntos fijos. Es posible explorar opciones que encuentren una alternativa a la paradoja y que definan formalmente una teoría más compleja y un predicado enriquecido.

[67] Cf. M. Glanzberg (2001a), (2004a).

3 La noción de contexto como clave de resolución

El contextualismo relacionado con la reflexión lógica y filosófica apareció hace ya más de cuatro décadas, y desde su ingreso no ha cejado de aportar modos ricos y flexibles de permear teorías y modelos de una dimensión básicamente pragmática. La tendencia anterior a esta corriente, lo que podría llamarse una postura clásica en lógica y filosofía del lenguaje formal, aspiraba a conseguir modelos tan generales como fuera posible, rehuyendo y aun condenando particularismos o aspectos específicos de los conceptos involucrados. La inserción de la dimensión contextual ha permitido rescatar algo de la complejidad de la representación de fenómenos más reales de una imagen simplista y abstracta por demás en numerosos ámbitos.

Bastará mencionar algunos de los terrenos sobre los cuales se han aplicado formalizaciones lógicas de contextos: en Inteligencia Artificial[68], en la unificación de ontologías para su uso en bases de datos de *common sense* para computadoras[69], en la adaptación de algoritmos en el ámbito del *machine learning*[70], en el procesamiento del lenguaje natural que sostiene modelos con información adyacente o *background*[71], en los modelos de procesos cognitivos de categorización[72], en representación de conocimiento y de razonamiento[73], etc. Semejante variedad de ámbitos de aplicación de los contextos como instrumento teórico responde principalmente, según creemos, al carácter formal de la acepción que interesa a los estudios lógicos: un contexto es un conjunto de elementos cualesquiera. Cuáles sean tales objetos o elementos depende enteramente del objetivo teórico que motive la formalización de tal noción.

La variedad de aplicaciones del término "contexto" se plantea como cuestión teórica prácticamente en todas las producciones que lo involucran. Se ha sugerido que se hable de un "parecido de familia" de las diversos usos y acepciones que pueden encontrarse en la literatura[74]. La maleabilidad del concepto ha hecho sospechar en numerosas ocasiones de su solidez. El hecho de que según varios no pueda determinarse si algo es un contexto más que por sus efectos, y también que prácticamente cualquier cosa sea en principio un contexto, ha hecho dudar incluso de que esta noción pueda

68 J. McCarthy y S. Buvac (1997).
69 D. Lenat (1998).
70 P. Brézillon (1999).
71 N. Asher y A. Lascarides (1995).
72 V. Akman y M. Surav (1996).
73 P. Bouquet; C. Ghidini; F. Giunchiglia; E. Blanzieri. (2003).
74 Citado en V. Akman y C. Bazzanella (2003).

definirse. Cabe señalar ante esto que no tener un criterio único de identificación de lo que pueda ser un contexto no equivale a ser incapaz de definirlo; parece estar en juego aceptar que el concepto de contexto se defina particularmente para cada situación o aplicación del mismo (esta "contextualidad del contexto" es según varios autores una insoslayable debilidad).

Si bien puede discutirse si el concepto de contexto es espurio[75] en razón de esta notoria variedad de caracterizaciones, debe aceptarse como manifiesto que no es posible especificar las características de los contextos sobre una base *a priori*[76] ni tener una teoría acerca de la naturaleza del contexto. La pregunta acerca de cómo caracterizar e individuar contextos debe ser posterior al conocimiento del objetivo teórico o campo de aplicación de tal noción. Los contextos son sólo (representaciones de) conjunto de hechos. Las distintas nociones de contexto no están en competencia, sino que sirven a fines diversos.

Probablemente pueda señalarse a J. McCarthy como el iniciador de esta heterogénea tradición. Sus estudios en el ámbito de la Inteligencia Artificial marcaron época, y aunque la noción de contexto que allí se introdujo es de corte netamente formal, en el sentido de ser una primitiva u objeto matemático abstracto e indefinido que se introduce como argumento en funciones ya establecidas, se trata al parecer del primer producto teórico que trabajaba alrededor de la noción de contexto.[77] A partir de esta caracterización como objetos o meros contenedores, la observación de la transferencia de conocimiento en el proceso que va del aprendizaje a la aplicación parece nutrirse de un componente contextual poderoso, sugerente y con fuerte sustento empírico. Si se considera su incidencia sobre estos procesos en la forma de un constante (y eficiente) cambio contextual y traslado de información entre contextos, puede comprenderse que no se observe en estas instancias cognitivas largas cadenas de inferencia explícita; al contrario, se dan con una espontaneidad y rapidez que sugieren la presencia de un marco, un *background* que sostiene estos procesos como soporte informacional.[78] Se definen las siguientes relaciones básicas dentro de este lenguaje contextual:

---

[75] Cf. G. Hirst (2000).
[76] Cf. B. Edmonds y V. Akman (2002).
[77] J. McCarthy y S. Buvac (1997).
[78] Cf. B. Edmonds y V. Akman (2002).

ist(*c, p*) significa que la proposición *p* es verdadera en el contexto *c*

value(*c, e*) desgina el valor del término *e* en el concexto *c*

Al introducir los contextos como objetos fomales, se permite que las axiomatizaciones en contextos limitados puedan expandirse para trascender estas limitaciones originales. Esto parece necesario para proveer a los programas de AI de los rasgos que ciertas capacidades que la representación de hechos y el razonamiento humano tienen. La actitud teórica que toman proviene de las ciencias de la computación o la ingeniería (no de la psicología, filosofia o la lingüística). No tienen la intención de describir los contextos completamente, sino sólo decir algo sobre ellos. A veces son objetos ricos, como las situaciones. Quizás sólo en el interior de ciertas microteorías es posible describir completamente los contextos (aunque en este caso son bastante más pobres que en otros).[79]

La caracterización del contexto tomando en consideración su comportamiento en los lenguajes naturales, si bien no es unívoca, parece presentar rasgos particulares. En lingüística, generalmente se distingue entre contexto lingüístico propiamente dicho, o cotexto, y contexto extralingüístico. La introducción del elemento contextual hace un aporte significativo en el estudio de la anáfora y del desarrollo de tópicos, esto es, no sólo en fenómenos estrictamente textuales (cohesivos), sino también argumentativos. En pragmática, Givon (1989) subdivide al contexto en tres focos: el genérico (mundo y cultura compartidos), el deíctico (situación conversacional, deixis, relaciones sociopersonales y teleología de los actos de habla) y el del discurso (textos anteriormente compartirdos, incluyendo proposiciones implícitas y explícitas y modalidades metaproposicionales).[80]

De modo menos formal, en los estudios de pragmática de Austin y Grice puede reconocerse también al contexto como concepto importante. La situacionalidad del discurso, la inmersión de las prácticas lingüísticas en una consideración teórica de su empiricidad dieron lugar a la aparición del contexto de discurso como categoría incipiente. La filosofía del lenguaje y la lingüística son quizás las fuentes más ricas de inspiración en la reflexión formal acerca de los contextos, aunque sin duda también se

[79] J. McCarthy and S. Buvac (1997).
[80] V. Akman y C. Bazzanella (2003).

consideran en este punto teorías o tradiciones más generales, como la que cimenta la teoría de situaciones de Barwise y Perry.[81]

Se observa a simple vista que la base teórica de la formalización de McCarthy, las bases de datos, son colecciones menos complejas y más estáticas que los contextos lingüísticos. Además, la intención en el trabajo de este autor y sus colaboradores apuntaba fundamentalmente a obtener axiomas que dieran lugar al *context lifting*, a la posibilidad de trasladar información de un contexto a otro. Si bien también puede trabajarse con esta operación sobre información perteneciente a distintos contextos lingüísticos, la base formal que los caracteriza es en principio demasiado abstracta o indefinida. Se ha remarcado el rol de los contextos en la reducción de ambigüedad, vaguedad e inespecificidad de términos o proposiciones. Tal es el caso, por ejemplo, de los indexicales. Por otra parte, el dominio y la interpretación de los cuantificadores pueden concebirse como contextualmente dependientes. La sensibilidad contextual es un concepto muy útil a la hora de explicar procesos de aprendizaje lingüístico, en cuanto éste se conecta fuertemente con el entorno de una u otra forma. En parte se explica también la gran eficiencia del lenguaje en uso, así como su flexibilidad.[82] La variedad de maneras en que el contexto lingüístico puede incidir sobre la semántica de las emisiones precisa, es justo decirlo, una formalización que permita modelar estos fenómenos sin asimilarlos inmediatamente a la satisfacción de variables indefinidas o índices, función esencial de los contextos tipo AI.[83] Más aun, ha llegado a sostenerse dentro del contextualismo que no puede darse una teoría filosóficamente adecuada de los contextos sin tener en cuenta cómo funcionan éstos en el lenguaje natural, puesto que muchas de las soluciones contextuales a diversos problemas (filosóficos y no filosóficos) dependen fuertemente de ejemplos lingüísticos que funcionan como evidencia intuitivamente iluminadora.[84]

---

[81] J. Barwise y J. Perry (1987).
[82] S. Gross (2001).
[83] Sin embargo, M. Dahlquist opina (en comunicación personal) que sí hay rasgos generales de todo uso formal de los contextos (apela con ello a McCarthy, pero sin duda hay un aporte particular en la presente formulación). Según él, hay una modalidad o algo similar que dice que algo es verdadero en un determinado contexto. Estas verdades se dan en un contexto y no en otro, por lo que estas afirmaciones necesitan de un marco de parcialidad. Lo que se afirme de un contexto se afirma desde otro contexto: si se dice algo acerca del contexto A, se dice desde el contexto B, por lo que resulta necesario iterar contextos o anidarlos, concebirlos en cadenas para poder decir "es verdad desde el contexto A que *p* es verdadera en B". Además, los contextos se presentan en familias.
[84] M. Glanzberg (2002).

En general, se requiere que la formalización de contextos lingüísticos recoja los siguientes aspectos: dado el significado de un enunciado, el contexto debe determinar o fijar la proposición expresada. Por ello, caracterizar los contextos en términos de qué proposiciones se expresan es trivial o circular. Se requiere que la caracterización de los contextos que se dé sea epistémicamente iluminadora, que los contextos sean finitos (que contengan una cantidad finita de rasgos), que no se definan en términos intencionales, y que su propia caracterización no sea contextualmente dependiente.[85]

Decimos que un enunciado es *contextualmente sensible* si su significado subdetermina su contenido, cuando el acto de habla es una aserción. El contenido, en una ocasión particular de emisión de un enunciado contextualmente sensible, es la proposición expresada. Algunos de los casos más obvios son, como dijimos, los indexicales y los demostrativos, como "yo", "eso" y "ahora". Los enunciados que contienen predicaciones adjetivas pueden resultar contextualmente sensibles cuando el adjetivo es escalar, aspectualmente dependiente, relativo o vago. Las frases cuantificadas y descriptivas heredan la sensibilidad contextual de cualquier predicado contextualmente sensible que contengan. Pero, además, el **dominio de cuantificación** puede variar contextualmente.

El contexto incide así sobre la construcción del significado emitido, a la manera de un marco o fondo de significados en el cual han de inscribirse las nuevas emisiones.[86] La contextualización del predicado verdad descansa sobre dicha función de los contextos, puesto que el significado de lo emitido, las proposiciones de las cuales se predicará la verdad, se conforman dentro de este *background* semántico. Esto sugiere que la sola indexicalización del predicado – una de las maneras más recurrentes en que se lo ha contextualizado – constituye una imagen algo pobre de la manera como los significados de las emisiones, y la predicación de la verdad sobre ellos, son contextualmente sensibles. Ha de notarse que son los hablantes mismos los que seleccionan y conforman los elementos relevantes en un contexto de conversación. La constitución de esta estructura de saliencia es, de este modo, bastante particular en cada caso, por lo parece dar más frutos hallar la contextualidad no tanto en el predicado

[85] S. Gross (1987).

[86] En la medida en que este *background* se concibe como resultante del discurso (de los contenidos allí vertidos), se apoya en general desde esta vertiente contextualista una relativización de la distinción entre semántica y pragmática (cf. M. Glanzberg (2005b)). Sin embargo, esta "zona difusa" que germina de contraejemplos relativizadores genera sobre todo un reforzamiento o enriquecimiento de la semántica, y no así de la pragmática.

como en las proposiciones (significados) que en un discurso se expresan. Asimismo, la opción de desestimar la incidencia contextual o de reducirla a la mera figuratividad de las frases que la presentan es poco razonable en la medida en que deberían clasificarse como literalmente falsas o figurativas una variedad enorme de emisiones comunes. Al plantear la sensibilidad contextual, preservamos nuestros juicios de verdad *prima facie* sin colapsar con una reducción de corte absolutista.

De particular relevancia ha sido en la literatura filosófica el uso de argumentos contextuales que aducen un cambio contextual posiblemente inadvertido a fin de explicar algún problema o fenómeno (escepticismo, paradoja del Sorites, semántica de adjetivos comparativos o atributivos, etc.) Sean E1 y E2 emisiones distintas de una misma sentencia S definida, no elíptica ni ambigua. Si las condiciones de verdad y así, posiblemente, los valores de verdad de estas emisiones difieren intuitivamente, entonces – se concluye - S es contextualmente sensible.[87] El caso de PMR puede, según una tradición de lógicos contextualistas, explicarse por un argumento contextual. Esto es, puede encontrarse una manera de justificar y explicar lógicamente un cambio contextual que desarticule la contradicción que resulta de la antinomia. Una estrategia para evitar la contradicción consiste en observar que las fórmulas en 3 y 5[88] son emisiones distintas. Si pudiera argüirse que hay un cambio de contexto entre ellas, podría sostenerse que se trata entonces de una aparente contradicción.

Ante la diversidad de usos y la abundancia de abusos de las salidas contextuales, de las soluciones de este tipo que encuentran un factor anteriormente inadvertido, Cappelen y Lepore imponen sobre los argumentos contextuales determinados requisitos que habremos de tener en cuenta respecto de las soluciones contextuales a PMR que tomemos. Por una parte, dicen que una expresión e es contextualmente sensible si inhibe reportes directos intercontextuales. "Aquí estaré" (*aquí* = en el banco); "Él dijo que aquí estará" (*aquí* = en el café). Por otra parte, la operación con conectivas proposicionales entre enunciados contextualmente dependientes no debe ser posible.

> Si una frase verbal "*v*" es sensible al contexto (i.e., si cambia su valor semántico de un contexto de uso a otro), entonces sobre la mera base de conocer que hay dos contextos de emision en los cuales "A-*v*-s" y "B-*v*-s" son [sentencias] verdaderas respectivamente,

[87] H. Cappelen y E. Lepore (2003).
[88] Cf. la inferencia de PMR en I.2.3, más arriba.

no podemos inferir automáticamente que exista un contexto en el que "*v*"*v* pueda ser utilizado para describir lo que A y B han hecho. [89]

Si bien se trata de requisitos aparentemente obvios, será necesario justificar su cumplimiento en las alternativas que consideremos.

3.1 Comentario de las primeras soluciones contextuales

En las investigaciones que toman en cuenta la incidencia contextual sobre la construcción de semánticas formales que respondan de manera satisfactoria a las paradojas semánticas puede señalarse como pioneros a Tyler Burge y Charles Parsons[90], entre otros. La aplicación de la idea de contexto en alguna versión formalizada en el ámbito de las teorías semánticas sobre la noción autorreferencial de verdad tomó formas distintas, pero puede verse que estos y otros autores parten de una reacción frente a determinadas insuficiencias de la noción tarskiana de verdad y de la teoría formal que construye. Las críticas a Tarski que sirvieron de base a esta alternativa teórica se relacionan fundamentalmente con la ausencia de aspectos que intuitivamente se atribuyen al predicado verdad en su formalización. Por ejemplo, que se usa unívocamente, que hay un solo predicado y no una cadena o jerarquía, y que son posibles las predicaciones globales.

Partiendo del argüido equívoco en la derivación de PMR y asumiendo que el predicado verdad es esquemático, el contextualismo indexical de Burge explicaba por qué en el paso 5 de la inferencia[91], la predicación que aparece corresponde a verdadero_i, donde i refiere a un índice en una jerarquía que se construye mediante principios de "adecuación material" (principio de Justicia y de Veracidad), distinta de la que se da en 3, verdadero_k. Esta jerarquía impide las predicaciones de índice igual al de las sentencias de las que se predican, sobre la base de una definición particular de denotación (*à la* Tarski) que declara patológicas_i las predicaciones de verdad_k tales que $k \geq i$, $i \geq 1$. El uso de predicados semánticos indexicales como "verdadero" es derivado, esto es, su correcta aplicación se da sobre enunciados que pueden ser formulados y que tienen sentido y referencia. En consecuencia, ningún enunciado puede descansar sobre su propia evaluación semántica. Esta solución a la paradoja aprovecha el segundo de los rasgos de

---

[89] H. Cappelen y E. Lepore (2003)
[90] T. Burge (1979) y C. Parsons (1974)
[91] Cf. I.2.3 más arriba.

los argumentos contextuales indicados por Cappelen y Lepore, al impedir que emisiones de contextos distintos puedan ser manipuladas con conectivas, lo cual bloquea la contradicción que se infiere en PMR.

Una idea no jerárquica de contextos que también se empleó para analizar PMR es la que emana de la teoría presuposicional del contexto que se origina primariamente en los trabajos de Stalnaker (1974, 1978, 1998). Desde esta perspectiva, se explica el cambio contextual en la inferencia porque la aceptación de 3 como presuposición nueva entre los participantes de la conversación implica un cambio de contexto a partir del cual todo lo que sigue en la inferencia pertence a un contexto distinto del de 3. Como 5 pertenece a un contexto distinto, aunque refiere a λ, lo hace en un contexto nuevo, tras lo cual el reporte indirecto no conserva el contexto original sino que lo modifica.

3.2 Nociones de contexto tras las primeras soluciones

Hemos visto un esbozo de algunas de las propuestas llevadas adelante en los comienzos de la tradición contextualista frente a PMR. Aunque podríamos detenernos en comentarios y críticas dirigidos a múltiples aspectos de estas soluciones (su carácter jerárquico, indexical, epistémico, estático, etc.), el punto sobre el cual centraremos nuestra atención es la noción de contexto (lingüístico) y de predicado verdad contextual que suponen y elaboran. Procuraremos así dar sentido a la perspectiva de Glanzberg que desarrollaremos en las siguientes secciones como una opción superadora de algunos de estos puntos problemáticos, pobres o formalmente discutibles de la noción de contexto que se maneja, que en última instancia depende del tipo de dependencia contextual de PMR.

3.2.1 Indexical

La teoría indexical parte de algunos supuestos descriptivos: para cada enunciado, hay una estructura adecuada que representa semánticamente el enunciado de manera apropiada para su interpretación semántica. Decimos, como es corriente, que esta es la *forma lógica* (FL) del enunciado. Se asignan valores de verdad a los constituyentes de las FLs, y anteriormente a considerar la incidencia contextual, las condiciones de verdad se determinan composicionalmente. Se asumen además que el contexto fija los valores de valores de verdad que contienen parámetros (tómese el caso, por ejemplo, del indexical *yo*). En tratamientos más formales, se toma al contexto como una primitiva c y se asume que para cada parámetro en un valor semántico que deba fijarse mediante el contexto, hay una función $f(c)$ cuyo valor fija ese parámetro.

Si se refina un poco la teoría tras el formalismo recién indicado, puede decirse que la función básica del contexto es fijar parámetros, por lo que el contexto puede concebirse como colecciones de valores de parámetros, como tuplas de rasgos que son valores de parámetros específicos. Una elaboración sobre esta idea puede tomar la siguiente dirección: teniendo en cuenta que las emisiones son eventos, se consideran agentes, tiempo, espacio y objetos prominentes. El índice o contexto representa estos rasgos elementales de los eventos lingüísticos.[92] En esta perspectiva, el contexto es un elemento no analizado que provee de todo cuando nuestros esfuerzos descriptivos puedan requerir, lo cual oscurece considerablemente esta noción.

Según Burge, "la indexicalidad se atribuye más plausiblemente al predicado verdad"[93], a los predicados semánticos, lo cual permite interpretar el paso crucial en la inferencia de PMR conteniendo un cambio de contexto subyacente, lo cual modifica la extensión de "verdadero" en cada caso. Se reconoce primero la sentencia λ como patológica, notando luego *en los mismos términos de la expresión* que no es verdadera (o no es verdadera de sí misma), y considerando finalmente *esta observación* como verdadera (o verdadera de sí misma), tenemos intuitivamente un cambio de evaluación. No parece que pueda atribuirse el cambio a expresiones singulares relevantes. Ello parece indicar que un cambio en la extensión del predicado verdad y un cambio en las aplicaciones de la negación como posibles fuentes del cambio en la evaluación. La indexicalidad se da, entonces, en la determinación de la extensión de estos predicados, no siendo éstos ya constantes ni variables, sino predicados esquemáticos que se representan en un contexto determinado mediante un símbolo como $V_i(x)$ con un subíndice numérico. Contemplar la contextualidad respecto del predicado mismo implica, en cierto modo, una nueva fragmentación similar a la que sucediera tras la definición tarskiana, puesto que su extensión varía, y desde un enfoque extensional, cada índice determinará un predicado distinto.

[92] M. Glanzberg (2002).
[93] T. Burge (1979).

Por otra parte, debemos observar que "una sentencia patológica$_i$ puede no ser patológica$_k$, o incluso verdadera$_k$, $k>i$. La patologicidad no es una condición intrínseca, sino una disposición a producir enfermedad para ciertas evaluaciones semánticas". Aunque esta advertencia (con un eco kripkeano) es deseable y defendible, la definición de patologicidad se centra fundamentalmente en la autorreferencia, en la predicación de índice igual al de la sentencia predicada. Y cargar sobre un criterio sintáctico o *a priori* la noción de lo patológico o paradójico, es una de las objeciones más claras y trascendentes de las dadas por Kripke.

Cómo se establecen los subíndices en un contexto es la cuestión principal de este modelo formal. Se asignan los subíndices *ceteris paribus* a fin de maximizar la posibilidad del intérprete para asignar condiciones de verdad a un enunciado mediante un esquema de verdad. Se llama a esto Principio de Veracidad. Según el principio de Justicia, no ha de atribuirse a un enunciado condiciones de verdad sin razón o fundamento. Estos criterios pragmáticos de determinación del nivel del índice en la jerarquía, si bien son filosóficamente defendibles, oscurecen a su vez el modelo formal que pretende darse. En la medida en que se articula un modelo que busca una salida lógica a un problema lógico, la dependencia de evaluaciones pragmáticas no resulta iluminadora.

Esta concepción podría calificarse como un empleo semántico del contexto dentro del esquema empleado por Perry[94]. En este sentido, el contexto interviene en el discurso enunciado (no previamente, como veremos que será el caso de la teoría presuposicional), de manera similar como se resuelve la referencia de un demostrativo o de una anáfora. Se pretende así que la indexación del predicado verdad se resuelva apelando al contenido (particularmente, otros índices) de la proposición de la que se predica.

3.2.2 Presuposicional

La teoría presuposicional del contexto se origina primariamente en los trabajos de Stalnaker[95], y en ella se identifica la actitud de *presuponer* como el establecimiento de terreno común en una conversación. El contexto de una emision es la colección de

[94] Cf. J. Perry (1998).
[95] Cf. R. Stalnaker ((1974, 1978, 1998).

proposiciones presupuestas por los participantes de la conversación. Para Stalnaker, el contexto es el conjunto de mundos posibles compatible con las presuposiciones de los hablantes que intervienen en la conversación. Es una teoría intencional: el contexto es una especie de contenido. Como teoría filosófica, responde directamente a la pregunta acerca de qué es un contexto y cómo funciona.

Otra elaboración, distinta de la de Stalnaker, es la de Karttunen[96]. Según sostiene, un concepto de presuposición definible en términos solamente semánticos (por sus condiciones veritativas) no es adecuado, sino que es necesaria una noción pragmática que, a diferencia de la propuesta de Stalnaker, no haga pie en las presuposiciones de los hablantes. En cambio, aquí se promueve una idea de presuposición como relación entre una oración superficial y la forma lógica de otra. De allí que se conciba al contexto como un conjunto de formas lógicas que describen el conjunto de antecedentes que se dan por sabidos (todo lo que el hablante considera que comparte con la audiencia a la que se dirige).

Ahora bien, no se definen los contextos compilando las presuposiciones de una frase, sino que se hace el camino inverso: se pregunta *cómo debería ser un contexto para satisfacer estas presuposiciones*. De este modo, se evita tener que responder cuáles son en realidad las presuposiciones. Se articula entonces el concepto de satisfacción de presuposiciones:

> El contexto X satisface-las-presuposiciones-de (o *admite*) la oración A sólo si X entraña todas las presuposiciones básicas de A.

Esta definición se generaliza luego para contemplar el caso corriente de las oraciones compuestas. La mejor manera de tratar la teoría de las presuposiciones consiste en considerarla una teoría de las restricciones que en contextos sucesivos se aplican a un discurso totalmente explícito, en el que el contexto conversacional vigente satisface-las-presuposiciones-de (o *admite*) la oración siguiente, la cual incrementa a su vez ese contexto.

Una de las ideas fundamentales en la teoría presuposicional es que los contextos se actualizan continuamente por las presuposiciones que se agregan o se pierden a medida que el discurso progresa. Pero esto supone, por una parte, que toda sentencia individual hace una aporte independiente al contexto, lo cual presupone una suerte de

[96] L. Karttunen (1998)

atomismo o separabilidad de la contribución y contenido discursivos. Esto mismo resulta a su vez una falencia en la solución a PMR, ya que al concebirse cada sentencia *por separado* como una contribución informacional trivializaría el contexto, al contener sentencias contradictorias.

El conjunto de presuposiciones, si bien deriva sobre todo del contenido de las expresiones enunciadas en la conversación, incide pre-semánticamente como contexto sobre las nuevas emisiones. Este empleo pre-semántico actúa como *background* o *input* de los nuevos aportes informacionales, determinándolos y asignándoles contenido específico.

3.3 Contextos lingüísticos y el Mentiroso Reforzado

Tanto la teoría presuposicional como la indexical conciben al contexto como cierta clase de información o contenido, y tienen un enfoque similar respecto de la relación entre contexto y discurso: el contexto – lo que se combina con un enunciado para determinar qué proposición expresa una emisión - es una noción especificable mediante emisiones puntuales, y no tiene mayor conexión con el discurso general en el que se inscribe tal emision. Glanzberg sostiene que el rol del discurso sobre el contexto es harto mayor: hay rasgos del discurso irreducibles a elementos de emisiones individuales que inciden sobre las condiciones de verdad (aspecto de los contextos que se está tratando) de emisiones puntuales. ¿Qué del discurso (y no de otras emisiones puntuales) fija el contexto de una emisión dada?

Véase el siguiente ejemplo de incidencia del discurso sobre el contexto.

> Un grupo de artistas se encontró con un grupo de críticos. Los críticos gustaron de algunas de sus pinturas. Todos eran trabajos recientes.[97]

El contexto fija que el dominio del cuantificador *todos* sean las pinturas de los artistas de las que gustan los críticos. Ninguna de las emisiones individuales determina de esta manera el dominio del cuantificador: el discurso lo determina. Pero cada emisión, claro está, hace una contribución distinta. La combinación de estos aportes se compone para moldear la información que configura el discurso.

---

[97] Ejemplo tomado de M. Glanzberg (en prensa).

Reconocido que la dependencia contextual va mucho más alla de las clases de indexicales y demostrativos, y que la dependencia de los dominios de cuantificación es un fenómeno que urge ser explicado, se sugiere que la explicación contextual de PMR no apele a la contextualidad del predicado sino a la dependencia contextual de los dominios de condiciones de verdad, enfoque ya referido y que desarrollaremos en profundidad en lo que sigue. Tomando como referencia el trabajo de Parsons[98], Glanzberg desarrolla una solución en esta línea, que como veremos presenta un modelo formal de esta clase de dependencia contextual, a saber, la de los dominios de condiciones de verdad (maximales), justificando lingüística, filosófica y lógicamente la dependencia contextual tras PMR.

[98] Cf. C. Parsons (1974).

4 Limitaciones formales de una solución contextual

Inscribimos aquí las propuestas contextuales en la línea de análisis que nos permitió relacionar el enfoque de Tarski y los resultados presentados por Kripke. A través de la regeneración de PM en su versión contextual, de la cual presentaremos una diagonalización siguiendo nuevamente el esquema de Simmons, vemos que hay supuestos de nuestro lenguaje contextualmente enriquecido que violan limitaciones expresivas que han de contemplarse. Estableceremos una limitación en ese sentido recogiendo la advertencia planteada en la paradoja del Mentiroso Contextual (PMC).

4.1 Paradoja del Mentiroso Contextual

Sea φ el nombre de una fórmula en el lenguaje objeto y sea que $[\varphi]$ representa el nombre de φ en el metalenguaje. Ya sabemos que si $F(v)$ es una fórmula con una variable libre v, la diagonal de $F(v)$ es la sentencia $F([F(v)])$. Un lenguaje de primer orden L es autorreferencial si y sólo si para toda fórmula φ de L, L contiene un nombre $[\varphi]$ de φ y L contiene un predicado diagonal para sí mismo. En todo lenguaje autorreferencial se obtiene el lema diagonal[99].

Sea la verdad una relación entre una sentencia y un contexto.[100] Demostraremos a continuación PMC (λ_Δ:λ no es verdadera en el contexto Δ) en versión diagonal.[101] Si el lenguaje L contiene un término "Δ" tal que el contexto que "Δ" denota en Γ es el mismo Γ, la sentencia:

$\lambda = \lambda$ no es verdadera en Δ

es verdadera en Γ y no es verdadera en Γ. Asimismo, la sentencia

$\mu =$ "μ no es verdadera en ningún contexto ¨

es al mismo tiempo, verdadera en algún contexto y en ningún contexto es verdadera.[102]

---

[99] Cf. I.1.2.5 más arriba.

[100] En la propuesta de Glanzberg que presentaremos en la parte II, la verdad es un predicado contextualmente determinado (el dominio de proposiciones sobre el cual varía está constreñido por el contexto); de ahí que no se articule como una relación explícita entre una sentencia o proposición y un contexto.

[101] Cf. La demostración de este lema en C. Gauker (2006).

[102] λ y μ son variantes de PMR, como lo indicáramos en I.2.3 más arriba.

Sea L un lenguaje como antes y sea "X" un término de L que designa un contexto X. Un predicado $V(x)$ de L es un predicado verdad para L si en L, $V([S])$ ***en*** "X" es verdadera sii en L, S es verdadera en X.

D_1 es el conjunto de sentencias de L,

D_2 es el conjunto de predicaciones de verdad de sentencias de L (de la forma $V([S_i])$ *en* "X", etc.).

R(x, y) es 1 si x es verdadera en y

0 si x no es verdadera en y

Si asumimos que el conjunto de contextos está ordenado, podemos entender R(x,y)=1 cuando S_i es verdadera en el conjunto de predicaciones de verdad para los contextos $X_1 \ldots X_k$.

F lleva cada sentencia al conjunto de sus predicaciones de verdad contextuales.

H(x, y) el contravalor de F, es 1, si x no es verdadera de y

0, si x es verdadera de y

De acuerdo con el teorema diagonal, H no puede darse en R. No hay entonces, una sentencia S que sea verdadera en X del nombre de una sentencia que no sea verdadera de su propio nombre en el mismo contexto.

Incorporamos en L una función $denot_X$("Δ") = Y, que indica el contexto denotado por el término "Δ" en X. Asimismo, si en L $denot_\Gamma$("Δ") = Γ , diremos que L permite la *referencia reflexiva de contextos*. Sea que $denot_\Gamma$("Δ") = Γ, y sea que λ se enuncia en el contexto Γ. Entonces la sentencia:

λ = "λ no es verdadera en Δ"

produce una nueva paradoja. Si λ es verdadera en Γ , resulta que "λ no es verdadera en Δ" es verdadera en Γ. Luego, λ no es verdadera en el contexto que "Δ" denota en Γ. Por consiguiente, λ no es verdadera en Γ. De modo análogo, Si λ no es verdadera en Γ , resulta que "λ no es verdadera en Δ" no es verdadera en Γ. Luego, λ es verdadera en el contexto que "Δ" denota en Γ. Por consiguiente, λ es verdadera en Γ.

De este modo, λ es verdadera en Γ y λ no es verdadera en Γ.

4.2 Teorema de limitación para contextos

Obsérvese que λ = "*NV*([λ], *denot*$_{\Gamma}$"Δ"))", ya que *NV* es también ahora un predicado relacional.

El lema diagonal antes presentado tiene un correlato en los lenguajes contextuales[103]: si *L* es un lenguaje autorreferencial y F(*v*) es una fórmula de *L* con la única variable libre *v*, entonces hay una sentencia A de *L* tal que, para todo contexto Γ , A es verdadera en Γ si y sólo si F([A]) es verdadera en Γ.

A partir de este lema, se puede demostrar un resultado análogo al teorema de limitación de Tarski para un predicado no-verdadero contextual: si *L* es autorreferencial y permite la referencia reflexiva de contextos, entonces *L* no contiene su propio predicado *no-verdadero en un contexto*.

Una buena solución contextual a PMR debería, según lo expuesto, recoger los rasgos de los contextos lingüísticos señalados en 3.2, disolver la paradoja y explicar la limitación establecida por este teorema, a fin de que el bloqueo en la autorreferencia contextual resultante del mismo no sea un recurso *ad hoc*.

103 Cf. I.1.2.5 más arriba y C. Gauker (2006).

5 *Against stepping back*: objeción general contra el contextualismo

Gauker ha presentado recientemente una crítica general hacia las soluciones contextuales de PMR.[104] Si bien él mismo aboga por una reconstrucción contextual del fenómeno tras la paradoja, objeta a varios de los anteriores intentos[105], que todos han incurrido en una inferencia no válida, al sostener que el cambio contextual que desarticula la contradicción depende de un *step back*, de una forma de reevaluación contextual de la sentencia λ (ya relativizada al contexto) que, como tal, arroja un valor distinto del resultante de la asignación primera de λ. Véase esquemáticamente cómo opera este paso atrás, esta segunda perspectiva de evaluación:

PMR contextualizada

1. **(λ_Γ) λ_Γ no es verdadera en Γ**	donde Γ denota el contexto al cual λ pertenece
2. λ_Γ es paradójica en Γ	En virtud de una semántica parcial
3. λ_Γ no es verdadera en Γ	Descripción metalingüística de 2
4. "λ_Γ no es verdadera en Γ" es verdadera en Δ	Por 1 y 3, y un *step back* que permite evaluar λ_Γ en un nuevo contexto Δ
5. λ_Γ es verdadera en Δ	Por 1 y 4
6. λ_Γ no es verdadera en Γ y es verdadera en Δ	Por 3 y 5

Según este autor, el paso 4 es crucial en las propuestas contextualistas que analiza. Allí se infiere a partir del significado de λ_Γ y de la inferencia en 3 la verdad de la sentencia del Mentiroso, pero esta adscripción de la verdad se da – según intentan

[104] C. Gauker (2006)

[105] C. Gauker hace referencia a la solución de K. Simmons (1993) y a la de J. Barwise y J. Etchemendy (1987), aparte de la de M. Glanzberg (2001a, 2004a), a la que prestaremos especial atención en lo sucesivo. Simmons propone a grandes rasgos concebir a PMR como una singularidad, como un punto límite en el concepto de verdad, y su teoría de la verdad diseña un procedimiento de evaluación de casos (*tokens,* tipos – *types*) de sentencias que implica en determinados puntos una decisión pragmática sobre del contexto respecto del cual ha de evaluarse un caso dado. El diagnóstico de Barwise y Etchemendy, en cambio, apunta a interpretar el problema de PM y PMR dentro de una semántica situacional. Toda proposición es acerca de una situación, la cual puede ser real en un modelo si el estado de cosas que describe está en el modelo. La proposición del Mentiroso consiste de una situación en la que el estado de cosas que se describe niega la verdad de esa misma proposición.

justificarlo los autores que Gauker refiere de distintos modos – en un *nuevo* contexto; de ahí que en 6 no se obtenga una contradicción, sino una inocua descripción del comportamiento irregular de una sentencia contextualmente dependiente. Ello supone, como es claro, que cualquier sentencia en la que se predica la verdad hay una referencia implícita al contexto.[106]

Sin embargo, objeta Gauker, la inferencia en 4 no es válida: ese paso se justificaba en PMR por el Principio de Ascenso Semántico, según el cual de la proposición *p* (si se da) se puede inferir que *V*("*p*"), lo cual garantiza que aunque las sentencias en 1 y 3 no tengan el mismo significado, aun así pueda inferirse la verdad de λ. En cambio, arguye Gauker, el paso análogo en la inferencia de la paradoja contextualizada no halla justificación, ya que una vez que se ha contextualizado la verdad, no podemos inferir de la evaluación de λ en un contexto una evaluación (en este caso distinta) en *otro contexto*. Tras advertir acerca de que sentencias paradójicas en un contexto pueden muy bien no serlo en otro(s), señala que no hay un principio intercontextual análogo al de Ascenso Semántico.

Quizás el aspecto más corrosivo de la afrenta de Gauker reside en que señala que la relativización de la verdad al contexto impide justamente aquello que constituye el escape de la antinomia: la reinterpretación de la sentencia del Mentiroso en un nuevo contexto. Esto significaría, si no puede encontrarse un defecto en el argumento, que las soluciones de este tipo son inoperantes, puesto que impiden la clase de movimiento que justamente requieren para evitar la contradicción.

5. 1 Bloqueo de la autorreferencia contextual

A partir de tal impugnación general del tipo de lenguajes contextuales elaborados contra PMR, Gauker señala una opción frente a la inminente contradicción que, haciéndose eco de PMC y del teorema de limitación para contextos, pretende articular una salida que no caiga en la paradoja Contextual sin apelar al cambio de contexto arriba descripto. Según este autor, PMC se regenera por causa de la posibilidad de autorreferir que tienen los contextos en los lenguajes contextuales generalmente empleados. En virtud de ese diagnóstico, apunta que es necesario bloquear la autorreferencia

[106] Cf. C. Gauker (2006)

contextual, esto es, impedir que los lenguajes contextuales puedan incluir términos que denoten contextos que puedan aplicarse sobre sí mismos. Justifica esta decisión apelando a una noción de contexto objetivo que, según él, permite dar sentido a esta limitación expresiva, y pretende defender esta decisión sobre la base de escasos aunque sugerentes ejemplos.

Este enfoque, sin embargo, representa hasta donde alcanzamos a apreciar una insinuación, apenas si una indicación acerca del rumbo que han de tomar las soluciones contextuales a PMR. En el artículo que citamos, Gauker reconoce que se trata de un gesto en dirección a manifestar qué clase de lenguajes resisten PMR y PMC sin suponer reevaluaciones inconducentes y, más aun, contradictorias respecto de sus propias definiciones. No obstante, y pese a que en su carácter de manifiesta sugerencia, este bloqueo de la referencia reflexiva de los contextos sea – según indagaremos luego[107] – una eficaz solución a esta familia de paradojas, creemos que este autor se encuentra en una posición un tanto desfavorable en cuanto crítico, si consideramos que no sólo no elabora una teoría de la verdad ni una definición del predicado acorde con su intuición, sino que además arguye contra Glanzberg, incluyéndolo dentro de la clase de contextualistas que incurren en el defecto del *stepping back*, ignorando que la definición y teoría construidas por este autor no sólo satisfacen el requisito planteado por el teorema de limitación para contextos, sino que además operan sobre una noción de contexto justificada y, aun más, plausible. Ya se ha planteado en la literatura[108] que para evitar la regeneración de la paradoja, debería impedirse la reflexión semántica sobre un mismo discurso, o extenderse la noción de *esquema de interpretación* de manera que lo cubra y disuelva la contradicción. Mientras que Gauker apenas si alcanza a tomar la primera posibilidad, Glanzberg consigue conceptual y formalmente sustentar la segunda.

5.2 Opciones a contemplar

Hasta aquí hemos visto, por los el teorema de limitación expresiva para contextos, que una sólida alternativa de este tipo debe no sólo reclamar este coto sino además justificarlo. Por los criterios generales de una buena solución a las paradojas semánticas, debe además observarse que una salida ha de ser justificada; en este caso,

---

[107] Cf. II.1.3.1 y II.3.2.3. más abajo.
[108] Cf. C. Parsons (1974), donde se refiere al retorno contextual de la paradoja como el "supermentiroso".

vemos que las soluciones contextuales deben hallar maneras de explicar de forma no *ad hoc* la irreflexividad contextual. Presentaremos en la parte II la propuesta jerárquico-contextual de Glanzberg, quien – creemos – lo consigue (no sin pagar, claro está, algún precio: el retorno de las jerarquías).

Gauker, al referirse a este autor, descalifica su solución por tratarse, según sostiene, de otra instancia del ilegítimo "paso atrás", indicando que no encuentra justificación alguna para defender la inferencia en un nuevo contexto de la verdad de la sentencia como se expresara en el contexto anterior. A lo largo de las siguientes páginas, procuraremos reconstruir conceptual y formalmente el enfoque de Glanzberg. Así, intentaremos desplegar los elementos necesarios para defender su teoría de la objeción de Gauker. Si bien, como veremos, sí se da en su propuesta el paso atrás, se da sentido a tal inferencia de manera pre-teórica, conceptual y lógica, con lo que pretendemos sostener la propuesta de Glanzberg como una perspectiva rica y justificada de escape a la recurrente paradoja semántica.

Parte II:

Enfoques lingüísticos: una propuesta jerárquico-contextual de definición formal del predicado verdad

---

Consideré que aun en los lenguajes humanos
no hay proposición que no implique el universo entero…

(Jorge Luis Borges, *La escritura del dios*)

---

1 Rasgos conceptuales de la propuesta de Glanzberg

¿Cómo justificar un cambio contextual no *ad hoc*? La estrategia que sigue Glanzberg consiste, fundamentalmente, en explicar ciertas formas de incidencia contextual que operan sobre fragmentos del discurso en lenguajes naturales. Haciendo claro el fenómeno que explica estas particularidades semánticas, se intenta luego argüir que en el enunciado del Mentiroso se da una dependencia y cambio contextual similares a tales casos del discurso ordinario. Presentamos en lo que sigue los conceptos fundamentales y el abordaje jerárquico contextual general que se declara en PMR bajo esta perspectiva, y que sirve de referencia pre-formal para construir luego un modelo lógico plausible y con mayores evidencias.

1.1 Contexto como estructura de saliencia

El discurso tanto oral como escrito se presenta en segmentos que se relacionan jerárquicamente, cuyas partículas más autónomas son las sentencias. Es claro que cada sentencia hace una contribución al mensaje o transmisión de ese discurso. Sin embargo, las propiedades del discurso no son composicionales, esto es, no son una sumatoria o agregado de las propiedades de cada enunciado. La coherencia global, por ejemplo, no es una propiedad particular de una o de un grupo de sentencias.

Partimos de un enfoque que presupone una sencilla distinción entre proposiciones, sentencias y enunciados (o emisiones), una división metodológica de los objetos lingüísticos en su aspecto más lógico o abstracto, en su correlato lingüístico y en su dimensión pragmática. Determinados rasgos de los enunciados pueden afectar las condiciones de verdad de las sentencias. Un ejemplo[109] donde el aspecto prosódico es esencial es el siguiente:

a. John only introduced BILL to Sue.
b. John only introduced Bill to SUE.

Por lo visto, se trata de una misma sentencia que en dos emisiones enuncia dos proposiciones distintas. Y una buena explicación de este fenómeno resulta de observar la incidencia del contexto en cada emisión. Particularmente, vemos que el tópico, aquello de lo que se habla en las sentencias, es distinto, como consecuencia del cambio

[109] Cf. M. Rooth (1992), citado en M. Glanzberg (2002).

de foco indicado mediante las mayúsculas. El tópico es aquello de lo que trata una emisión (a diferencia de algo marginal), y el foco lo que la emisión enfatiza. El foco dice algo nuevo de la entidad especificada por el tópico. El sujeto semántico de una oración es la parte de la emisión que contiene aquello de lo que trata, pero no hemos de intentar determinar el tópico de esta manera, ya que esta sería una definición circular. El sujeto es el punto de partida del aporte informacional de una emisión. En el predicado semántico se particulariza y especifica este aporte informacional. En líneas generales (aunque se trata de una identificación inexacta y discutible), la literatura ha asociado tópico con sujeto y foco con predicado sintácticos.

> El sentido de una emisión es llegar de algo conocido y acordado a algo nuevo e informativo, y es la nueva información lo que primariamente se enfatiza, de manera que el tópico y el foco emerjan como dos aspectos de un solo patrón de articulación. [110]

En relación con estas emisiones de diverso foco, se hallan conjuntos alternativos de proposiciones resultantes de reemplazar los elementos enfocados en cada una por miembros de estos conjuntos alternativos– esa es la manera como notaríamos cuál es el foco en cada emisión –. El conjunto alternativo es el rango de cosas en consosnancia con el tópico, y se restringe a las relaciones salientes respecto del evento en cuestión. La perspectiva indexical acerca de los contextos difícilmente podría explicar la determinación del conjunto alternativo de elementos para el foco: no parece claro qué clse de parámetro fijarían los tópicos ni cómo podría conseguirse una generalización de esta fijación que fuera más allá de casos particulares.[111] La teoría presuposicional, por su parte, tampoco conseguiría explicar este fenómeno: los hablantes deberían suponer proposiciones distintas, pero esta explicación no hace más que oscurecer el fenómeno en cuestión, a saber, la diferencia en las proposiciones expresadas. Los enunciados en una porción de discurso se organizan formando una estructura tópica, un arreglo complejo que exhibe la progresión temática (la introducción y cambio de tópicos) y la especificación de esos nodos (la aparición de focos puntuales). La progresión de tópicos de sentencias responde a restricciones generales derivadas de la coherencia como propiedad global del discurso que unifica y da sentido al tópico del discurso. Así, la

[110] J. Peregrin (1995)

[111] La dificultad en la generalización se ve si notamos que en el ejemplo dado más arriba sería necesario formalizar (sólo) para el verbo "to introduce" una enorme variedad de posibles agentes y modificadores que pueden resultar enfocados: [A] introduces [B] to [C]. Aun el mismo verbo podría resultar el elemento enfocado en determinada emisión: "John only INTRODUCED Bill to Sue" (He is not to blame for their quarrels.)

estructura resultante no deviene directamente por aspectos locales de emisiones individuales, sino más bien por su relación, progresión, especificación, etc. La incorporación de tópicos debe respetar este marco general, al que se llama estructura tópica. La determinación de cuál es el conjunto alternativo para un elemento enfocado en una emisión es contextualmente dependiente, y está sujeta a la estructura tópica de ese discurso. Así, puede verse que la estructura tópica es parte del contexto, de modo que los contextos tienen componentes no localizables en las sentencias, sino que residen en el discurso por entero.[112] Los contextos poseen rasgos que no pueden separarse del discurso como un todo en el cual se enuncian sentencias, por lo que aquello que se considera formalizable y necesario en el presente marco no es reducible en última instancia a información o elementos que puedan componerse a partir del aporte de enunciados o emisiones específicas. El contexto es tan complicado como el discurso (o más).

El contexto provee de un registro dinámico de información disponible en un punto dado del discurso, particularmente, de lo que es saliente en cierto momento. Karttunen constituye un antecedente a este respecto en cuanto a la noción que maneja para encuadrar el fenómeno de las referencias definidas.[113] Sin embargo, la aplicación de la noción de saliencia va más allá de este fenómeno, cubriendo áreas más amplias. La complejidad sintáctica y semántica del lenguaje natural dificulta la determinación de qué es lo saliente, aquello que el contexto registra como información destacada. Sin embargo, si se piensa en la estructura de los lenguajes formales, se espera que se registre como saliente una lista dinámica (constantemente actualizada) de propiedades, relaciones, individuos y dominios de cuantificación. La estructura es la herramienta lógica que elige Glanzberg para representar este registro.[114] Esta *estructura de saliencia* es, por tanto, un componente básico de los contextos. Piénsese en esta estructura como un conjunto análogo a $\mathbb{N}$.[115]

El contexto emana del discurso, de sus propiedades globales, y su incidencia determina las condiciones de verdad de los enunciados contextualmente sensibles. Éstos son, por lo visto anteriormente, tanto las sentencias que contienen partículas indexicales,

[112] M. Glanzberg (2002).
[113] Cf. L. Karttunen (1998).
[114] Cf. II.2.2 más abajo.
[115] Se toma $\mathbb{N}$ como estructura de referencia porque es sencillo dar allí una numeración de Gödel, lo cual permite expresar dentro de la estructura su propia sintaxis. El límite en esta autorreferencia dará lugar a la expansión y cambio contextual. Cf. II.2.2 más abajo.

escalares o relativas, como los enunciados que contienen predicados que involucran cuantificación sobre las proposiciones expresables en ese contexto, entre otros casos. Este "cierre lingüístico" se revela en la contraparte formal de forma tal que Hemos de considerar así el dominio de condiciones de verdad – mundos – como constreñido por los recursos que los hablantes tienen para expresar proposiciones.[116]

No trataremos aquí, debe aclararse, el problema de cómo se reconoce en una conversación cuál es el contexto, esto es, cuáles son todos los signos explícitos o implícitos que intervienen en el reconocimiento del contexto en un momento dado del discurso. Tampoco trataremos en detalle (es probable que un escrito exclusivo no alcanzara) cómo los aportes informacionales específicos tejen la trama saliente que configura la estructura tópica global y determina las condiciones de verdad de las expresiones en ese contexto. Vale señalar al respecto que el estudio de los contextos abordado apunta a su empleo y representación formal y a su plausibilidad lingüística, y no al detalle exhaustivo acerca de su composición y naturaleza. No ha de confundirse qué fija un contexto con la manera como los hablantes lo reconocen.[117] El rol post-semántico[118] que le atribuimos no indaga en los mecanismos congnitivos o interpretativos de que se valen los participantes de una conversación para comprender cómo incide el contexto, qué información relevante almacena, sino que apunta más bien a un reconocimiento de su importancia en la determinación del rango de expresividad en un contexto, de qué condiciones de verdad están disponibles y hay que contemplar al evaluar una sentencia allí enunciada. De este modo, el contexto no es algo externo a la emisión (pre-semántico), puesto que la estructura de saliencia es un conglomerado de información lingüísticamente vertida que se configura a partir del contenido y determinación de las sentencias y su aporte a lo largo del discurso. Tampoco hay una referencia anafórica o directa a algún otro elemento manifiesto en el enunciado. Se trata de un empleo post-semántico del contexto porque se interpreta que la referencia implícita al dominio maximal de condiciones de verdad involucrado en la cuantificación de la sentencia establece el contenido definitivo de la sentencia, que resulta de rever o revisar lo anteriormente expresado en el curso de la inferencia de PM.

---

116 Cf. M. Glanzberg (2004a).

117 M. Glanzberg (2002). De manera recurrente se critican formalizaciones de los contextos porque no se refiere en ellas al proceso de su reconocimiento. Aunque sería deseable que un abordaje integral diera cuenta de todos los aspectos relativos a los contextos, no parecen sustentables las críticas que simplemente objetan el recorte metodológico aquí advertido.

118 Cf. J. Perry (1998) y I.3.2.1 más arriba. El empleo post-semántico de la noción de contexto connota un acto de revisión o consideración del contenido de una sentencia posterior a su emisión.

1.2 Dependencia contextual extraordinaria

Si partimos de concebir el universo de lo expresable en un estadio de una conversación constreñido por un contexto, esto es, como una colección de estados determinados, es natural pensar que al expresar una proposición, el hablante divide posibilidades, entre la clase de posibilidades que satisface o verifica la aserción y la clase que la falsifica. La proposición expresada es la clase de posibilidades satisfechas. Qué proposiciones son expresables, qué mundos se identifican, depende de los recursos lingüísticos, esto es, de las mismas proposiciones expresables en tal momento del discurso. De este modo, el mismo discurso de manera global establece su propia capacidad expresiva, qué contenidos tienen sentido y qué sentido tienen en esa comunicación lingüística. Este es el comportamiento del discurso ordinario al cual Glanzberg llama dependencia contextual extraordinaria. Observamos a continuación cómo se representan formalmente los elementos intervinientes en este fenómeno y cómo se explica esta dinámica de cambio en tal representación.

El dominio maximal sobre el cual varía el cuantificador proposicional – el total de proposiciones disponibles en una conversación – se concibe como un conjunto consistente maximal de condiciones de verdad (o dominio *background* del contexto), lo cual permite que todo lo expresable distintamente por los hablantes en un discurso pueda tener mundos correspondientes que representen tales diferencias.[119]. Los conjuntos consistentes maximales son una herramienta fundamental en la teoría de modelos de la lógica clásica, y su existencia en un caso dado puede verse como una consecuencia directa del lema de Zorn[120], basándose en la idea de que una contradicción implica el uso de una cantidad *finita* de premisas. La dependencia *extraordinaria*, la incidencia post-semántica de componentes referidos aunque no articulados en morfemas, es la determinación contextual del dominio maximal de condiciones de verdad. Véase que en la frase

-"Está lloviendo <u>aquí</u>"

el demostrativo "aquí" refiere al sitio en el cual se enuncia esa sentencia, digamos, en Córdoba. Sin embargo, una frase similar

-"Está lloviendo"

[119] Cf. M. Glanzberg (2004).

[120] Cf. prueba del lema en nota 58 más arriba.

puede asimismo hacer referencia a un sitio, digamos, París, aunque no se indique de manera articulada o explícita la referencia espacial referida por el demostrativo en la sentencia anterior. La contextualidad de la expresividad de un discurso está dada por las condiciones de verdad de las sentencias enunciadas en momentos anteriores del discurso (-"Está lloviendo…"; -"¿En Nápoles?"; -"No, ya llegué a París."). El cuantificador proposicional que aparece al representar formalmente las sentencias[121], suponiendo que las proposiciones son los portadores de verdad, está restringido por los contextos porque las proposiciones expresables, el dominio maximal de condiciones de verdad, está constreñido por los recursos lingüísticos (por el dominio de condiciones de verdad) en cada momento del discurso.

El dominio *background* del contexto es el dominio de cuantificación más amplio en un contexto; sobre este dominio varían los cuantificadores aparentemente irrestrictos, tales como los que – según veremos – aparecen en las predicaciones semánticas como la de verdad. Respecto de este dominio, la cuantificación es total, ya que contiene como subconjunto todo dominio particular de cuantificación, toda extensión de predicados disponible en ese momento del discurso. [122]

1.2.1 La proposición como portadora de verdad

Glanzberg adhiere a la perspectiva acerca de los portadores de verdad según la cual esta propiedad se predica de las proposiciones, esto es, del contenido de los enunciados o emisiones lingüísticamente construibles. Para este autor, lo primero que hemos de preguntarnos frente a PMR es si la sentencia expresa o no una proposición a fin de distinguir si se predica de ella la falsedad, o si simplemente hemos de decir que no es verdadera, que no expresa una proposición en absoluto. Si λ es un portador de verdad pero la teoría no la declara verdadera, entonces caemos en PMR. Pero si no lo es, ni siquiera es necesario alarmarse por el peligro de una contradicción.[123] En general, los contextualistas adoptan este enfoque acerca de los portadores de verdad, por cuanto parten de reconocer que una misma sentencia puede expresar distintas proposiciones, y qué proposición se expresa en cada caso está contextualmente determinado. A grandes

121 Cf. II.1.2.2 más abajo.
122 En M. Glanzberg (en prensa) analiza en algún detalle la semántica y la pragmática de los cuantificadores implícitos y explícitos, restringidos e irrestrictos. Remitimos al lector a tal artículo para cerciorarse del detalle técnico.
123 Cf. una opinión similar en A. Gupta (2001).

rasgos, se puede considerar al contexto como aquello que, unido al enunciado, determina cuáles son sus condiciones de verdad.

A modo de contraste y referencia, recuérdese que para Tarski son las sentencias los portadores de verdad. Ellas representan algo, lo cual determina si son verdaderas o falsas – hay algo sobre lo que versan, de manera que el esquema T determine la extensión de "es verdadero" (aunque no se fija en la teoría qué clase de entidad, real o teórica, ha de ser ese correlato, lo cual ha abierto un frente de discusiones respecto del correspondentismo o no de Tarski) –.

Existió un vasto debate acerca de la cuestión de los portadores de verdad. Puede omitirse, sin embargo, esta discusión, apelando por un lado a cierta economía metodológica, como así también al hecho de que en el ámbito de los sistemas formales clásicos, la perspectiva semántica "fregeana-ortodoxa" es más bien generalizada. Puesto que nuestra discusión se centra sobre las teorías formales acerca del predicado verdad, podemos suponer que esta es una concesión permisible. Actualmente, no se considera una diferencia crucial tomar a las proposiciones o a las sentencias (o aun, a las creencias) como los portadores de verdad, puesto que se las concibe en íntima relación (aunque, claro está, el compromiso ontológico en cada caso varía). La proposición en este sentido es un conjunto de condiciones de verdad, un conjunto de mundos posibles, una selección en la división de posibilidades que genera determinada emisión en un contexto. La concepción de los mundos posibles como conjuntos maximales de enunciados no ha sido bien recibida por muchos, habiéndose inclinado más la discusión actual hacia teorías de situaciones o simplemente enfoques deflacionistas.[124] Sin embargo, la elección de esta entidad teórica permite manejar con mayor asepsia conceptual el modo como los contextos inciden sobre la verdad predicable de algo que se enuncia. Las posibilidades de formalización a partir de esta primera simplificación son mucho más ventajosas por partir de una base más sencilla. Es sólo a partir de la reescritura de λ y PMR bajo la forma proposicional que se pone en evidencia la posible acción de un cambio contextual en el transcurso de la inferencia. Veamos ahora cómo interactúa este presupuesto con la perspectiva semántico-contextualista acerca del discurso en general y del enunciado del Mentiroso en particular.

[124] Cf. M. Glanzberg (2004a), H. Field (1972), J. Ketland (1999), N. Tennant (2002).

1.2.2 *Exp* y cuantificación tácita

La relación de Expresión (Exp), representada mediante *Exp*, resulta necesaria a partir de adoptar la perspectiva mencionada acerca de las proposiciones. $Exp(s, p)$ dice que la sentencia s expresa la proposición p. Sin embargo, cuando reescribimos de esta manera el contenido de una sentencia, es necesario explicitar el cuantificador proposicional que liga la variable p, el cual varía sobre el dominio de condiciones de verdad pertinente según s y se halla constreñido por las posibilidades expresivas del discurso. Así, cuando nos referimos a la verdad del contenido de una sentencia s, hemos de decir

$$\exists p(Exp(s, p) \wedge V(p))$$

De este modo, al interpretar la sentencia del Mentiroso, aquella que dice de ella misma que no es verdadera, diremos

$$\neg\exists p(Exp(\lambda, p) \wedge V(p))$$

Al poner de manifiesto que hay una cuantificación proposicional al enunciar la sentencia del Mentiroso, se abre la pregunta sobre el dominio de ese cuantificador: ¿cómo se determina su rango? ¿Sobre qué proposiciones varía? La respuesta a estas preguntas se inscribe en la perspectiva contextualista acerca de la semántica del lenguaje en que se enuncia. Parece natural pensar que los cuantificadores puedan tener sus dominios contextualmente restringidos de alguna manera.[125] El dominio de proposiciones, esto es, de condiciones de verdad, está determinado por el contexto, por la estructura de saliencia, por el registro de elementos, propiedades y dominios relevantes en la conversación. Sea W un dominio de condiciones de verdad. Usualmente, la semántica formal lo concibe como un conjunto de índices tan grande como para especificar $\{w \in W \mid \varphi(w)\}$. Glanzberg los concibe en principio como subconjuntos – selecciones – del conjunto maximal de condiciones de verdad.[126]

125 Glanzberg se dice deudor de C. Parsons (1974) respecto del diagnóstico de la paradoja como un problema de restricción de los cuantificadores que intervienen. Una buena exposición de los aspectos centrales de los dominios de cuantificación en lenguajes naturales y formales se halla en J. Stanley y Z. Szabó (2000).

126 Más adelante, en el marco de la representación formal del cambio contextual dada por Glanzberg, se deja de lado la idea de conjuntos consistentes maximales y se adoptan determinado tipo de estructuras. Cf. II.2.2 más abajo.

Ahora bien, si la dependencia contextual pudiera detectarse de manera directa en λ, si hubiera una incidencia contextual semántica, en términos de Perry[127], se hallaría en la sentencia un componente contextualmente sensible de manera evidente. Sin embargo, el cuantificador en la sentencia no contiene una restricción sintáctica (como en "Most people came to the party", o en "Every bottle is empty"), o un componente indexical o anafórico. Los hablantes de una conversación generalmente no dudan acerca de la indexicalidad de un término o su relatividad directa respecto del discurso. En cambio, la primera reacción frente a PMR es la percepción de que retorna la paradoja; no es transparente su dependencia contextual extraordinaria.

El predicado verdad funciona según Glanzberg como una predicación (potencialmente) infinitaria, por lo que su extensión está comprometida respecto del dominio maximal y no meramente respecto de la cuantificación corriente o manifiesta (cada predicación es una definición parcial de su extensión, como diría Tarski). La referencia en PMR a la inexpresabilidad en el contexto anterior de la proposición λ implica que la cuantificación está sujeta a todo aquello que sea una condición de verdad en ese contexto. La clave está en comprender que el contextualismo de Glanzberg es, sobre todo, un abandono de la idea de que pueda haber cuantificación absolutamente irrestricta. Toda cuantificación se restringe, explícita o implícitamente, de manera contextual. La cuantificación aparentemente irrestricta en la sentencia del Mentiroso en realidad está contextualmente comprometida:

> La posición contextualista acerca de los cuantificadores en el argumento de la paradoja es, pues, que son tanto irrestrictos como contextualmente irrestrictos. Esto es, justamente, que varían sobre el dominio *background* de un contexto dado. [128]

El abandono de esta ilusión de ilimitada expresividad es, como veremos, la piedra de toque de la solución de este autor a PMR. Haciendo eco del diagnóstico de Parsons, Glanzberg sostiene que el universo de los cuantificadores no es constante a lo largo de un mismo discurso; más aun, la referencia de las relaciones semánticas – a través de su caracterización mediante proposiciónes ligadas por cuantificadores y dependientes de relaciones de expresión – pertenece al parecer a una totalidad que ningún conjunto logra abarcar, una maximalidad que, sólo en potencia, resulta irrestricta, resultando en cambio que en cada caso se halla delimitada en tanto dominio de

[127] Cf. J. Perry (1998)
[128] M. Glanzberg (en prensa). Cf. además A. Rayo (2003).

expresión de manera contextual..[129] La contextualidad del predicado en este sentido permitirá desarticular la paradoja, una vez que justifiquemos el motivo y desarrollo del cambio contextual que opera en la inferencia.

1.3 Introducción de artefactos del discurso: cambio contextual

El contextualismo que defiende este autor hace pie en el hecho de la mayoría de los cuantificadores en el lenguaje natural varían sobre dominios contextualmente restringidos, sea la restricción manifiesta o implícita. De ahí a afirmar que todos los cuantificadores están restringidos de esa manera no hay un paso demasiado grande.

Los artefactos del discurso, por ejemplo los valores semánticos de expresiones y dominios relativos a un contexto, son elementos de incidencia directa sobre el discurso. Sin embargo, esta clase de elementos son relevantes para el discurso, pero no aparecen de manera explícita: usualmente no son parte del dominio de cuantificación maximal o determinado en un punto dado del discurso (por ejemplo, cuando se dice que "todo lo que se diga hoy tiene que ver con la prevaricación", no se supone que el cuantificador varíe asimismo sobre esa frase). Incorporarlos es extremadamente dificultoso, y por ello incide directamente sobre la estructura tópica que determina la estructura de saliencia.

Digamos que un contexto reflexivo es aquel en el cual se topicalizan artefactos del discurso, es decir, un contexto en el cual se explicitan y se incluyen en el dominio maximal de condiciones de verdad valores semánticos o incluso dominios. Ahora bien, el paso de un contexto regular a un contexto reflexivo implica una expansión en el dominio *background* de condiciones de verdad: el dominio del contexto reflexivo es estricamente mayor que el *background* del contexto original. ¿Qué sucede cuando en un contexto se hace referencia a su capacidad expresiva? Esta clase de sentencias se torna saliente, puesto que pone de manifiesto algo acerca del dominio maximal de condiciones de verdad disponibles en ese contexto. En su relevancia, y en su incidencia en la saliencia de esa conversación o hecho lingüístico, la sentencia genera un cambio contextual. Una vez que se admite la proposición expresada por tal sentencia, ésta pasa a formar parte del dominio maximal, del total de lo expresable en el nuevo contexto generado. La sentencia λ hace una aserción general acerca de la expresividad del

[129] Cf. C. Parsons (1974).

contexto en el cual se enuncia: se dice que no hay ninguna proposición expresada de tal sentencia que sea verdadera, que las condiciones de verdad en ese contexto en ningún caso satisfacen el contenido de ese enunciado: $\neg\exists p(Exp(\lambda,p)\wedge V(p))$. El primer contexto en la inferencia que implica una aserción de $\neg\exists p(Exp(\lambda,p)\wedge V(p))$ es el resultado del análisis de las condiciones de verdad de la sentencia. Este es el punto donde la relación *Exp* torna saliente en el discurso. Cuando se afirma $\neg\exists p(Exp(\lambda,p)\wedge V(p))$, la estructura de saliencia se expande porque se hace una delaración explícita concerniente a la expresividad de ese discurso. Cambia así el contexto, por expandirse la estructura de saliencia, y de ahí que haya una genuina diferencia en el contexto de $\neg\exists p(Exp(\lambda,p)\wedge V(p))$ y de la siguiente sentencia deducida, a saber, $\exists p(Exp(\lambda,p)\wedge V(p))$.

1.3.1 Imposibilidad de autorreferencia contextual

La concepción del contexto como estructura de saliencia que determina las condiciones de verdad en un momento del discurso permite dar sentido a la idea de que la introducción de un artefacto de discurso ejerza un cambio sustancial en la expresividad de ese discurso, lo cual justifica el cambio contextual que genera. Este cambio, como está visto, es consecuencia directa de la reflexividad contextual. La reflexividad sobre una determinada porción de discurso, pues, implica un universo de discurso mayor. Un discurso menos comprehensivo puede referido desde otro contexto cuyo universo expresivo corresponde al de un metadiscurso respecto del anterior. Dicho de otro modo, cuando en un contexto se hace referencia explícita a sus rasgos semánticamente constitutivos, se abandona el contexto cuyos rasgos se explicitan para pasar a uno nuevo, en el cual los recursos lingüísticos permiten poner de manifiesto tales características fundamentales. O mejor, las predicaciones que hacen referencia al contexto como un todo (al dominio maximal de condiciones de verdad) implican una expansión que se ordena jerárquicamente, atendiendo a la recursividad y posibles ulteriores "reflexiones" del contexto. Esto no es otra cosa que un bloqueo de la autorreferencia contextual.[130] Sin embargo, como ha intentado justificarse, no se trata de una imposición arbitraria, sino de un proceso lingüísticamente explicado mediante la expansión que se genera al considerar explícitamente en un discurso sus propios rasgos

[130] Cf. I.4.2, I.5.1 y I.5.2 más arriba.

semánticos.[131] Cuando justificamos el proceso de expansión contextual y emerge la jerarquía de contextos (vistos formamlmente como estructuras de saliencia, cuya injerencia determina los dominios maximales de condiciones de verdad), vemos que para cualquier contexto (estructura de saliencia) $\mathfrak{M}$, es posible hallar un contexto distinto $<\mathfrak{M}, V>$ en cuyo dominio maximal se introducen aspectos acerca de la relación semántica que predicaba la verdad en $\mathfrak{M}$.[132] La jerarquía que emerge es más liberal que la tarskiana[133], desde el momento en que no se plantea una determinación inavmovible ni *a priori* del nivel en la jerarquía de los enunciados (esto gracias a considerar que los portadores de verdad son las proposiciones), teniendo en cuenta los factores lingüísticamente complejos pero insoslayables que inciden sobre ellos.

1.3.2 Cambio contextual

Glanzberg inscribe el fenómeno tras la paradoja en esta imagen lingüística particular acerca de los contextos. Es posible resignificar la inferencia de la paradoja si se contempla la posibilidad de que la última sentencia asume un esquema de interpretación más amplio que el provisto por el discurso desarrollado hasta ese punto, otorgando a determinadas emisiones sentido o valores de verdad no abarcados por esquemas de interpretación menos comprehensivos.[134] Al hacer referencia a la capacidad expresiva del lenguaje, teoría o contexto, PM modifica el dominio *background* de toda expresión posterior. Al inferir de PM que λ no expresa una proposición, se hace referencia al dominio maximal de condiciones de verdad, por lo que cuando reconocemos que esta misma sentencia es λ y decimos que después de todo, λ sí expresa una proposición, lo hacemos en un nuevo contexto, que responde a una estructura de saliencia enriquecida por la proposición que expresa el contenido de la conclusión anterior. La estructura jerárquica en que se encuadra la expansión garantiza que en el contexto expandido podemos referir a los enunciados en el contexto original.

---

131 Cf. C. Gauker (2006), quien impone la misma condición – la irreflexividad contextual – pero apela a una noción objetiva de contexto para fundamentarla, dejando su requerimiento escasamente fundamentado.

132 Cf. M. Glanzberg (2004a). A esto le llama en (2001a) el *problema de la resolución*, sólo que la explicación de tal planteo, a saber, que para todo contexto se puede hallar uno ulterior donde pueda hablarse acerca de la expresidad del anterior se da en sus escritos posteriores.

133 Glanzberg mismo señala esto en (2004a).

134 La influencia del trabajo de Parsons (1974) en este punto es directa.

La presunta dificultad o elusividad en la percepción de este cambio contextual no debería, pues, sorprendernos. Tratándose de un empleo post-semántico del contexto, se asume que el discurso mismo descarga y presenta las condiciones y significado de las nuevas emisiones o sus partes, siendo pues necesaria una revisión u observación de tal fondo semántico antecedente (en una conversación, el registro de las estructuras de saliencia parece ser constante, por lo que la revisión es sólo metafóricamente posterior a la comunicación). De este modo, no se piensa que el contexto sea algo previo a las expresiones, ni se reclama que sea explícito o evidente, como en el caso de la referencia anafórica o elíptica.

El enfoque general aquí desarrollado se vuelve notorio frente a otras propuestas contextuales acerca de la definibilidad de la verdad por cuanto abreva deliberadamente de conceptos y problemas estudiados por la lingüística, lo cual permite que su teoría sirva para modelar otros fenómenos comunicacionales y además da un sustento contextual no *ad hoc* del tipo de cambio contextual que se aduce opera tras PMR.

1.4 Teoría de la verdad no contextual: derivación de PMR

Una vez que se asumen las proposiciones, la cuantificación sobre ellas y la pertenencia de las proposiciones cuantificadas en una sentencia particular a un dominio maximal de condiciones de verdad, podemos representar la inferencia de PMR. Su derivación se encuadra en una teoría axiomática básica, mínima de la verdad que extiende cualquier axiomatización clásica de LPO, cuyos principios se explicitan teniendo en cuenta los presupuestos teóricos mencionados.

Si el nombre de la sentencia *s* expresa la proposición *p*, entonces *p* es verdadera sii es el caso que *s*.

V-Exp: $Exp(\ulcorner s \urcorner, p) \rightarrow (V(p) \leftrightarrow \sigma)$

Si la sentencia *s* expresa en un contexto la proposición *p* y la proposición *q*, entonces *p* es igual a *q*.[135]

U-Exp: $(Exp(s, p) \wedge Exp(s, q)) \rightarrow p=q$

Si *p* y *q* son la misma proposición, es verdadera *p* sii es verdadera *q*.

[135] Quizás este sea el principio más fuertemente no contextualista de esta teoría mínima.

V-Id: $p{=}q \rightarrow (V(p) \leftrightarrow V(q))$

Si la sentencia *s* es demostrable a partir de premisas verdaderas, entonces *s* expresa alguna proposición.

Exp-Dem: Si $\vdash s$ a partir de premisas verdaderas, entonces $\exists p(Exp(s, p)$

Según refiere Glanzberg, la sencillez y aparente inobjetabilidad de estos principios es una argumento a favor de la contextualización de la inferencia.

$\lambda = \neg\exists p(Exp(\lambda, p) \wedge V(p))$

Suponemos que $\exists q\ Exp(\lambda, q)$

1. $V(q)$	(Supuesto $\Rightarrow$)
2. $\neg\exists p(Exp(\lambda, p) \wedge V(p))$	(por V-Exp)
3. $\neg V(q)$	(por 2 y por sup $Exp(\lambda, q)$)
4. $\neg V(q)$	(Supuesto $\Leftarrow$)
5. $\exists p(Exp(\lambda, p) \wedge V(p))$	(por V-Exp)
6. $p = q$, $V(p)$	(por U-Exp y supuesto inicial)
7. $V(q)$	(por V-Id)
8. $\boldsymbol{\neg\exists p(Exp(\lambda, p) \wedge V(p))}$	(por 3 y 7)
9. λ	(por λ y 8) Resultado de un ascenso semántico
10. $\boldsymbol{\exists p(Exp(\lambda, p) \wedge \mathrm{V}(p))}$	(por Exp-Dem)

La inferencia de 1 a 8 recorre en la axiomatización dada del predicado verdad la posible evaluación de λ cuando suponemos que expresa una proposición. Ello permite deducir en 8 - bajo una semántica parcial - que λ no expresa una proposición, en virtud de los resultados en 3 y 7. En el paso 9 y luego en 10, se refleja la reevaluación – la observación metalingüística justificada por el ascenso semántico - que, considerando las condiciones de verdad de λ ($V(\lambda) \leftrightarrow \neg\exists p(Exp(\lambda, p) \wedge V(p))$), resulta en la conclusión de que λ sí expresa una proposición.[136]

Tanto 8 como 10 resultan de deducciones correctas, por lo que ambas deben ser verdaderas. Pero mientras que 8 plantea que λ no expresa ninguna proposición, 10 establece que λ sí expresa una proposición. De ahí que reaparezca la contradicción: hasta 8, se desarticula PM mediante una semántica parcial o alguna otra justificación de la ausencia de referencia proposicional de λ, pero en 10 retorna la contradicción, aparece PMR.

La presentación de la inferencia muestra que el enunciado del Mentiroso expresa una proposición, aunque anteriormente se haya demostrado que no expresa ninguna. Al plantearla en términos de expresión de proposiciones, es posible relacionar este comportamiento irregular de la sentencia λ en distintas emisiones con el de (una gran candidad de) sentencias contextualmente dependientes.[137] La dependencia en juego en el caso de λ, sin embargo, no se halla en la presencia de elementos indexicales, de demostrativos o de alguna relatividad manifiesta. Más bien se trata de una forma extraordinaria de dependencia contextual, puesto que 8 sostiene del espacio expresivo del contexto hasta ahí generado que no existe una proposición verdadera expresada por λ. La saliencia de este enunciado, dada por la reflexividad acerca del dominio maximal de condiciones de verdad que involucra, genera una expansión del contexto al incorporarse a la estructura de saliencia.[138] Esta particular expansión significa que la dependencia en λ sea de índole extraordinaria, ya que la diferencia en las evaluaciones de la sentencia responde a que los cuantificadores proposicionales en 8 y 10 dependen de dominios maximales de condiciones de verdad diferentes.

1.4.1 Verdad interna: el enfoque jerárquico

Como recién se apuntó, los contextos se expanden como consecuencia (en el caso particular que se estudia) de predicaciones de verdad que involucran al contexto

[136] Cf. I.2.3 más arriba.

[137] La aplicación de estas ideas supone, claro está, que es posible relacionar el comportamiento del discurso ordinario con el de las pruebas. Quizás este sea el presupuesto filosófico más básico de todo el contextualismo: su carácter evidente no ha de velar, sin embargo, su importancia.

[138] Cf. C. Parsons (1974), quien demuestra que un predicado verdad definido sobre un dominio de discurso particular no es equivalente a su propia relativización a tal dominio, a ese conjunto de mundos posibles.

como un todo, a predicaciones aparentemente universales o irrestrictas. La relación jerárquica que guardan da sentido a que en los contextos expandidos sea posible "hablar" acerca de los contextos previos. En particular, como el dominio maximal de condiciones de verdad del contexto anterior es un subconjunto del nuevo dominio, puede comprenderse que se establezca una jerarquía, una discriminación y orden de estos predicados. Asimismo, puede comprenderse que en el caso de 10, aunque se hace referencia a la verdad de la proposición expresada por λ, se hace referencia a la relación semántica correspondiente al contexto previo.

En un nuevo contexto decimos que una proposición evaluada en un contexto anterior satisface las condiciones de verdad de λ. Esta relación de "verdad interna", particular de un contexto determinado, resulta crucial en la reinterpretación contextual de PMR. La centralidad que reviste radica, sobre todo, en que si en 10 empleáramos simplemente la relación semántica correspondiente, el cuantificador variaría sobre el dominio expandido completo, mientras que en 8, $\exists$ varía sobre el dominio previo a la expansión. Sin embargo, esta relación semántica particular depende del nuevo dominio, aunque sólo varía sobre un subconjunto. Reconstruido coloquialmente, puede verse que el paso 10 dice desde un contexto en el cual *Exp* ha tornado saliente que en el *contexto anterior* sí pudo expresarse una proposición correspondiente a la sentencia del Mentiroso.

La estructura jerárquica generada a partir de la expansión descripta resguarda la posibilidad de referir de este modo a la extensión de predicados inferiores en la jerarquía. Esto se logra en virtud del bloqueo de la autorreferencia que resulta del cambio contextual debido a la introducción del artefacto del discurso, de la expresividad de un contexto. El desafío más concreto que puede imponerse a la presente propuesta es, pues, hacer plausible una interpretación de un fenómeno del lenguaje natural que involucre una jerarquía definida (aunque no fija). Tal fue, de algún modo, la exigencia que históricamente se imputó a la definición tarskiana del predicado, el cual en principio tomaba distancia de caracterizaciones inspiradas en el predicado en su función en los lenguajes naturales, por ser éstos semánticamente cerrados.[139] En la medida en que se acorta esa brecha planteada por la definición ortodoxa, ha de atenderse a la manera en que se justifica esta clase de comportamiento estructurado y en algún sentido estratificado.

[139] Cf. C. Parsons (1974).

La deuda respecto del análisis de Parsons de la paradoja del Mentiroso reside, principalmente, en el esfuerzo por hallar una raíz lingüística-contextual que dé cuenta de la caracterización formal del predicado. Según este autor, el empleo del predicado verdad supone una interpretación que puede ser un objeto del discurso, en caso de que implique una asignación de extensiones a las partes de las sentencias del lenguaje. Pero el universo de discurso de la interpretación debe asimismo ser un objeto, por lo que la interpretación no puede cubrir el discurso en el cual se formula. Esto indica que la cuantificación irrestricta conlleva de manera primariamente velada una restricción que implica la existencia, para cualquier contexto, de un contexto mayor desde el cual pueda darse una una interpretación tematizada que asigne un valor de verdad a todo lo que se diga, lo cual no es requisito para el *uso* de un lenguaje. Parsons recalca fuertemente la analogía entre la jerarquía de la teoría de tipos[140] y la jerarquía (del tipo que sea) que resulta necesaria frente a PM. Glanzberg, no obstante, toma distancia en este punto, dado que la jerarquía resultante de una extensión de los dominios maximales de condiciones de verdad difiere de la tarskiana: no se trata de un orden *a priori* sino del efecto de la predicación explícita de rasgos implícitos de un discurso en particular Además, si hay una fragmentación, se da *dentro de un mismo lenguaje*, por lo que resultan infinitos (o diferentes) predicados semánticos, sino un predicado cuya extensión varía, pero cuya definición se mantiene.

[140] Cf. II.3.3 más adelante.

2 Resumen del modelo formal de la dependencia extraordinaria y de la expansión contextual

Es necesario otorgar valores semánticos apropiados a las relaciones semánticas que se pretende modelar. De allí podrá explicarse cómo se expande el dominio de condiciones de verdad al expandirse el contexto, lo cual implicará un empleo de lenguajes y enunciados infinitarios como representación de las sentencias que contienen expresiones semánticas. El hecho de que las fórmulas de primer orden puedan identificarse mediante números naturales mediante alguna forma de numeración de Gödel permite identificarlas además con conjuntos finitos, por lo que deja de ser necesario considerar las fórmulas como inscripciones finitas. De allí que puedan pensarse lenguajes cuyas fórmulas se identifiquen naturalmente con conjuntos infinitos. Los lenguajes de este tipo se llaman infinitarios.[141]

Valiéndose de herramientas de la teoría de conjuntos admisibles con urelementos de Barwise[142], Glanzberg da una representación uniforme de los conjuntos determinados por una estructura de saliencia identificando primero la construcción correcta de conjuntos admisibles sobre una estructura arbitraria, aplicándola luego a la estructura de saliencia dada por un contexto.

La definibilidad permite que la reflexividad contextual genere en el contexto expandido exactamente los subconjuntos del contexto original definibles en el vocabulario correspondiente al lenguaje extendido. Respecto de esto, cabe mencionar que la iteración hasta el cierre bajo los subconjuntos definibles en el dominio de condiciones de verdad del contexto original plantea una expresividad kripkeana, por cuanto es posible en el contexto expandido no sólo referir a aspectos semánticos del contexto original, sino también a rasgos metasemánticos expresables en el discurso correspondiente al contexto superior.

El dominio del nuevo contexto se construye añadiendo los subconjuntos definibles[143]; los conjuntos construibles corresponden a los artefactos del discurso, mientras que los elementos que no son artefactos o que son expresiones ordinarias

---

[141] Cf. E. N. Zalta (2006).

[142] Cf. J. Barwise (1975).

[143] Un subconjunto y de un modelo $\mathfrak{C}$ es definible en primer orden sobre $\mathfrak{C}$ sii hay una fórmula $\psi(v_0,v_1,\ldots,v_n)$ y y elementos $a_0, a_1, \ldots, a_n$ en el dominio C tales que $y = \{z | \mathfrak{C} \vDash \psi[z, a_0, a_1, \ldots, a_n]\}$. Cf. J. Floyd; A. Kanamori (2006).

corresponden a los urelementos, puesto que no varían a medida que nos movemos entre contextos reflexivos. Se estima que la iteración llegue hasta el límite del proceso inductivo relativo a los recursos expresivos del dominio de condiciones de verdad original.

En lo que sigue haremos una modesta presentación de este sofisticado modelo formal.[144] Dada la complejidad de los lenguajes y estructuras que se emplean, nuestra pretensión es sólo mostrar algunos de sus aspectos fundamentales a fin de poner de manifiesto el esfuerzo de Glanzberg por encontrar una formalización adecuada del tipo de cambio contextual que defiende. No pretendemos, que sea claro, que esta presentación sea completamente autocontenida ni exhaustiva. Remitimos al lector a algunas de las fuentes más importantes[145], bastando aquí con hacer una referencia somera.

2.1 Lenguaje

$\mathcal{L}$ es el lenguaje de una estructura $\mathfrak{M}$, un subconjunto propio del lenguaje disponible para los hablantes que se está representando. La signatura de $\mathcal{L}$ son sólo las expresiones salientes. La distinción más interesante se da entre el lenguaje sin términos semánticos y el lenguaje con términos semánticos que los hablantes emplean. Por ello, identificamos el lenguaje del contexto inicial con el componente no semántico del lenguaje disponible para los hablantes. Así, los mundos relevantes son estructuras de $\mathcal{L}$.

De aquí en adelante, como simplificación metodológica, se trata a los contextos como meras estructuras de saliencia. La estructura de saliencia como representación formal parcial recoge los elementos destacados – individuos, relaciones y dominios – para los hablantes en un punto determinado del discurso. Se asume que un contexto *vacío* o inicial (*null*) contiene información mínima acerca del lenguaje en cuestión, de manera que tenga una estructura capaz de soportar una codificación de Gödel de la sintaxis del lenguaje. Se toma así que tal estructura es algo similar a $\mathbb{N}$. Estas estructuras deben contener recursos sintácticos básicos, pero la necesidad de modelar el cambio contextual impide restringir nuestra atención a conjuntos como $\mathbb{N}$. La aplicación al caso

[144] Desarrollado de manera más exhaustiva en M. Glanzberg (2004a).
[145] J. Barwise (1975), N. Cutland.(1973), P. Hinman (1978), H. Keisler (1971), H. Keisler, J. Knight (2004), Y. Moschovakis.

del Mentiroso demandará pues estructuras similares a $\mathbb{N}$, $<\mathbb{N}, Exp>$, … Apelando a la noción de Moschovakis de *estructura aceptable*, puede darse sentido a la idea de encontrar conjuntos cercanos o parecidos a $\mathbb{N}$.[146] Sea $\mathcal{L}$ el lenguaje de una estructura aceptable $\mathfrak{M}$. $\mathfrak{M}$ es aceptable si contiene las operaciones elementales para codificar secuencias finitas de *M,* el universo de la estructura $\mathfrak{M}$, incluyendo un orden elemental $\mathbb{N}^{\mathfrak{M}}$ isomorfo respecto de $\mathbb{N}$. Asumiendo que $\mathcal{L}$ tiene una signatura numerable, puede codificarse en $\mathbb{N}^{\mathfrak{M}}$. Será útil tomar el supuesto más fuerte de que $\mathcal{K} = \mathcal{L} \cup \{\mathrm{m} \mid m \in M\}$ puede codificarse en $\mathbb{N}^{\mathfrak{M}}$.

2.2 Contexto como estructura de saliencia

Una *estructura* arbitraria $\mathfrak{C}$ se define como una interpretación para un lenguaje (de primer orden) $\mathcal{L}$, esto es, para una mera sintaxis, de la siguiente manera:

$<C, \mathcal{F}>$, donde

C es un conjunto no vacío, llamado el **dominio** o el **universo** de la estructura,

$\mathcal{F}$ es una función cuyo dominio es el conjunto de los símbolos propios de $\mathcal{L}$ tal que:

si *P* es un símbolo de predicado de $\mathcal{L}$, $\mathcal{F}(P)$ es un subconjunto de *C*,

si *R* es un símbolo relacional n-ario de $\mathcal{L}$ (n>1), $\mathcal{F}(R)$ es una relación n-aria en *C*

si *c* es una constante de $\mathcal{L}$, $\mathcal{F}(c)$ es un elemento de *C*

Si *s* es un símbolo propio de $\mathcal{L}$, $\mathcal{F}(s)$ es la interpretación de *s* en la estructura $\mathfrak{C}$.

Usualmente, luego de fijar el significado de los símbolos lógicos en la estructura, es posible definir el valor de verdad de las sentencias de $\mathcal{L}$ para el cual se construye la estructura. A partir de aquí, se asume que un contexto $\mathfrak{M}$ es una estructura fuertemente aceptable (es una estructura aceptable y hay una codificación hiperelemental de *M* en $\mathbb{N}^{\mathfrak{M}}$) con una cantidad finita de relaciones.[147]

---

146 Cf. Y. Moschovakis (1974), Cáp. 1

147 Una *copia* de ω es cualquier estructura $<\mathbb{N}, \leq>$ isomorfa respecto de $\omega=<\omega, \leq>$. Un *esquema* sobre una estructura $\mathfrak{C}$ consiste en una copia $<\mathbb{N}, \leq>$ de ω en $\mathfrak{C}$ junto con un mapeo que asigna un miembro de *C* a cada secuencia finita de *C* y que es uno a uno. Un esquema de codificación es *(hiper) elemental* si el

Como componente de los contextos, la información en la estructura incide en la determinación de las condiciones de verdad expresadas por las emisiones en un punto del discurso. La expresión formal de este componente de los contextos es, por cierto, abstracta y mucho menos compleja que su correlato en los lenguajes naturales y discursos. Pero, pese a la simplificación que conlleva, la idea de este registro de componentes de importancia, de influencia crucial en el sentido del discurso, parece ser sólida y bien motivada. Esto es, frente a los requisitos de una solución de paradojas y un enfoque contextual formal, un rasgo apreciable, ya que la indeprendencia y motivación de esta noción de contexto parece no caer en la acusación de ser *ad hoc* que tan usualmente se esgrime.

2.3 Dominios de condiciones de verdad

Kripke y Platek introdujeron la noción de conjunto amisible. El propósito original de los conjuntos admisibles fue generalizar la teoría de la recursividad clásica de los números naturales a los ordinales.[148] Un conjunto admisible es un modelo transitivo estándar de determinada subteoría de ZF llamada KPU (Kripke y Platek más urelementos).[149]

Los urelementos son "puntos" sin estructura de conjuntos (si p es un urelemento, $x \notin p$). Un conjunto admisible $\mathbb{P}$ es un conjunto transitivo P (en un universo que contiene un conjunto U de urelementos) que es un modelo de KPU. Un conjunto $\mathbb{P}_{\mathfrak{C}}$ es un conjunto admisible sobre $\mathfrak{C}$ si $\mathbb{P}_{\mathfrak{C}}$ es un modelo de KPU sobre $\mathfrak{C}$, P es transitivo

universo, el orden y las relaciones aritméticas básicas son todas *(hiper) elementales*. Una estructura es *(fuertemente) aceptable* si admite un esquema de codificación (hiper) elemental. Cf. Y. Moschovakis (1974) Cáp. 1

148 Cf. M. Makkai (1977) y J. Keisler; J. Knight (2004).

149 Sea KPU la teoría sobre el lenguaje $\{\in, U\}$, donde U es el conjunto de urelementos, axiomatizada mediante los cierres universales de los siguientes axiomas:

Urelementos: $U(u) \rightarrow x \notin u$

Conjunto vacío: $\exists x(\neg U(x) \wedge \forall y(y \notin x))$

Extensionalidad: $(\neg Ua \wedge \neg Ub) \rightarrow (\forall x(x \in a \leftrightarrow x \in b) \rightarrow a=b)$

Regularidad: $\forall x(\forall y \in x\ \varphi(y) \rightarrow \varphi(x)) \rightarrow \forall x\ \varphi(x)$ para toda fórmula $\varphi(x)$

Par: $\exists a(\in a \wedge y \in a)$

Unión: $\exists b\ \forall y \in a\ \forall x \in y\ (x \in b)$

Δ_0-separación: $\exists b\ \forall x\ (x \in b \leftrightarrow x \in a \wedge \varphi(x))$ para toda fórmula $\varphi(x)$ tipo Δ_0 sin ocurrencias libres de b

Δ_0-colección: $\forall x \in a\ \exists y\ \varphi(x, y) \rightarrow \exists b \forall x \in a\ \exists y \in b\ \varphi(x, y)$ para toda fórmula φ tipo Δ_0 sin ocurrencias libres de b. Cf. M Makkai (1977), J. Keisler; J. Knight (2004).

sobre C (lo cual se define mediante una jerarquía de conjuntos hasta ordinales límite sobre C) y $\in$ se restringe a $(C \cup P) \mathrm{x} P$.

Sea $\mathbb{P}_{\mathfrak{M}}$ un conjunto admisible sobre $\mathfrak{M}$, la estructura de saliencia. Los conjuntos admisibles más importantes en lo que sigue serán de la forma $\mathbb{H}\mathrm{YP}_{\mathfrak{M}}$: el menor conjunto admisible $\mathbb{P}_{\mathfrak{M}}$ que contiene M, la intersección de todos los conjuntos admisibles sobre $\mathfrak{M}$ (que contienen a $\mathfrak{M}$ *como elemento*). Para $\mathfrak{M}$, el dominio maximal de expresividad está dado por el siguiente conjunto admisible $\mathbb{H}\mathrm{YP}_{\mathfrak{M}}$. Recuérdese que para una estructura aceptable $\mathfrak{M}$, las relaciones sobre M en $\mathbb{H}\mathrm{YP}_{\mathfrak{M}}$ son exactamente las relaciones hiperelementales (para el caso de $\mathbb{N}$, estas son las relaciones hiperaritméticas[150]), y son definibles sobre $\mathfrak{M}$ mediante fórmulas de $\mathcal{L}_{\mathbb{H}\mathrm{YP}\mathfrak{M}}$. Para cualquier $\mathfrak{M}$, $\{R \subseteq M : R \in \mathbb{H}\mathrm{YP}_{\mathfrak{M}}\}$ es $\prod_1^1$ en $\mathfrak{M}$ (una relación de segundo orden). Los recursos expresivos disponibles para los hablantes en el contexto $\mathfrak{M}$ (los mundos disponibles para formar proposiciones) están representados por las estructuras de $\mathbb{H}\mathrm{YP}_{\mathfrak{M}}$. (por lo que los elementos del dominio M resultan ser urelementos en $\mathbb{H}\mathrm{YP}_{\mathfrak{M}}$)[151]. Identificando condiciones de verdad con estructuras, se mostrará que $\mathbb{H}\mathrm{YP}_{\mathfrak{M}}$ provee el dominio de condiciones de verdad o mundos $W_{\mathfrak{M}}$ disponible en $\mathfrak{M}$.

Puesto que el aspecto de estos conjuntos de elementos destacados que más interesará es la manera como cambia – gana y pierde objetos – a medida que el discurso progresa, es necesario articular formalmente la manera como se expande. La *expansión* de estas estructuras se da, entre otros casos, cuando se introduce un nuevo término en un discurso, de manera que su **interpretación** sea saliente (tenga una incidencia crucial) en ese momento de la conversación.

Para un vocabulario $\mathcal{L}$ y dos cardinales infinitos $\mu \leq \kappa$, $\mathcal{L}_{\kappa\mu}$ es la lógica infinitaria con κ variables, conjunciones y disyunciones sobre conjuntos de fórmulas de tamaño menor que κ, y cuantificadores existenciales y universales sobre conjuntos de variables de tamaño menor que μ. ω es el primer ordinal infinito, y ω_1 el primer ordinal no numerable. $\mathcal{L}_{\omega\omega}$ es la lógica de primer orden elemental, con conjunciones, disyunciones y cuantificadores finitos; $\mathcal{L}_{\omega_1\omega}$ tiene ω_1 variables; tiene disyunciones y conjunciones numerables, y cuantificadores finitos. La unión de $\mathcal{L}_{\kappa\omega}$ sobre todos los cardinales κ es la

150 Cf. Y. Moschovakis (1974) Cáp. 1.
151 Cf. M. Makkai (1977).

lógica $\mathcal{L}_{\infty\omega}$, que tiene una variable v_α para cada ordinal α, conjunciones y disyunciones sobre conjuntos arbitrarios de fórmulas, y cuantificadores sobre conjuntos finitos de variables. Los lenguajes infinitarios empleados serán fragmentos de $\mathcal{L}_{\infty\omega}$. Un fragmento es, básicamente, un subconjunto de $\mathcal{L}_{\infty\omega}$ que contiene todas las fórmulas finitarias, y es cerrado bajo sustitución de términos, subfórmulas y operadores finitarios. Los fragmentos admisibles de $\mathcal{L}_{\infty\omega}$ serán interesantes para nuestros propósitos. Un fragmento admisible $\mathcal{L}_{\mathbb{C}} = \{\varphi \in \mathcal{L}_{\infty\omega} \mid \varphi \in \mathbb{C}\}$ es el conjunto de fórmulas de ese lenguaje que pertenecen a determinado admisible. Deseamos emplear $\mathbb{H}\mathrm{YP}_{\mathfrak{M}}$ para capturar los recursos expresivos disponibles en $\mathfrak{M}$. Por lo tanto, observaremos los lenguajes infinitarios que describen mundos, particularmente en los fragmentos $\mathcal{L}_{\mathrm{B}}$ en $\mathbb{H}\mathrm{YP}_{\mathfrak{M}}$.[152] Los mundos corresponden a teorías completas y consistentes que pueden formularse en estos fragmentos.

2.4 Predicado(s) verdad

Considérese la relación binaria $V(w, s)$ que se da sii el enunciado s es verdadero en el mundo w. Dados nuestros supuestos, una vez que se fija un dominio $W_{\mathfrak{M}}$, esta relación V fija también la relacion *Exp*. Más aun, para un contexto $\mathfrak{M}$ con un dominio de condiciones de verdad $W_{\mathfrak{M}}$, $Exp(s, p) \leftrightarrow p = \{w \in W_{\mathfrak{M}} \mid V(w, s)\}$.

Sea $\mathcal{K}^{+}$ el lenguaje que extiende $\mathcal{K}$ añadiendo el símbolo de relación binaria **V**. Se pretende que la interpretación del predicado verdad V sea tal que $V(x, y)$ se dé si y es un enunciado de $\mathcal{K}^{+}$, x es una estructura de $\mathbb{H}\mathrm{YP}_{\mathfrak{M}}$ e y es verdadera de x. Nuestra tarea es la de construir una V apropiada para interpretar **V** en el contexto $\mathfrak{M}$. Esto requiere articular algunos instrumentos de codificación que solamente mencionaremos: la función elemental *Den*(m) da el término *m* que denota a m en $\mathcal{K}$. *Str*(x) ("x es una estructura") se define mediante un esquema de codificación π para $\mathbb{H}\mathrm{YP}_{\mathfrak{M}}$, y es un predicado inductivo sobre $\mathfrak{M}$. $Str(x) \leftrightarrow (D_\pi \wedge |\mathrm{x}|_\pi$ es una estructura).

En la presentación original de Glanzberg, como en muchas otras definiciones formales del predicado verdad, se construye un predicado parcial, un par que consiste de

---

152 $\mathcal{L}_{\mathrm{B}}$ es un fragmento particular de $\mathcal{L}_{\omega_1\omega}$. Cf. M. Makkai (1977).

una extensión y una antiextensión. Por brevedad, aquí se registrarán sólo las extensiones. ¿Cuál debe ser la extensión de **V**? Construyamos esta relación en etapas.

$$V_0 = \{<x, y> \mid Str(x) \wedge Sent(y) \wedge <x, \varnothing> \models y^*\}$$

$$V_{\alpha+1} = \{<x, y> \mid Str(x) \wedge Sent(y) \wedge <x, V_\alpha> \models y^*\}$$

En esta primera etapa obtenemos todas las *Str*, puesto que toda sentencia válida de $\mathcal{K}$ es verdadera en cada estructura. Asimismo, obtenemos aquí todas las sentencias de $\mathcal{K}$. Esta definición provee de un operador monótono que tiene un mínimo punto fijo, V, que resulta suficiente para interpretar el predicado en este estadio inicial (la información mínima que contiene permite caracterizar V sin recargar innecesariamente su extensión). Este punto fijo tiene la siguiente propiedad: para cualquier sentencia $\mathcal{K}^+$, $(V(x,\ulcorner\varphi\urcorner) \vee V(x,\ulcorner\neg\varphi\urcorner)) \rightarrow (V(x, \ulcorner\varphi\urcorner) \leftrightarrow <x, V> \models \varphi)$. Esto hace que V sea una interpretación plausible de **V**, lo cual abona una correspondencia con la genuina noción semántica $\models$, particularmente a través de la autoaplicación del predicado **V**. Este punto fijo básico resulta un modelo adecuado del cambio contextual en la inferencia del Mentiroso.

Es un resultado estándar de la construcción de Kripke usual que el mínimo punto fijo sea inductivo y no hiperelemental[153]. Lo mismo se da para el V aquí definido. V es inductivo sobre $\mathfrak{M}$; claramente no es elemental, pero aún no queda claro que no sea hiperelemental. Suele demostrarse que el predicado verdad de Kripke no es hiperelemental mostrando que es completo para relaciones hiperelementales. Pero nuestro V no da información de manera directa acerca de $\mathfrak{M}$. $\mathfrak{M}$ es el contexto y V da información acerca del dominio de condiciones de verdad que es determinado por el contexto.

2.5 Expansión contextual

La expansión del dominio de condiciones de verdad – estructuras – debe ser tal que en el cambio de $\mathfrak{M}$ a $<\mathfrak{M}, V>$ se expanda $\mathbb{HYP}_{\mathfrak{M}}$ agregándose nuevas estructuras. La base para la expansión es la adición de la relación V sobre la estructura $\mathbb{HYP}_{\mathfrak{M}}$. Como cualquier diferencia en los mundos del dominio debe traducirse en algo que los

153 Cf. P. Burguess (1986) y V. McGee (1991).

hablantes puedan expresar, se sigue que para estructuras distintas cualesquiera de $\mathbb{H}\mathrm{YP}_{\mathfrak{M}}$, debe haber algo que los hablantes pueden expresar en $\mathfrak{M}$ que marca una diferencia. Glanzberg muestra en sucesivos teoremas de qué manera $\mathbb{H}\mathrm{YP}_{\mathfrak{M}}$ representa la expresividad de $\mathfrak{M}$.[154] Estructuras no isomorfas cualesquiera no hacen verdaderos los mismos enunciados de $\mathcal{L}_{\mathbb{H}\mathrm{YP}\mathfrak{M}}$.

Para mostrar en el modelo formal cómo se expande el dominio de condiciones de verdad al adicionar una relación semántica a la estructura, es necesario mostrar que el universo $\mathbb{H}\mathrm{YP}_{<\mathfrak{M},Exp>}$ es mayor – genuinamente incluye más modelos, más condiciones de verdad – que $\mathbb{H}\mathrm{YP}_{\mathfrak{M}}$. El siguiente es un teorema que permite esclarecer tal requisito:

Teorema 2.5.1.[155] Si $\mathfrak{M}$ es aceptable, entonces si P es una propiedad hiperelemental sobre $\mathfrak{M}$, entonces $\mathfrak{M}$ y $<\mathfrak{M}, P>$ tienen las mismas relaciones inductivas e hiperelementales, y $\mathbb{H}\mathrm{YP}_{\mathfrak{M}}$ y $\mathbb{H}\mathrm{YP}_{<\mathfrak{M},\ P>}$ tienen el mismo universo de conjuntos. Más aun, si P y S son relaciones inductivas y no son hiperelementales, entonces $<\mathfrak{M}, P>$ y $<\mathfrak{M}, S>$ tienen las mismas relaciones inductivas e hiperelementales, y $\mathbb{H}\mathrm{YP}_{<\mathfrak{M},\ P>}$y $\mathbb{H}\mathrm{YP}_{<\mathfrak{M},\ S>}$tienen el mismo universo de conjuntos.

Con esto se demuestra que añadir V al contexto induce una genuina expansión de $\mathbb{H}\mathrm{YP}_{\mathfrak{M}}$. Todavía queda por verificarse que esto de hecho produce más condiciones de verdad, más estructuras en $\mathbb{H}\mathrm{YP}_{<\mathfrak{M},\ V>}$. Puede observarse de manera inmediata que para cualquier ordinal α en $\mathbb{H}\mathrm{YP}_{<\mathfrak{M},\ V>}$ pero no en $\mathbb{H}\mathrm{YP}_{\mathfrak{M}}$, hay un orden $<M, \leq>$ en $\mathbb{H}\mathrm{YP}_{<\mathfrak{M},\ V>}$ que no es isomorfo respecto ningún orden en $\mathbb{H}\mathrm{YP}_{\mathfrak{M}}$. Como resultado, al expandir $\mathbb{H}\mathrm{YP}_{\mathfrak{M}}$ a $\mathbb{H}\mathrm{YP}_{<\mathfrak{M},\ V>}$, genuinamente obtenemos nuevas estructuras.[156] Se demuestra así que hay más estructuras – más condiciones de verdad – en $\mathbb{H}\mathrm{YP}_{<\mathfrak{M},\ V>}$ que en $\mathbb{H}\mathrm{YP}_{\mathfrak{M}}$: más estructuras pueden distinguirse mediante los recursos disponibles en $\mathbb{H}\mathrm{YP}_{<\mathfrak{M},\ V>}$.

Puede verse una cierta correspondencia entre el lenguaje con relaciones semánticas y el tipo adecuado de lenguaje infinitario. Como la interpretación de la relación V depende de las estructuras en $\mathbb{H}\mathrm{YP}_{\mathfrak{M}}$, exhibe la misma dependencia contextual extraordinaria como en $\exists p$. Por lo expuesto, sabemos que respecto de un

[154] Cf. nuestra referencia en II.1.2.

[155] M. Glanzberg (2004a).

[156] Cf. *Teorema 2.5.14*. Sea $\alpha=O(\mathfrak{M})$. Sea P una relación inductiva no hiperelemental sobre $\mathfrak{M}$. Hay una estructura $\mathfrak{A}$ en $\mathbb{H}\mathrm{YP}_{<\mathfrak{M},\ P>}$ tal que ninguna estructura en $\mathbb{H}\mathrm{YP}_{\mathfrak{M}}$ modela $Th_{K\alpha}(\mathfrak{A})$ $(= Th_{K\ \mathbb{H}\mathrm{YP}\mathfrak{M}}(\mathfrak{A}) \in \mathbb{H}\mathrm{YP}_{<\mathfrak{M},P>})$. Así, ninguna estructura en $\mathbb{H}\mathrm{YP}_{\mathfrak{M}}$ modela $Th_{K\mathbb{H}\mathrm{YP}<\mathfrak{M},P>}(\mathfrak{A})$. M. Glanzberg (2004a).

contexto dado $\mathfrak{M}$, los recursos expresivos de $\mathcal{K}_{\mathbb{H}\mathrm{YP}\mathfrak{M}}$ no son mayores que los de $\mathcal{K}^{+}$. De este modo, se ve cómo una relación semántica se torna saliente en la inferencia del Mentiroso. Esto expande la estructura de saliencia, lo cual da una mayor *complejidad* a las condiciones de verdad. La dependencia contextual extraordinaria genera dos jerarquías íntimamente ligadas, la de contextos y la de dominios de condiciones de verdad asociados a estos contextos. Más aun, los dominios generan una jerarquía de relaciones semánticas $V^{\mathfrak{M}}$, $V^{<\mathfrak{M},\, V>}$,… Podemos concebir estas distintas jerarquías como aspectos de una sola estructura jerárquica, a saber, $\{\mathfrak{A} | \mathfrak{A} \in \mathbb{H}\mathrm{YP}_{\mathfrak{M}}\} \subset \{\mathfrak{A} | \mathfrak{A} \in \mathbb{H}\mathrm{YP}_{<\mathfrak{M},\, V>}\}$, que es abierta. Es importante resaltar que los niveles no son intrínsecos a los enunciados, sino que los enunciados "buscan su propio nivel".[157]

Se emplea la jerarquía cuando intentamos explicar qué proposición expresa λ en el nuevo contexto de 10,[158] $<\mathfrak{M}, V>$, ya que para lograrlo se debe articular una manera de razonar entre contextos, puesto que tenemos que reconstruir la semántica del contexto $<\mathfrak{M}>$ de 8 en el contexto expandido. Esto lleva a la construcción de una relación de verdad interna, $V^{\sim}$, empleada para interpretar λ, que ya no tiene puntos fijos. De esa manera, es posible concluir que la aserción verdadera en $<\mathfrak{M}, V>$ tiene el contenido de que en el contexto $<\mathfrak{M}>$ de (A), λ no expresa una proposición verdadera, sin que ello sea paradójico. Las condiciones de verdad de esta aserción corresponden al conjunto disponible en el contexto de (A), y la jerarquía resulta esencial para proporcionarlas.

La riqueza de $\mathbb{H}\mathrm{YP}_{<\mathfrak{M},\, V>}$ permite construir las relaciones semánticas internas, las que refieren a la semántica del dominio de condiciones de verdad del contexto anterior, gracias a lo cual podemos referirnos en el contexto expandido a λ del contexto original. Se trata de una solución jerárquica más liberal que la tarskiana,[159] por lo que evita algunas de las objeciones de Kripke. No se parte de una jerarquía de relaciones de verdad ni se indexa una relación, ni se plantea una ambigüedad léxica en la misma – como se definiera el predicado anteriormente, desde propuestas parciales y/o contextuales –, sino que se llega a la jerarquía al concebir la inferencia inserta en un tipo de razonamiento contextual y al dar sentido al razonamiento entre contextos que interviene

157 Cf. S. Kripke (1975).
158 Cf. inferencia de PMR en I.2.3 más arriba.
159 Cf. II.1.4.1 más arriba. Puesto que las técnicas de puntos fijos pergeñadas por Kripke se emplean en la construcción de los niveles de la jerarquía, se permite una vasta auto-aplicación de las relaciones semánticas al interor de tales niveles.

cuando, en el contexto expandido, formulamos una relación de verdad interna que da la proposición expresada por λ.

A su vez, la relación interna $V^{\sim}$ no es la relación semántica propia del contexto $<\mathfrak{M}, V>$. Si lo fuera, la paradoja permanecería y nada habría en el modelo que sirviera para solucionarla. Se permite así mediante la jerarquía una múltiple interpretación del predicado verdad en tal estructura ordenada. Así, no basta reconocer la contextualidad de las sentencias en la inferencia, sino que además es necesario caracterizar y resolver el razonamiento entre contextos que se da entre los pasos 8 y 10 en la inferencia. Y como cualquier jerarquía, hay una posibilidad abierta de agregar nuevos niveles y pasos, desarrollando para cada contexto un contexto siguiente en el cual sea posible referir a su propia relación semántica "V".

3 Objeciones y apoyos

Revisaremos ahora algunos aspectos de la propuesta de Glanzberg a fin de establecer una defensa frente a la objeción de Gauker. Además, procuraremos relacionar su enfoque con otras soluciones y enfoques contextuales a fin de dar mayor sustento a la plausibilidad de su concepción acerca de los contextos y del tipo de salida que articula sobre esa base.

3.1 *Against stepping back* contra Glanzberg

Como señalamos antes, Gauker elabora una crítica general contra las soluciones contextuales de la paradoja del Mentiroso, entendiendo que usualmente proceden relativizando el predicado verdad, sin advertir que eso es lo que invalida la clase de salida que quieren articular. A la manera de un dilema, Gauker sostiene que PMR plantea o bien caer en la contradicción, o bien contextualizar el predicado: ahora bien, una vez relativizada el predicado la verdad, la paradoja se regenera automáticamente, ya que la relativización del predicado impide la clase de inferencia que da un paso atrás, que reevalúa la sentencia *en un nuevo contexto*. Si la verdad es relativa a los contextos, la verdad de una sentencia en un contexto no debería implicar de ningún modo la verdad de una sentencia en otro contexto.

Si bien este autor reconoce en su crítica que Glanzberg no se inscribe directamente en esta definición general del contextualismo, sino que plantea que lo contextualmente dependiente son las proposiciones que expresan las sentencias enunciadas, Gauker no obstante encuentra un resquicio para desestabilizar la solución de este autor. Al reconstruir la inferencia de PMR que Glanzberg formula para luego diagnosticar el problema de la insensibilidad contextuial y la solución que propone, Gauker remarca el uso del principio Exp-Dem, según el cual si una sentencia se demuestra de premisas verdaderas, esa sentencia debe expresar una proposición. Ahora bien, la reconstrucción de Gauker acerca de la propuesta de Glanzberg se presenta como una contextualización de esta inferencia de PMR, a partir de lo cual Gauker objeta la insostenibilidad del principio Exp-Dem una vez contextualizada la verdad (la expresión de proposiciones), sobre todo en el caso de una inferencia intercontextual. Según dice, una vez relativizada la verdad de las proposiciones a los contextos, no parece lícito sostener que de un conjunto de premisas verdaderas en un contexto, si algo se demuestra de ellas, esto pueda resultar verdadero en *otro* contexto.

Gauker localiza la falla de Glanzberg en la aplicabilidad del principio de ascenso semántico entre contextos, a la justificación de que algo demostrado en un contexto a partir de premisas verdaderas pueda ser verdadero en otro contexto. La reconstrucción de Gauker del argumento de Glanzberg lo sitúa en la prueba, y ello pone en evidencia la ausencia de justificación para decir que algo demostrado en un contexto pueda ser verdadero en otro. ¿Hay que desechar esta solución contextual como a las otras? ¿Incurre en el *stepping back*? Si lo hace, ¿acaso no consigue justificarlo?

3.2 El *step back* está justificado

El paso atrás, la referencia y evaluación desde un nuevo contexto al contenido semántico de una expresión ocurrida en un contexto anterior, está justificado en la medida en que sea razonable plantear que en la inferencia del Mentiroso el razonamiento se da entre contextos, por lo cual se reportan condiciones de verdad correspondientes a momentos anteriores. La primera pregunta que exploraremos, pues, se relaciona con la justificación de la incidencia contextual esgrimida por Glanzberg. Luego veremos que el modelo formal de la expansión y cambio contextual es efectivo en representar esta caracterización de la reevaluación contextual. Por otra parte, veremos de qué manera la idea de Glanzberg resulta superadora respecto de la sugerencia de Gauker, teniendo en cuenta la recurrencia de PMR a las limitaciones que han de tenerse en cuenta en su resolución.[160]

3.2.1 Justificación teórica

Glanzberg concibe a los contextos basándose en la idea de que las posibilidades expresivas de un discurso se hallan sujetas a la expresividad (al dominio de condiciones de verdad) de ese mismo discurso. Como antes lo llamáramos, este “cierre lingüístico” solventa la caracterización de los contextos (fundamentalmente) como estructuras de saliencia, registros de individuos, relaciones y dominios de cuantificación. Sobre estas ideas se arguye que la dependencia contextual extraordinaria que opera en PMR es la

---

[160] Cf. I.4.2 y I.5.2 más arriba.

determinación contextual del rango de los cuantificadores aparentemente irrestrictos como el que aparece en 8.[161].

Asimismo, quedo expuesto anteriormente cómo y por qué la introducción de artefactos del discurso tales como las referencias a la expresividad (al dominio maximal de condiciones de verdad) de un contexto.[162] La expansión en la expresividad de un discurso al incorporar de manera explícita una sentencia que declara determinados elementos antes implícitos de ese contexto determina que la relación semántica para este nuevo contexto es distinta de la correspondiente al anterior, ya que el dominio maximal sobre el cual varía el cuantificador proposicional (de manera similar a las cuantificaciones infinitarias). Sin embargo, la expansión se genera a partir de incorporar como saliente la relación semántica del contexto previo. Con ello, se genera una jerarquía que justifica una reevaluación contextual de la verdad de una sentencia en un contexto anterior, dando sentido al *step back* que desarticula la contradicción en la inferencia. La sentencia deducida en el paso 10 de la inferencia reevalúa la sentencia aparecida en 8 respecto de las condiciones de verdad propias del contexto hasta ese momento. La reevaluación, como ya se dijo, sólo puede hacerse desde un nuevo contexto, ya que tener en cuenta la sentencia que aparece en 8 – la cual hace una aseveración acerca de la expresividad de la estructura de saliencia – para decir que, finalmente, λ sí expresa una proposición, sólo puede hacerse desde una estructura expandida donde se ha incorporado la información de 8. La referencia de λ no cambia entre 8 y 10. En 10 señalamos que en 8, λ no expresa una proposición verdadera. Sólo que al modificarse el rango del cuantificador proposicional, incluyéndose en el contexto expandido la sentencia enunciada en (A), resulta que el paso de $\neg\exists p(Exp(\lambda, p))$ a $\neg\exists p(Exp(\lambda, p) \wedge V(p))$ no es en absoluto trivial, como lo sería si se diera en un solo contexto.

De este modo, se obtiene una reconstrucción de PMR desde una imagen lingüística particular que posibilita la reevaluación de la sentencia, que justifica además que se haga tal reevaluación y que da una solución jerárquica a la imposibilidad de autorreferencia contextual que no sólo estructura el proceso de expansión sino que además solventa este bloqueo sobre una base conceptual amplia y rica. Creemos que el éxito relativo de la solución de Glanzberg tiene que ver sobre todo con esta explicación

[161] Cf. prueba en II.1.4 más arriba.
[162] Cf. II.1.1.2 y II.2.2.3 más arriba.

del bloqueo, con la elaboración de un punto de vista que no sólo acuse recibo de los teoremas de limitación expresiva para los lenguajes contextuales sino que además lo haga recurriendo a una dilucidación lingüística sólida del tipo de contextos y la dinámica bajo la cual se los carácteriza.

3.2.2 Correlato formal

La necesidad de referir a la semántica en un contexto distinto de aquel en el cual se reporta implica un aparato formal que lo permita. Esto está garantizado por la construcción de las estructuras de saliencia: V está en $<\mathfrak{M}, V>$ y $\mathbb{H}\mathrm{YP}_{\mathfrak{M}} \in \mathbb{H}\mathrm{YP}_{<\mathfrak{M}, V>}$. Se identifica $\mathfrak{M}$ dentro de $<\mathfrak{M}, V>$ y se reconstruye la relación $V^{\mathfrak{M}}$ de $\mathfrak{M}$ dentro de $\mathbb{H}\mathrm{YP}_{<\mathfrak{M}, V>}$. La jerarquía permite así que con los recursos expandidos del contexto emergente de la autorreferencia contextual – de la explicitación de aparatos del discurso – pueda reconstruirse la semántica del contexto previo.

En el dominio del contexto expandido, algunas estructuras dan información acerca de la semántica del contexto anterior. Puesto que cada estructura $\mathbb{H}\mathrm{YP}_{\mathfrak{M}}$ está dada por su teoría $\mathcal{K}_{\mathbb{H}\mathrm{YP}\mathfrak{M}}$ (corolario 2.3.4),[163] puede decirse que la estructura codifica información sobre un conjunto S relativo a $\mathbb{H}\mathrm{YP}_{\mathfrak{M}}$ si podemos movernos desde su teoría $\mathcal{K}_{\mathbb{H}\mathrm{YP}\mathfrak{M}}$ hacia S dentro de $\mathbb{H}\mathrm{YP}_{\mathfrak{M}}$.

Desde la perspectiva de $<\mathfrak{M},V>$, cada estructura $\mathfrak{A}$ en $\mathbb{H}\mathrm{YP}_{\mathfrak{M}}$ contiene el predicado $V_{\mathfrak{A}}$, o la sección $\mathfrak{A}$ de V, mediante las condiciones de codificación que se imponen sobre su definición. [164]La información dada por cada estructura puede combinarse a fin de reconstruir la versión interna de una relación de verdad dentro de un contexto. Cualquier contexto $\mathfrak{M}$ tiene una relación de verdad interna maximal. Pero de particular interés es el caso en que el contexto es $<\mathfrak{M}, V>$ y $A=\mathbb{H}\mathrm{YP}_{\mathfrak{M}}$: la relación de verdad interna $\mathbb{H}\mathrm{YP}_{\mathfrak{M}}$ de $<\mathfrak{M}, V>$. Sea esta la relación $V^{\sim\mathfrak{M}}{}_{<\mathfrak{M},V>}$ (la versión interna de la relación de verdad para $\mathfrak{M}$ desde la perspectiva de $<\mathfrak{M}, V>$. Sabemos que $V^{\sim\mathfrak{M}}{}_{<\mathfrak{M},V>}$ está bien definida[165], y está en $\mathbb{H}\mathrm{YP}_{<\mathfrak{M},V>}$ pero no en $\mathbb{H}\mathrm{YP}_{\mathfrak{M}}$. De este modo, las

[163] Sean las estructuras enumerables $\mathfrak{B}$ y $\mathfrak{C}$ elementos de un conjunto admisible $\mathbb{C}$. Entonces $\mathfrak{B}\equiv\mathfrak{C}(\mathcal{L}_{\mathbb{C}})$ implica $\mathfrak{B}\cong\mathfrak{C}$.
[164] Cf. teorema 3.3.6 (junto con el lema 3.3.4) de M. Glanzberg (2004a).
[165] Corolario 3.3.10 de M. Glanzberg (2004a).

contribuciones semánticas de cada estructura en $\mathbb{H}\mathrm{YP}_{\mathfrak{M}}$ se combinan para construir $V^{\sim\mathfrak{M}}_{<\mathfrak{M},V>}$ como una reconstrucción de la relación semántica $V_{\mathfrak{M}}$ del contexto $\mathfrak{M}$.

La división de proposiciones concebidas como mundos posibles de una sentencia que expresa una proposición se da respecto de un contexto $\mathfrak{M}$ como la división de las estructuras de $\mathbb{H}\mathrm{YP}_{\mathfrak{M}}$ en dos clases: aquellas en las cuales la sentencia se da, y aquellas en las que la sentencia no se da. Si **V** expresa la relación semántica de la verdad del contexto, queremos decir que una sentencia φ expresa una proposición x si $\forall x(Str(x)\rightarrow(V(x,\ulcorner\varphi\urcorner)\vee V(x,\ulcorner\neg\varphi\urcorner))$. De este modo, decimos que φ es determinada en el mundo w si tiene un valor de verdad de acuerdo con **V**, esto es, $D(w,\ulcorner\varphi\urcorner)\leftrightarrow(V(w,\ulcorner\varphi\urcorner)\vee V(w,\ulcorner\neg\varphi\urcorner))$. φ expresa una proposición si es determinada en todos los mundos: $\mathbf{E}(\ulcorner\varphi\urcorner)\leftrightarrow\forall x(Str(x)\rightarrow D(x,\ulcorner\varphi\urcorner))$ (siendo **E** el predicado que indica que tal sentencia expresa una proposición, una versión parametrizada de *Exp*).

Teniendo en cuenta la sentencia original λ y empleando esta parametrización E y V, vemos que por la diagonalización usual se obtiene un punto fijo tal que $\mathbf{E}(v)\leftrightarrow\neg\mathbf{V}(\pi(\mathfrak{M}),v)$: la sentencia λ tal que $<\mathfrak{M}, V>\models\lambda\leftrightarrow(\mathbf{E}(\ulcorner\lambda\urcorner)\rightarrow\neg\mathbf{V}(\pi(\mathfrak{M}), \lambda))$. Según lo elaborado en el modelo, $<\mathfrak{M}>\models\neg\mathbf{E}(\ulcorner\lambda\urcorner)$. Al expandirse el dominio de condiciones de verdad, correpondiendo ahora a $\mathbb{H}\mathrm{YP}_{<\mathfrak{M},V>}$, vemos que $\neg\mathbf{E}(\ulcorner\lambda\urcorner$, o sea, $\neg(\mathbf{E}(\ulcorner\lambda\urcorner)\wedge\mathbf{V}(\pi(\mathfrak{M}), \lambda))$; es decir, siendo ahora $\mathbf{E}(\ulcorner\lambda\urcorner)\rightarrow\neg\mathbf{V}(\pi(\mathfrak{M}), \lambda))$, que es justamente λ. Respecto del contexto expandido, λ es verdadera, pero sólo porque podemos hacer uso de $<\mathfrak{M}>\models\neg\mathbf{E}(\ulcorner\lambda\urcorner$ en $<\mathfrak{M}, V>$. $V^{\sim\mathfrak{M}}_{<\mathfrak{M},V>}$ es la reconstrucción de la relación semántica $V_{\mathfrak{M}}$ del contexto $\mathfrak{M}$. Asimismo, la interpretación interna de **E** en el contexto expandido está dada por $\mathbf{E}^{\sim}\leftrightarrow\forall\mathfrak{A}\in\mathbb{H}\mathrm{YP}_{\mathfrak{M}}(V^{\sim\mathfrak{M}}_{<\mathfrak{M},V>}(\pi(\mathfrak{M}), \ulcorner\lambda\urcorner)\vee V^{\sim\mathfrak{M}}_{<\mathfrak{M},V>}(\pi(\mathfrak{M}),\ulcorner\neg\lambda\urcorner))$.

Representado así el razonamiento o inferencia entre contextos subyacente a PMR, se presentan las condiciones de verdad de λ en el modelo formal tomando en cuenta que $\ulcorner\lambda\urcorner\notin \mathbf{E}^{\sim}$, por lo que $\mathbb{H}\mathrm{YP}_{<\mathfrak{M},V>}$, $\mathfrak{M}\models\lambda^{\sim}$. De este modo, $\lambda^{\sim}$ es una nueva proposición (sus condiciones de verdad son el conjunto $\{\mathfrak{A}|\mathfrak{A}\in\mathbb{H}\mathrm{YP}_{\mathfrak{M}}\}$) en la medida en que no está en el contexto original, sino que sólo puede obtenerse (existe ese conjunto) en el dominio de condiciones de verdad del contexto expandido. La propuesta jerárquica tolera cierta autorreflexividad, puesto que la relación de verdad interna que permite inferir λ tal como aparecen 8 en el nuevo contexto de 10 se construye como una suerte de reflexión (autoexpresión, referencia a un aparato del discurso, a los recursos semánticos de ese contexto), como una referencia a un subconjunto de las condiciones de verdad del nuevo contexto, el correspondiente a aquello expresable en el contexto anterior. No obstante, la inferencia del Mentiroso vista como un fenómeno del lenguaje natural en efecto no aparece como un proceso en el que hay una autorreflexión explícita acerca del estatus de un contexto anterior: no parece darse este paso atrás. Parece que la dependencia contextual extraordinaria vela este proceso reflexivo y hace que no sea transparente a los hablantes de una conversación.[166]

A partir de esta construcción semántica, incluso es posible dar sentido a la inferencia intrercontextual, la deducción de 10. Esta sentencia responde al cambio contextual generado por la deducción de 8. La generación de $\mathbb{H}\mathrm{YP}_{<\mathfrak{M},V>}$ a partir del dominio del contexto $\mathfrak{M}$ original permite reconstruir el predicado verdad interno en el nuevo contexto. La relación semántica de verdad interna figura la instancia de reflexión acerca del contexto anterior – de su semántica – en el nuevo contexto. Es esta necesidad, la de representar el razonamiento entre contextos referido a propiedades semánticas generales o totales, es la que genera una jerarquía: ésta no se prefija como una estratificación de predicados, ni se indexa el predicado a la manera de una expresión ordinariamente contextual.

3.2.3 Alternativa: contextos objetivos

Tras desestimar todas las soluciones contextuales que incurren en el "paso atrás" injustificadamente (entre ellas, la de Glanzberg), Gauker sugiere adoptar una imagen objetiva de los contextos a partir de la cual pueda contemplarse la irreflexividad contextual establecida mediante el teorema antes desarrollado.

Esta concepción se sustenta, por una parte, en el hecho de que son los objetivos de una conversación los que determinan los elementos relevantes (hechos u objetos) en ella. Estos objetivos pueden, a diferencia de la concepción presuposicional *à la*

166 "That speakers can sometimes succeed in this without fully realizing it is not all that surprising. Linguistic competence, and the pragmatic ability to use language, are complex abilities, the details of which are often not transparent to speakers." M. Glanzberg (2002).

Stalnaker, trascender las creencias de los participantes de la conversación, con lo que la evaluación relativizada de la verdad es, en esta medida, independiente de las mentes de los hablantes. Que sea independiente no implica, según Gauker, que la referencia sea absoluta: se pretende caracterizar positivamente a los contextos como restricciones lingüísticas, pero de índole no intencional.

En este marco, se pretende que el predicado verdad resulte relativo respecto de estos contextos objetivos. Más aun, toda aseveración respecto de qué sentencias son verdaderas en un contexto son a su vez contextuales, verdaderas relativamente a determinados contextos objetivos. De este modo, cada contexto respecto del cual pueden evaluarse sentencias que predican verdad ha de incluir un dominio de contextos relevantes. Un poco más formalmente, sea Δ un contexto (x, y, z,… varían sobre objetos; a, b, c,… sobre hechos o situaciones; A, B, X,… sobre contextos): $\Delta = \{\{x, y, z,\ldots\}, \{a, b, c,\ldots\}, \{A, B, X,\ldots\}\}$. Si α_Δ: "*s* es verdadera en Γ", entonces $\Gamma \in \{A, B, X,\ldots\} \subseteq \Delta$. Si no se bloquearan las predicaciones del tipo α_Δ: "*s* es verdadera en Δ", ocurriría un "problema de fundamento", de identificación de contextos. El contexto en el cual es verdadera la sentencia no puede ser el mismo contexto que sirve de referencia en la evaluación de la predicación.

Gauker anuncia, sin embargo, que la relativización contextual de la verdad y el rechazo de la referencia reflexiva de los contextos tienen que emerger de una concepción sobre la semántica y la comunicación lingüística más amplia. Cabe advertir que, hasta donde podemos apreciar, esto es justamente lo que consigue Glanzberg. Al elaborar una alternativa a la noción presuposicional de contexto, una imagen que enfatiza la estructura de saliencia – conjunto de objetos, relaciones y dominios de cuantificación – como su componente principal, plantea que los contextos se hallan lingüísticamente arraigados al registro comunicativo en el discurso, con lo que tienen relativa autonomía de las creencias o presuposiciones particulares de los hablantes. Más aun, tras explicar lingüísticamente por qué la reflexividad contextual genera una expansión en la estructura de saliencia que trae aparejado un cambio de contexto, se exponen los fundamentos de una posible reconstrucción del "problema de fundamento" recién mencionado.

Si bien la concepción de Glanzberg no contempla que de antemano estén incluidos en un contexto los dominios contextuales, los contextos respecto de los cuales es posible formular sentencias acerca de predicaciones de la verdad, el bloqueo de la autorreferencia se representa formalmente por otra vía (no como un problema de fundación), por la saturación en una estructura que resulta de explicitar artefactos del discurso como sentencias. Con ello, el dominio de contextos tendría su análogo en todas las posibles estructuras cuyas expansiones llevaran a esa nueva estructura expandida. Aunque este conjunto, el modelo formal define una jerarquía de estructuras, dominios y relaciones semánticas donde se visualiza el orden que puede establecerse.

Quizás pueda pensarse que el tipo de contextos sugerido por Gauker sea una forma abstracta o general dentro de la cual pueda subsumirse la caracterización lingüística de Glanzberg. De hecho, no parecen concepciones contrapuestas, sino con distinta especificidad.

3.3 Apoyos teóricos de la noción de contexto de Glanzberg

¿Pueden solucionarse otros problemas empleando la noción de contexto y de cambio contextual elaborada por Glanzberg? ¿Puede articularse su solución dentro de otros modelos formales? ¿Puede hallarse un apoyo de su versión de la dependencia contextual en otras teorías ya consolidadas? Esbozamos algunas reflexiones al respecto en lo que sigue.

3.3.1 Soluciones al Sorites

La posibilidad de resolver otros problemas a partir de la concepción de contexto, dependencia y cambio contextual de Glanzberg insinúa, creemos, que su enfoque no es aislado ni *ad hoc*. El hecho de que otras paradojas, como la del Sorites, puedan enfocarse desde una perspectiva similar a la subyacente a la propuesta jerárquico contextual muestra, creemos, no sólo que es posible hallar configuraciones generales de distintas paradojas (y que puedan subsumirse bajo alguna explicación o salida común), sino además que la imagen lingüística de los contextos defendida por Glanzberg es aplicable más allá del caso particular de la paradoja del Mentiroso.

Stanley se halla inmerso en la discusión alrededor de la contextualidad de los predicados vagos. Contrario a la indexicalidad de los predicados vagos contextualmente concebidos, se refiere en su artículo[167] a diversas soluciones contextuales a la paradoja del sorites según las cuales los límites de expresiones vagas son difícilmente detectables ya que cuando dos entidades son *salientemente similares*, tendemos a reinterpretar la expresión vaga, de manera que de ambos objetos pueda predicarse la propiedad en cuestión. Como consecuencia, el acto mismo de escudriñar la zona de penumbra de la expresión tiene por efecto el cambio en la interpretación de la expresión. Esta manera contextual de explicar la vaguedad de los predicados, en la cual se explica por qué son contextualmente dependientes y de qué modo incide el contexto sobre ellas, es criticada por este autor sobre la base de que la pretendida indexicalidad de los predicados vagos parece no sostenerse cuando la paradoja se rescribe aprovechando la invariancia de los términos indexicales bajo elipsis del predicado verbal sintáctico en las oraciones.

Dejando de lado la discusión acerca de este rasgo de los términos indexicales que se esgrime como respuesta a esta crítica de Stanley,[168] creemos que vale la pena mencionar el tipo de soluciones a las que refiere. Por una parte, al explicar el cambio contextual como un cambio en la extensión de los predicados debida al examen de la zona de penumbra, se apoya la dinámica de cambio de Glanzberg, por cuanto en ella se supone que la explicitación de los artefactos del discurso (por ejemplo, la extensión de un predicado en determinado contexto) expande la estructura de saliencia, resultando en una modificación en la zona de penumbra (¿Qué es ser calvo/blanco/una pila? ¿Cuál es el límite de la extensión de estos predicados?). Por otra parte, teniendo en cuenta que la crítica de Stanley apunta a la indexicalidad de los predicados vagos, se abona la postura no indexical de Glanzberg respecto de los contextos. En la medida en que estas soluciones pueden ser puestas en relación, bajo la intuición de que las soluciones contextuales de las paradojas como la de Mentiroso y la del Sorites,[169] se aspira a que una noción de contexto sea efectiva respecto de las distintas antinomias. De manera conversa, si una caracterización contextual resulta débil o criticable en un caso, se espera que lo mismo suceda en otros.

Aunque no haremos aquí una defensa en firme de una solución al Sorites que siga los lineamientos de Glanzberg, planteamos la inquietud de observar el examen de la zona de penumbra de los predicados vagos como una forma de explicitar los límites expresivos del discurso, como un escrutinio del alcance del predicado interpretado bajo

---

167 J. Stanley (2003).
168 J. Ellis (2004).
169 Cf. G. Serény (2003a), (2003b), (2006).

determinada estructura de saliencia. La evaluación resultante de la zona de penumbra incide sobre la extensión del predicado, de manera análoga a como el dominio maximal sobre el cual varía el predicado verdad se expande a medida que reconocemos sus límites expresivos. Esto invita, ciertamente, a una investigación rigurosa acerca de esta intuición, que aquí solo pretende sugerir el capital tras la perspectiva contextual de Glanzberg.

3.3.2 Lógicas modales epistémicas, múltiples agentes y contextos

Procuraremos aquí brindar un modelo formal para articular la solución de Glanzberg.[170] El intento por inscribir la solución jerárquico contextual de este autor en una teoría mayor, consolidada y formalmente interesante, sin duda sugiere un apoyo de su caracterización de los contextos. Recurriremos como herramienta básica a los Sistemas Interpretados (SI), expuestos de manera sistemática por Fagin, Halpern, Moses y Vardi[171] y enriquecidos con nociones deónticas por Lomuscio y Sergot[172]. Combinando elementos de ambos presentaremos los Sistemas Contextuales Interpretados (SCI), aptos para llevar adelante la propuesta.

Los SI son sistemas que procuran dar cuenta del conocimiento que posee un grupo de agentes desde la perspectiva de un observador que considera el razonamiento sobre el conocimiento de otros agentes. La noción clave de los SI, son los estados locales: el *estado local* de un agente ***i*** puede entenderse como la totalidad de la información de que un agente dispone referida al sistema. El conjunto de la información que maneja cada uno de los agentes referida al sistema conforma un *sistema de estados globales* (SEG).

Vayamos un poco más lejos. Un *sistema contextual de estados globales* (SCEG) se define asumiendo que el conjunto de estados globales de cada agente se halla dividido en estados permitidos y no permitidos (rojos y verdes). En términos de la propuesta de Glanzberg, los elementos explícitos de la estructura son los elementos que el agente tiene "permitido" tener en cuenta: sus estados verdes. Los elementos implícitos son

---

[170] Este es un brevísimo resumen de lo desarrollado en colaboración con M. Dahlquist en "Lo que usted no puede dejar de saber" (presentado en las II Jornadas de Filosofía Teórica, en evaluación para su publicación).
[171] R. Fagin; J. Halpern; Y. Moses; M. Vardi (1996).
[172] A. Lomuscio; M. Sergot (2003)

aquellos que no pueden ser considerados por el agente, los no permitidos: sus estados rojos.

Una estructura discursiva o universo de discurso es infinita, una estructura discursiva contextual, una estructura de saliencia, no lo es. Los límites de esa estructura para un agente ***i*** están dados por sus estados verdes. Son los límites de lo que puede expresarse con propiedad. Para captar la evolución de un sistema necesitamos un *run*. Este se define como una función que vincula tiempo con estados globales. Sobre los SCI podemos agregar una noción de conocimiento clásico expresada por K, y combinarla con el operador deóntico [Exp].

El operador de conocimiento nos dice que alguien conoce sólo dentro del grupo de estados que no puede distinguir, por lo que, a) si la estructura se amplía – como pretende Glanzberg - generaría que los estados locales de los agentes mutasen; b) si el cambio tiene la naturaleza que predica Glanzberg, la estructura incorporará estados no equivalentes con los anteriores, por lo que el agente no conocerá en este nuevo contexto lo mismo que conocía en el anterior, dando lugar a un agente con la capacidad lógica de detectar el cambio de contexto que genera la paradoja.

3.3.3 Contextos y tipos[173]

La función $denot_x(Y)$ que introdujimos en la formulación de la paradoja Contextual y del teorema de limitación expresiva para contextos[174] recuerda en algo el proyecto semántico de Church, en el cual había una noción primitiva de denotación, no reducible extensionalmente. Anderson[175] señala que Church parece sugerir que incluso si se está formulando la semántica de un lenguaje particular, verdad y denotación deberían tomarse como primitivos del metalenguaje estableciendo simplemente axiomas para ellos. Church fue completamente consciente, dice Anderson, del principal obstáculo que la teoría debía enfrentar. Existía el peligro de que una vez formalizada resultase inconsistente, conteniendo como sucedía ideas tales como "el valor de *x* para la asignación *y* es *z*" (en el lenguaje posible *w*). Si estas variables fuesen irrestrictas, entonces amenazan las paradojas. Church presumiblemente adoptaría alguna forma de la

---

[173] Estas ideas se desarrollaron en "Paradojas Semánticas y Autorreferencia Contextual" (trabajo presentado en las VIII Jornadas Rolando Chuaqui Kettlun – Filosofía y matemáticas), en colaboración con L. Urtubey.
[174] Cf. I.4.2 más arriba.
[175] C. A. Anderson (1998).

teoría de tipos, pero esto limita considerablemente la generalidad de la teoría. Es destacable la semejanza de *"el valor de x para la asignación y es z" (en el lenguaje posible w)* con la anterior "la denotación de Δ en X es Y".

La teoría de los tipos proporciona un sistema lógico más potente que el de la lógica de predicados estándar. Puede considerarse una extensión ulterior de la lógica de segundo orden. Hasta ahora el discurso que se refiere a contextos se mantuvo en el lenguaje L de primer orden en donde los contextos se incorporaban mediante el agregado de términos especiales para contextos y la función *denot*. En todo caso, no sabemos qué tipo de entidades son los contextos, pudiendo introducirse como objetos al modo de *conceptos individuales*, siguiendo ideas de Carnap o Church, aunque sin modificar la lógica, como lo propone McCarthy.

La teoría de los tipos nos proporciona otro lenguaje en el cual podría ser caracterizado un contexto con más precisión y que podría arrojar alguna luz sobre las restricciones respecto a la autorreferencia contextual.

En el lenguaje de la teoría simple de los tipos T el conjunto de tipos, es el menor conjunto tal que

(i) $e, t \in \mathrm{T}$

(ii) Si $a, b \in \mathrm{T}$, entonces $<a, b> \in \mathrm{T}$

Los tipos básicos *e* y *t*, individuos y valores de verdad respectivamente, permiten construir todas las demás expresiones.

Como ejemplo del tipo *e* tenemos en un lenguaje de primer orden las constantes individuales y las variables. Las fórmulas, son ejemplos del tipo *t*. Una expresión de tipo $<a, b>$ es una expresión que cuando se aplica a una expresión de tipo a resulta una expresión de tipo *b*. Por ejemplo, una expresión de tipo $<e, t>$, cuando se aplica a una expresión de tipo *e* produce una de tipo *t*. A este tipo pertenecen en un lenguaje de primer orden las letras de predicado de un lugar.

Como posibles candidatos para un contexto tendríamos:

El tipo $<e, t>$ cuya interpretación es la función característica de un conjunto de entidades.

El tipo <<*e*, *t*>, *t*>, cuya interpretación es la función característica de un conjunto de conjuntos de entidades.

Si alguno de estos fuese el tipo que corresponde a un término de contexto en *L*, la prohibición de la autorreferencia para contextos introduciría una restricción sobre los tipos específicos, impidiendo que la asignación para X en Y sea X misma.

Otra alternativa es que un lenguaje extensional no sea suficiente para capturar la representación de los contextos como entidades. Thomason ha propuesto una caracterización a partir de la teoría intencional de los tipos.[176] En esta teoría se amplía el repertorio de tipos posibles agregando una categoría más especificada por una cláusula como la siguiente:

(iii) Si $a \in$ T, entonces <*s*, *a*> $\in$ T

Esta cláusula permite formar un nuevo tipo <*s*, *a*> a partir de un tipo arbitrario *a*. Las expresiones de tipo <*s*, *a*> se usan para referirse a funciones de mundos posibles a entidades de tipo *a*. De este modo, tales expresiones refieren a entidades intensionales. Thomason ha ubicado los contextos en dos categorías alternativamente:

<<*s*, *t*>, *t*>, como conjuntos de proposiciones y luego

<<*s*, *t*>, <*s*, *t*>>, que corresponde a una modalidad. <<*s*, *t*>, *t*>.

En el primer caso un contexto no permite formar proposiciones, sino que solamente las aporta. Nada es afirmable en un contexto sino las proposiciones de que consta. No podemos formar nuevas proposiciones. En vista de que esto puede resultar poco realista, la otra alternativa da lugar a que un contexto forme proposiciones a partir de otras proposiciones. En este caso la restricción que nos ocupa debería traducirse en una restricción sobre la modalidad, más precisamente sobre la relación entre mundos asociada con cada contexto. Pareciera que aquí la falta de reflexividad puede ser más natural.

---

176 Cf. R. Thomason (2001).

Conclusión: ¿Qué costo tiene retornar a las jerarquías?

En el curso de esta investigación, hemos mostrado y cimentado desde una perspectiva formal la clase de limitaciones que deben asumir las estrategias contextuales de definición del predicado para no sucumbir de manera inmediata – como lo hicieron las teorías precedentes – a la regeneración de la paradoja del Mentiroso. En la medida en que las concepciones de los lenguajes formales admitan desde un comienzo y hagan teórica y filosóficamente plausibles las limitaciones expresivas a que están sujetos (sujeción lógicamente demostrada mediante el argumento diagonal), su estabilidad y solidez serán sin duda mayores. Si, por otra parte, la explicación teórica acerca de esas restricciones resulta filosóficamente coherente y defendible, entonces mayor será su éxito relativo y su firmeza.

La exposición concatenada de teoremas diagonales de limitación expresiva para lenguajes clásicos y de puntos fijos hace transparente, creemos, no sólo que el patrón argumentativo subyacente es el mismo, sino también que la restricción para cada lenguaje reaparece sistemáticamente. El argumento mediante el cual logramos establecer el teorema diagonal de limitación contextual consigue, juzgamos, no sólo demostrar esta restricción inherente, sino además poner de manifiesto la relación de los lenguajes contextuales con los de puntos fijos y los clásicos. Cuando ésta se vela o no se percibe con nitidez, se pierde la perspectiva no sólo del "contexto de los contextos" (de su aparición como ajuste, especificación o mejoría de intentos anteriores de definición formal del predicado verdad) sino también de la demarcación revelada por el teorema diagonal obtenido.[177] Recordamos además que al adoptar la argumentación diagonal como estrategia conjuntista general, la reaparición de la paradoja se predice y, a la luz de ello, se procura evitar desde un principio. Como un intento de este tipo, sostenemos, es posible reconstruir el enfoque de Glanzberg.

El predicado verdad parece resistir determinadas formalizaciones, puesto que su carga teórica, su comportamiento general, sugiere casos y aplicaciones no siempre recogidas por los modelos formales que se elaboran para dar cuenta suya. Si bien algunas de esas definiciones pueden intencionada y manifiestamente diferir del

[177] Cf. I.4.2 más arriba.

predicado verdad del lenguaje natural,[178] resulta sin embargo notoria la reaparición de críticas y objeciones que apuntan a las carencias de las versiones formales en tanto no dan cuenta de estos usos intuitivamente justificables y comprensibles. Tal fue el caso, a grandes rasgos, de la crítica a la concepción tarskiana del predicado. Aunque Tarski fue claro respecto de que su definición apuntaba al predicado correspondiente a lenguajes matemáticos clásicos, la fragmentación resultante de la jerarquía de metalenguajes articulada en su caracterización fue ampliamente criticada como una imagen poco fiel de tal relación semántica. Por otra parte, las limitaciones en la teoría de Kripke impulsaron nuevos y distintos intentos de definición, dado que tanto el predicado "no verdadero" como complemento del $V(x)$ elaborado en la teoría de puntos fijos como la idea de que lenguajes y metalenguajes sean del mismo tipo son, tal parece, carencias fuertemente objetables.

La posibilidad de argumentar a favor de una imagen lingüística que haga plausible el comportamiento del predicado de manera que repare las carencias de los lenguajes de puntos fijos pero que no viole la limitación expresiva correspondiente a los lenguajes contextuales requiere que el bloqueo de la reflexividad contextual pueda justificarse más allá de la amenaza de la reaparición de la paradoja del Mentiroso en su versión contextual. Si pudiera darse sentido a la idea de que la autorreferencia contextual provoca un cambio de contexto, o a alguna explicación alternativa de la prohibición respecto de la denotación de un contexto dentro del mismo contexto denotado, se conseguiría una perspectiva teórica que explique el caso del cambio contextual en la antinomia como una instancia o caso particular. El hecho de que hayamos tomado el trabajo de Glanzberg como fuente principal del contextualismo tratado en este trabajo responde, sobre todo, a la actualidad de su propuesta y a la claridad con que presenta las diferencias de su versión de la contextualidad en la inferencia del Mentiroso respecto de otras posturas – algunas ya clásicas – presentes en la literatura. Aunque la concentración de nuestra exposición y tratamiento deja fuera, claro está, muchas caracterizaciones contextuales del predicado de ganada solvencia y extensa discusión, hemos preferido acotar nuesta mirada sobre la teoría de Glanzberg, por cuanto abreva de conceptos y problemas lingüísticos de manera directa, actitud que nos parece adecuada al momento de lidiar con nociones que, aunque estudiadas formalmente, tienen su origen en dominios y cuestiones lingüísticas.

[178] Cf. I.1.1 más arriba.

La elucidación de Glanzberg sobre el proceso que evidencia y genera el cambio contextual en PMR pretende inscribir este fenómeno en la clase de ruptura temática que sucede al introducir un artefacto del discurso, al explicitar proposicionalmente algún rasgo subyacente del discurso. En tal sentido, consideramos que su versión de la dependencia contextual en la antinomia consigue una reconstrucción no *ad hoc* del fenómeno, esto es, pretende inscribir esta clase de contextualidad dentro de un marco más general acerca de la contextualidad lingüística de los discursos, y no sólo articular un escape técnico de la contradicción resultante de la inferencia del Mentiroso. El bloqueo de la autorreferencia contextual pone en claro que la relativa evolución de la teoría contextual acerca de la verdad respecto de las teorías anteriores, como la de Tarski y la de Kripke, se ha de considerar en virtud de la riqueza expresiva relativa de estos lenguajes, ya que parte de su estabilidad – acusar esta cota expresiva – es un presupuesto en su caracterización. Además, su aparente éxito frente a la objeción general de Gauker muestra otro rasgo de mayor evolución respecto de otras propuestas contextualistas, consiguiendo justificar la reevaluación contextual sin que ello trivialice la contextualización del predicado.

En esta misma dirección, la de hallar sustento de la noción de contexto desde su apreciación teórica y formal, mostramos cómo es posible considerar desde esta misma perspectiva problemas tales como la paradoja del Sorites: la sugerencia acerca de una explicación contextual que siga los lineamientos de la aproximación de Glanzberg constituye, pensamos, un apoyo esencial, aunque desarrollado aquí sólo de manera incipiente. Asimismo, el planteo acerca de la modelización del cambio contextual así entendido dentro del aparato de las lógicas epistémico-deónticas sugiere que existen otras estrategias formales (más ampliamente conocidas y estudiadas) de representación de la dependencia según Glanzberg. De manera similar, se insinúa cómo la teoría de tipos puede tomarse como lenguaje alternativo, potente y extensamente estudiado, que permita modelar bajo una consideración intencional las modalidades contextuales, a partir de lo cual podría intentar representarse una caracterización como la de Glanzberg.

Cabe preguntarse hasta qué punto resiste un lenguaje contextual de este tipo la reaparición de la antinomia. Aun cuando se observe desde un principio el impedimento de la reflexividad contextual, es posible pensar que tal limitación expresiva pueda esgrimirse como un aspecto del predicado que merezca formalizarse, y que por ello haya de dejarse de lado las teorías que no consigan reflejarlo. Sin embargo, puede pensarse en que las objeciones a las limitaciones expresivas de los enfoques de Tarski y de Kripke surgieron inmediatamente, en la forma de paradojas, de sentencias con sentido pero cuya evaluación conducía a un *cul-de-sac* a tales lenguajes. Hasta tanto no se halle una afrenta clara al bloqueo de la autorreferencia contextual, una manera de exigir que los modelos formales del predicado hayan de recoger tal forma de autorreferencia, parece que la de Glanzberg es una relativa conquista. Esta provisoria ventaja responde sobre todo al sustento lingüístico en el cual hace pie el modelo formal del enfoque jerárquico-contextual.

Se advierten, no obstante, algunas cuestiones relacionadas con el carácter jerárquico de la articulación de la solución contextual estudiada, sobre las que cabe al menos formular algunas preguntas. ¿Retornar a las jerarquías conlleva una nueva fragmentación del predicado? En la medida en que corresponde a un aspecto interior al lenguaje, a los contextos que pueden configurarse, la jerarquía que emerge no es de índole metalingüística, como fuera el caso de Tarski. En este sentido, la jerarquía se inscribe dentro de un mismo lenguaje, con lo que las relaciones semánticas correspondientes a cada estadio no pertenecen a lenguajes de distinta expresividad. Podría plantearse que, de cualquier manera, sí hay un fraccionamiento del predicado según sus dominios maximales, esto es, según el total de proposiciones relevantes sobre las cuales vaya a predicarse. La fragmentación del predicado, sin embargo, es contextual en cuanto a su extensión; no se la indexicaliza ni relativiza a distintos lenguajes, sino que se la permea del contenido semántico establecido por los discursos en las cuales se predica. La jerarquía de estructuras no está establecida sino que se predice en el modelo formal por la imposibilidad de autorreferencia contextual, de conservación del contexto luego de introducirse artefactos del discurso. La jerarquía no está predeterminada, ni tampoco hay niveles fijos de predicados o dominios de condiciones de verdad, empleándose los mecanismos de definición del predicado *à la* Kripke.

Otra cuestión que seguramente requiera de mayor elaboración es el correlato lingüístico de la reconstrucción del predicado verdad interno (correspondiente al contexto original) en la estructura expandida. Aunque desde la definición de estructuras y modelos adoptada por Glanzberg es posible y perfectamente claro dar cuenta en un contexto de una relación definida sobre un subconjunto de las estructuras pertenecientes al conjunto admisible que representa las condiciones de verdad en una estructura, no es igualmente claro que en los contextos lingüísticos discursivos pueda hacerse lo mismo, o con tanta facilidad. Referir a la verdad en un contexto de manera tan aséptica respecto de las condiciones extendidas del contexto vigente merece, cuanto menos, una reflexión algo más elaborada. Más aun, se plantea la pregunta acerca de cómo se accede desde un contexto exactamente a las condiciones de verdad de otro anterior; ¿dónde o cómo se registran los dominios correspondientes a contextos anteriores? Si bien el modelo de Glanzberg permite definir las relaciones de verdad interna de contextos previos en un contexto extendido, no resulta transparente de qué modo identificamos *ese* contexto en particular desde la nueva estructura. Ante esto, la idea de que en un contexto preexista un dominio de contextos, como lo sugiriera Gauker, es una imagen algo más sencilla, aunque bastante rudimentaria.

Estas preguntas, que apuntan fundamentalmente a las implicaciones de la jerarquía que aparece a partir de la construcción de Glanzberg del lenguaje contextual, quizás sean la sugerencia más clara en dirección a distinguir seriamente las características de los lenguajes formales como particulares y diferentes de los rasgos típicos atribuidos a los lenguajes naturales. No obstante, en la medida en que sigamos estableciendo relaciones entre un tipo de lenguajes y otros, hasta el punto de formalizar aspectos fuertemente pragmáticos a fin de dar mejor sentido a cuestiones lógicas, esta clase de reparos sigue y seguirá vigente.

Apéndice

Notas sobre los aspectos matemáticos de la teoría de la verdad de Kripke[179]

Melvin Fitting

---

1. Introducción

La teoría de la verdad de Kripke es uno de los desarrollos más interesantes en esta área de un tiempo a esta parte. No obstante, sus dificultades matemáticas han impedido una mayor apreciación de sus virtudes filosóficas. Ciertamente, se requiere más del lector que en el caso del enfoque de Tarski: de hecho, el instrumental matemático implicado incluye estrictamente la requerida por la teoría de Tarski. Sin embargo, la matemática necesaria es simple, elegante y es parte del instrumental de quien trabaja en ciertas áreas de la lógica matemática y de la ciencia de la computación.

Lo que haremos en este trabajo fundamentalmente expositivo es presentar, de manera compacta y articulado, un desarrollo de la matemática tras la teoría de Kripke. Pasaremos por alto la motivación filosófica; lo mejor en este sentido es leer a Kripke mismo. No presentaremos tampoco el cuerpo de la teoría, sino sólo el esqueleto matemático. Sin embargo, el trabajo es autocontenido en su aspecto matemático, con todos los términos definidos y los principales resultados demostrados. Hay unos pocos elementos en este tratamiento que, aunque no son nuevos, parecen haber sido ignorados por casi todos los que han escrito en esta área.

Lo más común es establecer la existencia de puntos fijos mínimos usando secuencias de aproximaciones ordinalmente indexadas. Esto no es necesario, y tiene dos desventajas: primero, este enfoque implica más parafernalia matemática que la necesaria, tendiendo a oscurecer la simplicidad inherente al tema. Segundo, es una construcción que sólo funciona para tipos especiales de puntos fijos, mientras que en la teoría de Kripke todos los puntos fijos cumplen un rol. En consecuencia, posponemos esta técnica a la última sección, como un colofón más que como un aspecto central.

---

[179] Artículo publicado originalmente en *Notre Dame Journal of Formal Logic. Vol 27, Nº 1, enero de 1986.*

Mostramos, sin embargo, que hay una construcción "dual" análoga del mayor punto fijo intrínseco, algo que parece haber pasado desapercibido en la literatura.

Otro rasgo peculiar de este trabajo es cómo se tratan los modelos. Ene efecto, no se los emplea. Al estar interesados en enunciados, en su verdad o falsedad, usamos directamente conjuntos de enunciados – al estilo de Hintikka - en vez de modelos. Esto nos libera de maquinaria innecesaria, permitiendo que sobresalgan los aspectos claves de la construcción. Además, tiene un efecto colateral satisfactorio, ya que en el tratamiento de la lógica trivalente de Kleene no hay un tercer "valor de verdad" para lo indefinido. Tenemos solamente los dos valores de verdad usuales, pero no todo enunciado adquiere un valor de verdad. Un punto menor, pero satisfactorio.

Debemos señalar que ninguno de los resultados que se presentan es nuevo. Unos pocos elementos pueden adscribirse a autores particulares, pero la mayoría parece formar parte del folklore matemático. Primariamente intentamos brindar un servicio: reunir este material en un lugar, y organizarlo teniendo en mente el trabajo de Kripke.

2. Operadores monótonos

Supóngase que creamos un operador que toma como input una colección de afirmaciones y produce como output una colección de consecuencias "simples" de estas afirmaciones. Tal operador es monótono en el sentido de que, si agregamos un input, el output no disminuye. Las colecciones de aserciones que, al emplearse como input, reaparecen intactas como output, juegan un rol especial. Tales *puntos fijos* equivalen a colecciones de aserciones que son *completas*, esto es, que ya contienen sus consecuencias. La existencia y variedad de tales puntos fijos juegan un rol fundamental en la teoría de Kripke. Y la maquinaria matemática requerida para lidiar con ellos puede presentarse de manera más sencilla en un entorno teórico abstracto de retículos.

Definiciones

$< \mathbf{D}, \leq >$ es un *orden parcial* si $\leq$ es una relación reflexiva, antisimétrica y transitiva sobre **D**. En esta sección, asumimos que $\leq$ es un orden parcial fijo sobre **D**. Si $A \leq B$, decimos que A está *bajo* B y que B está *sobre* A. También usamos el término *entre* de manera obvia.

Sea $\mathbf{C}\subseteq\mathbf{D}$. El elemento *máximo* de $\mathbf{C}$ es un $A\in\mathbf{C}$ tal que $B\leq A$ para todo $B\in\mathbf{C}$. Si $\mathbf{C}$ tiene un máximo, es fácil notar que es único. La definición de elemento *mínimo* es dual de esta.[180]

Sea que $\varnothing \neq \mathbf{C}\subseteq\mathbf{D}$. Una *cota superior* para $\mathbf{C}$ es un elemento A de $\mathbf{D}$ tal que $B\leq A$ para todo $B\in\mathbf{C}$. Una cota superior para $\mathbf{C}$ no necesariamente ha de ser elemento de $\mathbf{C}$, ni es necesario que exista una. La *cota inferior* tiene una definición dual.[181] Nótese que si $\mathbf{C}$ tiene una cota superior que pertenece a $\mathbf{C}$, ésta es el elemento máximo de $\mathbf{C}$.

Nuevamente sea que $\varnothing \neq \mathbf{C}\subseteq\mathbf{D}$. Si $\mathbf{C}$ tiene cotas superiores, y entre ellas hay una mínima, esta es la *mínima cota superior* de $\mathbf{C}$. Si existe, es única y se denota como $\bigvee\mathbf{C}$. Nótese que si $\mathbf{C}$ tiene una mínima cota superior, entonces:

1. $A\in\mathbf{C} \Rightarrow A\leq \bigvee\mathbf{C}$
2. $A\leq B$ para todo $A\in\mathbf{C} \Rightarrow \bigvee\mathbf{C} \leq B$

La *máxima cota inferior* tiene una caracterización dual.[182] La notación usada es $\bigwedge\mathbf{C}$. Si $\mathbf{C}$ tiene una máxima cota inferior, entonces:

1. $A\in\mathbf{C} \Rightarrow \bigwedge\mathbf{C} \leq A$.
2. $B\leq A$ para todo $A\in\mathbf{C} \Rightarrow B\leq \bigwedge\mathbf{C}$.

Sea Φ: $\mathbf{D}\to\mathbf{D}$. Decimos que Φ es *monótona* o que *preserva el orden* si $A\leq B \Rightarrow \Phi(A)\leq\Phi(B)$. Si $\Phi(A)=A$, entonces A es un *punto fijo* de Φ.

El teorema fundamental en la materia es el siguiente, debido a Knaster [2] en un contexto de teoría de conjuntos, generalizado como sigue por Tarski [5].[183]

---

[180] Sea $\mathbf{C}\subseteq\mathbf{D}$. El elemento *mínimo* de $\mathbf{C}$ es un $A\in\mathbf{C}$ tal que $A\leq B$ para todo $B\in\mathbf{C}$.
[181] Sea que $\varnothing \neq \mathbf{C}\subseteq\mathbf{D}$. Una *cota inferior* para $\mathbf{C}$ es un elemento A de $\mathbf{D}$ tal que $A\leq B$ para todo $B\in\mathbf{C}$. Una cota inferior para $\mathbf{C}$ no necesariamente ha de ser elemento de $\mathbf{C}$, ni es necesario que exista una. Si pertenece a $\mathbf{C}$, también es el elemento mínimo.
[182] Sea que $\varnothing \neq \mathbf{C}\subseteq\mathbf{D}$. Si $\mathbf{C}$ tiene cotas inferiores, y entre ellas hay una máxima, entonces es la máxima cota inferior de $\mathbf{C}$, $\bigwedge\mathbf{C}$. Si $\mathbf{C}$ tiene una máxima cota inferior, entonces:
1. $A\in\mathbf{C} \Rightarrow \bigwedge\mathbf{C} \leq A$
2. $B\leq A$ para todo $A\in\mathbf{C} \Rightarrow B\leq\bigwedge\mathbf{C}$
[183] Se respeta el formato de referencias del artículo original. (N de la T.)

2.1 Teorema de puntos fijos

Sea $< \mathbf{D}, \leq >$ un orden parcial y sea Φ monótona. Supóngase que hay A, B $\in$ **D** tales que $A\leq\Phi(A)$, $A\leq B$ y $\Phi(B) \leq B$.

1. Si todo subconjunto no vacío de **D** tiene una máxima cota inferior en **D,** entonces Φ tiene un punto fijo mínimo entre A y B.
2. Si todo subconjunto no vacío de **D** tiene una mínima cuota superior en **D**, entonces Φ tiene un punto fijo máximo entre A y B.

Demostración. La demostración de 2 es dual a la de 1, por lo que sólo se muestra 2.

Sea $\mathbf{C}=\{X\in\mathbf{D} \mid A\leq X \text{ y } \Phi(X)\leq X\}$. Por hipótesis, $B\in\mathbf{C}$, así que **C** no es vacío.

Supóngase que $X\in\mathbf{C}$. Entonces $A\leq X$ y $\Phi(X)\leq X$. Por monotonía, $\Phi(A)\leq\Phi(X)$ y $\Phi(\Phi(X))\leq\Phi(X)$. Por hipótesis, $A\leq\Phi(A)$, así $A\leq\Phi(X)$. Se sigue que $\Phi(X)\in\mathbf{C}$. Luego **C** es cerrado bajo Φ.

Por hipótesis, $\bigwedge\mathbf{C}\in\mathbf{D}$. Sostenemos que este es el punto fijo buscado. Nótese que para todo $X\in\mathbf{C}$, $A\leq X$, por lo que $A\leq\bigwedge\mathbf{C}$. También tenemos que $B\in\mathbf{C}$, luego $\bigwedge\mathbf{C}\leq B$. Así, $\bigwedge\mathbf{C}$ está entre A y B.

Supóngase que $X\in\mathbf{C}$. Entonces $\bigwedge\mathbf{C}\leq X$. Por monotonía, $\Phi(\bigwedge\mathbf{C})\leq\Phi(X)$. Pero como $X\in\mathbf{C}$, $\Phi(X)\leq X$, luego $\Phi(\bigwedge\mathbf{C})\leq X$. Como X es un elemento arbitrario de **C**, $\Phi(\bigwedge\mathbf{C})\leq\bigwedge\mathbf{C}$.

Se sigue que $\bigwedge\mathbf{C}\in\mathbf{C}$. Como **C** es cerrado bajo Φ, $\Phi(\bigwedge\mathbf{C}) \in\mathbf{C}$. Así, $\bigwedge\mathbf{C}\leq\Phi(\bigwedge\mathbf{C})$.

Así, por antisimetría, $\bigwedge\mathbf{C}$ es un punto fijo de Φ. Finalmente, si F es *cualquier* punto fijo que extiende A, $F\in\mathbf{C}$, y $\bigwedge\mathbf{C}\leq F$. Entonces, $\bigwedge\mathbf{C}$ es mínimo.

Nota. Este teorema también es la base para el método de demostración por "inducción generalizada", como sigue.

Supóngase que se satisfacen las hipótesis de 1. Sea que $C\in\mathbf{D}$ y supongamos que queremos mostrar que el punto fijo mínimo de Φ sobre A debe estar bajo C. Esto será el caso sólo si $A\leq C$; siempre que $X\leq C$, entonces $\Phi(X)\leq C$.

Motivo. Sea que C juegue el rol de B en el Teorema de Puntos Fijos. Como $C \leq C$, la segunda condición implica que $\Phi(C) \leq C$. Luego, el punto fijo mínimo de Φ sobre A siempre estará bajo B, esto es, bajo C en este caso.

Más definiciones

Como antes, $< \mathbf{D}, \leq >$ es un orden parcial fijo.

$\mathbf{C} \subseteq \mathbf{D}$ es una *cadena* si, para cualquier A, $B \in \mathbf{C}$, $A \leq B$ o $B \leq A$.

$M \in \mathbf{D}$ es *maximal* si $M \leq A \Rightarrow M = A$. M es *minimal* si $A \leq M \Rightarrow A = M$.

A, B $\in \mathbf{D}$ son *compatibles* si tienen una cota superior en común, esto es, para algún $C \in \mathbf{D}$, $A \leq C$ y $B \leq C$.

Para un Φ monótono sobre **D**, I es un punto fijo *intrínseco* de Φ si I es un punto fijo que es compatible con todo otro punto fijo de Φ.

2.2 Teorema principal.

Sea $< \mathbf{D}, \leq >$ un orden parcial en el cual **D** tiene un elemento mínimo, toda cadena tiene una cota superior y todo conjunto no vacío con una cota superior tiene una mínima cota superior. Sea también Φ monótona sobre **D**. Se dan entonces las siguientes consecuencias:

C1. Todo subconjunto no vacío de **D** tiene una máxima cota inferior en **D**.

C2. Si $A \leq \Phi(A)$, entonces hay un punto fijo maximal de Φ sobre A.

C3. Φ tiene puntos fijos maximales.

C4. Si $A \leq \Phi(A)$, entonces hay un mínimo punto fijo de Φ sobre A.

C5. Φ tiene un mínimo punto fijo.

C6. Si $\Phi(B) \leq B$, entonces hay un máximo punto fijo de Φ bajo B.

C7. Sea I un punto fijo de Φ. I es instrínseco si y sólo si $I \leq \bigwedge \mathbf{M}$, donde **M** es el conjunto de puntos fijos maximales de Φ.

C8. Φ tiene un punto fijo máximo.

C9. Si A≤Φ(A) y A≤$\bigwedge$**M**, donde **M** es el conjunto de puntos fijos maximales de Φ, entonces el punto fijo mínimo de Φ sobre A es intrínseco.

Nota. A veces se dice que A es *consistente* [sound] si A≤Φ(A). Luego **C2**, **C4** y **C9** son conclusiones acerca de elementos correctos de **D**.

Demostración.

C1. Sea **G** un subconjunto no vacío de **D**. Mostraremos que $\bigwedge$**G** existe en **D**.

Defínase **E** como el conjunto de cotas inferiores de **G**. Como se asume que **D** tiene un elemento mínimo, **E** no es vacío. < **E**, ≤ > también es un conjunto parcialmente ordenado, donde ≤ es el orden original restringido a **E**.

Mostramos que **E** contiene, con cada cadena, la mínima cota superior de esa cadena. Sea **C** una cadena en **E**. Por las hipótesis del Teorema 2.2, **C** tiene una cota superior, y por tanto una mínima cota inferior en **D**. Esto es, $\bigvee$**C**∈**D**. Sea que Y∈**G**. Para cada X∈**C**, X≤Y, luego $\bigvee$**C**≤Y. Como Y es arbitrario, $\bigvee$**C**∈**E**.

Como **E** es un conjunto parcialmente ordenado en el que cada cadena tiene una cota superior, E tiene elementos maximales, por el lema de Zorn[184]. Sea M un elemento maximal de **E**. Sostenemos que M es en realidad el elemento máximo de **E**.

Sea A algún elemento de **E**. Sea Y_0 algún elemento de **G** (el cual debe existir, ya que **G** no es vacío). Entonces A≤Y_0 y M≤Y_0, por la definición de **E**. Como {A, M} tiene a Y_0 como cota superior, tiene una mínima cota superior, $\bigvee${A, M}. Es directa la prueba de que $\bigvee${A, M}∈**E**. Pero M≤$\bigvee${A, M}, y M es maximal. Luego M=$\bigvee${A, M}. Como A≤$\bigvee${A, M}, A≤M. Así, M es el elemento máximo de **E**.

E es el conjunto de cotas inferiores de **G**, y **E** tiene un elemento máximo; así, **G** tiene una máxima cota inferior.

C2. Supóngase que A≤Φ(A). Ahora sea **E**={X∈**D** | X≤Φ(X)}. Como A≤Φ(A), A está en **E**. Como antes, < **E**, ≤ > es también un conjunto parcialmente ordenado, donde ≤ es el orden original restringido a **E**.

---

[184] N. de la T. Cf. Prueba del lema de Zorn en la nota 58 más arriba.

Sostenemos que toda cadena en **E** tiene una cota superior en **E**. Sea **C** una cadena en **E**. Entonces, por supuesto, **C** es una cadena en **D** también, por lo que $\bigvee \mathbf{C} \in \mathbf{D}$. Ahora supóngase que $X \in \mathbf{C}$. Entonces $X \leq \bigvee \mathbf{C}$, y por monotonía, $\Phi(X) \leq \Phi(\bigvee \mathbf{C})$. Como $X \in \mathbf{C} \subseteq \mathbf{E}$, $X \leq \Phi(X)$. Así, $X \leq \Phi(\bigvee \mathbf{C})$ para todo $X \in \mathbf{C}$. Luego $\bigvee \mathbf{C} \leq \Phi(\bigvee \mathbf{C})$, con lo que $\bigvee \mathbf{C}$ está en **E**.

Como **E** es un conjunto parcialmente ordenado en el cual cada cadena tiene una cota superior, cada miembro de **E**, en particular A, puede extenderse a un elemento maximal de E, por el Lema de Zorn.

Sea M un elemento maximal de **E**. Sostenemos que M es un punto fijo maximal de Φ en **D**. Como $M \in \mathbf{E}$, $M \leq \Phi(M)$. Por monotonía, $\Phi(M) \leq \Phi(\Phi(M))$, por lo que $\Phi(M) \in \mathbf{E}$. como M es maximal en **E**, se sigue que $M = \Phi(M)$, por lo que M es un punto fijo. Más aun, si F es cualquier punto fijo de Φ, trivialmente $F \in \mathbf{E}$. Pero M es maximal en **E**, por lo que F no puede extender propiamente a M. Así, M es un punto fijo maximal. Hemos demostrado C2.

C3. Se asumió que **D** tiene un elemento mínimo, que denotamos mediante 0. Como 0 está bajo todo elemento de **D**, $0 \leq \Phi(0)$. Entonces, por C2, 0 puede extenderse a un punto fijo maximal. Esto prueba C3.

C4. Supóngase que $A \leq \Phi(A)$. Por C2, Φ tiene puntos fijos maximales sobre A; sea B uno de ellos. Entonces $A \leq B$ y $\Phi(B) \leq B$. Por la parte 1 del Teorema de Puntos Fijos, Φ tiene un punto fijo mínimo sobre A. Esto establece C4.

C5. Tómese A como el elemento mínimo de **D** en C4.

C6. Supóngase que $\Phi(B) \leq B$. Sea $\mathbf{G} = \{X \in \mathbf{D} \mid X \leq B\}$. Como siempre, $< \mathbf{G}, \leq >$ es un conjunto parcialmente ordenado, donde $\leq$ es la restricción del orden de **D** a **G**. Todo subconjunto no vacío de **G** tiene una cota superior, B, por lo que por la hipótesis del teorema, tiene una mínima cota superior en **D** la cual, trivialmente, también debe estar en **G**.

Supóngase que $A \in \mathbf{G}$. Entonces $A \leq B$, y por monotonía $\Phi(A) \leq \Phi(B) \leq B$. Así, $\Phi(A) \in \mathbf{G}$; **G** está cerrado bajo Φ.

Sea 0 el elemento mínimo de **D**. Por supuesto, $0 \in \mathbf{G}$, $0 \leq \Phi(0)$, $B \in G$, $0 \leq B$ y $\Phi(B) \leq B$. Entonces por la parte 2 del Teorema de Puntos Fijos aplicado a **G**, Φ tiene un punto fijo máximo en **G** entre 0 y B. Este, trivialmente, es el punto fijo máximo de Φ en **D** bajo B.

C7. Sea **M** el conjunto de puntos fijos maximales.

Supóngase que I es un punto fijo intrínseco de Φ. Sea M cualquier elemento de **M**. Por las hipótesis del teorema, $\bigvee\{I, M\} \in \mathbf{D}$. Ahora $I \leq \bigvee\{I, M\}$, por lo que $I = \Phi(I) \leq \Phi(\bigvee\{I, M\})$. De manera similar, $M \leq \Phi(\bigvee\{I, M\})$. Se sigue que $\bigvee\{I, M\} \leq \Phi(\bigvee\{I, M\})$. Entonces $\bigvee\{I, M\}$ está en la colección **E** definida en la demostración de C2. También $M \in \mathbf{E}$, y debe ser maximal en **E** ya que, si no lo fuera, podría extenderse a un elemento maximal de **E** que, por el argumento anterior, sería un punto fijo maximal para Φ, y extendería propiamente M. Puesto que M es maximal en **E**, y $M \leq \bigvee\{I, M\}$, se sigue que $M = \bigvee\{I, M\}$. Como $I \leq \bigvee\{I, M\}$, $I \leq M$. Y como M es un elemento arbitrario del conjunto M, $I \leq \bigwedge M$.

De manera conversa, supóngase que I es un punto fijo de Φ y $I \leq \bigwedge \mathbf{M}$. Mostraremos que I es intrínseco. Sea F cualquier punto fijo. Luego $F \in \mathbf{E}$, por lo que F puede extenderse a un elemento maximal M de **E**. M es un punto fijo maximal de Φ por el argumento anterior, entonces $M \in \mathbf{M}$. Luego $F \leq M$ y $I \leq \bigwedge \mathbf{M} \leq M$, y así I y F tienen una cota superior común. Como F es arbitrario, I es intrínseco.

C8. Sea **M** el conjunto de puntos fijos maximales de Φ. Sea $M \in \mathbf{M}$. Luego $\bigwedge \mathbf{M} \leq M$, y por monotonía $\Phi(\bigwedge \mathbf{M}) \leq \Phi(M) = M$. Como M es un elemento arbitrario de **M**, $\Phi(\bigwedge \mathbf{M}) \leq \bigwedge \mathbf{M}$. Por C6, Φ tiene un máximo punto fijo bajo $\bigwedge \mathbf{M}$, que es el mayor punto fijo intrínseco por C7.

C9. Finalmente, supóngase que $A \leq \Phi(A)$ y que $A \leq \bigwedge \mathbf{M}$. Como se mostró en la prueba de C8, $\Phi(\bigwedge \mathbf{M}) \leq \bigwedge M$. Luego por 1 del Teorema de Puntos Fijos, el mínimo punto fijo de Φ que extienda A estará bajo $\bigwedge \mathbf{M}$, y así será intrínseco por C7.

3. Conjuntos saturados

El objetivo de Kripke es crear una teoría que contenga su propio predicado verdad. La construcción de Tarski, bajo el supuesto de la existencia de tal predicado verdad, de un enunciado paradójico que afirma su propia falsedad hace que tal objetivo sea imposible. La "salida" de Kripke es permitir que algunos enunciados (el paradójico recién referido, por ejemplo) carezcan de valores de verdad. Esto es, puede haber huecos en los valores de verdad. La cuestión es qué reglas debe seguir la asignación de valores de verdad. Kripke consideró varias alternativas. Nos encargamos de dos en esta sección: la lógica trivalente (fuerte) de Kleene [1] y las supervaluaciones de van Fraassen [6].

En lugar de trabajar con una valuación, una función de enunciados a valores de verdad, creemos que es más conveniente y elegante seguir la tradición de Hintikka y trabajar en cambio con un conjunto de enunciados. Intuitivamente, el conjunto consiste de los enunciados que una valuación haría verdaderos, si tuviéramos valuaciones. Y adoptamos el mecanismo de Smullyan [4] de evaluar [sign] enunciados: añadimos a un enunciado el prefijo V o F, lo cual es sugerido por Kripke mismo en la nota al pie 24 de [3]. Así, si S es un conjunto de enunciados marcados, S determina un mapeo sobre valores de verdad de la siguiente manera: para un enunciado X, si $VX \in S$, X es verdadero, si $FX \in S$, X es falso; si se da que ni VX ni FX están en S, X carece de valor de verdad. Nótese que, en este enfoque, no hay un valor de verdad especial "indefinido"; carecer de valor de verdad simplemente significa que ningún valor ha sido asignado. Ahora la cuestión es qué condiciones de cierre queremos imponer sobre un conjunto S de enunciados evaluados para reflejar nuestra comprensión del lenguaje y de la verdad. Siguen aquí detalles técnicos. En el resto de la sección, L es un lenguaje de primer orden fijo con un conjunto infinito de símbolos de constante. Por simplicidad, asumimos que las fórmulas se construyen usando $\wedge$, $\sim$, $\forall$. Un enunciado es una fórmula de L sin variables libres. Un enunciado evaluado es una expresión de la forma VX o FX, donde x es un enunciado, y V y F son dos símbolos adicionales determinados.

Definiciones. Sea S un conjunto de enunciados evaluados.

1. S está *descendentemente saturado* si

    a. $VX \wedge Y \in S \Rightarrow VX \in S$ y $VY \in S$

    b. $FX \wedge Y \in S \Rightarrow FX \in S$ y $FY \in S$

    c. $V{\sim}X \in S \Rightarrow FX \in S$

    d. $F{\sim}X \in S \Rightarrow VX \in S$

    e. $V(\forall x)\ A(x) \in S \Rightarrow VA(c) \in S$ para toda constante c

    f. $F(\forall x)\ A(x) \in S \Rightarrow FA(c) \in S$ para alguna constante c

2. S está *ascendentemente saturado* si

    a. $VX \in S$ y $VY \in S \Rightarrow VX \wedge Y \in S$

    b. $FX \in S$ y $FY \in S \Rightarrow FX \wedge Y \in S$

    c. $FX \in S \Rightarrow V{\sim}X \in S$

    d. $VX \in S \Rightarrow F{\sim}X \in S$

    e. $VA(c) \in S$ para toda constante c $\Rightarrow V(\forall x)\ A(x) \in S$

    f. $FA(c) \in S$ para alguna constante c $\Rightarrow F(\forall x)\ A(x) \in S$

3. S está *saturado* si está ascendentemente saturado y descendentemente.

4. S es *consistente* si no se da para ningún enunciado X que tanto VX como FX están en S.

5. S es *atómicamente consistente* si no se da para ningún enunciado atómico A que tanto VA como FA están en S.

6. S es *completo* si para todo enunciado X, o bien VX o bien FX están en S.

7. S es *atómicamente completo* si para todo enunciado atómico A, o bien VA o bien FA está en S.

8. S es un *conjunto modelo* si S está saturado, es consistente y es completo.

Nota. Estas definiciones son algo diferentes de las que se hallan generalmente en la literatura. En nuestro uso, el conjunto de *todos* los enunciados marcados está saturado, aunque no sea consistente.

Sea **D** la colección de todos los conjuntos de enunciados marcados. $\subseteq$ es la relación de subconjunto/inclusión usual. $<$ **D**, $\subseteq$ $>$ es un orden parcial cerrado bajo máximas cotas inferiores ($\cap$) y mínimas cotas superiores ($\cup$).

Sea A un conjunto de enunciados evaluados. Definimos un mapeo Φ_A: **D**$\rightarrow$**D** como sigue:

$$
\begin{aligned}
\Phi_A(S) = A\cup\ & \\
& \{VX\wedge Y \mid VX\in S \text{ y } VY\in S\}\cup \\
& \{FX\wedge Y \mid FX\in S \text{ y } FY\in S\}\cup \\
& \{V{\sim}X\in S \mid FX\in S\}\cup \\
& \{F{\sim}X\in S \mid VX\in S\}\cup \\
& \{V(\forall x)\ X(x) \mid VX(c)\in S \text{ para toda } c\}\cup \\
& \{F(\forall x)\ X(x) \mid FX(c)\in S \text{ para alguna } c\}.
\end{aligned}
$$

Φ_A es monótono sobre **D**. Los puntos fijos de Φ_A son exactamente los conjuntos ascendentemente saturados que extienden A. Si M es el conjunto de todos los enunciados evaluados, trivialmente $A\subseteq M$ y $\Phi_A(M)\subseteq M$. También $A \subseteq \Phi_A(A)$. Luego, por la parte 1 del Teorema de Puntos Fijos, Φ_A tiene un mínimo punto fijo que extiende A.

Definición. Hemos mostrado que, para el conjunto A de enunciados marcados, hay un conjunto mínimo ascendentemente saturado que extiende A. Lo llamamos el cierre ascendentemente saturado de A, y lo denotamos mediante A^U.

Proposición 3.1. Sean A y B conjuntos de enunciados marcados. $A\subseteq B \Rightarrow A^U\subseteq B^U$.

Demostración. Obviamente $A\subseteq B \Rightarrow \Phi_A(S)\subseteq\Phi_B(S)$ para todo S. Ahora, supóngase que $A\subseteq B$. Trivialmente, $\varnothing\subseteq B$. Y $S\subseteq B^U \Rightarrow \Phi_A(S)\subseteq\Phi_A(B^U)\subseteq\Phi_B(B^U) = B^U$. Por la nota que sigue al Teorema de Puntos Fijos, el mínimo punto fijo de Φ_A está bajo B^U, esto es, $A^U\subseteq B^U$.

Proposición 3.2. Si A está descendentemente saturado, también lo está A^U.

Demostración. Supóngase lo contrario. Digamos que A está descendentemente saturado, $VX \wedge Y \in A^U$, pero $VX \notin A^U$ (las otras posibilidades son similares). Sea B A^U sin $VX \wedge Y$. $VX \wedge Y$ no podría haber estado en A ya que A está descendentemente saturado y $A \subseteq A^U$. Así, $A \subseteq B$. También B está ascendentemente saturado. Pero B está incluido propiamente en A^U, que es el mínimo conjunto ascendentemente saturado que extiende A. Esto es imposible, por lo que A^U debe haber estado descendentemente saturado.

Corolario 3.3. Si A está descendentemente saturado, A^U está saturado.

Proposición 3.4. Si A está descendentemente saturado y es atómicamente consistente, entonces A es consistente.

Demostración. Se muestra directamente que si A está descendentemente saturado y VX, $FX \in A$, donde A no es atómica, entonces VY, $FY \in A$ para alguna subfórmula Y de X.

Corolario 3.5. Si A está descendentemente saturado es atómicamente consistente, entonces A^U es consistente.

Demostración. Si A está descendentemente saturado, también lo está A^U. Digamos que A también es atómicamente consistente. A y A^U contienen los mismos enunciados atómicos marcados, y así A^U es atómicamente consistente y así, es consistente.

Proposición 3.6. Si A es atómicamente completo, entonces A^U es completo.

Demostración. Si $VX \notin A^U$ y $FX \notin A^U$, donde X no es atómica, entonces es fácil mostrar que, para alguna subfórmula Y de X, $VY \notin A^U$ y $FY \notin A^U$.

Corolario 3.7. Si A está descendentemente saturado, es atómicamente consistente y atómicamente completo, entonces A^U es un conjunto modelo que extiende A.

Corolario 3.8. Si A está descendentemente saturado y es atómicamente consistente, entonces A puede extenderse a un conjunto modelo.

Demostración. Agrándese A a un conjunto atómicamente completo B añadiendo exactamente uno de VX o FX para cada X atómico que no esté ya presente. B está descendentemente saturado, es atómicamente consistente y atómicamente completo. Entonces B^U es un conjunto modelo. Pero también $A \subseteq B$; así, por la proposición 3.1, $A \subseteq A^U \subseteq B^U$.

Notas. Este corolario, esencialmente debido a Hintikka, es la base de la mayoría de las pruebas de completud de tableaux. Se intenta encontrar una demostración en tableaux haciendo sistemáticamente todo lo posible. Si no se encuentra ninguna, el proceso genera un conjunto descendentemente saturado y atómicamente consistente a partir del cual un modelo adecuado puede producirse usando el corlario 3.8 Smullyan [4] presenta este estilo de prueba de manera elegante.

No obstante, los conjuntos modelo no se adecuarán a nuestros objetivos, puesto que asignan valores de verdad a todos los enunciados. Queremos una noción más débil de conjunto consistente y saturado. Sean P(x) y Q(x) dos símbolos de predicado de L. Considérese el conjunto A={VP(a), VP(b), …}, donde a, b, … son todas las constantes del lenguaje L. Este conjunto es atómicamente consistente y trivialmente descendentemente saturado. Entonces A^U es una extensión saturada y consistente. Es fácil chequear que los siguientes están en A^U:

$V(\forall x)P(x)$

$F\sim(\forall x)P(x)$

$F\sim(\forall x)P(x) \wedge (\forall x)Q(x)$

Por otra parte, también es fácil chequear que *ni* $V(\forall x)Q(x)$ *ni* $F(\forall x)Q(x)$ están en A^U; definitivamente no es un conjunto modelo.

Una posible objeción a emplear conjuntos saturados y consistentes es la siguiente. Considérese el conjunto A arriba definido. Puesto que $(\forall x)Q(x)$ no recibe un valor de verdad en A^U, $(\forall x)Q(x) \vee \sim(\forall x)Q(x)$ tampoco recibe ningún valor. Pero mientras $(\forall x)Q(x)$ puede plausiblemente carecer de valor, hay razones más sentimentales para tomar $(\forall x)Q(x) \vee \sim(\forall x)Q(x)$ como verdadera. Lo siguiente presenta una noción de cierre alternativa que logra precisamente esto. Una caracterización de A^U

equivalente a la dada puede ser entenderla como la intersección de la familia de conjuntos ascendentemente saturados que extienden A. Esta versión es cercanamente paralela a la construcción que sigue:

Definición. Sea A descendentemente saturado y atómicamente consistente. Nos referimos con A^V a la intersección de la familia de todos los conjuntos modelos que extienden A (nótese que por el corolario 3.8, esta familia es no vacía).

Proposición 3.9. Supóngase que A está descendentemente saturado y es atómicamente consistente. Entonces,

1. A^V está ascendentemente saturado y es consistente.
2. $A^U \subseteq A^V$
3. Si B también está ascendentemente saturado y es consistente, entonces $A \subseteq B \Rightarrow A^V \subseteq B^V$

Demostración.

1. Todo conjunto modelo está ascendentemente saturado, y es fácil comprobar que la intersección de conjuntos ascendentemente saturados está saturada ascendentemente. Algo similar se da para la consistencia.
2. A^U es el mínimo conjunto ascendentemente saturado que extiende A, y así es subconjunto del conjunto ascendentemente saturado A^V.
3. Sea F_A la familia de conjuntos modelos que extienden A, y sea lo mismo para F_B. Supóngase que $A \subseteq B$. Entonces cualquier conjunto modelo que extienda B tambien extiende A, luego $F^B \subseteq F^A$. Se sigue que $\cap F^A \subseteq \cap F^B$, esto es, $A^V \subseteq B^V$.

Una vez más, considérese el conjunto A={VP(a), VP(b), …}. Puesto que los conjuntos modelo son completos, $(\forall x)Q(x)$ tiene un valor de verdad en cada conjunto modelo, y se sigue que $V[(\forall x)Q(x) \vee \sim(\forall x)Q(x)]$ debe estar en todo conjunto modelo. Así, $(\forall x)Q(x) \vee \sim(\forall x)Q(x)$ adquiere el valor verdadero en A^V. Por otra parte, se puede añadir de manera consistente o bien $V(\forall x)Q(x)$ o bien $F(\forall x)Q(x)$ a A, y extender el resultado a un conjunto modelo usando el corolario 3.8. Puesto que $(\forall x)Q(x)$ toma diferentes valores en diferentes conjuntos modelos que extienden A, no tiene un valor de verdad en A^V. Incidentalmente, ya que $V[(\forall x)Q(x) \vee \sim(\forall x)Q(x)]$ está en A^V pero ni $V(\forall x)Q(x)$ ni $F(\forall x)Q(x)$ están en A^V, A^V no puede estar descendentemente saturado. Supóngase que definimos una valuación parcial υ como sigue:

$$\upsilon(X) = \begin{cases} V \text{ si } VX \in A^U \\ F \text{ si } FX \in A^U \\ \text{indefinido de otro modo} \end{cases}$$

υ satisface las condiciones de la lógica trivalente de Kleene [1].

Tal como hicimos con A^U, podemos usar A^V para definir una valuación parcial. Esta vez obtenemos una que satisface las condiciones de las supervaluaciones de van Fraassen [6]. Continuaremos sin embargo trabajando con conjuntos de enunciados evaluados en lugar de usar valuaciones parciales.

La construcción de Kripke

Necesitamos un lenguaje de primer orden capaz de soportar la maquinaria para codificar su propia sintaxis. Los detalles no son críticos. Por precisión, usamos un lenguaje de la aritmética.

En esta sección, sea L el lenguaje de primer orden con 0, 1, 2, … como símbolos de constantes, +, * como símbolos de función, y = y **V** como símbolos de relación (**V** es de un lugar). Se espera que **V** juegue el rol de un predicado verdad.

Si X es un enunciado de L que no contiene **V**, decimos que X es *verdadero* o *falso* si X es verdadero o falso en el modelo estándar para la aritmética, bajp la interpretación obvia. El problema es asignar valores de verdad que contienen **V**.

Si X es un enunciado de L, $\ulcorner X \urcorner$ es el número de Gödel de X, bajo alguna numeración de Gödel estándar.

Kripke trabaja esencialmente con pares extensión-antiextensión $<S_1, S_2>$, donde las fórmulas en S_1 son "verdaderas", las fórmulas en S_2 son "falsas", y las fórmulas que quedan fuera no tienen un valor de verdad. Como sugiere la sección 3, preferimos trabajar con el conjunto de fórmulas evaluadas $\{VX \mid X \in S_1\} \cup \{FX \mid X \in S_2\}$. Esa es, por supuesto, una variante simple, pero permite conexiones con otras partes de la lógica formal.

Sea **A** el conjunto de "verdades aritméticas atómicas". Esto es, si X es un enunciado atómico de L que no contiene **V**, entonces si X es verdadero, VX$\in$**A**, y si X es falso, FX$\in$**A**.

Nótese que tanto A^U como A^V están completamente determinados por los enunciados *atómicos* marcados que contienen. Por ello, podemos restringir en lo que sigue los elementos de **D** al nivel atómico, lo cual permite usar el mismo **D** para ambas compleciones U y V.

Sea que **D** consista de todos los conjuntos S de enunciados *atómicos* marcados de L (incluidos aquellos que involucran **V**) tales que:

1. **A**$\subseteq$S
2. S es atómicamente consistente

< **D**, $\subseteq$ > es un orden parcial donde $\subseteq$ es la relación de inclusión usual, **D** está cerrado bajo $\cap$ pero no bajo $\cup$, ya que la unión de conjuntos consistentes no necesariamente es consistente. Sin embargo, se comprueba directamente que < **D**, $\subseteq$ > satisface las condiciones del Teorema Principal 2.2. **A** mismo es el elemento mínimo.

Definimos ahora dos operadores Φ_U y Φ_V sobre **D**, correspondiendo a las dos nociones de cierre definidas en la sección previa. Las tomaremos de a una por vez.

Para S$\in$**D**,

$$\Phi_U(S) = \mathbf{A}\cup \{V\mathbf{V}(\ulcorner X \urcorner) \mid VX\in S^U\}\cup \{F\mathbf{V}(\ulcorner X \urcorner) \mid FX\in S^U\}$$

Sea que S$\in$**D**. S consiste de los enunciados atómicos marcados, por lo que trivialmente está descendentemente saturado, y es atómicamente consistente por definición. Luego S^U está saturado y es consistente. Puesto que **A**$\subseteq$S, se sigue fácilmente que todos los enunciados marcados verdaderos de la aritmética están en S^U. Como S^U es consistente, $\{V\mathbf{V}(\ulcorner X \urcorner) \mid VX\in S^U\}\cup\{F\mathbf{V}(\ulcorner X \urcorner) \mid FX\in S^U\}$ es atómicamente consistente.

Ciertamente, **A** es atómicamente consistente. Como los elementos de **A** no contienen **V**, estos conjuntos no involucran enunciados en común, y así la unión $\Phi_U(S)$ es atómicamente consistente. $\Phi_U(S)$ extiende **A** por definición. Luego, $\Phi_U(S)$ es un elemento de **D**.

Mostramos en la proposición 3.1 que $A \subseteq B \Rightarrow A^U \subseteq B^U$. Se sigue que Φ_U es monótona. Así tenemos un operador monótono Φ_U: $\mathbf{D} \rightarrow \mathbf{D}$.

Nota. Recuérdese que un conjunto $S \in \mathbf{D}$ es *correcto* si $S \subseteq \Phi_U(S)$. La corrección dice esencialmente que S no llama verdadero a nada que no deba. Por ejemplo, si $V\mathbf{V}(\ulcorner X \urcorner)$ está en S pero VX no está en S^U, S no será correcto, ya que $V\mathbf{V}(\ulcorner X \urcorner)$ no estará en $\Phi_U(S)$.

Ahora la definición de Φ_V debe ser obvia. Para $S \in \mathbf{D}$

$$\Phi_V(S) = \mathbf{A} \cup$$
$$\{V\mathbf{V}(\ulcorner X \urcorner) \mid VX \in S^V\} \cup$$
$$\{F\mathbf{V}(\ulcorner X \urcorner) \mid FX \in S^V\}$$

Un argumento como el anterior muestra que Φ_V**:** $\mathbf{D} \rightarrow \mathbf{D}$. Y la proposición 3.9(3) implica que Φ_V es monótona.

Por el Teorema Principal 2.2, tanto Φ_U como Φ_V tienen puntos fijos. Si S es un punto fijo de Φ_U, entonces S^U contiene esencialmente su propio predicado verdad. Esto es, S^U hace verdadero a X ($VX \in S^U$) si y sólo si S^U hace verdadero a $\mathbf{V}(\ulcorner X \urcorner)$. Lo mismo se da para S^V donde S es un punto fijo de Φ_V. Por supuesto, algunos enunciados quedarán sin valores de verdad. La gente razonable puede (y de hecho lo hace) diferir respecto de si la versión U, la versión V o alguna otra distinta asigna valores a la mayoría de los enunciados de manera compatible con nuestra comprensión de las conectivas lógicas y los cuantificadores.

Por supuesto, tanto Φ_U como Φ_V tienen varios puntos fijos. No todos tienen, sin embargo, igual importancia. Establecemos lo siguiente para Φ_U, pero por supuesto se da análogamente para Φ_V.

El punto fijo *mínimo* de Φ_U (cuya existencia está garantizada por el teorema 2.2(C5) es el más fundamental. Kripke llama a un enunciado *fundado* si tiene un valor de verdad en S_U, donde S es el mínimo punto fijo de Φ_U. Ni los enunciados que afirman su propia verdad ni lo que afirman su propia falsedad son fundados.

Kripke llama a un enunciado *paradójico* si no tiene un valor de verdad en S_U para ningún punto fijo S de Φ_U. Un enunciado que afirma su propia falsedad es paradójico; uno que afirma su propia verdad no lo es. Como todo punto fijo puede extenderse a un punto fijo *maximal* (por el teorema 2.2(C2)), puede decirse de forma equivalente que un enunciado paradójico no tiene valor de verdad en M_U para ningún punto fijo maximal M de Φ_U. Así, los puntos fijos maximales juegan un rol significativo, pero no hay razón para destacar uno como el más fundamental.

No hay un punto fijo máximo. Hay, no obstante, un punto fijo máximo intrínseco (por el teorema 2.2(C8)). Kripke llama a un enunciado *intrínseco* si tiene un valor de verdad en I_U para algún punto fijo intrínseco I de Φ_U. Esto equivale a decir que tiene un valor de verdad en BU donde B es el máximo punto fijo intrínseco de Φ_U.

Podríamos preguntarnos acerca de las relaciones entre los puntos fijos de Φ_U y Φ_V. Hay al respecto algunos resultados sencillos.

Nótese primero que para vada S, $\Phi_U(S)\subseteq\Phi_V(S)$. Esto se sigue inmediatamente de la proposición 3.9 y de las definiciones de Φ_U y Φ_V.

Proposición 4.1. El punto fijo mínimo de Φ_U está bajo el mínimo punto fijo de Φ_V.

Demostración. Usamos el método de inducción generalizada esbozada en la nota a continuación del Teorema 2.1.

Sea S el mínimo punto fijo de Φ_V.

Trivialmente, $\mathbf{A}\subseteq$S.

Supóngase que A$\subseteq$S. Por monotonía, $\Phi_U(A)\subseteq\Phi_U(S)$. Por la observación anterior, $\Phi_U(S)\subseteq\Phi_V(S)$=S. Luego, $\Phi_U(A)\subseteq$S.

Se sigue que el punto fijo mínimo de Φ_U (que extiende **A**) está bajo S.

Proposición 4.2. Todo punto fijo de Φ_U tiene un punto fijo mínimo de Φ_V sobre sí.

Demostración. Sea S un punto fijo de Φ_U. Entonces S= $\Phi_U(S) \subseteq \Phi_V(S)$. Ahora use el Teorema 2.2(C2).

Proposición 4.3. Todo punto fijo de Φ_V tiene un punto fijo máximo de Φ_U bajo sí.

Demostración. Sea S un punto fijo de Φ_V. Sea $< \mathbf{D}, \subseteq >$ el orden parcial anteriormente definido en esta sección. Sea $\mathbf{E}=\{A\in\mathbf{D} \mid A\subseteq S\}$. Entonces $< \mathbf{E}, \subseteq >$ también es un orden parcial. Pero **E** tiene un elemento máximo, S. Trivialmente, entonces, todo subconjunto no vacío de **E** tiene una cota superior, a saber, S, y se sigue que tiene una mínima cota superior.

Supóngase que $A\in\mathbf{E}$. Entonces $A\subseteq S$, luego $\Phi_U(A)\subseteq\Phi_U(S)\subseteq\Phi_V(S)=S$. Luego **E** está cerrado bajo Φ_U.

$S\in\mathbf{E}$, así $\Phi_U(S) \in\mathbf{E}$, luego $\Phi_U(S)\subseteq S$ Por el Teorema de Puntos Fijos 2.1 (2), Φ_U tiene un punto fijo máximo bajo S.

Nota. Por esta proposición, todo punto fijo maximal de Φ_V tiene un punto fijo máximo de Φ_U bajo sí. Supóngase que pudiera mostrarse que cualquier punto fijo maximal de Φ_V tiene un punto fijo *maximal* de Φ_U bajo sí. Entonces también podría mostrarse que el máximo punto fijo intrínseco de Φ_U es un subconjunto del máximo punto fijo intrínseco de Φ_V.

5. Aproximando puntos fijos

En el artículo de Kripke, y en muchos trabajos basados en él, la existencia de mínimos puntos fijos de un operador monótono se establece usando una secuencia transfinita de aproximaciones desde abajo. Hemos elegido no basar nuestro desarrollo en este método. No obstante, da una buena impresión por el carácter del punto fijo mínimo. Es una técnica limitada en cuanto habría puntos fijos no obtenibles por este método. Se aplica, sin embargo, al máximo punto fijo intrínseco, en una forma dual. En esta sección esbozamos el método, en parte para hacer contacto con otros trabajos, en parte porque mucha gente parece no estar familiarizada con la versión dual.

Para esta sección, suponemos que < **D**, ≤ > es un orden parcial que satisface las hipótesis del Teorema Principal 2.2, y asumimos que Φ es monótona.

Sea A un elemento correcto de **D**, esto es, $A \leq \Phi(A)$. Definimos una secuencia transfinita de elementos de **D**, indexados mediante ordinales, como sigue.

$A_0 = A$

$A_{\alpha+1} = \Phi(A_\alpha)$

$A_\lambda = \bigvee \{A_\alpha \mid \alpha < \lambda\}$ para todo ordinal límite λ

Esta es una secuencia *creciente* en el sentido de que $A_\alpha \leq A_{\alpha+1}$ para toda α. LKa demostración se da por inducción (transfinita) sobre α.

Caso 0. $A_0 \leq A_1$ dice $A \leq \Phi(A)$ que es verdadero porque A es correcto.

Caso sucesor. Supóngase que $A_\alpha \leq A_{\alpha+1}$. Por monotonía, $\Phi(A_\alpha) \leq \Phi(A_{\alpha+1})$, lo que dice que $\Phi(A_{\alpha+1}) \leq \Phi(A_{\alpha+2})$.

Caso límite. Supóngase que λ es un ordinal límite y, para cada $\alpha \leq \lambda$, $A_\alpha \leq A_{\alpha+1}$. Elíjase un $\alpha < \lambda$. Por definición de A_λ, $A_\alpha \leq A_\lambda$. Así, $\Phi(A_\alpha) \leq \Phi(A_\lambda)$ o $A_{\alpha+1} \leq A_{\lambda+1}$. Empleando la hipótesis inductiva, se sigue que $A_\alpha \leq A_{\lambda+1}$. Como α es arbitrario, $\bigvee \{A_\alpha \mid \alpha \leq \lambda\} \leq A_{\lambda+1}$, o $A_\lambda \leq A_{\lambda+1}$.

Nota. Otra forma de decir esto es que *todo* miembro de la secuencia es correcto.

Así la secuencia A_α se incrementa débilmente. Supóngase que escribimos < para decir que ≤ pero que no =. Ciertamente no podemos tener que la secuencia se incremente *fuertemente* ($A_\alpha < A_{\alpha+1}$) porque se seguiría que todos los miembros de la secuencia son distintos. Pero entonces habría tantos miembros como ordinales, mientras que todos son miembros del conjunto **D**, una clara imposibilidad. Luego, para algún α, debemos tener que $A_\alpha = \Phi(A_\alpha)$; algún miembro de la secuencia es un punto fijo.

Incidentalmente, una vez que un punto fijo aparece en la secuencia, la secuencia permanece constante desde ese punto.

Supóngase que F es un punto fijo de Φ que extiende A. Entonces $A_0 \leq F$, por supuesto.

Digamos que $A_\alpha \leq F$. Entonces $A_{\alpha+1}=\Phi(A_\alpha)\leq\Phi(F)=F$, por lo que $A_{\alpha+1}\leq F$.

Sea que $A_\alpha \leq F$ para toda $\alpha<\lambda$. Se sigue inmediatamente que $A_\lambda \leq F$.

Nuevamente por inducción, todo elemento de la secuencia es $\leq F$. Como F es arbitrario, se sigue que el punto fijo con que se encuentra eventualmente la secuencia es el *mínimo* punto fijo que extiende A.

Si comenzamos con el mínimo elemento de **D**, aun tenemos una secuencia de aproximaciones, desde abajo, al mínimo punto fijo de Φ.

Ahora esbozamos la versión dual de esta. Elíjase un elemento $B\in\mathbf{D}$ tal que $\Phi(B)\leq B$. Ahora defínase la secuencia como sigue.

$B_0=A$

$B_{\alpha+1}=\Phi(B_\alpha)$

$B_\lambda=\bigwedge\{B_\alpha \mid \alpha<\lambda\}$ para todo ordinal límite λ.

Esta vez puede mostrarse que la secuencia es *decreciente*, $B_{\alpha+1}\leq B_\alpha$, y que eventualmente establece el *máximo* punto fijo de Φ bajo B. Dejamos este argumento al lector.

Si comenzamos con $\bigwedge\mathbf{M}$, donde **M** es el conjunto de puntos fijos maximales de Φm la secuencia converge al máximo punto fijo *intrínseco*.

A veces se piensa en los términos en la secuencia A_α anterior como etapas en un proceso de "aprendizaje" transfinitamente largo, aunque no eterno. Luego, los términos en la secuencia B_α probablemente sean mejor comprendidos como etapas en un proceso de "olvido". Estando el mínimo punto fijo bajo el máximo punto fijo intrínseco, se sigue que en estos procesos no puede olvidarse más de lo que se aprende. Este parece ser un punto confortante donde concluir.

REFERENCIAS

[1] Kleene, S. C , *Introduction to Metamathematics,* Van Nostrand, New York, 1952.

[2] Knaster, B., "Un theoreme sur les functions d'ensembles", *Annals de la Societe Polonaise de Mathematiques,* vol. 6 (1928), pp. 133-134.

[3] Kripke, S., "Outline of a theory of truth", *The Journal of Philosophy,* vol. 72 (1975), pp. 690-716.

[4] Smullyan, R., *First-Order Logic,* Springer-Verlag, Berlin, 1968.

[5] Tarski, A., "A lattice-theoretical fixpoint theorem and its applications", *Pacific Journal of Mathematics,* vol. 5 (1955), pp. 285-309.

[6] van Frassen, B., "Singular terms, truth-value gaps, and free logic", *The Journal of Philosophy,* vol. 63 (1966), pp. 481-485.

Departmento de Matemáticas y Ciencias de la Computación
Herbert H. Lehman College
Bedford Park Boulevard West
Bronx, Nueva York 10468

Bibliografía

Akman, V. (2000): "Rethinking Context as a Social Construct", *Journal of Pragmatics,* 32.

Akman, V.; Bazzanella, C. (2003): "The complexity of context: guest editors' introduction". *Journal of Pragmatics,* 35.

Akman, V.; Surav, M. (1996): "Steps toward Formalizing Context". *AI Magazine* 17, 3.

Anderson, C. A. (1998): "Alonzo Church's Contributions To Philosophy And Intensional Logic", *The Bulletin of Symbolic Logic,* 4, 2.

Antonelli, G.A. (1996): "Book review: K. Simmons. *Universality and the Liar: An Essay on Truth and the Diagonal Argument.*" *Notre Dame Journal of Formal Logic,* 37, 1.

Asher, N.; Lascarides, A. (1995): "Lexical Disambiguation in a Discourse Context", *Journal of Semantics,* 12.

Austin, J. (1962): *How to do things with words.* Oxford University Press. Editado en español (1982) *Cómo hacer cosas con palabras,* Paidós, Barcelona.

Barwise, J. (ed.) (1977): *Handbook of Mathematical Logic*, North-Holland.

Barwise, J.; Etchemendy, J. (1987): *The Liar*, Oxford University Press.

Barwise, J.; Perry, J. (1983): *Situations and Attitudes*. Cambridge, MIT Press.

Belnap, N.; Perloff, M.; Xu, M. (2001): *Facing the Future: Agents and Choices in Our Indeterministic World.* Oxford University Press, Oxford.

Brézillon, P. (1999): "Context in Human-Machine Problem Solving: A Survey". *Knowledge Engineering Review,* 14.

Bouquet, P.; Ghidini, C.; Giunchiglia, F.; Blanzieri, E. (2003): "Theories and uses of context in knowledge representation and reasoning". *Journal of Pragmatics*, 35, 3.

Burge, T. (1979): "Semantical paradox", *Journal of Philosophy*, 76.

Burgess J. P. (1986): "The truth is never simple", *Journal of Symbolic Logic*, 51.

Buvac, S.; Kameyama, M. (1998): "Introduction. Toward a Unified Theory of Context". *Journal of Logic Language and Information,* Special issue on Context in Linguistics and AI.

Cappelen, H..; Lepore, E. (2003): "Context Shifting Arguments" *Philosophical Perspectives*, 17.

Cutland N. (1973): "Model theory on admissible sets", *Annals of Mathematical Logic*, 5.

Edmonds, B.; Akman, V. (2002): "Editorial: Context in Context". *Foundations of Science,* 7.

Ellis J. (2004): "Context, indexicals and the sorites", *Analysis,* 64, 4.

Fagin, R.; Halpern, J.; Moses, Y.; Vardi, M. (1996): *Reasoning about Knowledge*, MIT Press, Cambridge-Londres.

Fenstad, J. E. (2004): "Tarski, truth and natural languages". *Annals of Pure and Applied Logic*, 126.

Field, H. (1972): "Tarski's Theory of Truth", *Journal of Philosophy*, 69, 13.

Field, H. (1986): 'The Deflationary Conception of Truth", en MacDonald, G and Wright, C. (eds.) *Fact, Science and Morality*, Oxford, Blackwell.

Field, H. (2003): "The Semantic Paradoxes and the Paradoxes of Vagueness". En Beall, J. C.; Glanzberg, M. (eds.), *Liars and Heaps,* Oxford University Press.

Field, H. (2005): "Is the Liar Sentence Both True and False?" En Beall, J. C.; Armour-Garb, B. (eds.), *Deflationism and Paradox*, Oxford University Press.

Fitting, M. (1986): "Notes on the Mathematical Aspects of Kripke's Theory of Truth". *Notre Dame Journal of Formal Logic,* 27, 1.

Floyd, J; Kanamori, A. (2006): "How Gödel Transformed Set Theory", *Notices Of The AMS,* Abril.

van Fraassen, B. (1966): "Singular Terms, Truth-value Gaps, and Free Logic", *Journal of Philosophy*, LXIII, 17.

van Fraassen, B. (1968): "Presupposition, Implication, and Self-reference", *Journal of Philosophy,* LXV.

Friedman, H.; Sheard, M. (1987): "An Axiomatic Approach to Self-Referential Truth", *Annals of Pure and Applied Logic,* 33.

Gaifman H. (2006): "Naming and Diagonalization, from Cantor to Gödel to Kleene". *Logic Journal of the IGPL*, publicado el 11/08/06.

Gaifman H. (inédito): "The Easy Way to Gödel's Proof and Related Matters", consultado en http://www.columbia.edu/~hg17/ el 13/10/06.

Gauker, C. (2006): "Against Stepping Back: A Critique of Contextualist Approaches to the Semantic Paradoxes", *Journal of Philosophical Logic*, 35, 4.

Gauker, C. (inédito): "Kripke's Theory of Truth (for the strong Kleene scheme)", consultado en http://asweb.artsci.uc.edu/philosophy/gauker/papers.html el 13/10/06.

Givon, T. (1983): "Topic continuity in discourse: An introduction". En Givon, T. (ed.) *Topic Continuity in Discourse*. Amsterdam: John Benjamins.

Glanzberg, M. (2001a): "The liar in context", *Philosophical Studies,* 103.

Glanzberg, M. (2001b): "Supervenience and infinitary logic". *Nous*, 35.

Glanzberg, M. (2002): "Context and Discourse". *Mind & Language*, 17, 4.

Glanzberg, M. (2004a) "A Contextual-Hierarchical Approach to Truth and the Liar Paradox", *Journal of Philosophical Logic,* 33.

Glanzberg, M. (2004b) "Truth, reflection, and hierarchies". *Synthese,* 142.

Glanzberg, M. (2004c): "Against Truth-Value Gaps". En Beall, J.C. (ed.), *Liars and Heaps: New Essays on Paradox,* Oxford University Press.

Glanzberg, M. (2005a): "Presuppositions, Truth Values, and Expressing Propositions". En Preyer, G.; Peter, G. (eds.), *Contextualism in Philosophy: Knowledge, Meaning, and Truth*, Oxford University Press.

Glanzberg, M. (2005b): "Focus: A Case Study on the Semantics/Pragmatics Boundary". En Z. Szabo (ed.), *Semantics vs. Pragmatics*, Oxford University Press.

Glanzberg, M. (en prensa): "Context and Unrestricted Quantification". En Rayo, A.; Uzquiano, G. (eds.), *Unrestricted Quantification: New Essays*, Oxford University Press.

Goble, L. (2001) (ed.): *The Blackwell Guide to Philosophical Logic*, Blackwell Publishing.

Goddard, L.; Johnston, M. (1983): "The Nature of Reflexive Paradoxes: Part I", *Notre Dame Journal of Formal Logic,* 24, 4.

Gödel K. (1931): "Uber formal unentscheidbare Sätze der *Principia matemática* und verwandter Systeme I." *Monatshefte für Mathematik und Physik,* 38. Nos referimos a la traducción "On Formally Undecidable Propositions of *Principia Mathematica* and Related Systems I" en van Heijenoort, J. (1967).

Grice P. (1957): "Meaning", *The Philosophical Review,* 66.

Gross, S. (2001): *Essays on linguistic context-sensitivity and its philosophical significance*. Studies in Philosophy – Outstanding Dissertations. Routledge, New York.

Guha, R. V. (1991): *Contexts. A Formalization and Some Applications*. Stanford PhD thesis, consultado en http://www-formal.stanford.edu/guha/ el 13/10/06.

Gupta, A. (2001): "Truth". En Goble, L. (ed.) (2001).

Haack, S. (1978): *Philosophy of Logics*, Cambridge University Press.

Halbach, V. (2001); "Editorial introduction", *Studia Logica,* 68.

Heck, R. (inédito): "Self-Reference and the Languages of Arithmetic", consultado en http://frege.brown.edu/heck/pdf/unpublished/ el 13/10/06.

van Heijenoort, J. (1967): *From Frege to Gödel*, Harvard University Press.

Herzberger, H. (1970a): "Paradoxes of Grounding in Semantics", *Journal of Philosophy,* LXVII, 6.

Herzberger, H. (1970b): "Truth and Modality in Semantically Closed Languages", en Martin, R. (ed.) (1970).

Hinman, P. G. (1978): *Recursion-Theoretic Hierarchies*. Springer-Verlag, Berlin.

Hirst, G. (2000): "Context as a Spurious Concept", en *Proceedings of the Conference on Intelligent Processing and Computational Linguistics*, México.

Hofstädter, D. (1979): *Gödel, Escher, Bach: an eternal golden braid.* Vintage Books – A division of Random House, new Cork.

Humpries, J. (1979): "Gödel´s proof and the Liar Paradox". *Notre Dame Journal of Formal Logic,* XX, 3.

Kaplan, D. (1989): "Demonstratives: An essay on the semantics, logic, metaphysics, and epistemology of demonstratives and other indexicals". En Almog, J., Perry, J., Wettstein, H. (eds.), *Themes from Kaplan*. Oxford: Oxford University Press.

Karttunen, L. (1998): "Presuposición y contexto lingüístico". En *Textos clásicos de pragmática*, María Teresea Julio and Ricardo Muños (eds.), Arco Libros, Madrid.

Keisler, H. J.; Knight, J. F. (2004): "Barwise: Infinitary Logic and Admissible Sets", *The Bulletin of Symbolic Logic*, 10, 1.

Ketland, J. (1999): "Deflationism and Tarski's Paradise", *Mind,* 108, 429.

Kirkham, R. (1992): *Theories of truth,* MIT Press.

Koons, R.C. (1992): *Paradoxes of belief and strategic rationality*, Cambridge University Press, Cambridge.

Kripke, S. (1975): "Outline of a theory of truth", *Journal of Philosophy*, 72.

Lenat, D. (2000): *The Dimensions of Context Space*, Technical report, CYCorp, consultado en http://www.cyc.com/ el 13/10/06.

Lomuscio, A.; Sergot, M. (2003): "Interpreted Deontic Systems", *Studia Logica,* 75.

MacFarlane, J. (2003): "Future Contingents and Relative Truth". *The Philosophical Quarterly,* 53.

MacFarlane, J. (2005): "Making sense of relative truth". *Proceedings of the Aristotelian Society*, 105.

MacFarlane, J. (en prensa): "Semantic minimalism and nonindexical contextualism". en G. Preyer and G. Peter (eds.), *Content and Context: Essays on Semantics and Pragmatics.*

Makkai, M. (1977): "Admissible sets and infinitary logics", en Barwise, J. (1977).

Martin, R. (ed) (1970): *The Liar Paradox,* New Haven, Conn. Yale.

Martin, R.; Woodruff, P. (1975): "On representing 'True-in-L' in L", *Philosophia,* 5.

McCarthy, J. (2003): "A Logical AI Approach to Context", *Journal of Pragmatics,* 35.

McCarthy, J.; Buvac, S. (1997): "Formalizing Context (Expanded Notes)". Working Papers of the AAAI Fall Symposium on Context in Knowledge Representation and Natural Language.

McCarthy, J. (1993): "Notes on Formalizing Context". En *Proceedings of the Thirteenth International Joint Conference on Artificial Intelligence*, Chambery, Francia.

McGee, Vann (1991): *Truth, Vagueness and Paradox*, Hackett, indianápolis.

Moschovakis, Y. N. (1974): *Elementary Induction on Abstract Structures*. North-Holland, Amsterdam.

Murawski, R. (1998): "Undefinability of truth. The problem of the priority. Tarski vs. Gödel". *History and Philosophy of Logic,* 19.

Nagel, E.; Newman, J. (1979): *El teorema de Gödel*, Ed. Tecnos, Madrid.

Parsons, C. (1974): "The liar paradox", *Journal of Philosophical Logic,* 3, 4.

Patterson, D. (2002): "Theories of truth and convention T", *Philosophers' Imprint* 2, 5.

Peregrin, J. (1995): "Topic, focus and the logic of language". *Sprachtheoretische Grundlagen für die Computerlinguistik* - Proceedings of the Göttingen Focus Workshop, 17. DGfS, IBM Deutschland, Heidelberg.

Perry, J. (1998): "Indexicals, Contexts and Unarticulated Constituents", en Proceedings of the 1995 CSLI-Amsterdam Logic, Language and Computation Conference. Stanford: CSLI Publications.

Rayo, A. (2003): 'When Does 'Everything' Mean Everything?', *Analysis*, 63.

Richard, J. (1905): "Les Principes des Mathematiques et les problèmes des ensembles". Traducción al inglés en van Heijenoort, J. (1967).

Rooth, M. (1992): "A theory of focus interpretation". *Natural Language Semantics*, 1.

Russell, B. (1948): *The principles of mathematics.* George Allen and Unwin (reedición del libro de 1903).

Russell, B. (1908): "Mathematical logic as based on the theory of types", en van Heijenoort, J. (1967).

Russell, B.; Whitehead, A. N. (1950): *Principia Mathematica.* Cambridge University Press (reedición del libro de 1910).

Serény, G. (2003a): "Gödel, Tarski, Church and the Liar", The Bulletin of Symbolic Logic, 9, 1.

Serény, G. (2003b): "Boolos–style proofs of limitative theorems", arXiv:math.LO/0309345 v1.

Serény, G. (2006): "The diagonal lemma as the formalized Grelling paradox", arXiv:math.LO/0606425 v1.

Sheard, M. (1994): "A guide to truth predicates in the modern era", *Journal of Symbolic Logic* 59, 3.

Simmons, K. (1993): *Universality and the liar: an essay on truth and diagonal argument*, Cambridge University Press, Cambridge.

Skyrms, B. (1970a): "Notes on Quantification and Self-reference", en Martin, R. (ed.) (1970).

Skyrms, B. (1970b): "Return of the Liar: Three-Valued Logic and the Concept of Truth", *American Philosophical Quarterly,* VII, 2.

Smullyan, R. (1992): *Gödel´s Incompleteness Theorems*. Oxford University Press.

Smullyan, R. (2001): "Gödel´s Incompleteness Theorems". En Goble, L. (ed.) (2001).

Soames, S. (1999): *Understanding truth*. Oxford University Press.

Stalnaker, R. (1974): "Pragmatic presuppositions". En Stalnaker, R. (1999).

Stalnaker, R. (1978): "Assertion". En Stalnaker, R. (1999).

Stalnaker, R. (1998): "On the Representation of Context". *Journal of Logic Language and Information*, 7, 1.

Stalnaker, R. (1999): *Context and content*, Oxford University Press.

Stanley, J.; Szabo, Z. G. (2000): "On quantifier domain restriction". *Mind & Language*, 15.

Stanley, J. (2000): "Context and logical form", *Linguistics and Philosophy*, 23.

Stanley, J. (2003): "Context, interest relativity, and the sorites". *Analysis*, 63, 4.

Stanley, J. (2004): "On the linguistic basis for contextualism". *Philosophical Studies,* 119.

Strawson, P. (1950): "On Referring", *Mind*, LIX, 235.

Tarski, A. (1969): "The concept of truth in formalized languages" (Traducción del polaco y expansión del artículo de 1933), en *Logic, Semantics, Metamathematics*: papers from 1923 to 1938, Oxford, Clarendon Press.

Tarski, A. (1969): "The establishment of scientific semantics" (Traducción del artículo de 1936), en *Logic, Semantics, Metamathematics*: papers from 1923 to 1938, Oxford, Clarendon Press.

Tarski, A. (1944): "The Semantic Conception of Truth and the Foundations of Semantics", *Philosophy and Phenomenological Research,* 4.

Tennant, N. (2002): "Deflationism and the Gödel Phenomena", *Mind*, 111, 443.

Thomason, R. (2001): "Contextual Intensional Logic: Type-Theoretic and Dynamic Considerations", consultado en http://www.eecs.umich.edu/~rthomaso/documents/context/index.html el 23/10/06.

Thomson, J. F. (1962): "On some paradoxes". En Butler, R. J. (ed.): *Analytical Philosophy* (First Series), Blackwell, Londres.

Tucker, J. (1958): "Gödel and Epimenides", *Proceedings of the Aristotelian Society*, 58.

Tucker, J. (1962): "Constructivity and grammar", *Proceedings of the Aristotelian Society*, 62.

Ushenko, D. (1941): *The Problems of Logic*, London, Allen&Unwin.

Weisstein, E. W. (2006). "Zorn's Lemma." De *MathWorld*--A Wolfram Web Resource. http://mathworld.wolfram.com/ZornsLemma.html

Yanofsky, N. S. (2003): "A universal approach to self-referential paradoxes, incompleteness and fixed points". *The Bulletin of Symbolic Logic,* 9, 3.

Zalta, E. N. (2006): "Infinitary Logics", *Stanford Encyclopaedia of Philosophy,* consultado en http://www.plato.stanford.edu el 22/10/06.

Zermelo, E. (1908): "Investigations in the foundations of set theory I". En van Heijenoort, J. (1967).