Institut für Technische und Num. Mechanik
Profs. P. Eberhard, M. Hanss

28. August 2014

Bachelor-Prüfung in Technischer Mechanik II/III

Nachname, Vorname	
MUSTERLÖSUNG	
Matr.-Nummer	Fachrichtung
E-Mail-Adresse (Angabe freiwillig)	

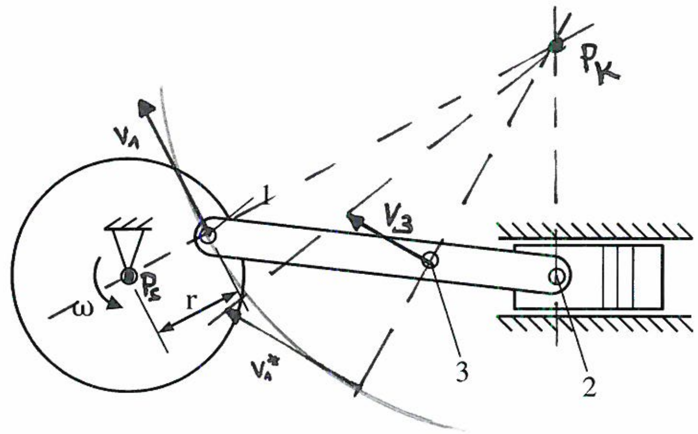
1. Die Prüfung umfasst 7 Aufgaben auf 7 Blättern.
2. Nur vorgelegte Fragen beantworten, keine Zwischenrechnungen eintragen.
3. Alle Ergebnisse sind grundsätzlich in den gegebenen Größen auszudrücken.
4. Die Blätter der Prüfung dürfen nicht getrennt werden.
5. Als Hilfsmittel sind ausschließlich 6 Seiten Formelsammlung (entspricht 3 Blättern DIN A4 doppelseitig) zugelassen. Elektronische Geräte sind ausdrücklich nicht zugelassen.
6. Bearbeitungszeit: 120 Minuten.
7. Unterschreiben Sie die Prüfung **erst** beim Eintragen Ihres Namens in die Sitzliste.

....
(Unterschrift)

Punkte	Korrektur
$\sum$	

Aufgabe 1 (6 Punkte)

Im skizzierten ebenen Mechanismus dreht sich eine Scheibe mit der Winkelgeschwindigkeit ω. Über eine Koppelstange, die im radialen Abstand r vom Mittelpunkt der Scheibe gelagert ist, wird der horizontal geführte Kolben angetrieben.



a) Zeichnen Sie den Geschwindigkeitsvektor $\mathbf{v}_1$ am Lager 1 der Koppelstange ein. Verwenden Sie als Skalierung die Länge 2 cm.

b) Konstruieren Sie die Momentanpole der Scheibe P_S und der Koppelstange P_K.

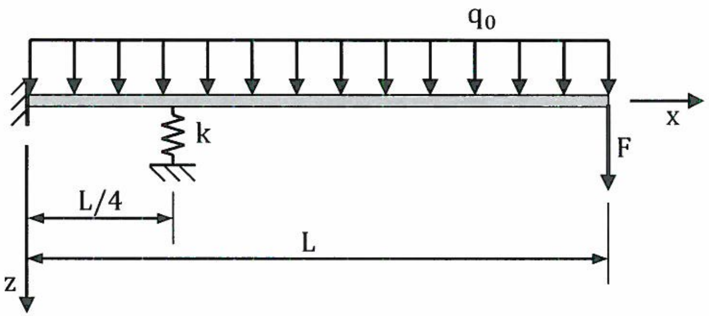
c) Zeichnen Sie den Geschwindigkeitsvektor $\mathbf{v}_3$ in korrekter Skalierung am Punkt 3 auf der Koppelstange ein.

d) Wo befindet sich der Momentanpol des Kolbens?

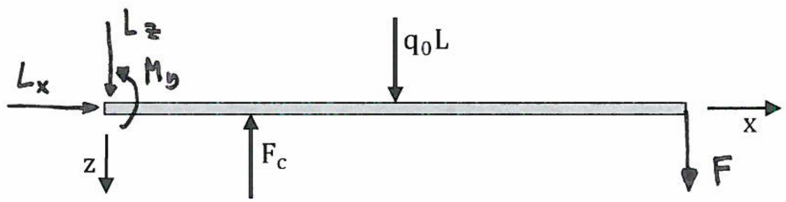
Im Unendlichen

Aufgabe 2 (15 Punkte)

Ein Balken (Biegesteifigkeit EI, Länge L) wird mit einer konstanten Streckenlast q_0 und einer Einzelkraft F am rechten Ende belastet. Er ist auf der linken Seite fest eingespannt und wird von einer Feder (Federsteifigkeit k) gestützt.



a) Ergänzen Sie die Freischnittskizze zur Ermittlung der Lagerkräfte.



b) Berechnen Sie die Lagerreaktionen. Nehmen Sie dabei F_c als gegeben an.

$L_x = 0$

$L_z = F_c - q_0 L - F$

$M_y = \left(F + \frac{q_0 L}{2} - \frac{F_c}{4}\right) L$

c) Bestimmen Sie den Querkraftverlauf und den Momentenverlauf.

$Q(x) = -q_0 x - F_c + q_0 L + F + F_c \{x - \frac{L}{4}\}^0$

$M(x) = -\left(F + \frac{q_0 L}{2} - \frac{F_c}{4}\right) L - \frac{q_0}{2} x^2 + (F + q_0 L - F_c) x$

$+ F_c \{x - \frac{L}{4}\}^1$

d) Geben Sie die Ableitung des Biegelinienverlaufs mit noch unbestimmter Integrationskonstante C_1 an.

$w'(x) = \frac{1}{EI} \Big(\left(F + \frac{q_0 L}{2} - \frac{F_c}{4}\right) L x + \frac{q_0}{6} x^3$

$+ \frac{1}{2} (F_c - F - q_0 L) x^2 - \frac{F_c}{2} \{x - \frac{L}{4}\}^2 \Big) + C_1$

e) Wie lauten die Randbedingungen, die sich aus der Lagerung ergeben?

$w(0) = 0$, $w'(0) = 0$

f) Bestimmen Sie die Integrationskonstante C_1.

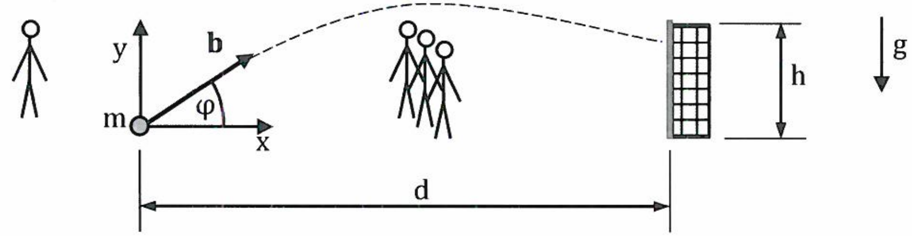
$C_1 = 0$

g) Für die Federkraft gelte das Kraftgesetz $F_c = k\,w(L/4)$. Die Streckenlast soll für diese Teilaufgabe entfernt werden ($q_0 = 0$). Bestimmen Sie die Durchbiegung des Balkens an der Stelle $x = L/4$.

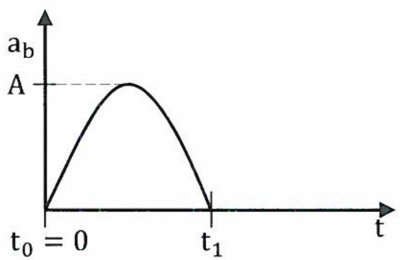
$w(L/4) = \frac{11 F L^3}{384 EI + 2 k L^3}$

Aufgabe 3 (12 Punkte)

Während eines Fußballspiels kommt es zu einer Freistoßsituation. Der Ball ruht im Abstand d vor dem Tor (Torhöhe h). Der Schütze versucht, den Ball über die Mauer hoch ins Tor zu schießen.



Der Ball wird als Massepunkt modelliert (Masse m) und der Luftwiderstand wird vernachlässigt. Durch den Schuss erfährt der Ball zu Beginn (bis zum Zeitpunkt t_1) folgende parabelförmige Beschleunigung a_b in Richtung $\mathbf{b}$.



a) Durch welche Gleichung wird a_b für $0 \leq t \leq t_1$ beschrieben?

☐ $a_b = \frac{4A}{t_1^2}t^2 - \frac{4A}{t_1}t$ ☒ $a_b = -\frac{4A}{t_1^2}t^2 + \frac{4A}{t_1}t$ ☐ $a_b = -\frac{4A}{t_1^2}t^2$

b) Welche Beschleunigungen wirken aufgrund des Schusses und der Erdanziehung in Richtung des eingezeichneten Koordinatensystems für $0 \leq t \leq t_1$?

$a_x(t \leq t_1) = \cos\varphi \left(-\frac{4A}{t_1^2}t^2 + \frac{4A}{t_1}t\right)$

$a_y(t \leq t_1) = \sin\varphi \left(-\frac{4A}{t_1^2}t^2 + \frac{4A}{t_1}t\right) - g$

c) Bestimmen Sie die Geschwindigkeit des Balles in x-Richtung.

$v_x(t \leq t_1) = \cos\varphi \left(\frac{-4A}{3t_1^2}t^3 + \frac{2A}{t_1}t^2\right)$

$v_x(t > t_1) = \cos\varphi \frac{2}{3} A t_1$

d) Bestimmen Sie die zurückgelegte Strecke des Balles in x-Richtung zur Zeit t.

$s_x(t \leq t_1) = \cos\varphi \left(-\frac{A}{3t_1^2}t^4 + \frac{2A}{3t_1}t^3\right)$

$s_x(t > t_1) = \cos\varphi \frac{1}{3} A t_1 (2t - t_1)$

e) Zu welchem Zeitpunkt t_2 befindet sich der Ball auf Höhe der Torauslinie ($s_x(t_2) = d$)?

$t_2 = \frac{3d}{2\cos\varphi A t_1} + \frac{t_1}{2}$

Nehmen Sie für die folgenden Teilaufgaben t_2 als gegeben an.

f) Auf welcher Höhe befindet sich der Ball zum Zeitpunkt t_2?

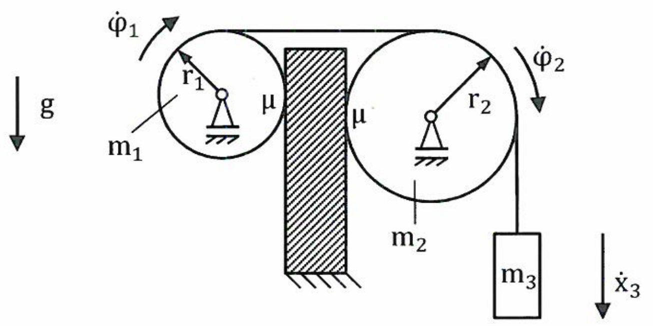
$s_y(t_2) = \sin\varphi \frac{1}{3} A t_1 (2t_2 - t_1) - \frac{1}{2} g t_2^2$

g) Der Spieler trifft die Querlatte. Unter welchem Winkel φ traf der Spieler den Ball?

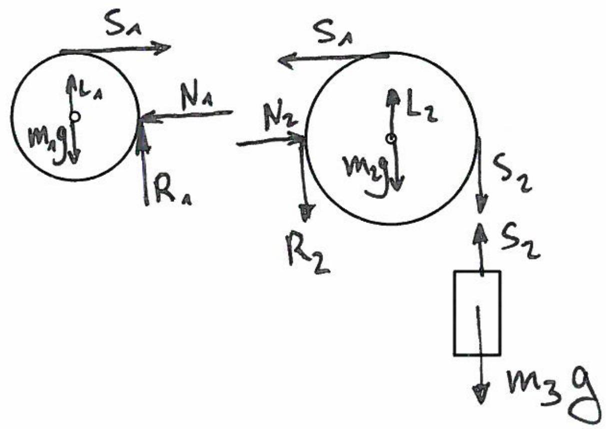
$\varphi = \arcsin\left(\frac{3\left(h + \frac{g t_2^2}{2}\right)}{A t_1 (2t_2 - t_1)}\right)$

Aufgabe 4 (16 Punkte)

Zwei homogene Vollzylinder (Massen m_1, m_2, Radien r_1, r_2) sind auf horizontal verschiebbaren Auflagern drehbar gelagert. Ein masseloses Seil ist auf dem linken Zylinder aufgewickelt und wird schlupffrei über den rechte Zylinder geführt. Am Ende des Seils ist die Masse m_3 befestigt. Zwischen den Zylindern befindet sich ein unbeweglicher Körper, an dem Gleitreibung auftritt (Gleitreibungskoeffizient μ).



a) Ergänzen Sie die Freischnittskizze.



b) Stellen Sie die Impuls- und Drallsätze für die beiden Zylinder sowie den Impulssatz in vertikaler Richtung für die Masse m_3 auf. Verwenden Sie die Koordinaten φ_1, φ_2 und x_3.

$$S_1 - N_1 = 0$$

$$L_1 + R_1 - m_1 g = 0$$

$$\frac{1}{2} m_1 r_1^2 \ddot{\varphi}_1 = (S_1 - R_1) r_1$$

$$-S_1 + N_2 = 0$$

$$L_2 - R_2 - m_2 g - S_2 = 0$$

$$\frac{1}{2} m_2 r_2^2 \ddot{\varphi}_2 = (S_2 - S_1 - R_2) r_2$$

$$m_3 \ddot{x}_3 = m_3 g - S_2$$

c) Wie lauten die kinematischen Zusammenhänge zwischen den Winkelgeschwindigkeiten $\dot{\varphi}_1$, $\dot{\varphi}_2$ und der vertikalen Geschwindigkeit $\dot{x}_3$?

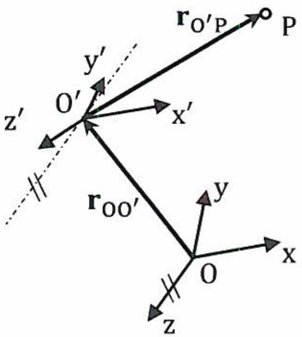
$\dot{\varphi}_1(\dot{x}_3) = \dfrac{\dot{x}_3}{r_1}$, $\dot{\varphi}_2(\dot{x}_3) = \dfrac{\dot{x}_3}{r_2}$

d) Wie groß ist die Beschleunigung $\ddot{x}_3$ der Masse m_3?

$$\ddot{x}_3 = \frac{m_3 g}{m_3 + \frac{m_2}{2} + m_1 \frac{1+\mu}{2(1-\mu)}}$$

Aufgabe 5 (9 Punkte)

Die Lage des Punktes P wird im Koordinatensystem K' durch den Vektor $\mathbf{r}_{O'P,K'} = [r_1 \quad r_2 \quad r_3]^T$ beschrieben. Der Ursprung O' von K' bewegt sich mit der konstanten Geschwindigkeit v in z-Richtung. Zu Beginn ist seine Lage $\mathbf{r}_{OO',K}(t=0) = [x_0 \quad y_0 \quad z_0]^T$. Außerdem ist K' gegenüber K um den Winkel ωt, ($\omega = \text{konst.}$) um die x-Achse gedreht.



a) Wie lautet die Drehmatrix, die die Verdrehung von K' gegenüber K beschreibt?

$$\mathbf{C}_{KK'} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\omega t) & -\sin(\omega t) \\ 0 & \sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{bmatrix}$$

b) Wie lautet der Lagevektor ~~zum~~ vom Ursprung 0 zu O', dargestellt in K?

$$\mathbf{r}_{OO',K} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 + vt \end{bmatrix}$$

Für die folgenden Aufgabenteile gelte $r_1 = r\sin(\frac{2\pi}{T}t)$, $r_2 = r$, $r_3 = v_3 t$, wobei r und v_3 konstant sind.

c) Welche Relativgeschwindigkeit hat der Punkt P gegenüber O', dargestellt in K'?

$$\mathbf{v}_{O'P,K'} = \begin{bmatrix} \frac{2\pi r}{T}\cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right) \\ 0 \\ v_3 \end{bmatrix}$$

d) Bestimmen Sie die Absolutgeschwindigkeit von P gegenüber 0, dargestellt in K.

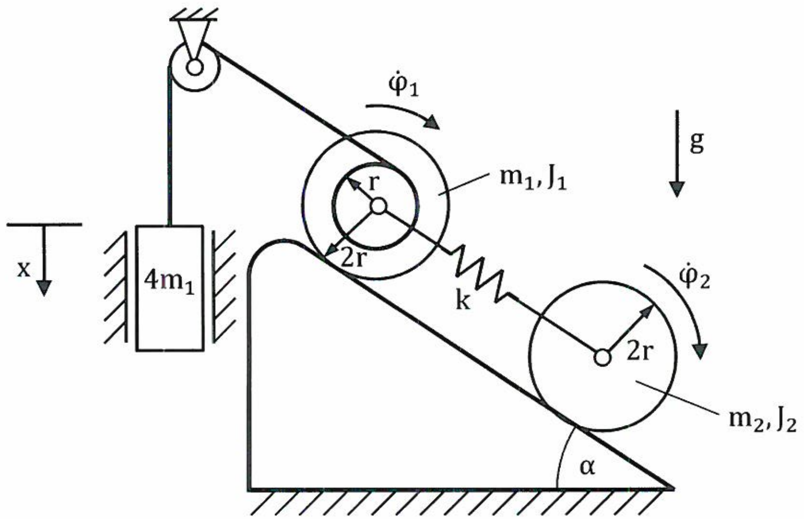
$$\mathbf{v}_{OP,K} = \begin{bmatrix} \frac{2\pi r}{T}\cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right) \\ -\cos(\omega t)\omega v_3 t - \sin(\omega t)(v_3 + \omega r) \\ -\sin(\omega t)\omega v_3 t + \cos(\omega t)(v_3 + \omega r) + v \end{bmatrix}$$

e) Bestimmen Sie die Absolutbeschleunigung von P gegenüber 0, dargestellt inK.

$$\mathbf{a}_{OP,K} = \begin{bmatrix} -\frac{4\pi^2 r}{T^2}\sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right) \\ \sin(\omega t)\omega^2 v_3 t - \cos(\omega t)(2\omega v_3 + \omega^2 r) \\ -\cos(\omega t)\omega^2 v_3 t - \sin(\omega t)(2\omega v_3 + \omega^2 r) \end{bmatrix}$$

Aufgabe 6 (10 Punkte)

Eine Stufenrolle (Masse m_1, Trägheitsmoment bzgl. Schwerpunkt J_1) rollt ohne zu gleiten auf einer schiefen Ebene (Winkel α). Eine zweite Rolle (m_2, J_2) ist mit der Stufenrolle über eine Feder (Federsteifigkeit k) verbunden und rollt ebenfalls ohne zu gleiten. Beide Rollen haben denselben Außendurchmesser $2r$. Der innere Durchmesser der Stufenrolle ist r. Eine Blockmasse ($4m_1$) ist über ein masseloses Seil um eine masselose Umlenkrolle mit der Stufenrolle verbunden. Das System besitzt zwei Freiheitsgrade und als verallgemeinerte Koordinaten werden die Winkel φ_1 und φ_2 gewählt. Ist die Blockmasse um $x = 0$ ausgelenkt, so ist $\varphi_1 = 0$. Die Feder ist entspannt, wenn $\varphi_1 = \varphi_2$ ist.



a) Geben Sie die kinetische Energie des Systems an.

$$T = 2 m_1 \dot{x}^2 + 2 m_1 \dot\varphi_1^2 r^2 + \frac{1}{2} J_1 \dot\varphi_1^2 + 2 m_2 \dot\varphi_2^2 r^2 + \frac{1}{2} J_2 \dot\varphi_2^2$$

b) Geben Sie die potentielle Energie des Systems an.

$$V = -4 m_1 g x - \sin\alpha\, m_1 g \varphi_1 2r - \sin\alpha\, m_2 g \varphi_2 2r + 2 k r^2 (\varphi_1 - \varphi_2)^2$$

c) Geben Sie den Zusammenhang zwischen der Geschwindigkeit $\dot{x}$ der Blockmasse und der Winkelgeschwindigkeit $\dot\varphi_1$ der Stufenrolle an.

$$\dot{x}(\dot\varphi_1) = -3 \dot\varphi_1 r$$

Die Lagrange Funktion ist als $L^* = T - V$ definiert. Für das gegebene System nimmt Sie folgende Form an.

$$L^* = a\dot\varphi_1^2 + b\dot\varphi_2^2 - c\varphi_1 + d\varphi_2 + e(\varphi_1 - \varphi_2)^2$$

Nehmen Sie zur Bestimmung der Bewegungsgleichungen die Konstanten a, b, c, d und e als gegeben an.

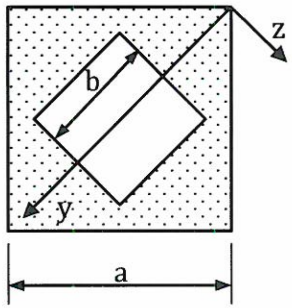
d) Wie lauten die Bewegungsgleichungen des Systems?

$$2 \ddot\varphi_1 a + c - 2(\varphi_1 - \varphi_2) e = 0$$

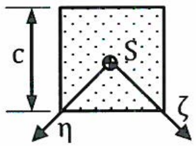
$$2 \ddot\varphi_2 b - d + 2(\varphi_1 - \varphi_2) e = 0$$

Aufgabe 7 (6 Punkte)

Das Flächenträgheitsmoment einer gelochten Quadratscheibe (Kantenlänge a) mit quadratischem Loch (Kantenlänge b) soll untersucht werden.



Zunächst wird ein ungelochtes Quadrat der Kantenlänge c betrachtet.



a) Geben Sie die Flächenträgheitsmomente I_η und I_ζ des Quadrats an.

$I_\eta = I_\zeta = \frac{c^4}{12}$

b) Bestimmen Sie die Flächenträgheitsmomente I_y und I_z der gelochten Quadratscheibe

$I_y = \frac{a^4 - b^4}{12}$, $I_z = \frac{a^4-b^4}{12} + \frac{a^2}{2}(a^2-b^2)$

c) Die Flächenträgheitsmomente I_y und I_z sollen im Verhältnis 1:6 stehen. Wie groß muss dafür die Kantenlänge des Loches sein?

$b(a) = \frac{\sqrt{5}}{5} a$

ENDE